

**Versuch V21**

# **Optisches Pumpen**

Lennart Völz

`lennart.voelz@tu-dortmund.de`

Max Möller

`max2.moeller@tu-dortmund.de`

Durchführung: 27.05.2024

Abgabe: 04.06.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Drehimpuls, magnetisches Moment und Zeeman-Effekt . . . . .	3
2.2 Mechanismus des optischen Pumpens . . . . .	4
2.3 Optisches Pumpen bei Rubidium . . . . .	5
<b>3 Aufbau und Durchführung</b>	<b>7</b>
3.1 Aufbau . . . . .	7
3.2 Durchführung . . . . .	8
<b>4 Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1 Messung der Resonanzfeldstärke der Sweep Spule . . . . .	9
4.2 Messung des Lande-Faktors und des Kernspins . . . . .	11
4.3 Messung des Isotopenverhältnisses . . . . .	11
4.4 Abschätzung des quadratischen Zeeman Effekts . . . . .	12
<b>5 Diskussion</b>	<b>13</b>
5.1 Messung der Resonanzfeldstärke der Sweep Spule . . . . .	13
5.2 Messung des Lande-Faktors und des Kernspins . . . . .	13
5.3 Messung des Isotopenverhältnisses und abschätzung des quadratischen Zeeman-Effekts . . . . .	13
<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Zielsetzung

In V21 soll der Kernspin der Rubidium-Isotope  $^{85}\text{Rb}$  und  $^{87}\text{Rb}$  mithilfe optisch induzierter nicht-thermischer Besetzung unter Anwendung der Hochfrequenzspektroskopie bestimmt werden.

## 2 Theorie

Optisches Pumpen ist eine Methode, bei der Licht verwendet wird, um die Besetzungszahlen von atomaren oder molekularen Energiezuständen zu verändern. Diese Technik ermöglicht es, Atome gezielt in bestimmte Zustände zu bringen und nicht-thermische Verteilungen der Besetzungszahlen zu erzeugen, was für zahlreiche Anwendungen in der Physik und Quantenoptik von Bedeutung ist.

Beim optischen Pumpen werden Atome oder Moleküle durch gezielte Bestrahlung mit Licht in energetisch angeregte Zustände versetzt. Diese Zustände können durch verschiedene Mechanismen wie spontane Emission, stimulierte Emission oder Wechselwirkungen mit Magnetfeldern weiter manipuliert werden.

### 2.1 Drehimpuls, magnetisches Moment und Zeeman-Effekt

Der Gesamt-Drehimpuls  $\vec{J}$  setzt sich aus dem Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  und dem Spin  $\vec{S}$  der Elektronen zusammen:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (1)$$

Die Drehimpulse erzeugen magnetische Momente:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_L &= -\mu_B \cdot \vec{L}, \\ \vec{\mu}_S &= -g_S \cdot \mu_B \cdot \vec{S}, \\ \vec{\mu}_J &= -g_J \cdot \mu_B \cdot \vec{J}, \end{aligned}$$

wobei  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton,  $g_S$  der Landé-Faktor des Spins und  $g_J$  der Landé-Faktor des Gesamtdrehimpulses sind.

Der Landé-Faktor  $g_J$  ist für ein freies Elektron  $g_S = 2,0023$ . Nach Gleichung 1 ist  $J$  die Vektorsumme von  $L$  und  $S$ . Um den Landé-Faktor  $g_J$  zu bestimmen, wird die Projektion des magnetischen Moments  $\vec{\mu}_J$  auf den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  betrachtet. Die parallelen Komponenten bleiben erhalten, die senkrechten Komponenten addieren sich zu Null. Daraus folgt über

$$\vec{\mu}_J = g_J \cdot \mu_B \cdot \vec{J}$$

der Landé-Faktor  $g_J$  zu

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (2)$$

Da es bei Alkalimetallen zusätzlich noch einen Kernspin  $I$  gibt, muss der Gesamtdrehimpuls  $\vec{F}$  betrachtet werden, der sich aus dem Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  und dem Kernspin  $\vec{I}$  zusammensetzt:

