Resolución de Actividad: Optimización no lineal

LENIN SMITH APAZA CUENTAS

Ejercicio 1

Demuestre que la función $f(x) = 3x + 2$ es convexa en $\mathbb{R}$.

Solución:

1. La convexidad de una función puede demostrarse verificando que su segunda derivada es mayor o igual a cero.

2. Derivemos $f(x)$:
$$f'(x) = 3, \quad f''(x) = 0$$

3. Como $f''(x) \geq 0$ en $\mathbb{R}$, la función $f(x) = 3x + 2$ es convexa en todo su dominio.

Ejercicio 2

Verifique si la función $f(x) = x^3$ es convexa, cóncava o ninguna de las dos en el intervalo $[0, \infty)$.

Solución:

1. Derivemos $f(x)$:
$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

2. Analizamos el signo de $f''(x)$ en $[0, \infty)$:

   - Para $x > 0$, $f''(x) > 0$, lo que indica que $f(x)$ es **convexa** en $(0, \infty)$.
   - Para $x = 0$, $f''(x) = 0$, lo que no determina ni convexidad ni concavidad.

Conclusión: $f(x) = x^3$ es convexa en $(0, \infty)$ y no es ni convexa ni cóncava en $x = 0$.

Ejercicio 3

Sea $f(x) = e^{2x}$. Demuestre que $f(x)$ es convexa en $\mathbb{R}$ utilizando el criterio de la segunda derivada.

Solución:

1. Derivemos $f(x)$:

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad f''(x) = 4e^{2x}$$

2. Analizamos el signo de $f''(x)$:

$$e^{2x} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \quad \text{por lo tanto } f''(x) > 0$$

Conclusión: La función $f(x) = e^{2x}$ es convexa en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4

Para $f(x) = \ln(x)$ definida en $(0, \infty)$:

a) Determine si es convexa o cóncava.

b) Justifique su respuesta utilizando las propiedades de la segunda derivada.

Solución:

1. Derivemos $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2. Analizamos el signo de $f''(x)$:

$$f''(x) < 0 \quad \text{para } x > 0$$

3. Esto indica que $f(x)$ es **cóncava** en $(0, \infty)$.

Conclusión: La función $f(x) = \ln(x)$ es cóncava en su dominio.

Ejercicio 5

Para $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$:

a) Encuentre los intervalos en los que $f(x)$ es convexa y los intervalos en los que es cóncava.

b) Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución:

1. Derivemos $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x, \quad f''(x) = 12x^2 - 4$$

2. Resolver $f''(x) = 0$:

$$12x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Analizamos el signo de $f''(x)$:
   - Para $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $f''(x) > 0$ (convexa).
   - Para $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $f''(x) < 0$ (cóncava).
   - Para $x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$, $f''(x) > 0$ (convexa).
4. Los puntos de inflexión son:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{donde } f''(x) \text{ cambia de signo.}$$

Conclusión:

- Convexa en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$.
- Cóncava en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.
- Puntos de inflexión en $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.