Technical University of Cluj - Napoca
Computer Science Department

Procesarea Imaginilor

(An 3, Semestrul 2)

Curs 6: Procesarea imaginilor de intensitate. Prelucrări bazate pe histogramă

Proprietăţi statistice de bază

Media intensităţii unei imagini de intensitate

$$\mu = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i,j)$$

Varianţa

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f(i,j) - \mu)^2$$

Notaţii

Pentru un semnal unidimensional, media se defineşte ca:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i) = \langle f(i) \rangle$$

Pentru cazul bidimensional (2D) avem:

$$\mu = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i,j) = \langle f(i,j) \rangle$$

Varianţa se scrie ca:

$$\sigma^2 = \langle |f(i,j) - \mu|^2 \rangle$$

Calculul mediei şi a varianţei

Aparent, este nevoie de două parcurgeri ale imaginii:
1. Se calculează media:

$$\mu = \langle f(i,j) \rangle$$

2. Se calculează varianţa pe baza mediei:

$$\sigma^2 = \langle |f(i,j) - \mu|^2 \rangle$$

Dar dacă detaliem ecuaţia varianţei:

$$\sigma^2 = \langle |f(i,j) - \mu|^2 \rangle = \langle |f(i,j)|^2 \rangle - 2\langle f(i,j) \rangle \mu + \mu^2 = \underline{\langle |f(i,j)|^2 \rangle} - \underline{\langle f(i,j) \rangle^2}$$

Ambii termeni se pot calcula printr-o singură parcurgere a imaginii.

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Histograma

Imaginea f(i,j) se poate considera o funcţie aleatoare cu valori între 0 şi 255. Putem defini:

Funcţia distribuţie de probabilitate:

$P(f)$ = Prob. Pixel value $< f$

cu condiţia ca: $0 \le P(f) \le 1$

şi: $P(f_{max})=1$

Funcţia densitate de probabilitate (PDF – probability density function):

$$p(f)=dP(f)/df$$

Pentru o imagine digitală, dacă avem M_0 pixeli cu valori $f_0 \rightarrow f_0 + \Delta f$ atunci PDF poate fi aproximată ca:

$$p(f_0)=M_0/N^2\ \Delta f$$

Dacă $\Delta f = 1$ atunci PDF este histograma normalizată

$$p(f)=h(f)/N^2$$

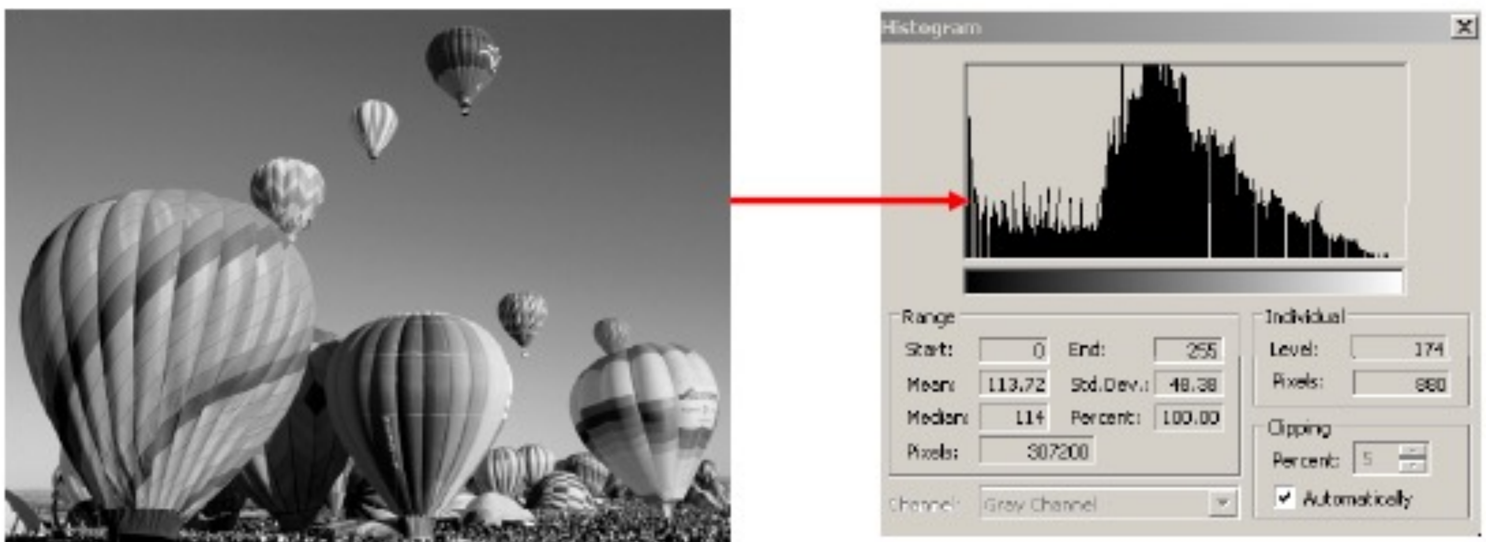
unde h(f) este **histograma nivelelor de gri** a imaginii f.

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Histograma

For g=0 **to** L-1
        h(g) = 0
End for

For i=0 **to** N-1
  For j=0 **to** N-1
        h (f (i,j)) ++
  End for
End for



Proprietăţi statistice calculate pe baza histogramei

Media şi varianţa se pot calcula pe baza funcţiei densitate de probabilitate (PDF):

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f p(f) df$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f-\mu)^2 p(f) df$$

Putem rescrie formulele de mai sus folosind histograma h(f)

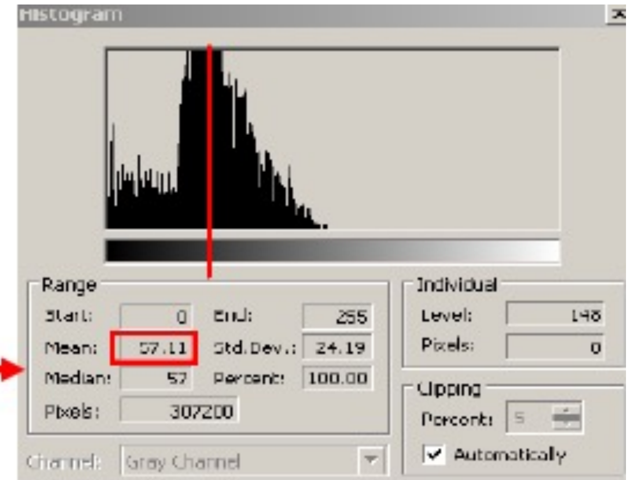
$$\mu = \frac{1}{N^2} \sum_{f=0}^{f_{\max}} f h(f)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{f=0}^{f_{\max}} (f-\mu)^2 h(f)$$