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}.$$

Für den Gesamtdrehimpuls  $\vec{F}$  ergibt sich der Landé-Faktor  $g_F$  zu

$$g_F = g_J \cdot \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)}. \quad (3)$$

Die erste Aufspaltung der Energieniveaus ergibt sich durch die Spin-Bahn-Kopplung. Die Störung des Hamiltonoperators hat die Form

$$H_{LS} = \alpha \cdot \vec{L} \cdot \vec{S}.$$

Spin-Bahn-Kopplung beruht auf der Wechselwirkung des magnetischen Spinmoments des Elektrons und des magnetischen Moments, das durch die Umlaufbahn des Elektrons um den Atomkern entsteht. Die aus der Störung resultierende Energieaufspaltung ist die Feinstrukturaufspaltung und sorgt für eine Aufspaltung in der Quantenzahl  $J$ .

Die zweite Aufspaltung der Energieniveaus ergibt sich durch die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Elektrons mit dem magnetischen Moment des Kerns und wird als Hyperfeinstrukturaufspaltung bezeichnet. Wenn die Hyperfeinstrukturaufspaltung klein gegenüber der Feinstrukturaufspaltung ist, kann der Hamiltonoperator durch

$$H_{HF} = A \cdot \vec{I} \cdot \vec{J}$$

beschrieben werden, wobei  $A$  die Kopplungskonstante ist. Die Hyperfeinstrukturaufspaltung sorgt für eine Aufspaltung in der Quantenzahl  $F$ .

Die dritte Aufspaltung der Energieniveaus beruht auf der Wechselwirkung des Atoms mit einem äußeren Magnetfeld. Die Aufspaltung beruht auf dem Zeeman-Effekt und hat die Form

$$H_Z = g_F \cdot \mu_B \cdot m_F \cdot B.$$

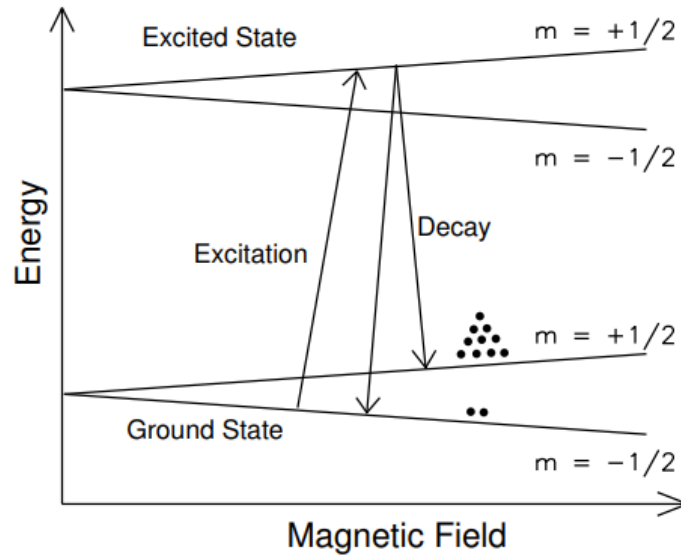
Die Aufspaltung ist also abhängig von der Quantenzahl  $m_F$  und der Stärke des Magnetfelds  $B$ .

## 2.2 Mechanismus des optischen Pumpens

Atome im Grundzustand absorbieren Photonen des eingestrahnten Lichts und werden in einen angeregten Zustand überführt. Die Auswahlregeln bestimmen, welche Übergänge erlaubt sind. Die Auswahlregeln für die Übergänge sind durch die Polarisation des eingestrahnten Lichts bestimmt: In diesem Fall ergeben sich die Auswahlregeln einfach durch Drehimpulserhaltung entlang der Feldrichtung. Bei zirkular polarisiertem Licht sind nur Übergänge mit  $\Delta m_J = \pm 1$  erlaubt. Die Übergänge heißen  $\sigma^+$ -Übergänge, wenn  $\Delta m_J = +1$  und  $\sigma^-$ -Übergänge, wenn  $\Delta m_J = -1$ .

