Technical University of Cluj - Napoca
Computer Science Department

Procesarea Imaginilor

(An 3, Semestrul 2)

Curs 7: Convoluţia. Transformata Fourier

Notaţii şi definiţii

O imagine continuă este reprezentată ca o funcţie de două variabile independente, $f(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$, etc.

O imagine discretă este reprezentată ca un tablou bidimensional de numere reale, $f(i,j)$, $u(k,l)$, $v(m,n)$, etc.

Simbolurile *i, j, k, l, m, n* sunt indici întregi ai tablourilor sau ai vectorilor

Simbolul *j* va nota unitatea imaginară $\sqrt{-1}$

Două funcţii binecunoscute, folosite frecvent, sunt funcţia **Dirac** şi funcţia **Kronecker**. Variantele lor bi-dimensionale sunt funcţii cu formă separabilă $f(x,y)=f1(x)*f2(y)$:

-Funcţia bi-dimensională continuă Dirac delta este definită ca $\delta(x,y) = \delta(x)\,\delta(y)$

-Funcţia bi-dimensională discretă Kroenecker delta este definită ca

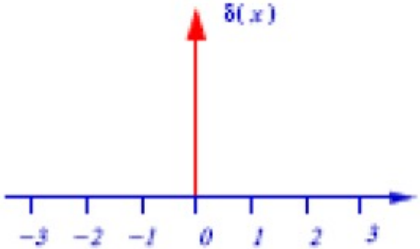
$$\delta(m,n) = \delta(m)\,\delta(n)$$

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Funcţia Dirac

Funcţia Dirac delta este o funcţie definită pe mulţimea numerelor reale, ce are valoarea zero în orice punct mai puţin în origine, şi care satisface condiţiile:

$$\delta(x) = 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$$



Funcţia poate fi imaginată ca un vârf foarte înalt şi foarte îngust localizat în origine. Funcţia Dirac nu trebuie considerată un vârf de înălţime infinită şi lăţime zero, deoarece satisface următoarea proprietate:

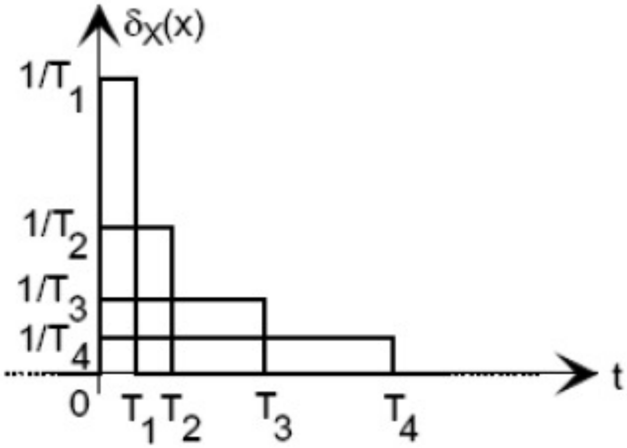
$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\,\delta(x)dx = a$$ pentru orice *a* constant.

Proprietatea fundamentală: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$ şi $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x)dx = f(0)$ pt. a=0, ε>0

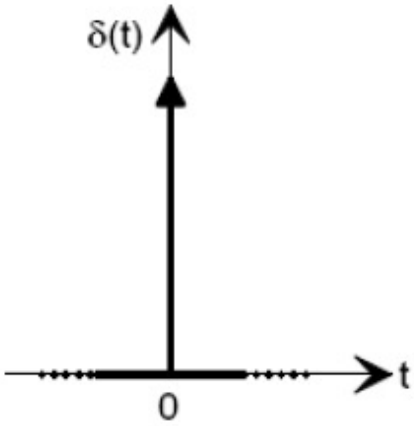
Proprietatea de deplasare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad \text{şi} \quad \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad \text{pt } \varepsilon>0$$

