

**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
**ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

# **Bakalářská práce**

**BRNO 2017**

**LENKA HELDOVÁ**



**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

---



# **Název práce na titulní list**

Bakalářská práce

**Lenka Heldová**

**Vedoucí práce: Plné jméno včetně titulů      Brno 2017**



# Bibliographic Entry

<b>Author:</b>	Lenka Heldová Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
<b>Title of Thesis:</b>	Title of Thesis
<b>Degree Programme:</b>	Degree programme
<b>Field of Study:</b>	Field of Study
<b>Supervisor:</b>	Plné jméno včetně titulů
<b>Academic Year:</b>	2016/2017
<b>Number of Pages:</b>	?? + ??
<b>Keywords:</b>	Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword; Keyword

# **Abstrakt**

V této bakalářské/diplomové/rigorózní práci se věnujeme ...

# **Abstract**

In this thesis we study ...

**Místo tohoto listu vložte kopii oficiálního (podepsaného) zadání práce.**

# Poděkování

Na tomto místě bych chtěl(-a) poděkovat ...

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno xx. měsíce 20xx

.....  
Lenka Heldová

# Pod'akovanie

Na tomto m'ist'ě bych cht'ěl(-a) poděkovat ...

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno xx. měsíce 20xx

.....  
Lenka Heldová



# Obsah

<b>Úvod</b> .....	<b>ix</b>
<b>Kapitola 1. Perfcake</b> .....	<b>1</b>
1.1 O nástroji .....	1
1.2 Použitie .....	2
1.3 Výstup .....	3
1.3.1 Dáta .....	3
1.3.2 Grafy .....	5
<b>Kapitola 2. Matematická teória</b> .....	<b>6</b>
2.1 Regresná analýza .....	6
2.2 Jadrové odhady .....	7
2.2.1 Jadrová funkcia .....	7
2.2.2 Šírka vyhladzovacieho okna .....	8
2.2.3 Vhodný výber vyhladzovacieho parametra .....	8
2.2.4 Typy jadrových odhadov .....	10
2.3 Miera polohy a miera variability .....	11
2.3.1 Aritmetický priemer .....	11
2.3.2 Rozptyl a smerodajná odchýlka .....	11
<b>Kapitola 3. Analýza dát</b> .....	<b>13</b>
<b>Kapitola 4. Vyhladenie dát</b> .....	<b>15</b>
<b>Závěr</b> .....	<b>17</b>
<b>Příloha</b> .....	<b>20</b>
<b>Seznam použité literatury</b> .....	<b>23</b>

# Úvod

Test interpunkce:

Žlutoučký kůňúpěl dábelské ódy  
ěščřžýáíéľňďůů

Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky.

Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetur lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetur eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus

felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetur varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetur non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem

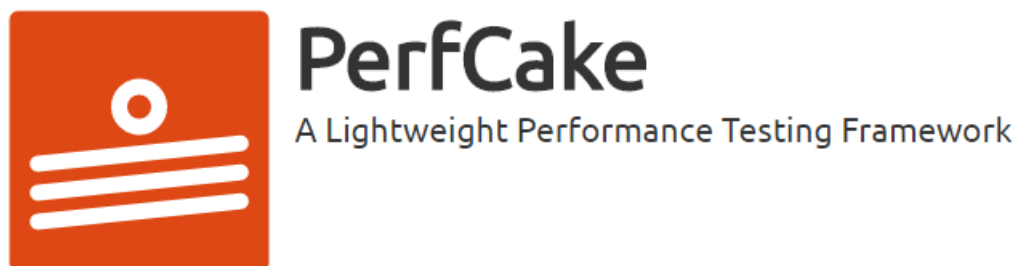
ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

# Kapitola 1

## Perfcake

Táto kapitola sa venuje nástroju na testovanie výkonu Perfcake, jeho použitiu a typu dát, ktoré generuje.



Obr. 1.1: Perfcake

### 1.1 O nástroji

Perfcake je open-source framework vyvíjaný spoločnosťou Red Hat. Ako sa píše na oficiálnej stránke tohto nástroja, je to generátor zaťaženia s cieľom byť minimalistický a ľahko ovládateľný, poskytujúci stabilné výsledky, majúci minimálny vplyv na testovaný systém, byť nezávislý na platforme, umožňujúci vysokú priepustnosť a používajúci komponentový dizajn.

Perfcake vie vytvoriť niekoľko možností zaťaženia, môže:

- vytvoriť prednastavený počet správ,
- poslať toľko správ koľko je testovaný softvér schopný za určitú časovú jednotku spracovať,
- sa opatrne pokúsiť o maximálny možný výkon testovaného softvéru.

Užívateľ má niekoľko možností reportovania výsledkov, ako napríklad výpis na konzolu, súbor logov alebo tiež CSV formát. Nástroj tiež poskytuje viac možností výsledkov,

vrátane priemernej priepustnosti alebo veľkosti spotrebovanej pamäte cieľovej JVM (Java virtual machine), s možnosťou regresnej analýzy za účelom odhalenia úniku pamäte.

Jeden z problémov podobných testovacích nástrojov je prípad, kedy testovaný softvér zlyhá a vzápätí odošle chybovú správu. Pre tento prípad sú v nástroji Perfcake zabudované validátory, ktoré dokážu takúto správu rozpoznať a nezaviesť tým chybové správy do výsledku výkonu softvéru. Podobné softvéry, ktoré takéto validácie neprevádzajú potom vytvárajú veľmi skreslený výsledok.

## 1.2 Použitie

Pre spustenie nástroja Perfcake je potrebné vytvoriť XML (eXtensible Markup Language) súbory, takzvané scenáre (scenarios). V týchto súboroch sú definované testovacie bloky, ktoré obsahujú cieľový softvér, typ zaťaženia, typ výstupu, typ protokolu, dobu trvania. . .