Die angeregten Atome können durch spontane Emission in einen der aufgespaltenen Grundzustände zurückfallen. Für diesen Prozess gelten die Auswahlregeln  $\Delta m_J = 0, \pm 1$ ,

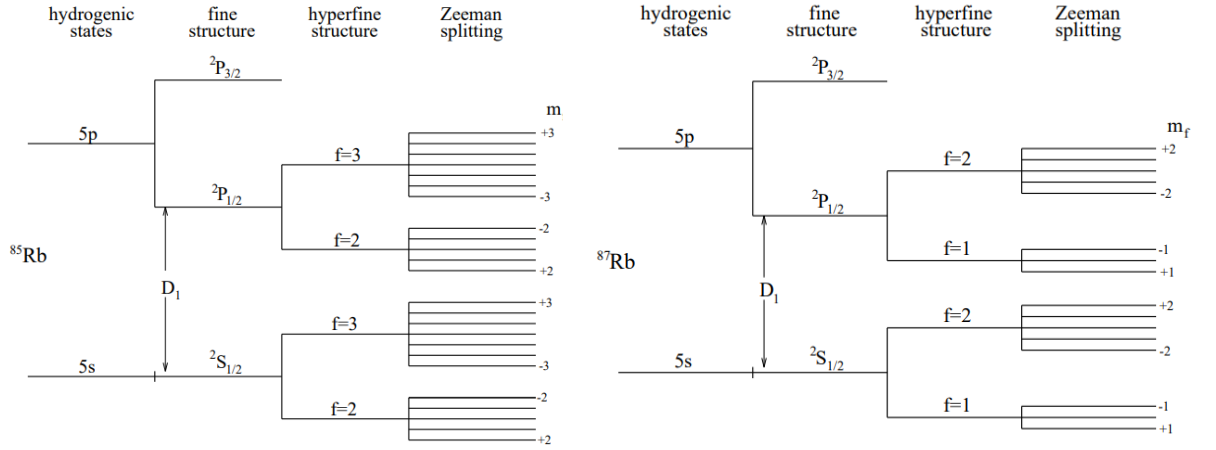
weil das emittierte Photon eine beliebige Polarisation haben kann. Nur das  $m_J = -1/2$  Niveau des Grundzustands kann bei  $\sigma^+$ -Licht die einfallenden Photonen absorbieren. Das führt dazu, dass es eine starke Tendenz zur Besetzung des  $m_J = +1/2$  Niveaus gibt, da die Atome im  $m_J = -1/2$  Zustand kontinuierlich angeregt werden und in den  $m_J = +1/2$  Zustand relaxieren. Die Atome im  $m_J = +1/2$  Zustand können das Licht nicht absorbieren. Wenn die Relaxationszeit  $\tau$  der Atome im  $m_J = +1/2$  Grundzustand groß gegen die Zeitkonstante  $\tau_{\text{pump}}$  des Pumpvorgangs ist, wird der  $m_J = +1/2$  Grundzustand gepumpt. In Abbildung 1 ist der Mechanismus des optischen Pumpens schematisch dargestellt.



**Abbildung 1:** Schematische Darstellung des Mechanismus des optischen Pumpens. [8]

### 2.3 Optisches Pumpen bei Rubidium

Rubidium besitzt zwei Isotope,  $^{85}\text{Rb}$  und  $^{87}\text{Rb}$  mit Kernspins  $I = 5/2$  und  $I = 3/2$ . Es gehört zur Alkalimetallgruppe und besitzt somit nur ein Elektron in der äußersten Schale. Wie in Unterabschnitt 2.1 beschrieben, gibt es verschiedene Energieaufspaltungen. Diese sind für Rubidium in Abbildung 2 dargestellt.



(a) Aufspaltung der Energieniveaus von  $^{85}\text{Rb}$ .

