Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Docente: Fred Torres Cruz
Autor : Lenin Smith Apaza Cuentas
Semestre : 5to - A
Tema : Optimización No Lineal

Ejercicios

1. Verifica si los puntos son minimizadores globales o locales para $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Derivamos la función

La función dada es:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Determinamos si es un mínimo o máximo

La segunda derivada es:

$$f''(x) = 2$$

Como $f''(x) > 0$, el punto crítico $x = 2$ es un **mínimo local**. Evaluamos la función en este punto:

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$$

Evaluamos en otros puntos

Evaluamos en $x = 0$:

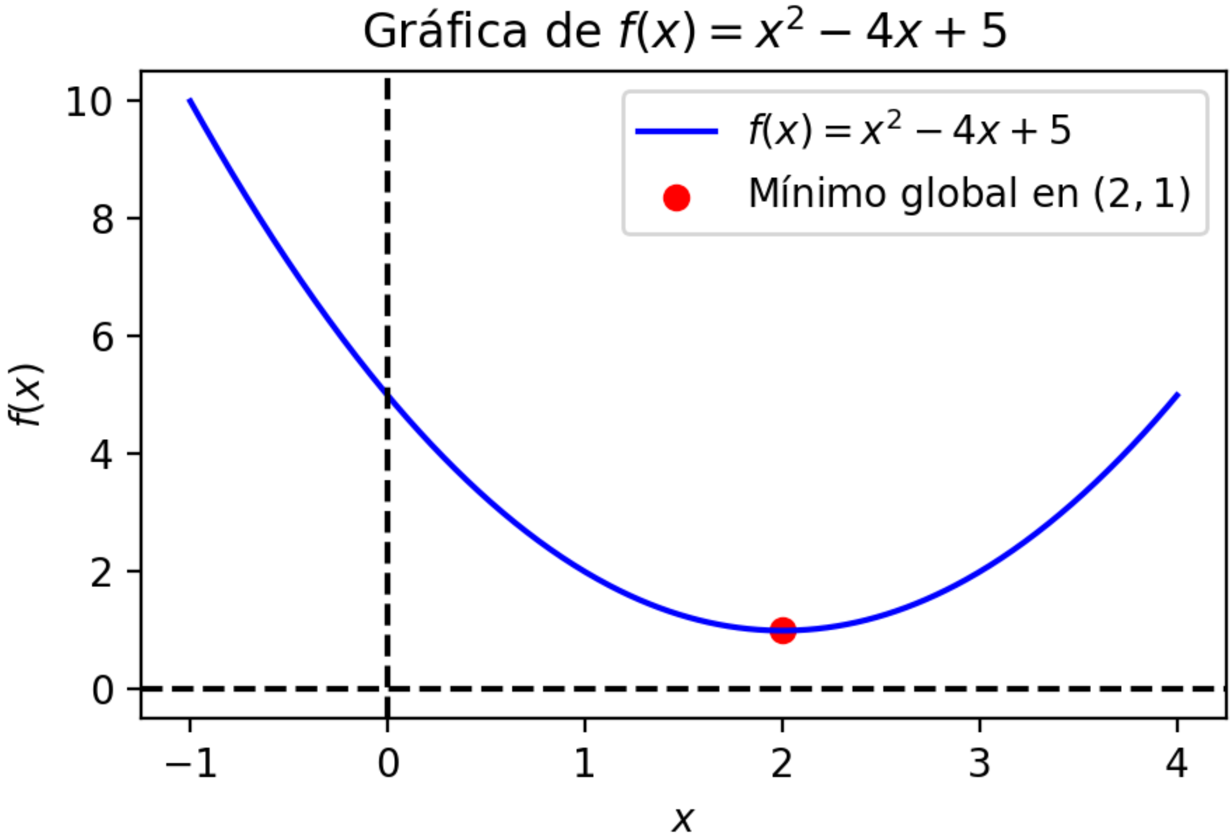
$$f(0) = 0^2 - 4(0) + 5 = 5$$

Como $f(2) < f(0)$, el punto $x = 2$ es también el **mínimo global**.