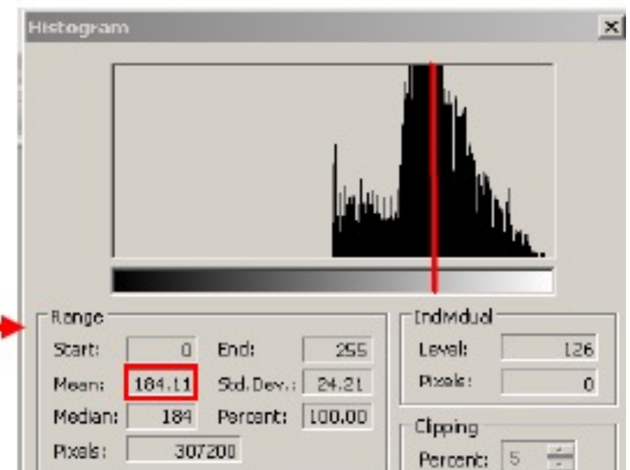
Semnificaţia mediei

Măsură a luminozităţii medii a imaginii:

Imagine Întunecată



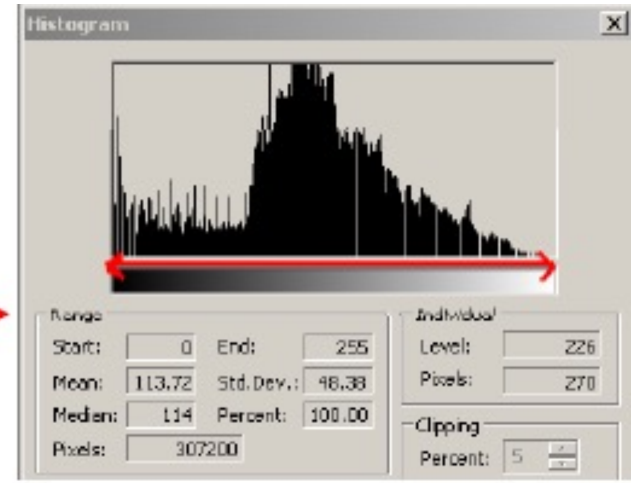
Imagine luminoasă



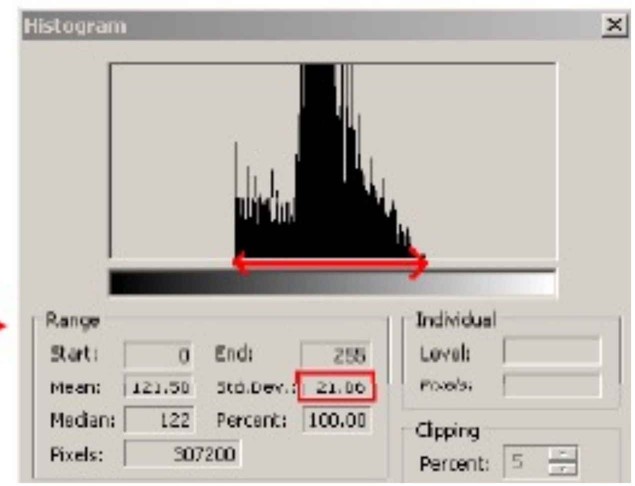
Semnificaţia varianţei

Măsură a contrastului. Rădăcina pătrată a varianţei se numeşte deviaţie standard.

Contrast mare



Contrast mic



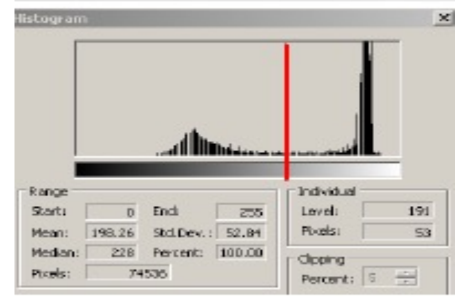
Aplicaţie: binarizare automată globală

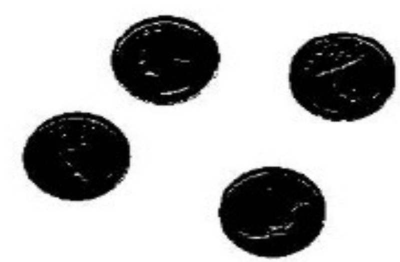
Algoritm de binarizare simplu

-Calcul automat al pragului T

-Funcţionează pe imagini cu histogramă bimodală (două vârfuri, obiecte şi fundal)

Descrierea algoritmului





1. Se ia o valoare iniţială pentru *T*:

$$T_0 = \mu \quad \text{sau} \quad T_0 = (f_{MAX} + f_{MIN})/2$$

2. Se segmentează imaginea folosind T, obţinându-se două mulţimi:

$$G1: f[i,j] > T \Rightarrow \mu_{G1}$$

$$G2: f[i,j] < T \Rightarrow \mu_{G2}$$

3. Se calculează noul prag:

$$T = (\mu_{G1} + \mu_{G2})/2$$

4. Se repetă paşii 2-3 până când

$$T_k - T_{k-1} < e$$

Implementarea eficientă a acestui algoritm foloseşte histogramele pentru calculul mediilor !!!