(b) Aufspaltung der Energieniveaus von  $^{87}\text{Rb}$ .

**Abbildung 2:** Energieaufspaltung der Rubidium-Isotope. [8]

Für niedrige Magnetfeldstärken ist die Energieaufspaltung linear im Magnetfeld  $B$ . Wenn der Zeeman-Effekt dominiert, müssen Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden. Die Energiedifferenz ist dann in quadratischer Ordnung gegeben durch

$$\Delta E = -\epsilon g_I \pm \frac{\Delta}{2} \cdot \left( \frac{2w}{2I+1} + \frac{2w^2(1-2m_F)}{(2I+1)^2} \right), \quad (4)$$

[1]. Dabei ist  $\epsilon = \frac{e\hbar}{2m_e} B$ ,  $w = \frac{\epsilon(g_J+g_I)}{\Delta}$  und  $m_F = m_I \pm \frac{1}{2}$ . Das grundlegende Prinzip des optischen Pumpens wurde bereits in Unterabschnitt 2.2 erläutert. Nun lässt sich an dem  $^{87}\text{Rb}$ -Isotop konkret zeigen, wie optisches Pumpen in dem Versuch funktioniert.

Wenn  $\sigma^+$ -Licht auf das Isotop trifft, gilt für die Auswahlregeln  $\Delta m_J = +1$  bzw.  $\Delta m_F = +1$ . Da es keine Niveaus mit  $m_F = 3$  gibt, sind die Elektronen im  $m_F = 2$  Niveau "gefangen". Wenn jetzt wieder die Bedingung für die Relaxationszeit erfüllt ist, wird das Niveau  $m_F = 2$  des  $^2S_{1/2}$ -Grundzustands gepumpt.

Durch das Pumpen nimmt die Absorption des Lichts ab und die Transmission des Lichts nimmt zu. Die Transmission ist also ein Maß für die Besetzung des  $m_F = 2$  Niveaus.

Wenn nun die Transmission in Abhängigkeit eines äußeren Magnetfelds betrachtet wird, muss zunächst das Erdmagnetfeld kompensiert werden. Um die Besetzungsinversion auszugleichen, wird ein Hochfrequenzfeld angelegt, das die Elektronen aus dem gepumpten Zustand relaxieren lässt. Die Transmission nimmt wieder ab, da mehr Licht absorbiert wird.

Mit dem Hochfrequenzfeld kann auch eine Resonanz erzeugt werden. Dies ist durch einen Peak in der Absorption erkennbar. Die Resonanzbedingung ist gegeben durch

$$h \cdot f = g_F \cdot \mu_B \cdot B. \quad (5)$$

### 3 Aufbau und Durchführung

#### 3.1 Aufbau

Der Aufbau der Messapparatur ist in Abbildung 3 dargestellt. Eine Lichtquelle erzeugt Licht, das kollimiert und durch ein Interferenzfilter geschickt wird, welches nur die D1-Linie des Rb-Spektrums ( $\lambda = 794,8 \text{ nm}$ ) durchlässt. Aus dem unpolarisierten Licht wird durch einen Polarisationsfilter und eine  $\lambda/4$ -Platte zirkular-polarisiertes Licht erzeugt, das auf die Dampfzelle trifft. Diese Dampfzelle kann erhitzt werden, um Rubidium-Dampfdruck zu erzeugen. Das durch die Dampfzelle hindurchtretende Licht wird auf ein Si-Photoelement fokussiert, das über einen Linearverstärker an ein Oszilloskop angeschlossen ist. Schwankungen in der Lichtintensität führen zur Y-Auslenkung des Elektronenstrahls im Oszilloskop.