Respuesta

- $x = 2$: Mínimo local y global, con $f(2) = 1$.
- $x = 0$: No es un mínimo, ya que $f(0) = 5$.

Gráfico:



2. Dibujar la función $f(x) = |x|$ y determinar si tiene un mínimo global o local en $x = 0$

Definimos la función

La función $f(x) = |x|$ está definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Identificamos el mínimo

En el punto $x = 0$, la función alcanza su valor más bajo:

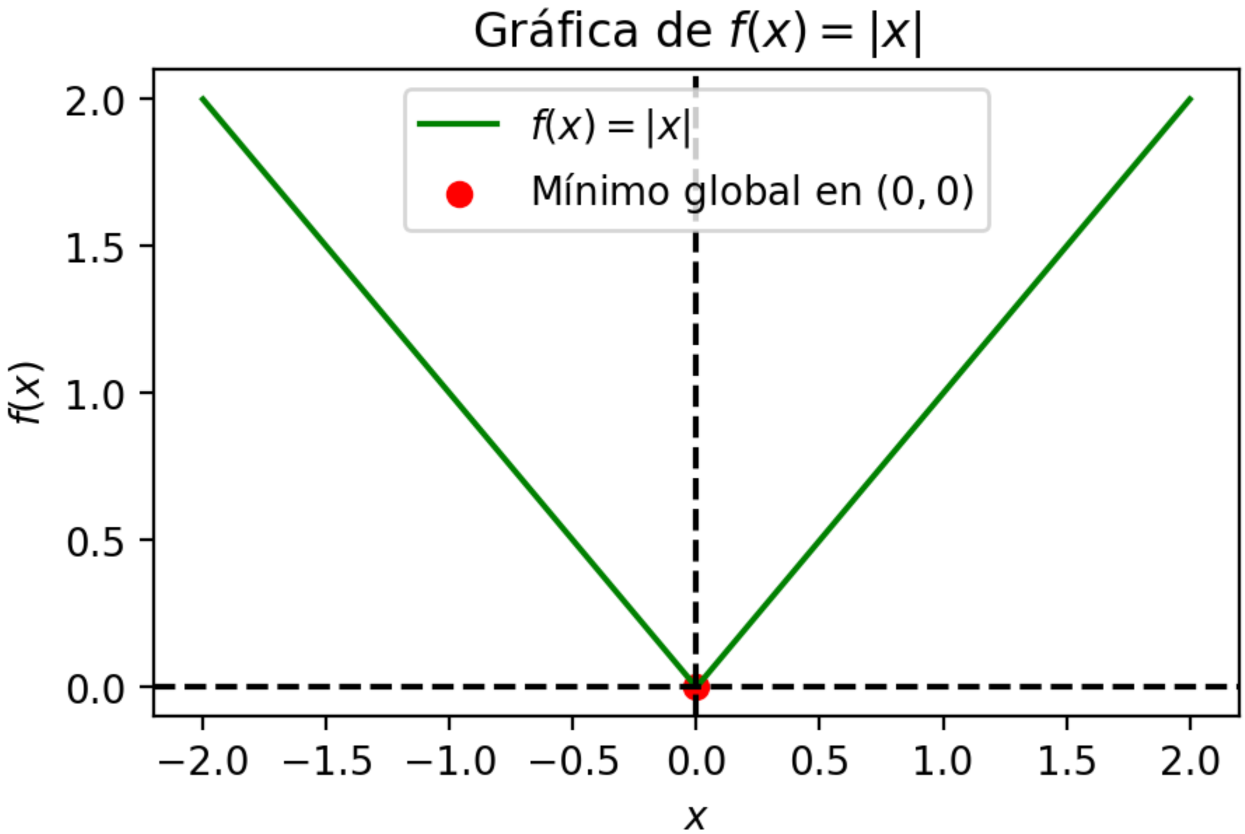
$$f(0) = |0| = 0$$

Por lo tanto, $x = 0$ es un **mínimo global**, ya que no existe ningún otro punto donde $f(x) < 0$.