Metoda Otsu

Definirea problemei

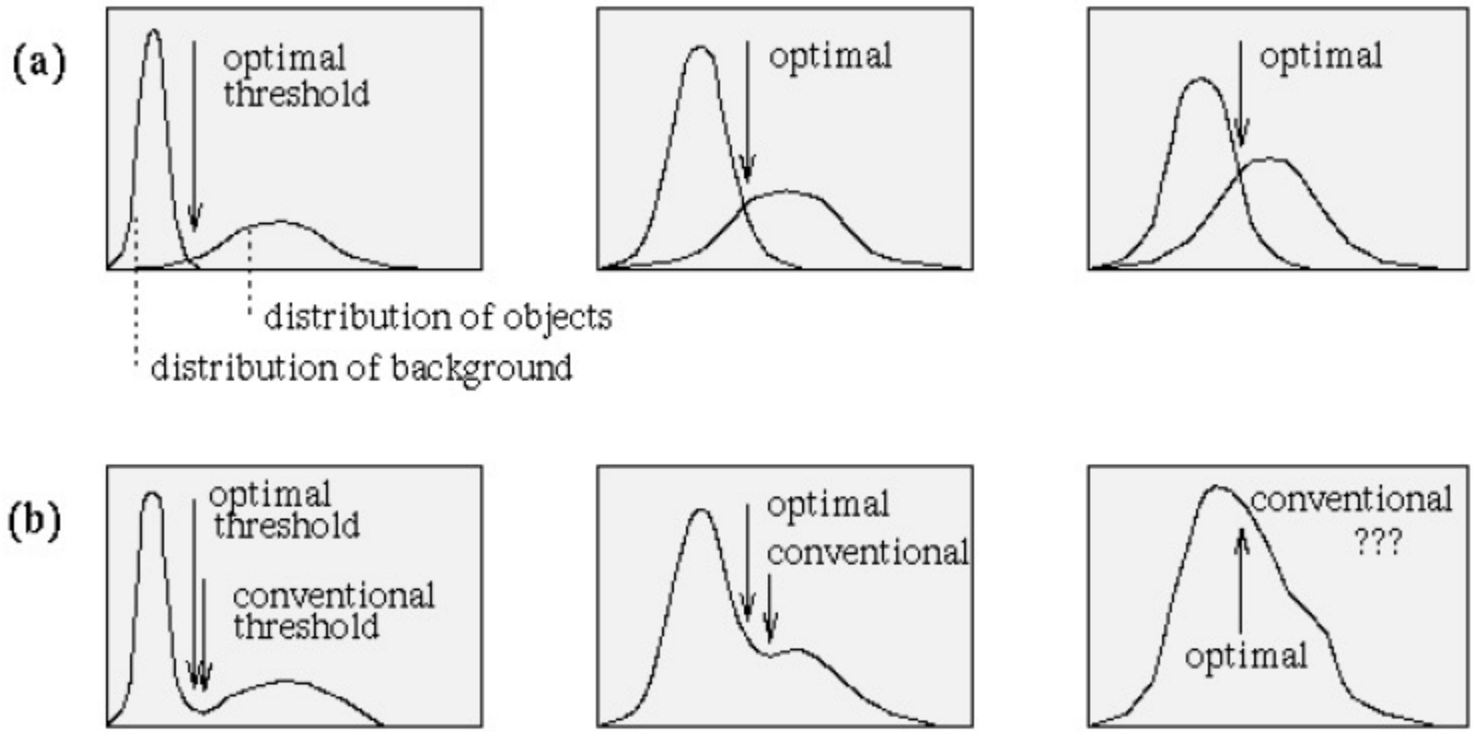
- Avem două grupuri de pixeli, care se întind pe domenii de intensităţi diferite (ex: obiecte şi fundal). Problema selecţiei unui prag este complicată de faptul că aceste domenii de intensitate uneori se suprapun parţial. Se doreşte minimizarea erorilor de clasificare a unui pixel obiect ca fundal, şi viceversa.

- Pentru realizarea acestui deziderat, încercăm să minimizăm aria de sub histograma unei regiuni, care pe baza pragului calculat va fi atribuită celeilalte regiuni. Vom considera aceste două regiuni ca două grupuri.

- Pragul va fi ales astfel ca cele două grupuri să fie cât mai "strânse", minimizând astfel suprapunerea.

- O măsură a omogenităţii grupului este varianţa. Un grup cu omogenitate mare are o varianţă mică, un grup cu omogenitate mică are varianţă mare.

Metoda Otsu



Histograme de nivele de gri aproximate prin două distribuţii normale. Pragul se alege pentru a avea probabilitatea minimă de a segmenta greşit.

a) Distribuţia de probabilitate a fundalului şi a obiectelor
b) Histograma rezultată, şi pragurile optime

Metoda Otsu

Varianţa ponderată intra-clasă este: $\sigma_w^2(t) = q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t)$

Probabilităţile asociate claselor sunt estimate ca: $q_1(t) = \sum_{i=1}^{t} P(i)$ $\quad q_2(t) = \sum_{i=t+1}^{I} P(i)$

unde

$$P(i) = \frac{H(i)}{N^2}$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

Mediile claselor sunt definite ca: $\mu_1(t) = \sum_{i=1}^{t} \frac{iP(i)}{q_1(t)}$ $\quad \mu_2(t) = \sum_{i=t+1}^{I} \frac{iP(i)}{q_2(t)}$

Varianţele individuale ale claselor sunt definite ca:

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{i=1}^{t} [i - \mu_1(t)]^2 \frac{P(i)}{q_1(t)} \qquad \sigma_2^2(t) = \sum_{i=t+1}^{I} [i - \mu_2(t)]^2 \frac{P(i)}{q_2(t)}$$

În acest moment avem toate ecuaţiile necesare pentru a măsura varianţa ponderată intra-clasă. Am putea să verificăm fiecare posibilă valoare a pragului *t*, şi să o alegem pe cea care minimizează această varianţă.

- Totuşi, relaţia dintre varianţa intra-clasă şi varianţa dintre clase se poate exploata pentru a găsi o recursivitate ce permite un calcul mai rapid.

Metoda Otsu

Varianţa totală a imaginii este:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{I}\left[(i-\mu)^2 P(i)\right] \qquad \mu = \sum_{i=1}^{I} iP(i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{t}[i-\mu_1(t)+\mu_1(t)-\mu]^2 P(i) + \sum_{i=t+1}^{I}[i-\mu_2(t)+\mu_2(t)-\mu]^2 P(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{t}\{[i-\mu_1(t)]^2 + 2[i-\mu_1(t)][\mu_1(t)-\mu]+[\mu_1(t)-\mu]^2\}P(i)$$

$$+ \sum_{i=t+1}^{I}\{[i-\mu_2(t)]^2 + 2[i-\mu_2(t)][\mu_2(t)-\mu]+[\mu_2(t)-\mu]^2\}P(i)$$

Dar: $\sum_{i=1}^{t}[i-\mu_1(t)][\mu_1(t)-\mu]P(i)=0 \qquad \sum_{i=t+1}^{I}[i-\mu_2(t)][\mu_2(t)-\mu]P(i)=0$