Funcţia Impuls Unitar



Pulsuri de diferite lăţimi



Funcţia impuls

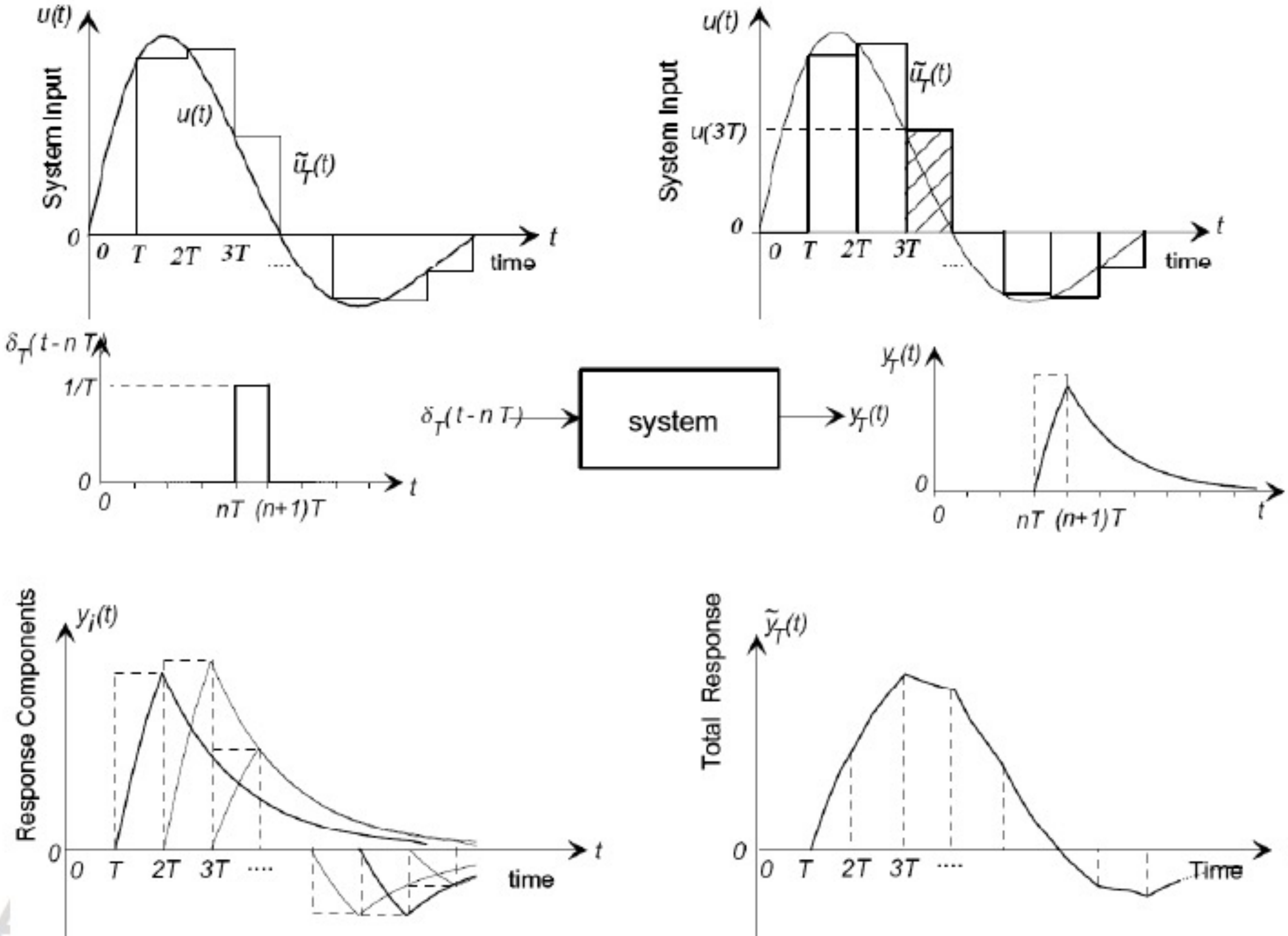
Figura prezintă o funcţie puls unitar $\delta_T(t)$ care este o funcţie rectangulară de durată T, având o amplitudine 1/T pe durata ei, astfel încât aria dreptunghiului să fie 1.

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0, & for\, t \le 0 \\ 1/T, & 0 < t \le T \\ 0, & for\, t > T \end{cases}$$

Funcţia Dirac poate fi definită ca limita funcţiei puls atunci când durata T se apropie de zero.