Respuesta

El punto $x = 0$ es un mínimo global.

Gráfico:



3. Utilizando el Teorema de Weierstrass, explica por qué $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$ tiene un mínimo global

Aplicamos el Teorema de Weierstrass

El Teorema de Weierstrass establece que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un mínimo y un máximo global. Como $f(x) = \sin(x)$ es continua en $[0, \pi]$, cumple con este teorema.

Encontramos puntos críticos

La derivada es:

$$f'(x) = \cos(x)$$

Igualamos a cero:

$$\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

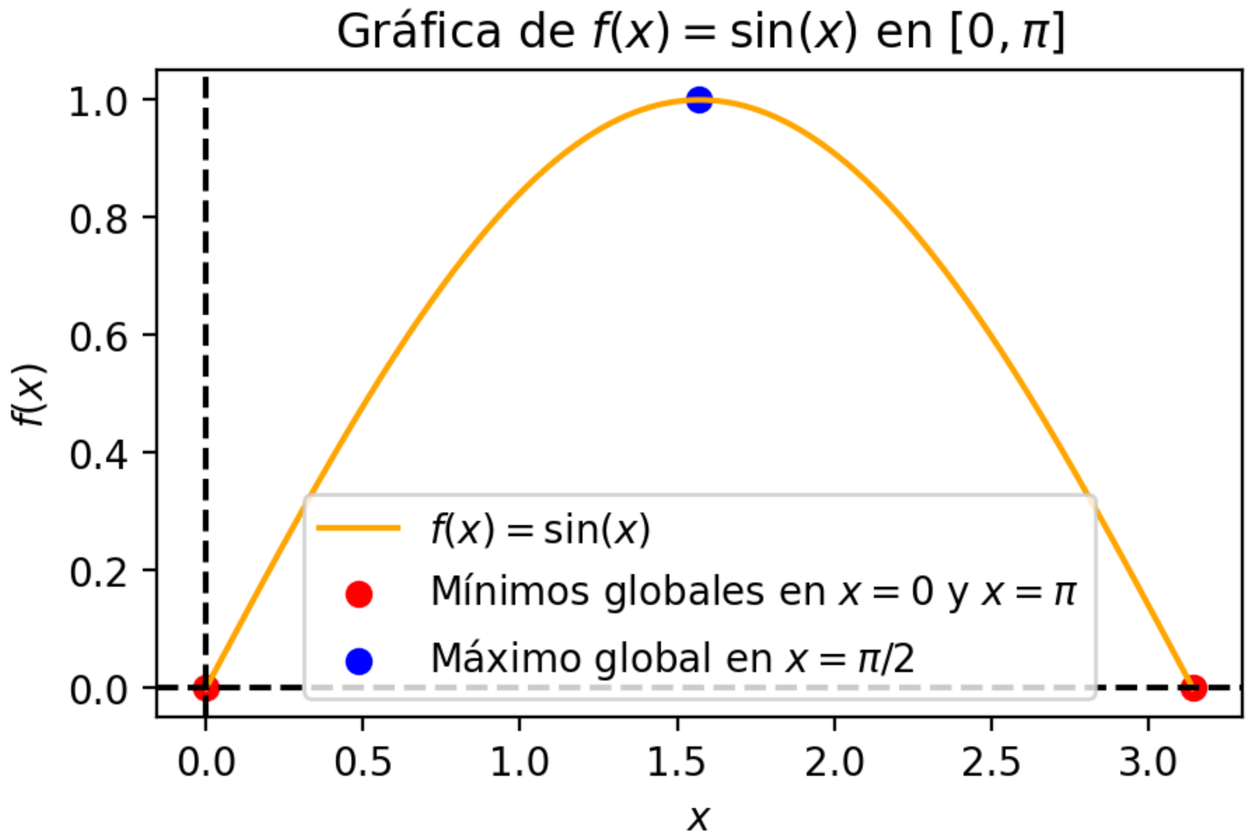
Evaluamos la función en los extremos y en el punto crítico:

$$f(0) = \sin(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f(\pi) = \sin(\pi) = 0$$

Respuesta

El mínimo global de $f(x)$ ocurre en $x = 0$ y $x = \pi$, con valor $f(x) = 0$.