Astfel $\Rightarrow$ $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{t}[i-\mu_1(t)]^2 P(i) + [\mu_1(t)-\mu]^2 q_1(t) + \sum_{i=t+1}^{I}[i-\mu_2(t)]^2 P(i) + [\mu_2(t)-\mu]^2 q_2(t)$

$$\sigma^2 = [q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t)] + \{q_1(t)[\mu_1(t)-\mu]^2 + q_2(t)[\mu_2(t)-\mu]^2\}$$

$$\mu = q_1(t)\mu_1(t) + q_2(t)\mu_2(t) \qquad 1-q_1(t)=q_2(t)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \sigma_w^2(t) + q_1(t)[1-q_1(t)][\mu_1(t)-\mu_2(t)]^2$$

Metoda Otsu

Pentru orice prag, varianţa totală a imaginii este suma dintre varianţa intra-clasă, şi varianţa dintre clase.

$$\sigma^2 = \underbrace{\sigma_w^2(t)}_{\text{varianţa intra-clasă}} + \underbrace{q_1(t)[1 - q_1(t)][\mu_1(t) - \mu_2(t)]^2}_{\text{varianţa dintre clase}}$$

-Deoarece varianţa totală este constantă, independentă de pragul t, efectul alegerii pragului este doar de a schimba ponderea celor două varianţe.
-Problema minimizării varianţei intra-clasă este astfel echivalentă cu problema maximizării varianţei dintre clase.
-Acest lucru se poate face recursiv.

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Metoda Otsu

Iniţializare: $q_1(0) = P(0)$; $\mu_1(0) = 0$

Recursivitate: $q_1(t+1) = q_1(t) + P(t+1)$

$$\mu_1(t+1) = \frac{q_1(t)\mu_1(t) + (t+1)P(t+1)}{q_1(t+1)}$$

$$\mu_2(t+1) = \frac{\mu - q_1(t+1)\mu_1(t+1)}{1 - q_1(t+1)}$$

Pentru fiecare prag potenţial *t*:

1. Se separă histograma în două clase, pe baza pragului
2. Se calculează media celor două clase
3. Se calculează varianţa dintre clase, conform ecuaţiei de pe slide-ul anterior

Se reţine pragul *t* care maximizează această varianţă.

Binarizarea prin aproximarea cu o imagine cu două nivele de gri

Dacă se dă imaginea $f_{i,j}$, imaginea binară este:

$$g_{ij} = \begin{cases} a \text{ if } f_{ij} < t \\ b \text{ if } f_{ij} \geq t \end{cases}$$

Unde *t* este pragul, iar *a* şi *b* sunt constante alese să minimizeze distanţa faţă de f pe intervalele specificate.

-Distanţa Euclidiană pe intervalul [0,t] este

$$D = \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D}(f_{ij} - g_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D}[(f_{ij})^2 - 2 f_{ij} g_{ij} + (g_{ij})^2] =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} k^2 H_k - 2a\sum_{k=0}^{t-1} kH_k + a^2\sum_{k=0}^{t-1} H_k}_{F(a)} + \underbrace{\sum_{k=t}^{P-1} k^2 H_k - 2b\sum_{k=t}^{P-1} kH_k + b^2\sum_{k=t}^{P-1} H_k}_{F(b)}$$

-Minimele funcţiilor F(a) şi F(b) sunt atinse atunci când a şi b sunt valorile medii ale intervalelor:

$$a = Min(F(a)) = m_i = \frac{\sum_{k=0}^{t-1} kH_k}{\sum_{k=0}^{t-1} H_k} \qquad b = Min(F(b)) = m_s = \frac{\sum_{k=t}^{P-1} kH_k}{\sum_{k=t}^{P-1} H_k}$$

Binarizarea prin aproximarea cu o imagine cu două nivele de gri

Distanţa pe întreaga imagine este:

$$D = \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D}(f_{ij} - g_{ij})^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^{P-1} k^2 H_k}_{} - \underbrace{\left[\frac{\left(\sum_{k=0}^{t-1} kH_k\right)^2}{\sum_{k=0}^{t-1} H_k} + \frac{\left(\sum_{k=t}^{P-1} kH_k\right)^2}{\sum_{k=t}^{P-1} H_k}\right]}_{\text{F maxim pentru pragul optim}}$$

F maxim pentru pragul optim

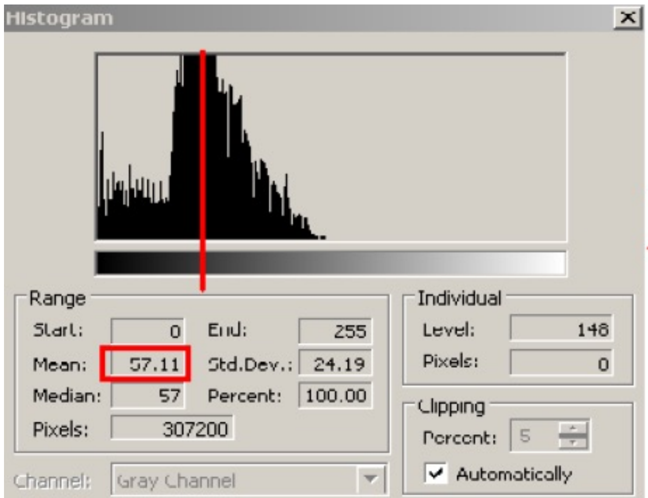
- F se poate scrie ca $F = m_i^2 A_i + m_s^2 A_s$ unde Ai şi As sunt numărul de pixeli cu valori sub şi peste pragul t.
- F trebuie evaluat pentru fiecare t, şi pragul t care duce la F maxim este ales.

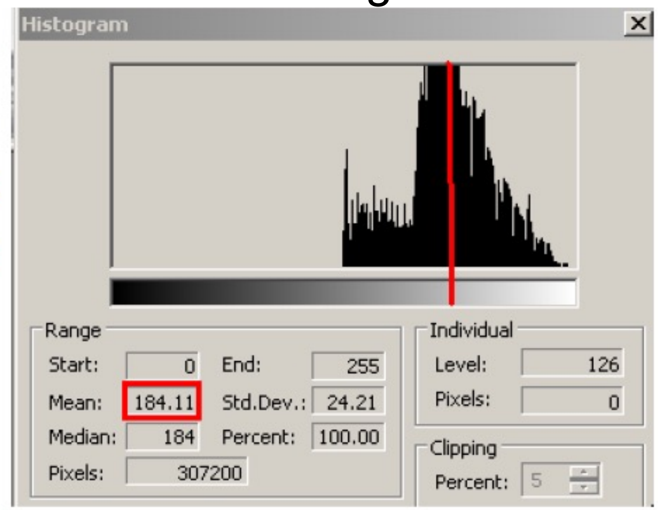
- Algoritmul se poate aplica pentru mai multe nivele de segmentare t_1, t_2, ... t_n, prin împărţirea intervalelor. Primul pas ne dă $t_{n/2}$, apoi algoritmul se aplică pe intervalele $[0, t_{n/2}]$ şi $[t_{n/2}, P-1]$, etc.