Validátory sa konfigurujú spolu s podobou správ, ktoré má nástroj odosielať na cieľový softvér. Takáto validácia sa rovnako ako scenáre, píše vo formáte XML.

```
1 <?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
2 <scenario xmlns="urn:perfcake:scenario:5.0">
3   <run type="${perfcake.run.type:time}"
4     value="${perfcake.run.duration:30000}" />
5   <generator class="DefaultMessageGenerator"
6     threads="${perfcake.thread.count:100}" />
7   <sender class="HttpSender">
8     <target>http://${server.host}/post</target>
9     <property name="method" value="POST" />
10  </sender>
11  <reporting>
12    <reporter class="IterationsPerSecondReporter">
13      <destination class="ConsoleDestination">
14        <period type="time" value="1000" />
15      </destination>
16    </reporter>
17  </reporting>
18  <messages>
19    <message uri="plain.txt" />
20  </messages>
21 </scenario>
```

Obr. 1.2: Scenár

Pre jednoduchú ukážku si uvedieme príklad. Máme vyvinutý softvér, ktorý asynchrónne spracováva správy prichádzajúce pomocou POST metódy a HTTP protokolu. Následne tieto správy spracúva (validuje, vytvára záznamy do databázy, generuje reporty, ...) a po úspešnom spracovaní pošle potvrdzujúcu správu späť. Na obrázku 1.2 sa nachádza scenár pre jednoduchý testovací blok, ktorý by sme mohli na takýto nami vytvorený softvér použiť. Zo scenára je možné vidieť, že tento test bude bežať 3000 ms = 3 sekundy, generuje správy použitím 100 vlákien, ktoré posielajú pomocou HTTP protokolu a metódy POST. Text správy je špecifikovaný v súbore "plain.txt" a výsledky sú zaznamenávané na konzolu,

každú 1 sekundu. Ako reporter je použitý “IterationsPerSecondReporter” a teda sa každú sekundu zapíše, koľko správ bolo softvérom spracovaných. Veľmi podobným scenárom by sme mohli testovať, koľko softvér používa pamäte, stačilo by zmeniť atribút reporter na “MemoryUsageReporter”. Týmto spôsobom sa veľmi ľahko odhaľujú úniky pamäte. Scenáre sa púšťajú pomocou nástroja Maven alebo pomocou shell skriptu.

## 1.3 Výstup

Ako bolo uvedené v prvej podkapitole, Perfcake má viac možností východzích súborov. Okrem číselných výstupov má užívateľ tiež možnosť vykreslenia grafu.

### 1.3.1 Dáta

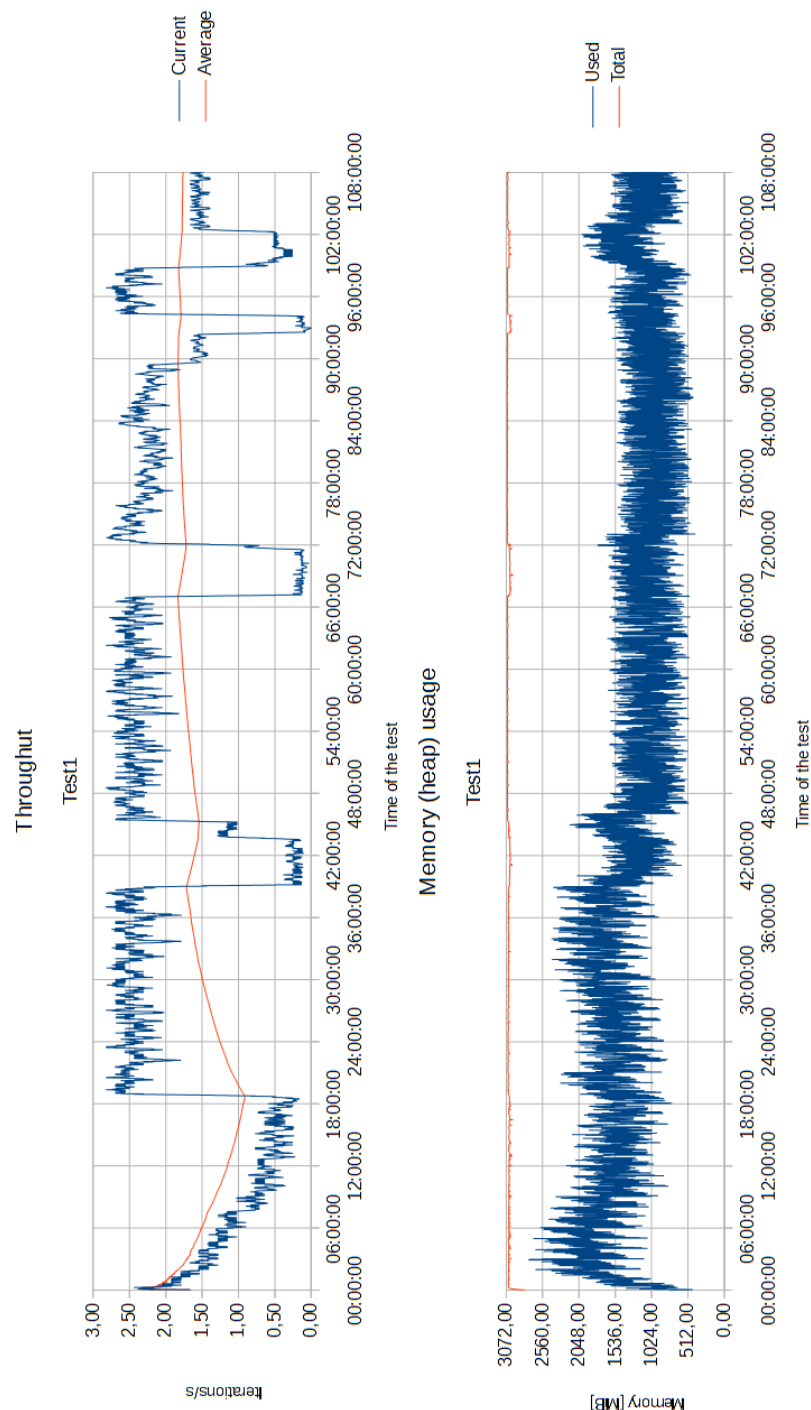
Pri vytváraní algoritmu na optimalizáciu dát pre potreby vykresľovania do grafov, bude používaný formát súboru CSV.

<i>Throughput</i>			<i>Memory</i>		
Time	Current	Average	Time	Used	Total
00:01:00	1,67	1,67	00:01:00	777,30	2817,06
00:02:00	1,67	1,67	00:02:00	528,81	2835,94
00:03:00	2,22	2,22	00:03:00	450,90	2901,19
00:04:00	2,08	2,08	00:04:00	585,94	2911,63
00:05:00	2,33	2,33	00:05:00	979,96	2953,00
00:06:00	2,22	2,22	00:06:00	855,63	2960,25
00:07:00	2,38	2,38	00:07:00	1193,20	2992,13
00:08:00	2,29	2,29	00:08:00	1175,80	3001,75
00:09:00	2,22	2,22	00:09:00	1197,66	3009,88
00:10:00	2,17	2,17	00:10:00	831,64	3013,38
00:11:00	2,27	2,27	00:11:00	1380,88	3019,63
00:12:00	2,22	2,22	00:12:00	815,44	3031,56
00:13:00	2,18	2,18	00:13:00	950,54	3035,38
00:14:00	2,26	2,26	00:14:00	726,44	3036,44
00:15:00	2,44	2,33	00:15:00	659,87	3042,88
00:16:00	2,18	2,19	00:16:00	715,86	3042,88
00:17:00	2,18	2,16	00:17:00	909,47	3042,44
00:18:00	2,05	2,13	00:18:00	1016,83	3042,31
00:19:00	2,14	2,19	00:19:00	697,72	3043,13
00:20:00	2,05	2,17	00:20:00	844,43	3043,75