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t)$$

Răspunsul sistemelor la pulsuri individuale



Sisteme liniare şi invarianţa la deplasare

- Fie f(m,n) o secvenţă de intrare, şi g (m,n) o secvenţă de ieşire a unui sistem bi-dimensional $g(m,n) = H[f(m,n)]$
- Sistemul este **liniar** dacă şi numai dacă pentru două constante arbitrare a_1 şi a_2 este adevărată ecuaţia:

$$H[a_1 f_1(m,n)+a_2 f_2(m,n)]= a_1 H[f_1(m,n)]+a_2 H[f_2(m,n)] = a_1 g_1(m,n) + a_2 g_2(m,n)$$

- Proprietatea superpoziţiei liniare

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Sisteme liniare şi invarianţa la deplasare

- Ieşirea g(m,n) a unui sistem liniar poate fi obţinută astfel:

$$g(m.n) = \mathrm{H}[f(m,n)] = \mathrm{H}\left[\sum_{m'}\sum_{n'} f(m',n')\delta(m-m',n-n')\right]$$

$$= \sum_{m'}\sum_{n'} f(m',n')\mathrm{H}\left[\delta(m-m',n-n')\right]$$

$$\Rightarrow g(m,n) = \sum_{m'}\sum_{n'} f(m',n')h(m,n;m',n')$$

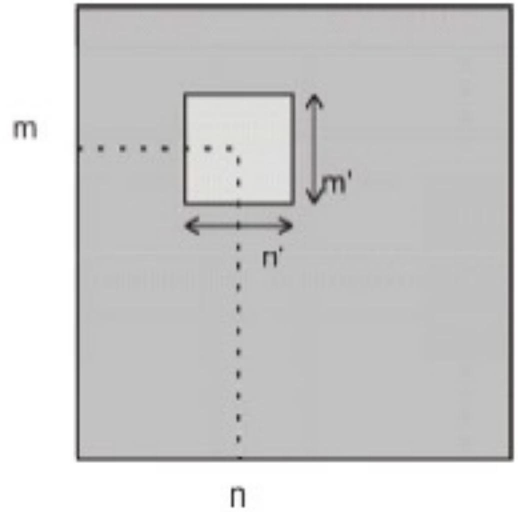
unde h(m,n,m’, n’) este răspunsul sistemului la impuls.

-Răspunsul la impuls h(m,n, m’, n’) este ieşirea sistemului H pentru locaţia (m,n) , unde intrarea este o funcţie bi-dimensională Kroenecker delta centrată în (m’, n’).

- Răspunsul la impuls se numeşte funcţia de dispersie punctiformă (Point Spread Function, PSF), unde intrarea şi ieşirea sunt valori pozitive, precum intensitatea în imagine.

Sisteme liniare şi invarianţa la deplasare

- Regiunea suport a unui răspuns la impuls este cea mai mică regiune închisă în planul (m,n) în afara căreia răspunsul este zero.
- Un sistem poate fi:
    - Cu răspuns finit la impuls (FIR), dacă răspunsul are o regiune suport finită
    - Cu răspuns infinit la impuls (IIR) dacă răspunsul are o regiune suport infinită.



Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

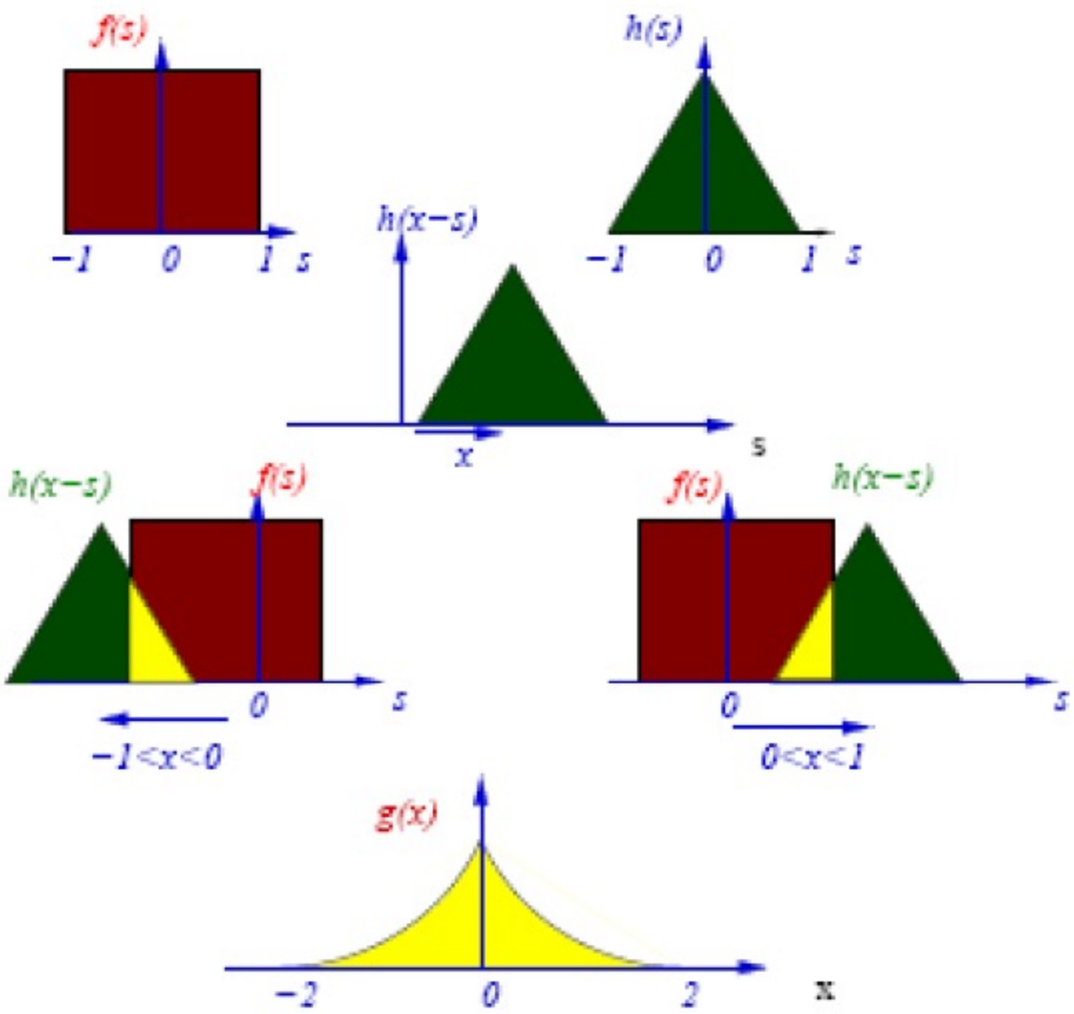
Sisteme liniare şi invarianţa la deplasare

- Un sistem se numeşte invariant spaţial sau invariant la deplasare dacă o translaţie a intrării cauzează o deplasare corespunzătoare a ieşirii.
- Pentru sisteme invariante la deplasare, *h(m,n,m', n')=h(m-m', n-n')*
- Forma răspunsului depinde doar de două variabile, ce descriu deplasarea.
- Forma răspunsului nu se modifică pe măsură ce impulsul se deplasează în planul (m,n).
- Pentru sisteme invariante la deplasare, ieşirea este

$$g(m,n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(m-m', n-n') f(m', n')$$

Procesul se numeşte convoluţie a intrării cu răspunsul la impuls.

Convoluţia



Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Convoluţia

- Operaţia de convoluţie este notată cu simbolul *

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-x', y-y') f(x', y') dx' dy'$$

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x', y') f(x-x', y-y') dx' dy'$$

$$g(m,n) = h(m,n) * f(m,n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(m-m', n-n') f(m', n')$$

$$g(m,n) = h(m,n) * f(m,n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(m', n') f(m-m', n-n')$$

Convoluţia

- Proprietăţile convoluţiei

- Comutativitate $f * g = g * f$
- Asociativitate $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributivitate $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Element neutru (identitate) $f * \delta = \delta * f = f$
- Asociativitate la înmulţirea cu un scalar