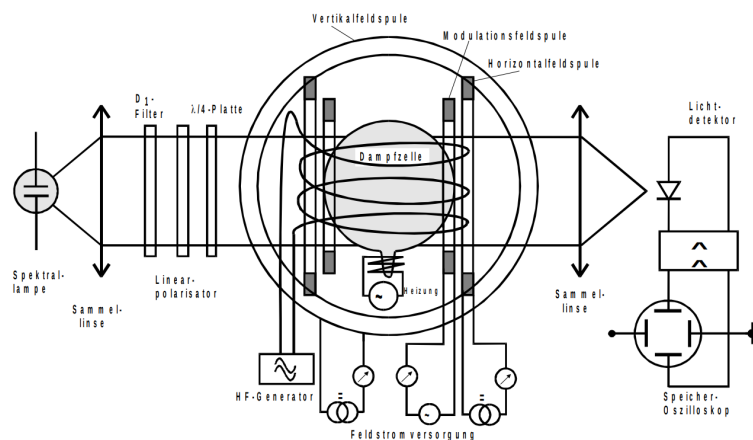


Abbildung 3: Schematischer Aufbau der Messapparatur. [2]

Der Versuchsaufbau verfügt über drei Helmholtzspulenpaare:

- Horizontalfeld-Spule: Mittlerer Radius  $R = 15,79 \text{ cm}$ , Windungszahl  $N = 154$
- Sweep-Spule (Modulationsfeldspule): Mittlerer Radius  $R = 16,39 \text{ cm}$ , Windungszahl  $N = 11$
- Vertikalfeld-Spule: Mittlerer Radius  $R = 11,735 \text{ cm}$ , Windungszahl  $N = 20$

Diese Spulen sind an das Kontrollgerät angeschlossen, das die Stromstärke in den Spulen regelt. Durch die Sweep- und Vertikalfeld-Spulen fließt ein maximaler Strom von  $1 \text{ A}$ . Eine Umdrehung des Potentiometers entspricht einer Stromänderung von  $0,1 \text{ A}$ . Die Horizontalfeld-Spule kann mit einem maximalen Strom von  $3 \text{ A}$  betrieben werden. Hier entspricht eine Umdrehung einer Stromänderung von  $0,3 \text{ A}$ .

### 3.2 Durchführung

Zunächst werden die optischen Elemente eingesetzt und justiert. Der Polarisationsfilter wird so eingestellt, dass die Lichtintensität maximal wird. Der Aufbau wird abgedeckt und der Raum verdunkelt, um die Intensitätsmessung möglichst nicht zu behindern.

Da das Erdmagnetfeld die Messung beeinflusst, muss dieses kompensiert werden. Dazu wird der Versuchstisch mit einem Kompass möglichst genau in Nord-Süd-Richtung ausgerichtet. Das führt dazu, dass das Magnetfeld parallel oder antiparallel verläuft und somit die Messdaten nur um einen konstanten Wert verschiebt. Die vertikale Spule wird so eingestellt, dass der Nullpeak auf dem Oszilloskop möglichst schmal wird. Die Kompensation der Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes ist essenziell, da sonst kein Nulldurchgang des Signals erreicht werden kann.

Nun wird die Stärke des Horizontalfeldes gemessen. Dazu wird die RF-Spule mit Frequenzen von 100 kHz bis 1 MHz betrieben und die Resonanzstellen notiert. Gegebenenfalls muss die Horizontalfeld-Spule nachjustiert werden, um beide Resonanzstellen zu erreichen. Zusätzlich wird ein Bild des Oszilloskops aufgenommen, um das Isotopenverhältnis von  $^{85}\text{Rb}$  und  $^{87}\text{Rb}$  zu bestimmen.



## 4 Auswertung

Die in Abschnitt 4 gezeigten Grafiken und Rechnungen sind mithilfe der Python-Bibliotheken Matplotlib [4], Scipy [9] und Numpy [3] erstellt worden. Die Fehlerrechnung wird mithilfe der Python-Bibliothek Uncertainties [6] durchgeführt.