Gráfico:



4. Considera $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$. ¿Dónde se encuentra el mínimo global?

Analizamos la función

La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ mide la distancia al origen al cuadrado. El dominio es el círculo de radio 1 centrado en el origen:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Encontramos el mínimo

En el punto $(x, y) = (0, 0)$:

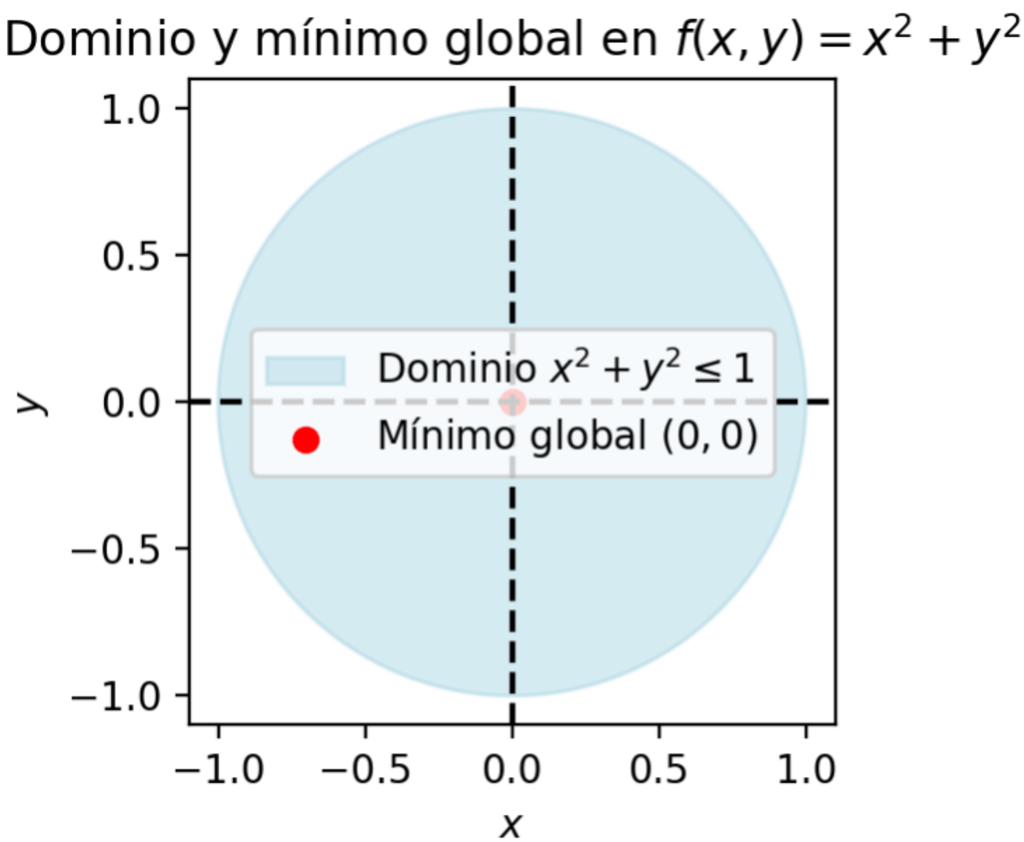
$$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$$

En cualquier otro punto del dominio, $f(x, y) > 0$. Por lo tanto, el mínimo global ocurre en $(0, 0)$.

Respuesta

El mínimo global de $f(x, y)$ ocurre en $(0, 0)$ con valor $f(0, 0) = 0$.