Îmbunătăţirea imaginilor: deplasamentul histogramei

$$Slide(f[i,j]) = f[i,j] + offset$$

Offset > 0 -> imagine mai luminoasă
Offset < 0 -> imagine mai întunecată

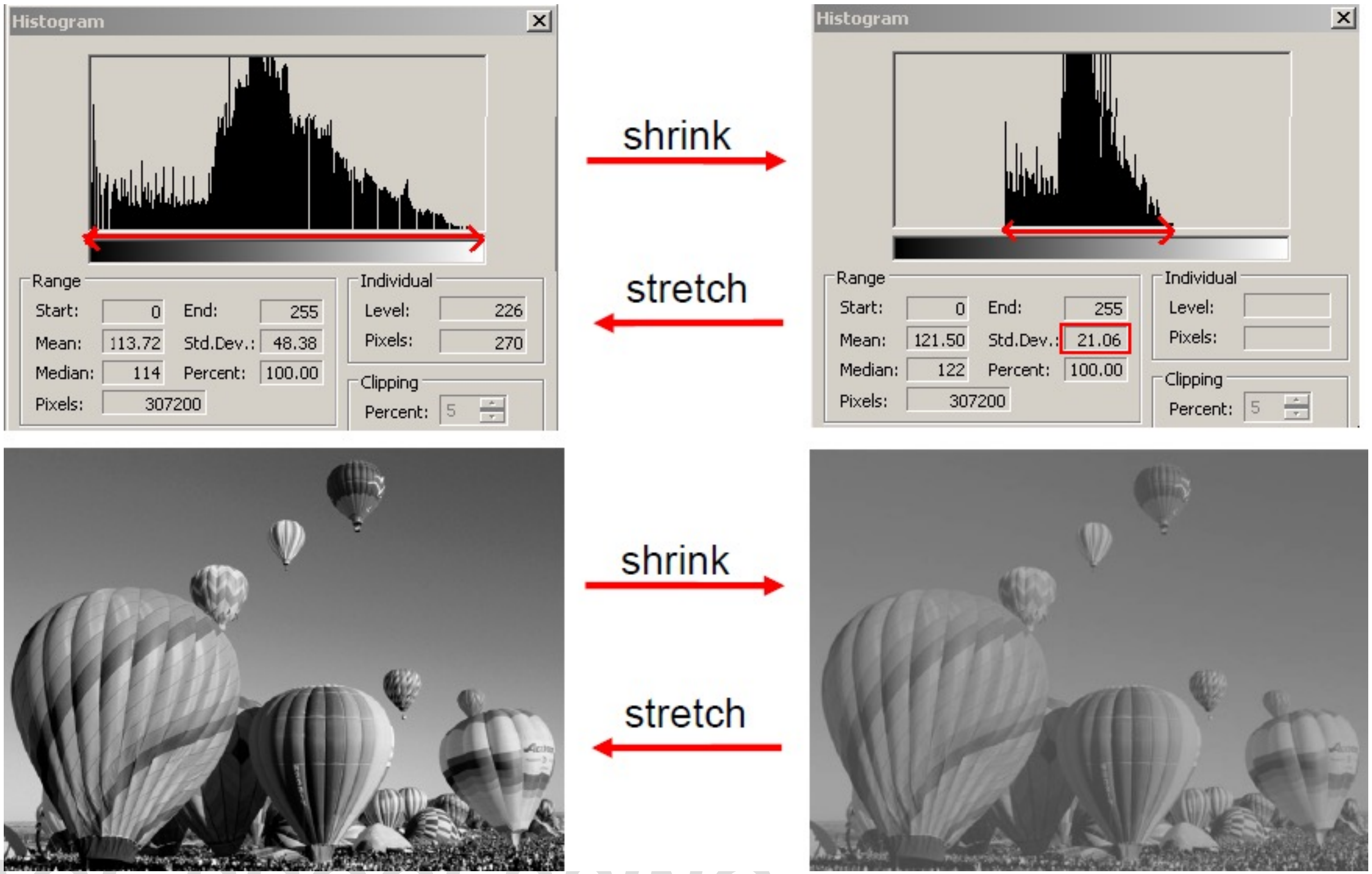




Întinderea/îngustarea histogramei

Alterarea contrastului:

$$\textit{Strecth/Shrink}(f[i,j]) = Final_{MIN} + (Final_{MAX} - Final_{MIN}) * (f[i,j] - f_{MIN}) / (f_{MAX} - f_{MIN})$$