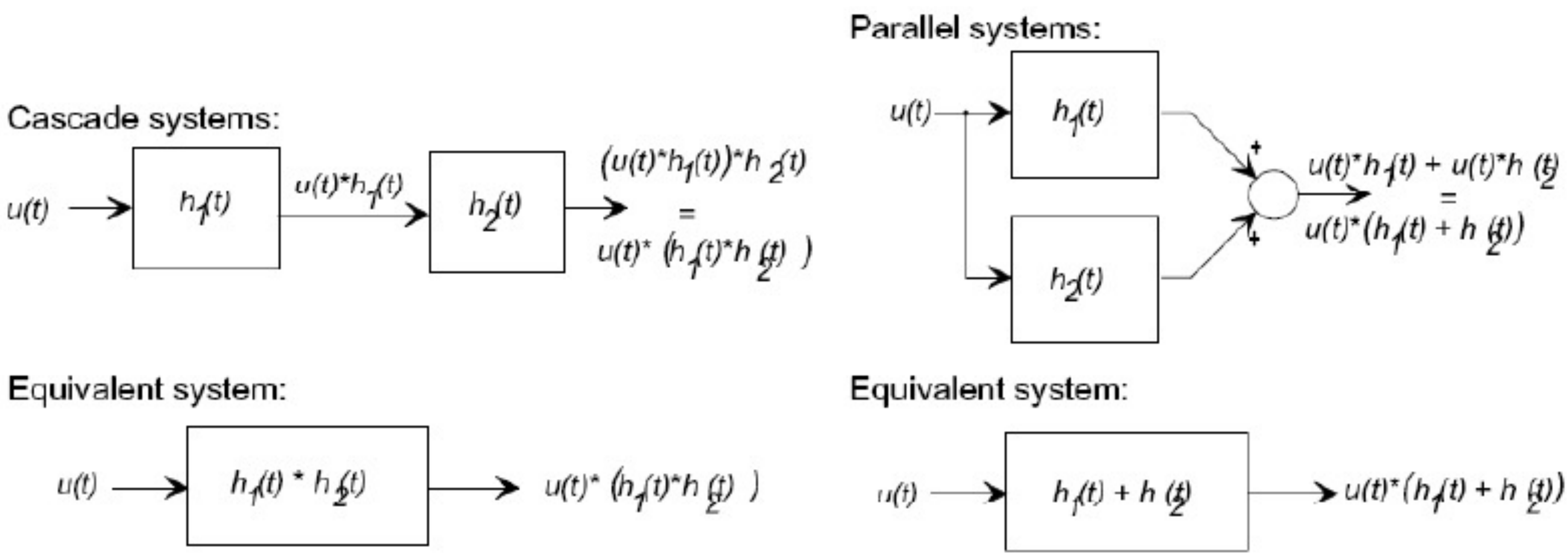
$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

- Regula de derivare $D(f * g) = Df * g = f * Dg$
- Teorema convoluţiei $F(f * g) = F(f)F(g)$

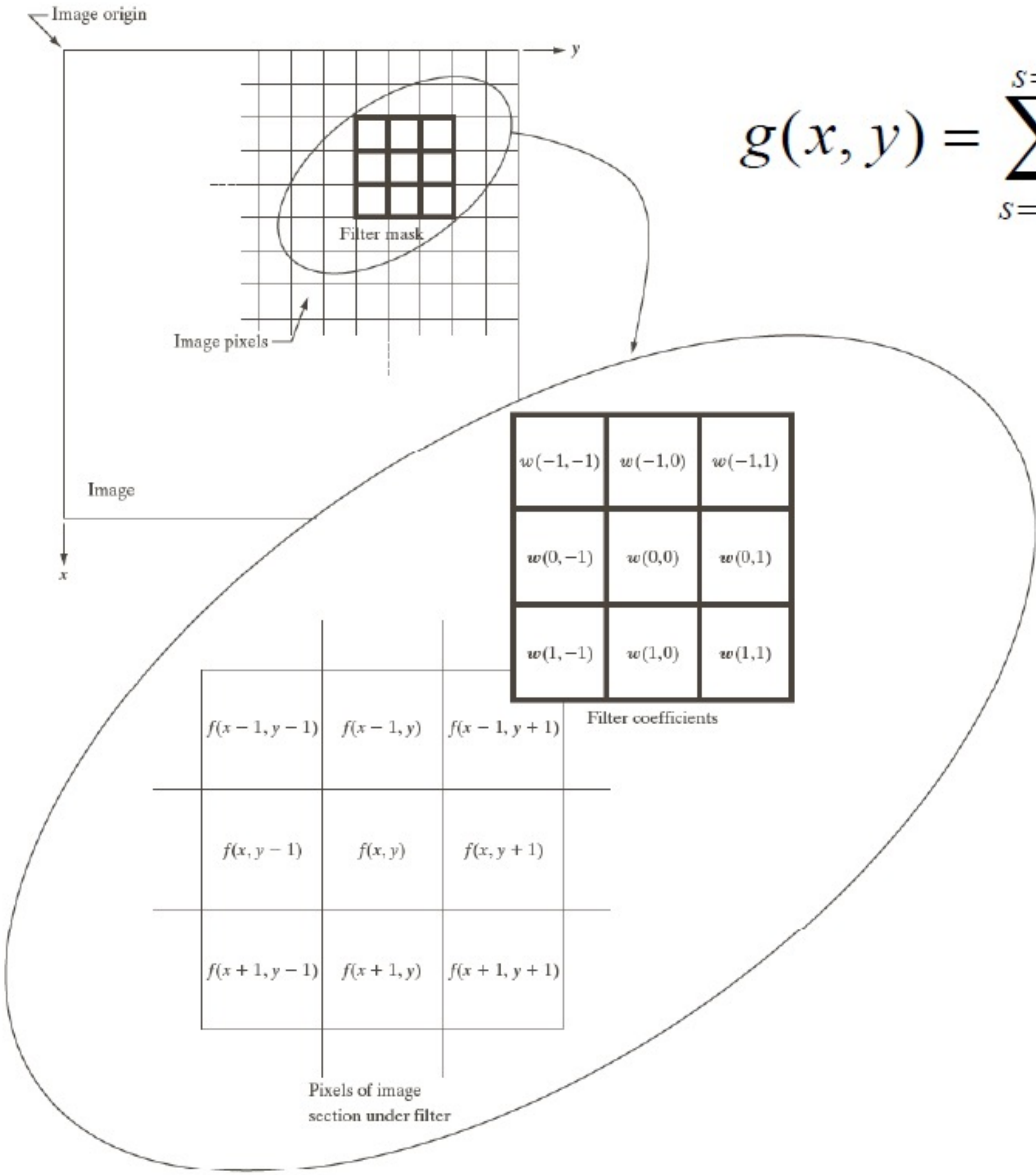
Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Convoluţia