Gráfico:



5. Diseña un ejemplo donde un mínimo global no sea único

Ejemplo 1: Función en un círculo

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ con la restricción $x^2 + y^2 = 1$. En este caso:

$$f(x, y) = 1 \quad \text{para todos los puntos del círculo.}$$

Todos los puntos en el borde del círculo son mínimos globales.

Ejemplo 2: Función constante

Sea $f(x) = 0$ para $x \in [-1, 1]$. En este caso:

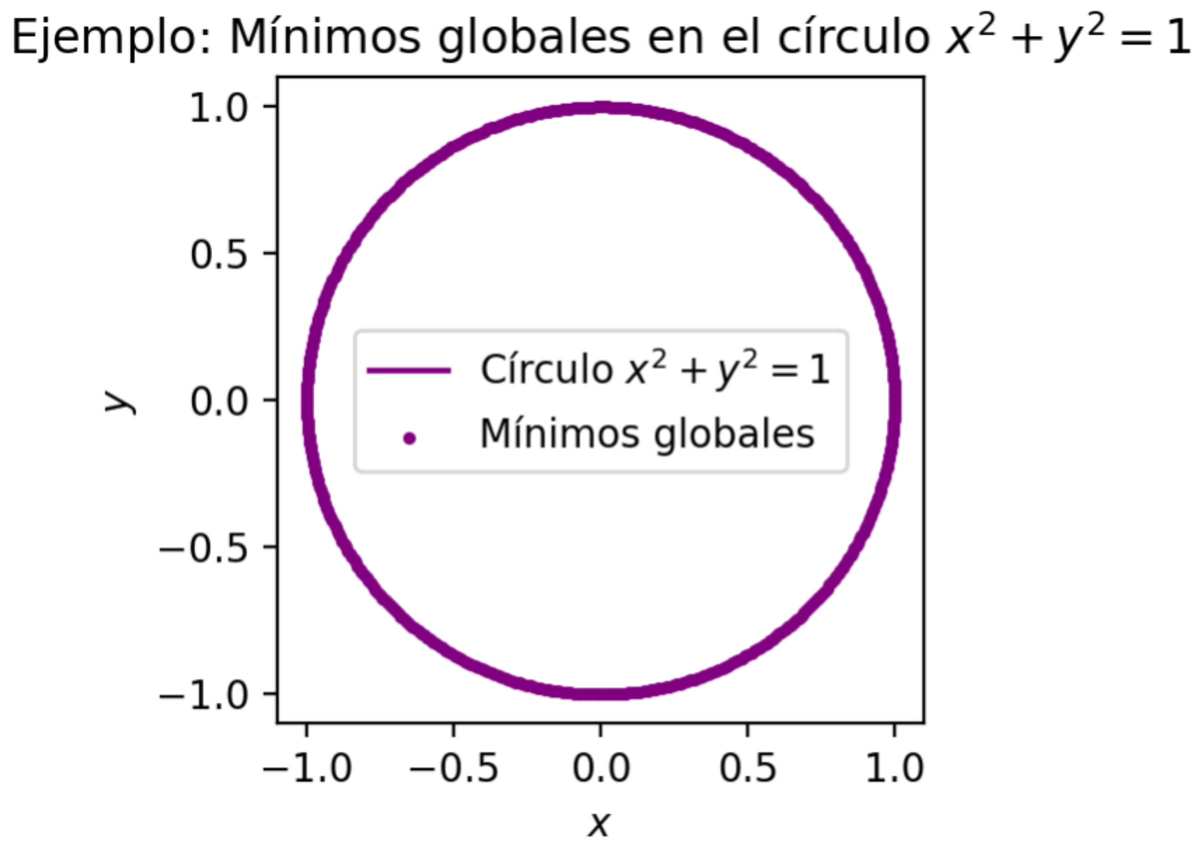
$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Todos los puntos en $[-1, 1]$ son mínimos globales.

Respuesta

En ambos ejemplos, el mínimo global no es único, ya que ocurre en múltiples puntos.

Gráfico:



QR - GitHub:

Enlace Streamlit:

https://programastream-wgpb3jjtvab6297tefndok.streamlit.app/