### 4.1 Messung der Resonanzfeldstärke der Sweep Spule

Für die Messung der Resonanzfeldstärke der Sweep Spule wurde die Apparatur manuell so eingestellt, dass parallel zu der Nord-Süd-Achse des Erdmagnetfeldes steht. Zusätzlich musste die Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes kompensiert werden, was durch Einstellen des Stromes in der Vertikalspule erreicht wurde. Der Strom in dieser Spule wurde auf  $I_{\text{vertikal}} = 0,244 \text{ A}$  gestellt, was nach der Helmholtzgleichung

$$B = \frac{\mu_0 \cdot 8 \cdot I \cdot N}{\sqrt{125} \cdot R} \quad (6)$$

einer magnetischen Feldstärke von  $B_{\text{vertikal}} \approx 37,39 \mu\text{T}$  entspricht. Die Messwerte für die Messung der Resonanzfeldstärke sind in Tabelle 1 zu sehen.

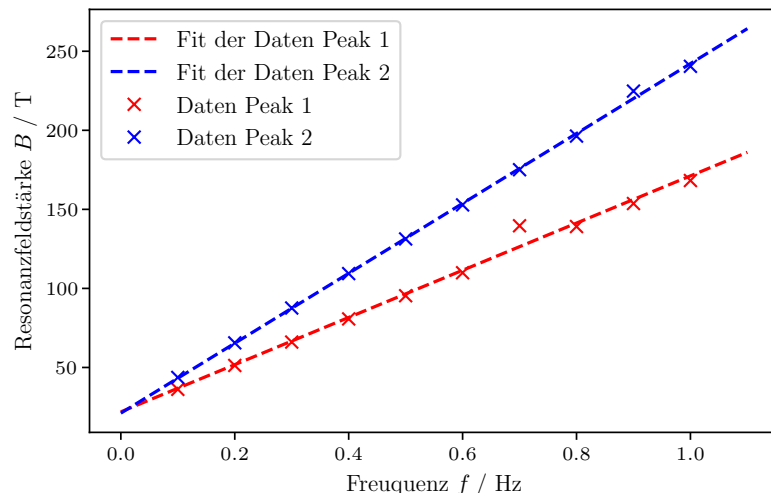
**Tabelle 1:** Frequenz, Stromstärke der Resonanzfeldstärke der Sweep Spule und Spannung der Horizontalen Spule.

$f$ [kHz]	$I_{\text{P1}}$ [A]	$I_{\text{P1}}$ [A]	$U_{\text{ho, 1}}$ [mV]	$U_{\text{ho, 2}}$ [mV]
100	0,0599	0,0724	0	0
200	0,071	0,0947	4,8	4,8
300	0,0464	0,0821	21,7	21,7
400	0,0416	0,0891	31,7	31,7
500	0,0258	0,0853	45,5	45,5
600	0,0275	0,0986	53,2	53,2
700	0,05	0,0759	62,4	73,7
800	0,0274	0,0943	69,9	79,5
900	0,0236	0,0743	79,5	102,6
1000	0,0393	0,084	82,4	108,2

Die Spannung der horizontalen Spule lässt sich nach

$$I_{\text{ho}} = \frac{2 \cdot U_{\text{ho}}}{1000} \quad (7)$$

in den Strom der horizontalen Spule umrechnen. Aus den Strömen in der Sweep und horizontalen Spule lassen sich die Magnetfelder der beiden Spulen nach Gleichung 6 berechnen. Dabei sind  $N_H = 154$  und  $R_H = 0,1579\text{ m}$  die Windungszahl und der Radius der horizontalen Spule und  $N_S = 11$  und  $R_S = 0,1639\text{ m}$  die Windungszahl und der Radius der Sweep Spule. Die Magnetfelder der beiden Spulen werden addiert und sind in Abbildung 4 gegen die Frequenz aufgetragen. Dabei ist die Feldstärke  $B$  die Feldstärke im Resonanzfall bei gegebener Frequenz  $f$ .