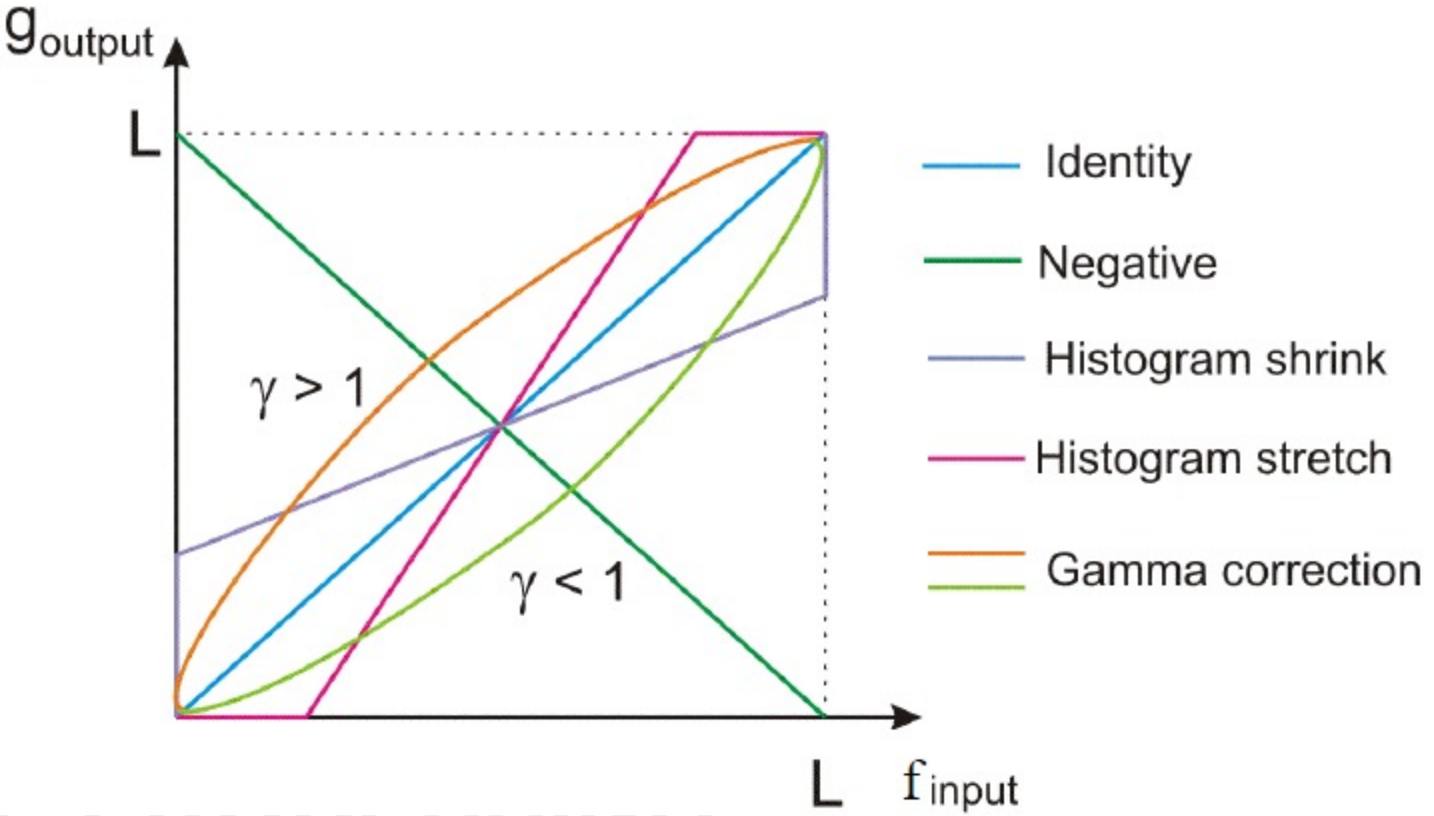


Folosirea unei funcţii de transformare

$g_{output} = T\ (f_{input})$

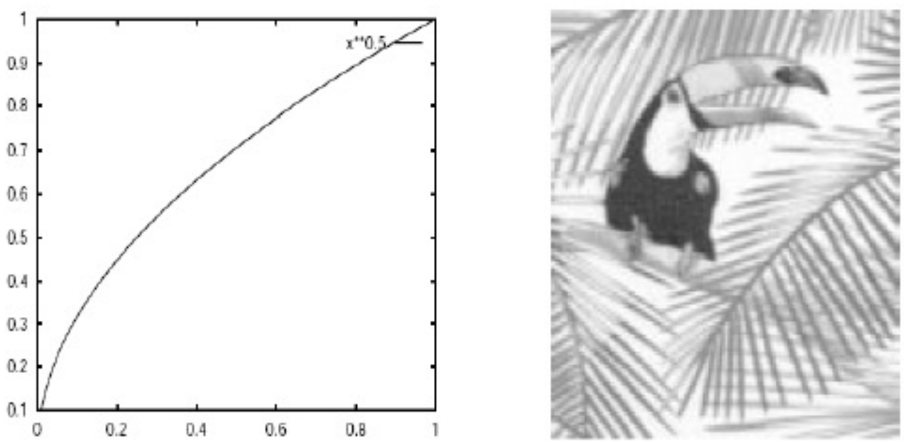
Ex. - gamma correction:

$$g_{out} = c \cdot f_{in}^{\gamma}$$

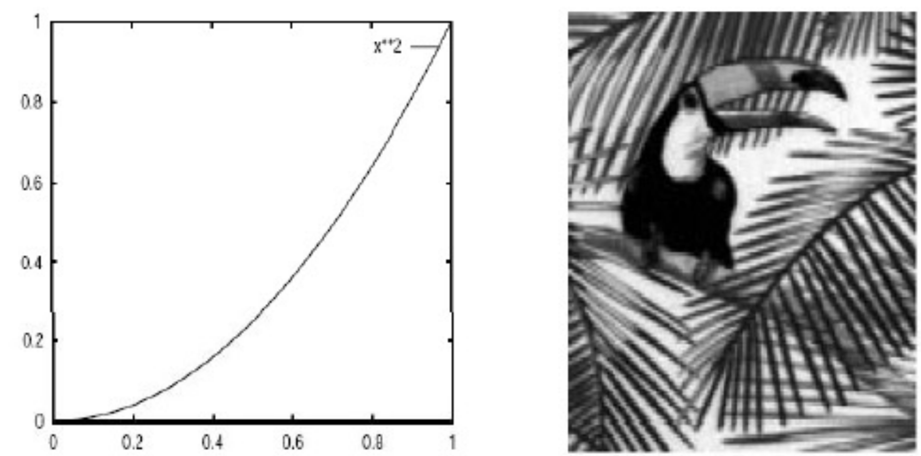


Corecţia gamma

- Procesul fotografic conţine neliniarităţi de forma $g(x,y) = f(x,y)^{\gamma}$ unde f este intensitatea percepută, g este intensitatea reală iar γ este o constantă.
- Pentru a corecta imaginea, avem nevoie de o transformare $T(g)=g^{1/\gamma}$, sau mai precis $T(g) = g_{max}\,(g/g_{max})^{1/\gamma}$

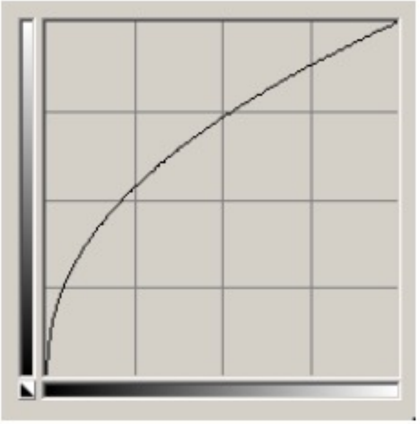


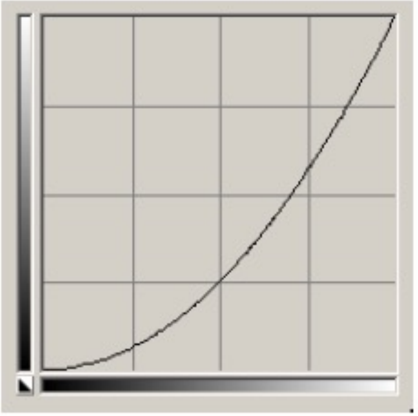
Correction of $\gamma = 2$



Correction of $\gamma = 0.5$

Corecţia gamma





Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Alte proprietăţi statistice

Cantitatea de informaţie asociată cu un nivel de gri *f*

$$I_g = -\log_2 p(f) \quad [bits]$$

-cantitatea de informaţie este mare atunci când se generează un nivel de gri “rar”.