- Răspunsuri la impuls pentru sisteme conectate în serie şi paralel



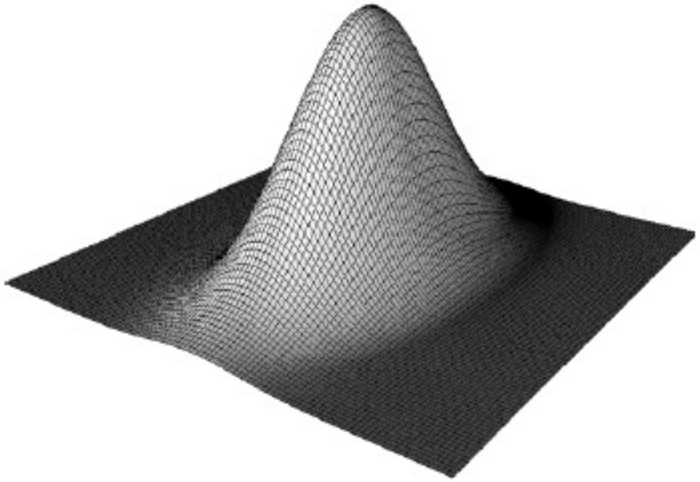
Convoluţia



$$g(x,y)=\sum_{s=-1}^{s=1}\sum_{t=-1}^{t=1} w(s,t)\,f(x+s,y+t)$$

Convoluţia

$$G_{2D}(x, y; \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



$\frac{1}{273}$

1	4	7	4	1
4	16	26	16	4
7	26	41	26	7
4	16	26	16	4
1	4	7	4	1

Aproximare discretă a unui nucleu 2D Gaussian, cu $\sigma=1.0$

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Transformata Fourier

Transformata Fourier converteşte datele imagine aranjate spaţial f(x,y) într-o reprezentare în spaţiul de frecvenţe F(u,v). Ambele reprezentări conţin aceeaşi informaţie, dar fiecare reprezentare are propriile avantaje şi dezavantaje.

Domeniu spaţial

+ Reprezentare intuitivă a datelor imagine
+ Filtrarea se aplică direct pe datele spaţiale
-Filtrarea cu nuclee mari ia mult timp.

Domeniul frecvenţial

-Reprezentare non-intuitivă a imaginii
+Filtrarea cu nuclee mari poate fi făcută mai rapid
-Imaginea şi nucleul de convoluţie trebuie convertite în spaţiul de frecvenţe, şi rezultatul filtrării trebuie apoi re-convertit în domeniul spaţial
+ Proiectarea nucleelor de convoluţie este mai uşoară.