Tabuľka 1.1: Dáta

Tabuľka 1.1 ukazuje dáta vygenerované nástrojom Perfcake za 20 minút, testovala sa priepustnosť softvéru v iteráciách za sekundu a využitie pamäte v megabajtoch. Pri priepustnosti sa počíta priemer za časovú jednotku (current) a tiež priemer za niekoľko časových jednotiek (average), časová jednotka a veľkosť okna, s ktorými sa bude počíta sa

dá nastaviť v scenári, pri dátach s tabuľky je to minúta a 15 záznamov. Priemer sa začína počítať, keď sa naplní okno a potom už pre každý ďalší záznam.



Obr. 1.3: Grafy

Pri testovaní využívania pamäte sa zaznamenáva použitá (used) a celková pamäť (total). Celková pamäť, je pamäť, ktorú si JVM alokuje a použitá pamäť je pamäť, ktorú naozaj



využije - celková mínus voľná pamäť. Viac o pamäti v JVM sa čitateľ dozvie v oficiálnej dokumentácii(<http://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/lang/Runtime.html>).

V popisovanej tabuľke sú dáta zaznamenané za 20 min, v praxi ale tie testy bežia väčšinou niekoľko desiatok hodín a teda tabuľky môžu dosahovať tisíce záznamov. Ukladať a následne spracovať takéto množstvo dát je pamäťovo aj časovo náročné a preto budem hľadať algoritmus, ktorý zmenší objem dát a zároveň neznehodnotí informáciu z nich vyplývajúcu, pri vykreslení do grafov.

### 1.3.2 Grafy

Pomocou grafu vieme často do mozgu preniesť oveľa viac informácií. Na obrázku 1.3 sú znázornené grafy z testov, ktoré bežali 108 hodín, a ktorých prvých 20 záznamov sme si ukázali v tabuľke 1.1. Pre analýzu výsledku nie sú potrebné tak presné grafy, väčšinou je dôležitá hodnota okolo ktorej dáta v určitej časti grafu konvergujú, alebo či hodnoty veľmi “skáču”. V bakalárskej práci budú tieto grafy upravené a následne porovnávané s grafmi, ktoré budú vykreslené z dát, na ktoré sa použije optimalizačný algoritmus.

# Kapitola 2

## Matematická teória

V tejto kapitole uvedieme potrebné znalosti z matematickej teórie, ktoré sú potrebné pre zostrojenie optimalizačných algoritmov, ktorými sa budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách. Najprv sa oboznámime s úvodom do regresnej analýzy a s neparametrickou metódou odhadu regresnej funkcie - metódou jadrových odhadov, ktorú použijeme na vyhladenie dát. Na konci kapitoly si ešte uvedieme vzorce pre aritmetický priemer, rozptyl a smerodajnú odchýlku, budú použité na redukciiu dát. Pojmy a definície sú prebraté zo zdrojov...

### 2.1 Regresná analýza

Pre pevné hodnoty nezávisle premennej  $X$  (v našom prípade čas) máme k dispozícii name-  
rané hodnoty závisle premennej  $Y$  (priepustnosť, použitá pamäť,...). Takýmito dvojicami  
bodov  $(x_i, Y_i), i = 1, \dots, n$  chceme preložiť vhodnú krivku, tak aby boli odfiltrované výkyvy  
a bolo možné lepšie poznať štruktúru dát. Táto krivka sa nazýva *regresná krivka* a jej  
príslušný regresný vzťah zapisujem v tvare

$$Y_i = m(x_i) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

kde  $m$  je neznáma regresná funkcia a  $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ , sú chyby merania. Cieľom regresnej  
analýzy je nájsť vhodnú aproximáciu  $\hat{m}$  neznámej funkcie  $m$ . Hľadanie tejto regresnej  
krivky sa tiež nazýva *vyhladzovanie* a je možné použiť dva spôsoby odhadu, *parametrický*  
a *neparametrický*:

- *Parametrický prístup* - predpokladá, že regresná funkcia je nejakého predpísaného tvaru. Odhadnutá regresná funkcia bude teda určitého tvaru a bude ju popisovať množina parametrov - to je dôvod pre názov *parametrický*.
- *Neparametrický prístup* - nepredpokladá predpísaný tvar regresnej funkcie. Tento prístup sa vyhýba parametrizácii a tvar funkcie sa odhaduje priamo z dát. Predpokladá sa jedine istá hladkosť hľadanej funkcie.

Jedna z najjednoduchších neparametrických metód je *metóda kľzavých priemerov*. Pre odhad hodnoty  $Y_i$  sa používa priemer niekoľkých hodnôt  $Y_j, j \in [i - h, i + h]$  v centrovanom

okolí príslušného bodu  $x_i$ .

Konkrétne,

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i I_{[x-h, x+h]}(x_i)}{\sum_{i=1}^n I_{[x-h, x+h]}(x_i)}. \quad (2.2)$$

Na vyjadrenie

$$I_{[j,k]}(x) \begin{cases} 1 & x \in [j, k], \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (2.3)$$

sa používa *indikátorová funkcia*  $I_{[j,k]}(x)$ .

Jadrové odhady sa považujú za zovšeobecnenie *metódy klzavých priemerov*.

## 2.2 Jadrové odhady

Pri odhadovaní regresnej funkcie pomocou jadrových odhadov, sa taktiež používajú vážené hodnoty  $Y$  v centrovanom okolí príslušného bodu  $x_i$ . Váhy hodnôt  $Y$  sú závislé na vzdialenosti príslušných  $x$  bodov od konkrétneho  $x_i$ , bližšie hodnoty - väčšia váha. Toto nám pomáha dosiahnuť *jadrová funkcia*. Vzorec pre jadrové odhady vo všeobecnosti, môžeme zapísať nasledovne

$$\hat{m}(x, h) = \sum_{i=1}^n W_i(x, h) Y_i, \quad (2.4)$$

kde  $W_i(x, h)$  je váhová funkcia s vyhladzovacím parametrom  $h$ . Ide teda o akýsi vážený súčet pozorovaní, ktorý v prípade, že použijeme metódu vážených štvorcov môže mať tvar

$$K_h(x - x_i) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad (2.5)$$

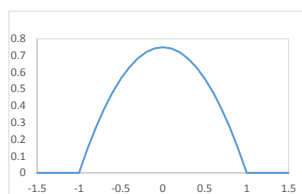
kde  $K$  je jadrová funkcia.