Entropia – cantitatea de informaţie medie în imagine

$$H = -\sum_{g=0}^{L} p(f) \cdot \log_2 p(f) \quad [bits]$$

-câţi biţi sunt necesari pentru a codifica imaginea.

-H mare, pixelii sunt distribuiţi pe multe nivele de gri. $H_{max} = \log_2 L$ [bits] (PDF uniform)

Energia – cum sunt distribuite nivelele de gri

$$E = \sum_{g=0}^{L} [p(f)]^2$$

E mic – numărul de nivele de gri în imagine este mare

E max = 1, există un singur nivel de gri în imagine.

Procesarea histogramei: egalizarea

Scopul: distribuirea uniformă a pixelilor în plaja de nivele de gri.
Nivele de gri normalizate:

$$f \in [0 \ldots L\text{-}1] \Rightarrow r \in [0 \ldots 1]$$

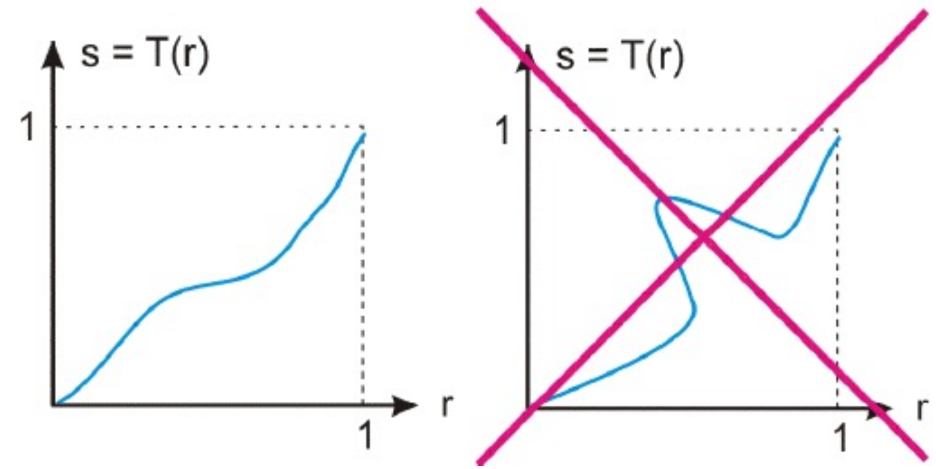
Funcţia de transformare:

$$s = T(r) \in [0 \ldots 1] \Rightarrow g \in [0 \ldots L\text{-}1]$$

Proprietăţile funcţiei *T*:

a) Bijectivă şi monoton crescătoare $\Rightarrow \exists\, r = T^{-1}(s)$

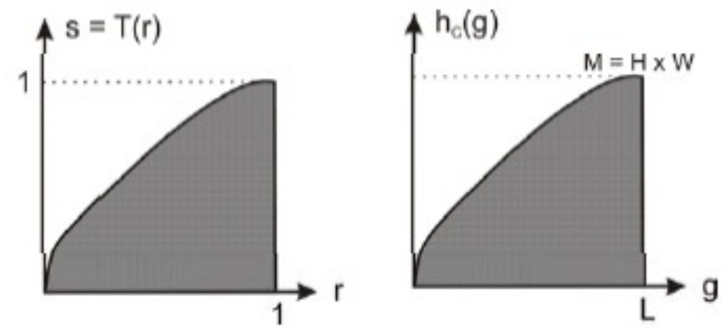
b) $0 <= T(r) <= 1$



Procesarea histogramei: egalizarea

Histograma cumulativă / densitatea cumulativă de probabilitate (CDF)

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$$



T satisface condiţiile a şi b.

Regula lui Leibniz: derivata unei integrale definite faţă de limita superioară este funcţia integrată evaluată în acel punct:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\int_0^r p_r(w)dw\right] = p_r(r)$$

Procesarea histogramei: egalizarea

$$p_s(s) = p_r(r)\frac{dr}{ds} = p_r(r)\frac{1}{p_r(r)} = 1 \quad , \quad 0 <= s <= 1$$

Astfel, p_s(s) este o funcţie densitate de probabilitate uniformă.

Algoritmul de egalizare a histogramei:

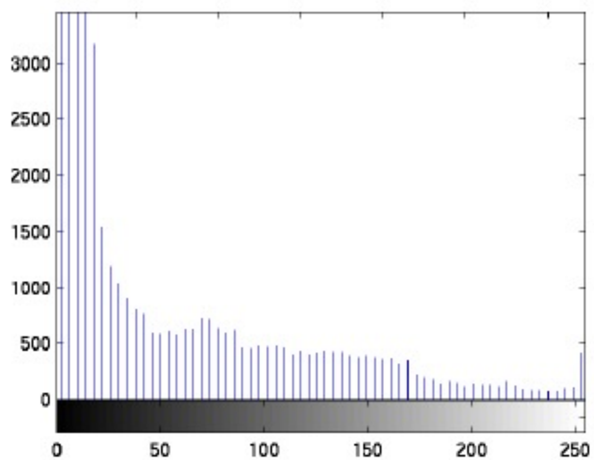
$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \quad , \quad k = 0 \ldots L$$

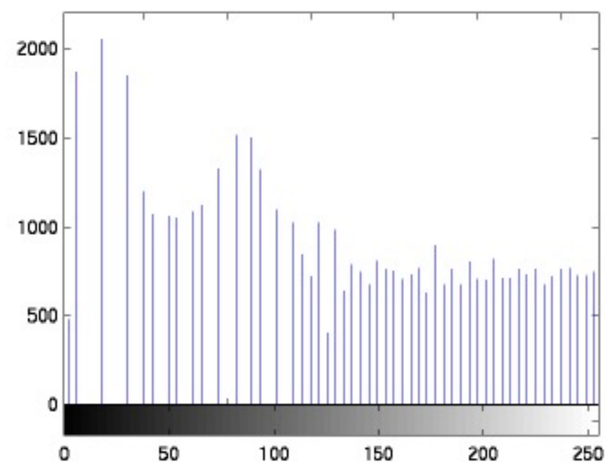
$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n} \quad , \quad k = 0 \ldots L-1$$

- Ultimul pas este re-scalarea rezultatului pentru intervalul 0..L-1.