Transformata Fourier

Imaginea
- un aranjament spaţial al nivelelor de gri
-se poate considera o funcţie de coordonate discrete în plan

Funcţia imagine poate fi descompusă în funcţii ortogonale numite funcţii bază
-Când funcţiile bază sunt combinate liniar, funcţia originală poate fi reconstruită
- Funcţiile bază pentru transformata Fourier sunt sinusoidele
- Se poate scrie

$$f(x,y) = \sum \textit{Weighted basis functions}$$

Transformata Fourier

Transformata Fourier a unei funcţii complexe f(x):

$$F(u) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j2\pi ux)dx$$

$$F(u) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos 2\pi ux - j\sin 2\pi ux)dx$$

Transformata inversă a lui F(u):

$$f(x) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp(j2\pi ux)du$$

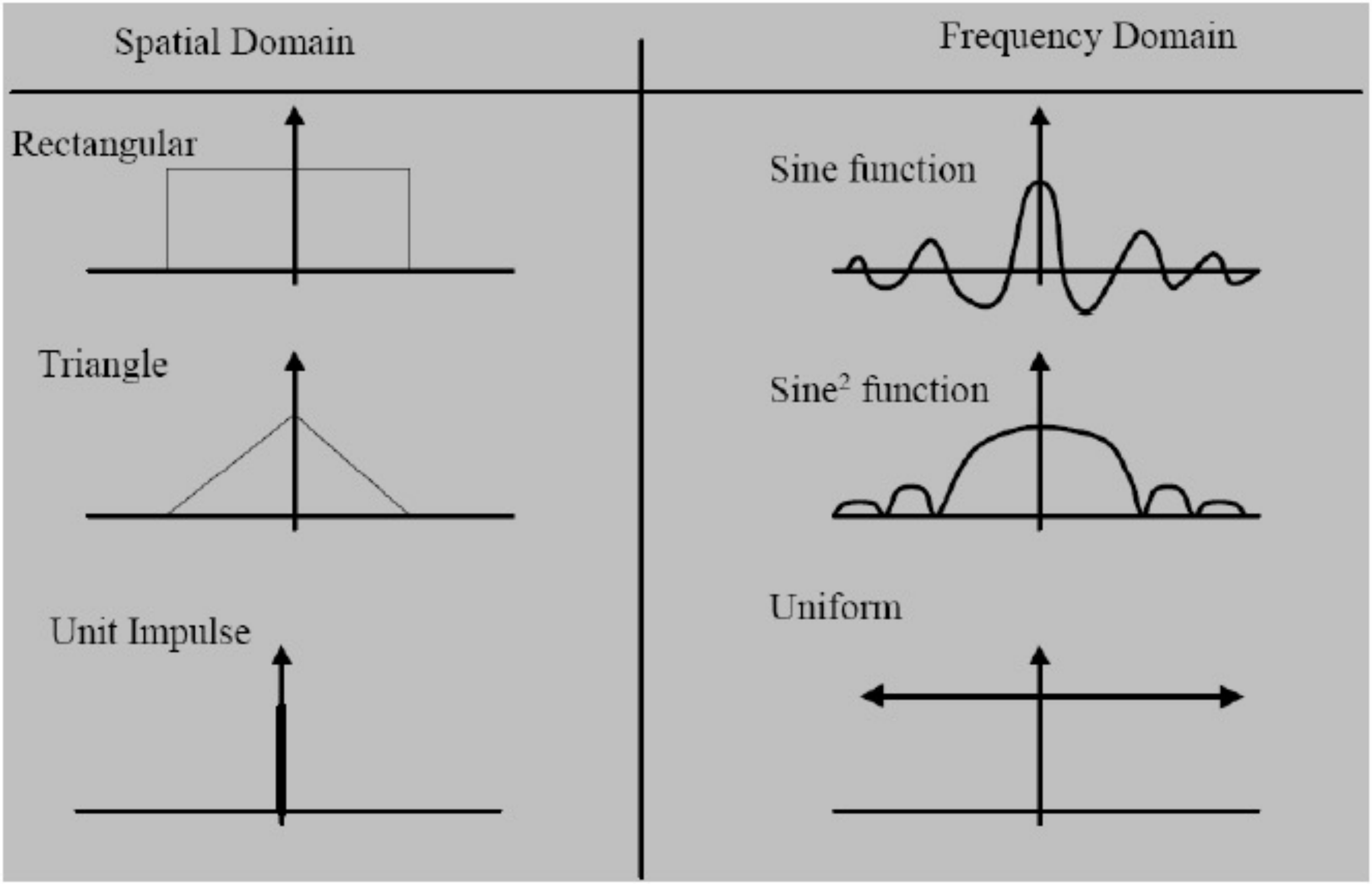
$$f(x) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(\cos 2\pi ux + j\sin 2\pi ux)du$$