### 2.2.1 Jadrová funkcia

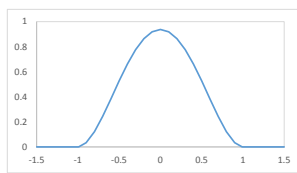
Jadrová funkcia determinuje tvar vyhladzovacej funkcie. Na obrázku 2.1 môžeme vidieť niekoľko najpoužívanejších jadrových funkcií. V popise funkcie sa používa indikátorová funkcia (2.3).

Vo všeobecnosti hocijaká integrovateľná, obmedzená funkcia, ktorá spĺňa kritériá 2.6 môže byť jadrom.

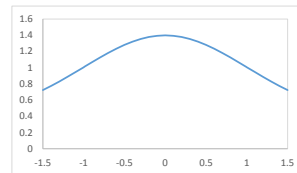
$$\begin{aligned} a) \int K(z) dz &= 1 & b) \int z K(z) dz &= 0 \\ c) \int z^2 K(z) dz &< \infty & d) K(x) &\geq 0 \text{ pre všetky } x. \end{aligned} \quad (2.6)$$



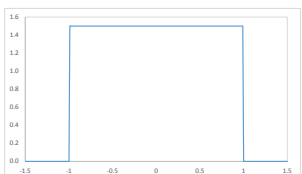
(a) Epanečnikovo jadro



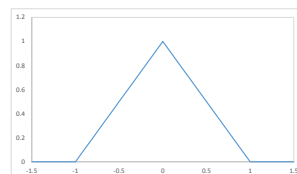
(b) Kvadratické jadro



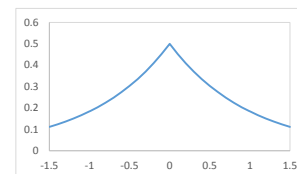
(c) Gaussovo jadro



(d) Obdĺžnikové jadro



(e) Trojuholníkové jadro



(f) Nepomenované jadro

Obr. 2.1: Rôzne tvary jadrových funkcií:

$$\begin{aligned} \text{a) } K(x) &= \frac{3}{4}(1-x^2)I_{[-1,1]}(x), & \text{b) } K(x) &= \frac{15}{16}(1-x^2)^2I_{[-1,1]}(x), & \text{c) } K(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \text{d) } K(x) &= \frac{1}{2}I_{[-1,1]}(x), & \text{e) } K(x) &= (1-|x|)I_{[-1,1]}(x), & \text{f) } K(x) &= \frac{1}{2}e^{-|x|} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Šírka vyhladzovacieho okna

Okrem jadrovej funkcie, alebo jadra, je ďalším dôležitým parametrom tejto metódy je šírka vyhladzovacieho okna  $h$ . Šírka vyhladzovacieho okna alebo aj vyhladzovací parameter  $h$  udáva šírku vyhladzovacej funkcie a teda aj silu vyhladenia.

Malá šírka vyhladzovacieho okna znamená, že odhad závisí na úzkom okolí bodu  $x_i$  a teda odhad do veľkej miery reprodukuje pôvodné dáta. Naopak, ak zvolíme vysokú hodnotu  $h$ , aj veľmi vzdialené hodnoty majú vysoký dopad na odhad, čo vedie k “prehladeniu” a pri dostatočne veľkej šírke  $h$  až k priemeru dát.

Spomínané rozdieli v šírke vyhladzovacieho okna môžeme vidieť na obrázku 2.2. Pre ilustráciu vplyvu vyhladzovacieho parametra sú použité reálne dáta meranie použitej pamäte nástroja Perfcake. Aplikované sú Nadaraya-Watsonove odhady, ktoré sú popísané v nasledujúcej podkapitole, s Gaussovou jadrovou funkciou.

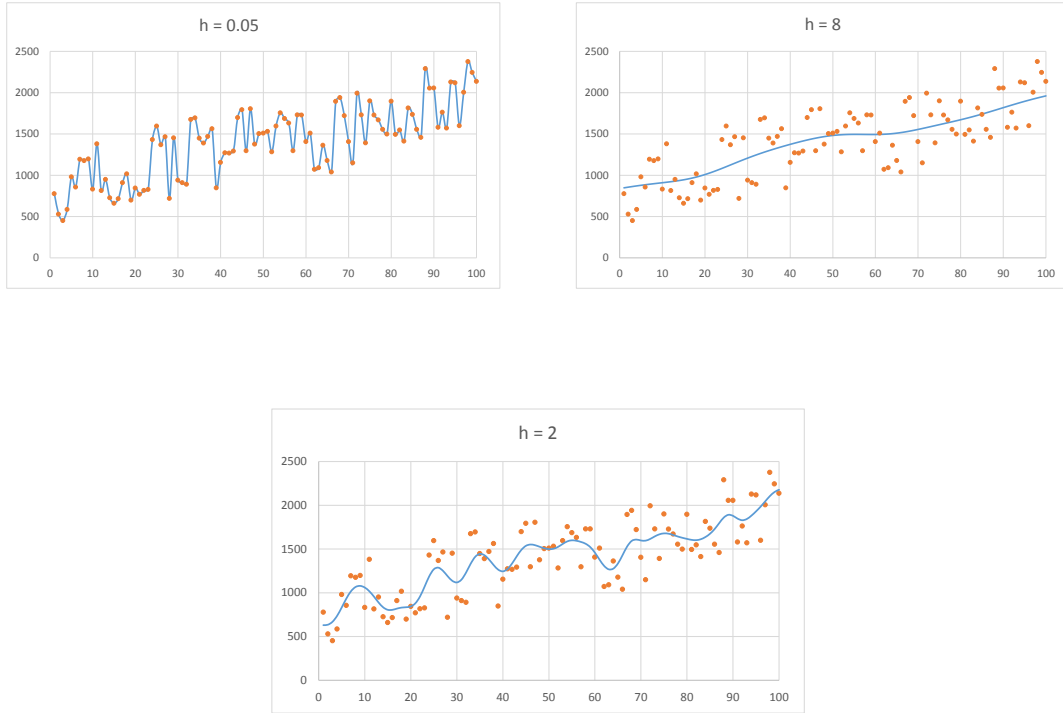
### 2.2.3 Vhodný výber vyhladzovacieho parametra

Hoci je v praxi bežné vybrať vhodnú šírku vyhladzovacieho okna na základe niekoľkých pokusov a následného subjektívneho výberu, existuje niekoľko metód pre výber optimálnej šírky vyhladzovacieho okna.