**Abbildung 4:** Resonanzfeldstärke der Sweep Spule in Abhängigkeit der Frequenz.

Die Daten werden durch eine Funktion der Form

$$B(f) = a \cdot f + b \quad (8)$$

gefittet, wobei sich die Parameter  $a$  und  $b$  auf

$$a_1 \approx (1.4923 \pm 0.0551) \cdot 10^{-10} \frac{\text{T}}{\text{Hz}}$$

$$b_1 \approx (2.1934 \pm 0.3421) \cdot 10^{-5} \text{T}$$

für den ersten Peak und auf

$$a_2 \approx (2.2108 \pm 0.0213) \cdot 10^{-10} \frac{\text{T}}{\text{Hz}}$$

$$b_2 \approx (2.1103 \pm 0.1319) \cdot 10^{-5} \text{T}$$

für den zweiten Peak ergeben.  $b_1$  und  $b_2$  entsprechen dabei der horizontalen Erdmagnetfeldstärke, welche nicht durch das Ausrichten der Apparatur kompensiert werden konnte.

## 4.2 Messung des Lande-Faktors und des Kernspins

Aus  $a_1$  und  $a_2$  lässt sich nach Umstellen der Gleichung 5 der Lande-Faktor der beiden Isotope bestimmen. Dieser ergibt sich für die Messwerte des ersten Peaks auf

$$g_{F,1} = (0.479 \pm 0.018) \quad (9)$$

und für die Messwerte des zweiten Peaks auf

$$g_{F,2} = (0.3232 \pm 0.0031) . \quad (10)$$

Nach Gleichung Gleichung 3 berechnen sich die Theoriewerte der Lande Faktoren für  $^{85}\text{Rb}$  und  $^{87}\text{Rb}$  auf

$$g_{F,85,\text{theo}} = 0.3$$

$$g_{F,87,\text{theo}} = 0.5$$

Weswegen der erste Peak dem Isotop  $^{87}\text{Rb}$  und der zweite Peak dem Isotop  $^{85}\text{Rb}$  zugeordnet werden kann. Die Kernspins der beiden Isotope können dann durch Umstellen der Gleichung 3 auf

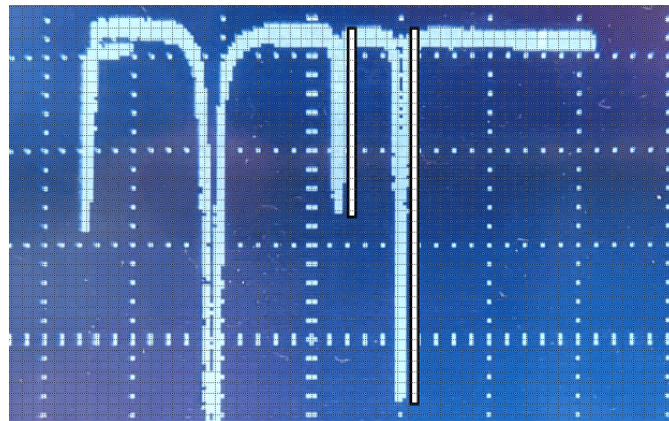
$$I_{87} = (1.532 \pm 0.026)$$

$$I_{85} = (2.520 \pm 0.006)$$

bestimmt werden.

## 4.3 Messung des Isotopenverhältnisses

Für die Messung des Isotopenverhältnisses wurde ein Foto des Oszilloskopes gemacht, welches dabei so eingestellt wurde, dass beide Resonanzpeaks der jeweiligen Isotope gut sichtbar sind. Zu sehen ist das Foto in Abbildung 5.



**Abbildung 5:** In Paint bearbeitetes Foto der Resonanzpeaks auf dem Oszilloskop. [7]

Die Längen der Peaks wurden dafür mit Balken verdeutlicht und ein feines Raster wurde über das Bild gelegt. Es können nun die Länge der Balken in Anzahl an Rasterkästchen bestimmt werden, welche sich auf

$$l_1 = 18 \pm 1$$

$$l_2 = 34 \pm 1$$

ergeben. Dabei wurde ein Ablesefehler von  $\pm 1$  angenommen. Aus den Längen der beiden Peaks lässt sich das Verhältnis der beiden Isotope abschätzen, durch