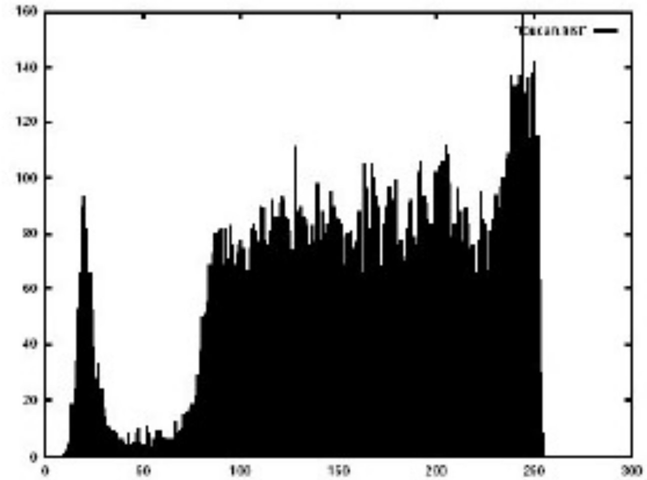
$$g_k = round(s_k(L-1))$$

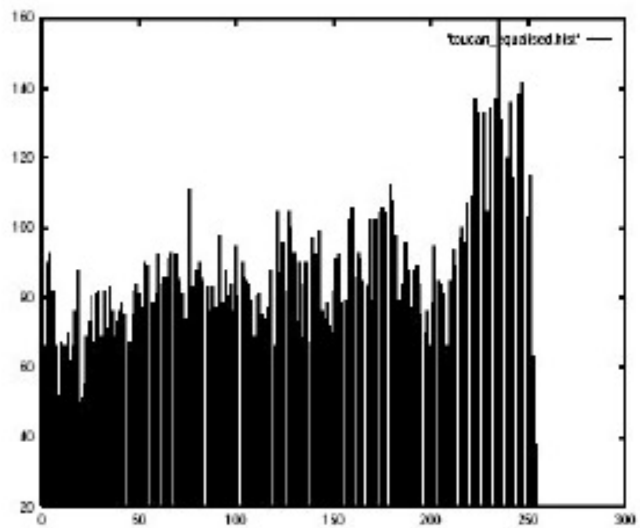
Procesarea histogramei: egalizarea



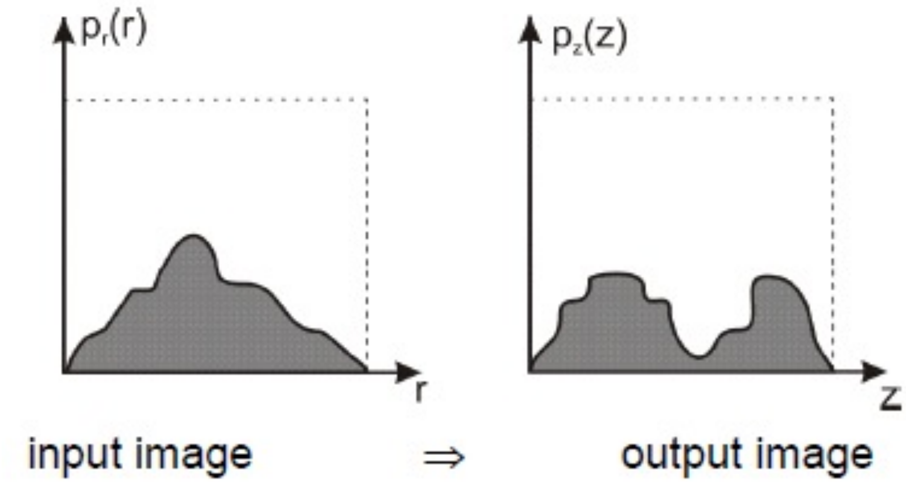


Procesarea histogramei: egalizarea





Specificarea histogramei



Pentru imaginea intrare avem: $s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$ (1)

Se definește variabila aleatoare z cu proprietatea: $G(z) = \int_0^z p_z(t)dt = s$ (2)

Din (1) si (2) rezultă: $G(z) = T(r)$

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$$

Specificarea histogramei

s_k <-> z_k

Nu există expresii analitice pentru T(r) si G^{-1} !:

Algoritm:

1. $r_k \leftrightarrow s_k$:

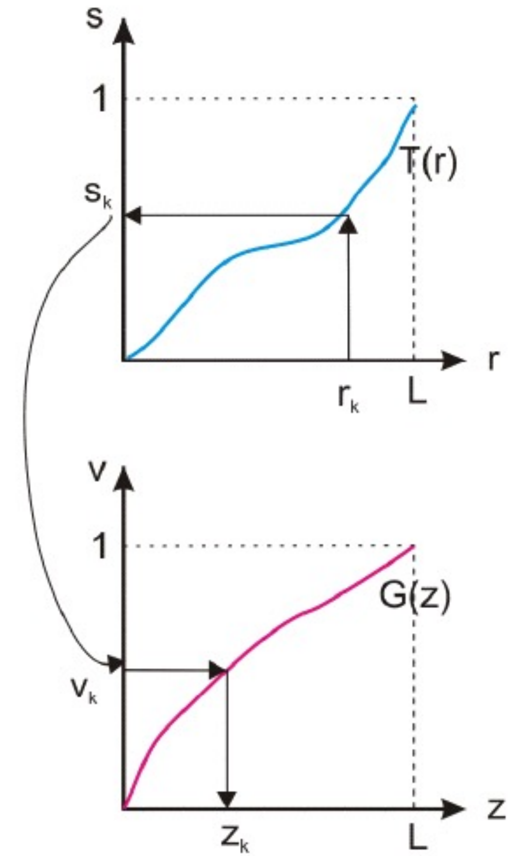
$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n} \quad , \quad k = 0 \ldots L$$

1. $s_k \leftrightarrow v_k$:

$$v_k = G(z_k) = \sum_{j=0}^{k} p_z(z_j) = s_k \quad , \quad k = 0 \ldots L$$

1. $s_k \leftrightarrow z_k$:

   Let $z' = z_k$, $k = 0, \ldots L$



z_k va fi cel mai mic z' ce satisface condiția:

$$(G(z')-s_k) >= 0$$