Kvalita jadrových odhadov regresnej funkcie môže byť lokálne popísaná pomocou strednej kvadratickej chyby (*MSE - Mean Square Error*)

$$MSE\{\hat{m}(x, h)\} = E\{\hat{m}(x, h) - m(x)\}^2.$$

Alebo tiež pomocou globálnej chyby - priemernej strednej kvadratickej chyby (*AMSE -*



Obr. 2.2: Porovnanie šírky vyhladzovacieho okna, bodky sú pôvodné dáta, súvislá čiara odhadnutá regresná funkcia

average MSE)

$$AMSE\{\hat{m}(\cdot, h)\} = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n \{\hat{m}(x_i, h) - m(x_i)\}^2.$$

Minimalizovaním týchto chýb pre hodnotu parametra  $h$ , dostávame jeho optimum.

Keďže vzorec pre AMSE obsahuje neznáme hodnoty regresnej funkcie, použijeme pre výpočet optimálnej hodnoty parametra  $h$ , *reziduálny súčet štvorcov (RSS)*, kde tieto neznáme hodnoty nahradíme nameranými hodnotami  $Y_i$ . Teda

$$RSS_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{Y_i - \hat{m}(x_i, h)\}^2. \quad (2.7)$$

RSS ale nie je nestranným odhadom AMSE, preto sa metódy pre odhad optimálnej šírky vyhladzovacieho okna snažia RSS upraviť tak, aby bol nestranný.

Jedna z najpoužívanějších metód tohto typu je *metóda krížového overenia (Cross-validation method)*. Táto metóda spočíva vo vynechaní pozorovania  $x_j$  pre spočítanie odhadu v bode  $x_j$

$$\hat{m}_{-j}(x_j, h) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n W_i(x_j, h) Y_i.$$

S použitím tejto modifikácie, môžeme RSS prepísať do tvaru

$$CV(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{Y_i - m_{-i}(x_i)\}^2, \quad (2.8)$$

funkcia CV je tiež známa ako “cross-validačná” funkcia. Odhadnuté optimálne  $h$  dostaneme minimalizovaním (2.8)

$$\hat{h}_{CV} = \arg \min_{h \in H_n} CV(h). \quad (2.9)$$

Aj keď je táto metóda jedna z najpoužívanějších, negarantuje nestrannosť odhadu, ani že  $\hat{h}_{CV}$  minimalizuje AMSE (alebo hocijakú inú chybovú mieru). Dôsledkom toho je, že  $\hat{h}_{CV}$  nadobúda väčšinou jemne nižšiu hodnotu ako je optimálna šírka  $h$ .

Viac o metóde krížového overenia, ale aj iných metódach na odhad optimálnej šírky vyhladzovacieho okna, napr. Malloowsova metóda, Penalizačná metóda, alebo metóda založená na Fourierovej transformácii, môžeme nájsť v [(Kernel smoothing)].

## 2.2.4 Typy jadrových odhadov

V tejto podkapitole si uvedieme konkrétne typy jadrových odhadov, ktoré sú uvedené v zdrojoch ...

Medzi najznámejšie jadrové odhady patria:

- **Nadaraya-Watsonove odhady**

$$\hat{m}_{MW}(x; h) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(x - x_i) Y_i}{\sum_{i=1}^n K_h(x - x_i)}, \quad (2.10)$$

tento estimátor zabezpečuje, aby súčet váh bol 1. Je to prípad, kedy preložíme dáta konštantnou funkciou. Môžeme si tiež všimnúť, že ak použijeme Nadaraya-Watsonove odhady s obdĺžnikovou jadrovou funkciou, dostaneme metódu kľazových priemerov (2.2).

- **Lokálne lineárne estimátory**

$$\hat{m}_{LL}(x; h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{s}_2(x; h) - \hat{s}_1(x; h)(x_i - x) K_h(x - x_i) Y_i}{\hat{s}_2(x; h) \hat{s}_0(x; h) - \hat{s}_1(x; h)^2}, \quad (2.11)$$

kde

$$\hat{s}_r(x; h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^r K_h(x - x_i), \quad (2.12)$$

ako vyplýva z názvu, v prípade týchto estimátorov prekladáme dáta priamkou (lineárnou funkciou).

- **Gasser-Müllerove odhady**

$$\hat{m}_{GM}(x; h) = \sum_{i=1}^n Y_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} K_h(t-x) dt, \quad (2.13)$$

kde  $s_0 = 0, s_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, s_n = 1$ , pre  $x_i$  ekvidištantne rozdelené na  $[0, 1]$ . Tento estimátor sa dá vhodne použiť pre odhad derivácie regresnej funkcie.

## 2.3 Miera polohy a miera variability

Ako bolo uvedené na začiatku kapitoly, v tejto podkapitole sa oboznámime ešte s niektorými pojmami zo štatistiky.

Majme *súbor hodnôt*

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \quad (2.14)$$

kde  $n$  je rozsah súboru a jeho hodnoty sú intervalového alebo pomerového typu. To znamená, že je možné stanoviť vzdialenosti medzi meranými hodnotami, a teda počítat s ich rozdielmi. Tento súbor hodnôt môžeme analyzovať niekoľkými spôsobmi.

### 2.3.1 Aritmetický priemer

Na určenie hodnoty, okolo ktorej sa hodnoty jednotlivých pozorovaní nachádzajú je vhodný aritmetický priemer daného súboru.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.15)$$

Aritmetický priemer je tiež nazývaný miera polohy štatistických znakov.

### 2.3.2 Rozptyl a smerodajná odchýlka

Miery variability určujú, spôsob akým sú merané hodnoty usporiadané okolo strednej hodnoty. Najpoužívanejšie miery variability sú rozptyl a smerodajná odchýlka.

Rozptyl je často označovaný ako *stredná kvadratická odchýlka* a je definovaný

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.16)$$

V prípade, že rozptyl počítame iba zo vzorky hodnôt, a nie z celého súboru hodnôt, vzorec sa zmení na

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.17)$$

vďaka tejto úprave bude rozptyl jemne väčší. Táto korektúra sa používa na zmiernenie zkreslenia výsledku pri výpočte zo zmenšeného počtu dát.

Smerodajná odchýlka je daná ako odmocnina z rozptylu

$$s = \sqrt{s^2}. \quad (2.18)$$

Čím väčšie hodnoty rozptylu a smerodajná odchýlka naberajú, tým viac sú hodnoty rozptýlené od priemeru, naopak menšie hodnoty indikujú “tesnejšie” usporiadanie meraných hodnôt.