$$\frac{N_{85}}{N_{87} + N_{85}} \approx (0.654 \pm 0.014) . \quad (11)$$

#### 4.4 Abschätzung des quadratischen Zeeman Effekts

Die Übergangsenergien der aufgespaltenen Zustände in der Quantenzahl  $m_F$  lassen sich nach Gleichung 4 abschätzen. Dabei sind die Lande-Faktoren der Kernspins der beiden Isotope

$$g_{I,85} = 0.541224$$

$$g_{I,87} = 1.83419333333333$$

[5], und die  $\Delta$ 's der beiden Isotope

$$\Delta_{85} = 3035 \frac{\text{Mc}}{\text{s}}$$

$$\Delta_{87} = 6837.7 \frac{\text{Mc}}{\text{s}}$$

[1]. Die Übergangsenergien der beiden Isotope lassen sich dann bei der jeweiligen maximalen Feldstärke von

$$B_{85} \approx 240 \text{ T}$$

$$B_{87} \approx 168 \text{ T}$$

auf

$$\Delta E_{85} = (3.857 \pm 0.008) 10^{-12} \text{ eV}$$

$$\Delta E_{87} = (2.688 \pm 0.035) 10^{-12} \text{ eV}$$

abschätzen.

## 5 Diskussion

Im Folgenden werden die prozentualen Abweichungen mit

$$\Delta = \left| \frac{exp - theo}{theo} \right| \cdot 100\% \quad (12)$$

berechnet.

### 5.1 Messung der Resonanzfeldstärke der Sweep Spule

Die Messung der Resonanzfeldstärke der Sweep Spule in Abhängigkeit der Frequenz zeigt einen klaren linearen Zusammenhang, welcher durch einen Fit der Daten verdeutlicht wird und in Fitparametern resultiert die in den zu erwarteten Bereichen liegen.

### 5.2 Messung des Lande-Faktors und des Kernspins

Die Messung der Lande Faktoren und weisen mit  $\Delta g_{F,1} = (4.2 \pm 3.5) \%$  und  $\Delta g_{F,2} = (3 \pm 0.9) \%$  nur geringe Abweichungen von den Theoriewerten auf. Die Werte für die Kernspins haben ebenfalls mit  $\Delta I_1 = (2.1 \pm 1.7\%)$  und  $\Delta I_2 = (0.81 \pm 0.25\%)$  nur sehr geringe Abweichungen von den Theoriewerten.

### 5.3 Messung des Isotopenverhältnisses und abschätzung des quadratischen Zeeman-Effekts

Bei beiden Teilen der Auswertung gab es keine Auffälligkeiten in der Bestimmung der Werte. Die Anteile der beiden Isotope entsprechen den Erwartungen und die Übergangsenergien aus Unterabschnitt 4.4 sind ebenfalls in den zu erwartenden Bereichen.

## Literatur

- [1] Reuben Benumof. „Optical Pumping Theory and Experiment“. In: *American Journal of Physics* (1963), S. 151–161.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V21*:
- [3] Charles R. Harris u. a. „Array programming with NumPy“. In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55. URL: <http://matplotlib.org/>. Current version 3.4.3, DOI: 10.5281/zenodo.5194481.
- [5] *Internet Chemie*. URL: [https://www.internetchemie.info/#google\\_vignette](https://www.internetchemie.info/#google_vignette) (besucht am 03.06.2024).
- [6] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [7] Microsoft Corporation. *Microsoft Paint*. Version included in Windows 10. 1985. URL: <https://apps.microsoft.com/detail/9pcf5b6t72h?hl=en-us&gl=US>.
- [8] *OPTICAL PUMPING OF RUBIDIUM VAPOR*. URL: [https://www.princeton.edu/~romalis/PHYS312/Optical\\_pumping.pdf](https://www.princeton.edu/~romalis/PHYS312/Optical_pumping.pdf) (besucht am 03.06.2024).
- [9] Pauli Virtanen u. a. „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“. In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.