## Kapitola 3

### Analýza dát

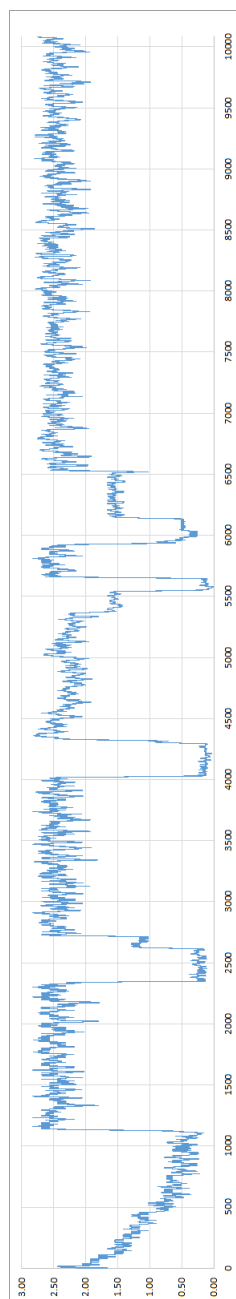
V tejto kapitole si ukážeme a zanalyzujeme konkrétne dáta vykreslené do grafov, s ktorými budeme pri vytváraní optimalizačného algoritmu pracovať.

Nástroj Perfcake môže testovať radu funkčností, ako bolo opísané v kapitole 1. Pre vytvorenie vhodného algoritmu máme k dispozícii 4 typy dát, na ktorých by mal algoritmus vhodne fungovať. Od rýchlo sa meniacich hodnôt dát (pripomínajúce šum), cez stredne rýchlo sa meniace hodnoty dát so “skokmi” a pomaly sa meniace hodnoty až po takmer konštantné hodnoty dát. Na obrázku 1.3 môžeme z vymenovaných vidieť dva typy dát, vykreslené do grafov z redukovaného počtu hodnôt, do podoby v akej sú potrebné pre analýzu výsledkov Perfcake. V tejto práci, budeme pracovať s grafmi všetkých 4 typov, každý pôvodne vykreslený z 10080 hodnôt, ktoré budeme následne redukovať, v podobe nami vyhovujúcej k následnému spracovaniu a demonštrovaní výsledkov. Tieto grafy môžeme vidieť na obrázku 3.1, sú to dáta vygenerované nástrojom Perfcake z testov, ktoré bežali 168 hodín, 2 grafy z testov na použitú pamäť a 2 grafy z testov na meranie priepustnosti.

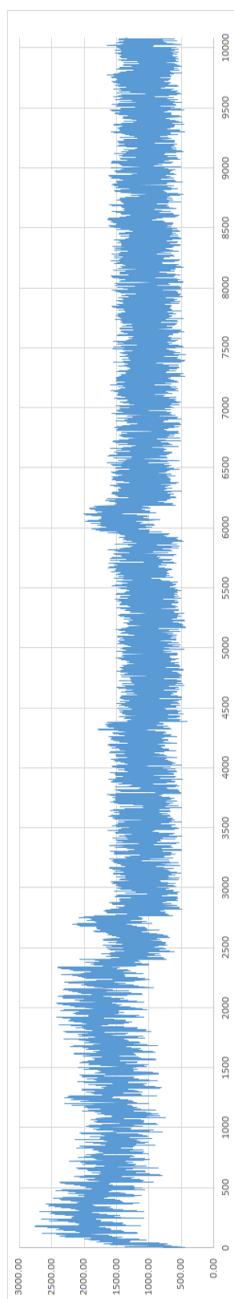
Grafy z nástroja Perfcake sú určené ľudským užívateľom. Voľným okom nie je možné rozoznať desaťtisíce hodnôt v jednom grafe, navyše 10080 hodnôt pochádza z testov, ktoré bežali 7 dní a zaznamenávali dáta každú minútu, tieto testy môžu byť spustené na dlhší čas, poprípade zaznamenávať dáta častejšie. v takých prípadoch, môže byť záznamov niekoľko násobne viac, čo je aj v dnešnej dobe pamäťovo náročné a v prípade vykreslenia do grafu, náročné časovo. V neposlednom rade náročné na analýzu.

Z grafu je možné vyčítať niekoľko dôležitých informácií. Okolo akej hodnoty sa dáta pohybujú, ako veľmi a často “skáču” a teda ako veľmi sú stabilné, prípadne tesnosť ich rozptýlenia. Samozrejme analýza grafu sa mení v závislosti na vlastnosti softvéru, ktorú meriame. Pri testovaní použitej pamäte je rozptyl hodnôt obvykle väčší ako pri testovaní priepustnosti, čo môžeme vidieť aj na obrázku 3.1. Vytvorené optimalizačné algoritmy dbajú na zachovanie, čo možno najmenšieho skreslenia týchto informácií pri redukování počtu dát. Algoritmy sú konfigurovateľné, čiže veľkosť redukcie, na úkor väčšieho skreslenia je nastaviteľný užívateľom, pomocou niekoľkých parametrov. Samozrejme sa predpokladá, že užívateľ, ktorý analyzuje výsledky, je oboznámený s aplikovaním optimalizačného algoritmu, poprípade si ho sám nakonfiguruje.

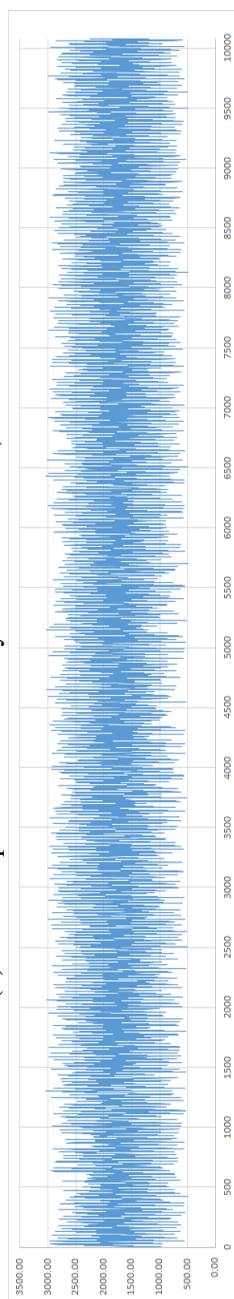
Postupné aplikovanie optimalizačných algoritmov na dáta, spolu s ich porovnaním si ukážeme v nasledujúcich kapitolách.



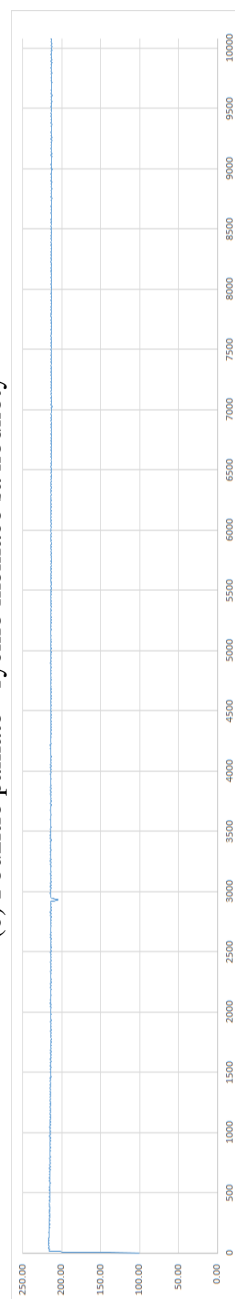
(a) Priepustnosť - hodnoty meniace sa pomaly



(b) Použitie pamäte - stredne rýchlo sa meniace, so skokmi



(c) Použitie pamäte - rýchlo meniace sa hodnoty



(d) Priepustnosť - takmer konštantné hodnoty s občasnými zmenami

Obr. 3.1: Typy dát v grafoch

# Kapitola 4

## Vyhľadenie dát

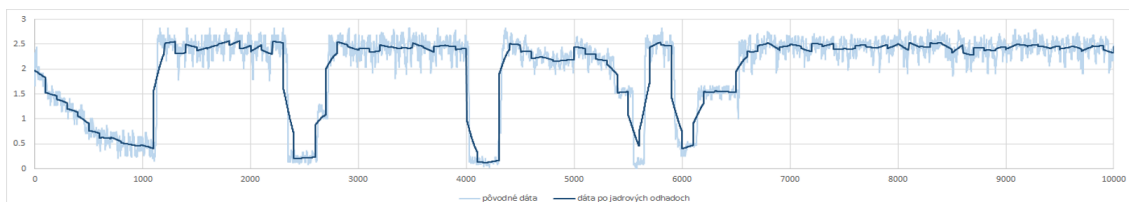
V tejto kapitole aplikujeme Jadrové odhady opisované v podkapitole 2.2 na dáta, čím ich vyhladíme. Touto úpravou sa nestratí takmer žiadna podstatná informácia. Pre aplikovanie jadrových odhadov sme sa rozhodli po dôkladnej analýze dát a vyskúšaní kľzavých priemerov.

Pri počítaní jadrových odhadov budeme používať Nadaraya-Watsonove odhady popísané v rovnici (2.10) s Gaussovým jadrom, ktoré môžeme vidieť na obrázku 2.1, konkrétne obrázok (c), a s použitím metódy najmenších štvorcov (2.5).

Použitý vzorec teda vyzerá

$$\hat{m}_{MW}(x;h) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2}{2}} Y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2}{2}}}, \quad (4.1)$$

Optimalizačný algoritmus, by byť spustený naraz s testovaním nástrojom Perfcake a mal by pracovať v reálnom čase, poprípadne s nejakých zdržaním. Určite ale pri aplikovaní jadrových odhadov, nebudú k dispozícii celé dáta. Budeme teda počítat jadrové odhady vždy zo 100 záznamov. Ak by sme chceli určovať optimálnu dĺžku vyhladzovacieho okna pomocou krížovej validácie, museli by sme pre každých 100 záznamov minimalizovať funkciu (2.8) a následne s touto hodnotou  $h$  a následne pre týchto 100 záznamov spočítat jadrový odhad. Bolo by to teda poznateľne pomalšie a preto bude dĺžka vyhladzovacieho okna konfigurovateľný vstupný parameter pre algoritmus. Čím väčšiu hodnotu užívateľ zvolí, tým viac vyhladené grafy budú výsledkom.

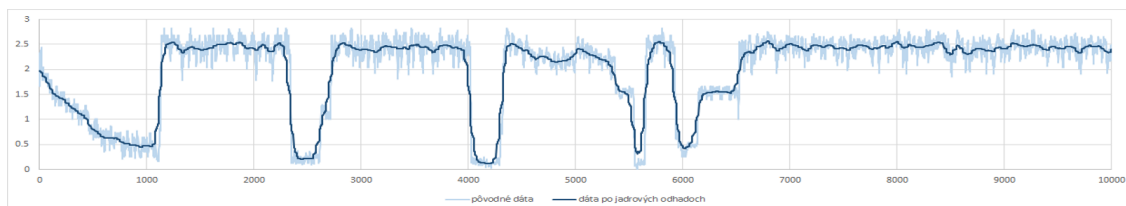


Obr. 4.1: Jadrové odhady bez prelínania

Na obrázku 4.1 môžeme vidieť aplikovanie jadrových odhadov (4.1) na dáta, vždy pre každých 100 záznamov a dĺžkou vyhladzovacieho okna 50. Graf, ktorý je výsledkom

(tmavá čiara), je ale príliš “hranatý”, čo je následkom rozdelenia dát na 100 záznamov dlhé bloky.

Upravíme vyhladzovací algoritmus tak, že budeme síce aplikovať jadrové odhady vždy na 100 záznamov dlhé bloky, ale tieto bloky sa budú prekrývať. Po aplikovaní na prvý blok záznamov, sa posunieme o 30 záznamov a aplikujeme jadrové odhady znova. To znamená, že pre väčšinu záznamov (okrem prvých 30 a posledných 30 záznamov) bude spočítaných niekoľko odhadov, pre výpočet výslednej hodnoty, tieto odhady spriemerujeme. Takto upravený algoritmus aplikovaný na dáta môžeme vidieť na obrázku 4.2.



Obr. 4.2: Jadrové odhady s prelínaním

# Závěr

Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.

Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetur lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetur eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper

tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetur varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetur non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat,

mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

Morbi sem. Nulla facilisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nulla facilisi. Morbi sagittis ultrices libero. Praesent eu ligula sed sapien auctor sagittis. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec vel nunc. Nunc fermentum, lacus id aliquam porta, dui tortor euismod eros, vel molestie ipsum purus eu lacus. Vivamus pede arcu, euismod ac, tempus id, pretium et, lacus. Curabitur sodales dapibus urna. Nunc eu sapien. Donec eget nunc a pede dictum pretium. Proin mauris. Vivamus luctus libero vel nibh.

Fusce tristique risus id wisi. Integer molestie massa id sem. Vestibulum vel dolor. Pellentesque vel urna vel risus ultricies elementum. Quisque sapien urna, blandit nec, iaculis ac, viverra in, odio. In hac habitasse platea dictumst. Morbi neque lacus, convallis vitae, commodo ac, fermentum eu, velit. Sed in orci. In fringilla turpis non arcu. Donec in ante. Phasellus tempor feugiat velit. Aenean varius massa non turpis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Aliquam tortor. Morbi ipsum massa, imperdiet non, consectetur vel, feugiat vel, lorem. Quisque eget lorem nec elit malesuada vestibulum. Quisque sollicitudin ipsum vel sem. Nulla enim. Proin nonummy felis vitae felis. Nullam pellentesque. Duis rutrum feugiat felis. Mauris vel pede sed libero tincidunt mollis. Phasellus sed urna rhoncus diam euismod bibendum. Phasellus sed nisl. Integer condimentum justo id orci iaculis varius. Quisque et lacus. Phasellus elementum, justo at dignissim auctor, wisi odio lobortis arcu, sed sollicitudin felis felis eu neque. Praesent at lacus.

Vivamus sit amet pede. Duis interdum, nunc eget rutrum dignissim, nisl diam luctus leo, et tincidunt velit nisl id tellus. In lorem tellus, aliquet vitae, porta in, aliquet sed, lectus. Phasellus sodales. Ut varius scelerisque erat. In vel nibh eu eros imperdiet rutrum. Donec ac odio nec neque vulputate suscipit. Nam nec magna. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nullam porta, odio et sagittis iaculis, wisi neque fringilla sapien, vel commodo lorem lorem id elit. Ut sem lectus, scelerisque eget, placerat et, tincidunt scelerisque, ligula. Pellentesque non orci.

Etiam vel ipsum. Morbi facilisis vestibulum nisl. Praesent cursus laoreet felis. Integer adipiscing pretium orci. Nulla facilisi. Quisque posuere bibendum purus. Nulla quam mauris, cursus eget, convallis ac, molestie non, enim. Aliquam congue. Quisque sagittis nonummy sapien. Proin molestie sem vitae urna. Maecenas lorem. Vivamus viverra consequat enim.

# Příloha

**Sem můžete přidat přílohu. Pokud chcete “Přílohy”, tak upravte definici záhlaví v souboru sci.muni.thesis.sty, viz příkaz \HlavickaPriloha.**

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetur lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetur eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetur varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a,



hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetur non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

Morbi sem. Nulla facilisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nulla facilisi. Morbi sagittis ultrices libero. Praesent eu

ligula sed sapien auctor sagittis. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec vel nunc. Nunc fermentum, lacus id aliquam porta, dui tortor euismod eros, vel molestie ipsum purus eu lacus. Vivamus pede arcu, euismod ac, tempus id, pretium et, lacus. Curabitur sodales dapibus urna. Nunc eu sapien. Donec eget nunc a pede dictum pretium. Proin mauris. Vivamus luctus libero vel nibh.

Fusce tristique risus id wisi. Integer molestie massa id sem. Vestibulum vel dolor. Pellentesque vel urna vel risus ultricies elementum. Quisque sapien urna, blandit nec, iaculis ac, viverra in, odio. In hac habitasse platea dictumst. Morbi neque lacus, convallis vitae, commodo ac, fermentum eu, velit. Sed in orci. In fringilla turpis non arcu. Donec in ante. Phasellus tempor feugiat velit. Aenean varius massa non turpis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Aliquam tortor. Morbi ipsum massa, imperdiet non, consectetur vel, feugiat vel, lorem. Quisque eget lorem nec elit malesuada vestibulum. Quisque sollicitudin ipsum vel sem. Nulla enim. Proin nonummy felis vitae felis. Nullam pellentesque. Duis rutrum feugiat felis. Mauris vel pede sed libero tincidunt mollis. Phasellus sed urna rhoncus diam euismod bibendum. Phasellus sed nisl. Integer condimentum justo id orci iaculis varius. Quisque et lacus. Phasellus elementum, justo at dignissim auctor, wisi odio lobortis arcu, sed sollicitudin felis felis eu neque. Praesent at lacus.

Vivamus sit amet pede. Duis interdum, nunc eget rutrum dignissim, nisl diam luctus leo, et tincidunt velit nisl id tellus. In lorem tellus, aliquet vitae, porta in, aliquet sed, lectus. Phasellus sodales. Ut varius scelerisque erat. In vel nibh eu eros imperdiet rutrum. Donec ac odio nec neque vulputate suscipit. Nam nec magna. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nullam porta, odio et sagittis iaculis, wisi neque fringilla sapien, vel commodo lorem lorem id elit. Ut sem lectus, scelerisque eget, placerat et, tincidunt scelerisque, ligula. Pellentesque non orci.

Etiam vel ipsum. Morbi facilisis vestibulum nisl. Praesent cursus laoreet felis. Integer adipiscing pretium orci. Nulla facilisi. Quisque posuere bibendum purus. Nulla quam mauris, cursus eget, convallis ac, molestie non, enim. Aliquam congue. Quisque sagittis nonummy sapien. Proin molestie sem vitae urna. Maecenas lorem. Vivamus viverra consequat enim.

# Seznam použité literatury

- [1] S. J. Monaquel a K. M. Schmidt, *On  $M$ -functions and operator theory for non-self-adjoint discrete Hamiltonian systems*, v „Special Issue: 65th birthday of Prof. Desmond Evans“, J.Comput. Appl. Math. **208** (2007), č. 1, 82–101.
- [2] M. Murata, *Positive solutions and large time behaviors of Schrödinger semigroups, Simon's problem*, J. Funct. Anal. **56** (1984), č. 3, 300–310.
- [3] J. Qi a S. Chen, *Strong limit-point classification of singular Hamiltonian expressions*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), č. 6, 1667–1674 (elektronicky).
- [4] Z. Pospíšil, *An inverse problem for matrix trigonometric and hyperbolic functions on measure chains*, v „Colloquium on Differential and Difference Equations — CDDE 2002“ (Brno, 2002), Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk. Brun. Math. **13**, str. 205–211, Masarykova univerzita, Brno, 2003.
- [5] R. Šimon Hilscher a P. Zemánek, *Friedrichs extension of operators defined by linear Hamiltonian systems on unbounded interval*, v „Equadiff 12“, Proceedings of the Conference on Differential Equations and their Applications (Brno, 2009), J. Diblík, O. Došlý, P. Drábek a E. Feistauer, editoři, Math. Bohem. **135** (2010), č. 2, 209–222.
- [6] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [7] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [8] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [9] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [10] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [11] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [12] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.

- [13] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [14] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.