Pentru cazul 2D:

$$F(u,v) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp(-j2\pi(ux+vy))dxdy$$

$$f(x,y) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}^{-1}[F(u,v)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp(j2\pi(ux+vy))dudv$$

Transformata Fourier

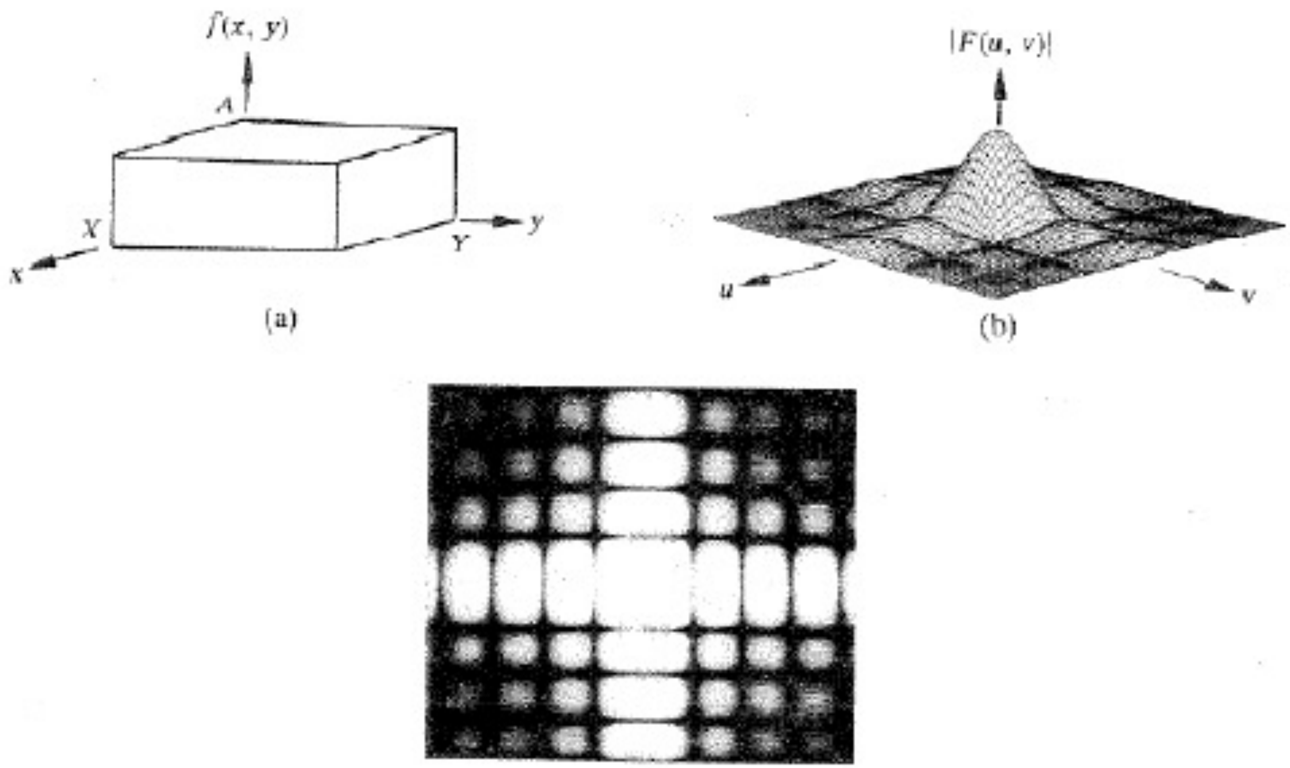


sinc=sin(x)/x

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Transformata Fourier

Transformata Fourier a unei funcţii 2D de tip dreptunghi



(c)

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Transformata Fourier Discretă

Transformata Fourier Discretă (DFT) directă:

$$F(u,v) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left[-j2\pi\left(ux/M + vy/N\right)\right]$$

$$(u = 0, 1, \ldots, M\text{-}1,\ v = 0, 1, \ldots, N\text{-}1)$$

Transformata Fourier Discretă inversă

$$f(x,y) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp\left[j2\pi\left(ux/M + vy/N\right)\right]$$

$$(x = 0, 1, \ldots, M\text{-}1,\ y = 0, 1, \ldots, N\text{-}1)$$

Proprietăţile transformatei Fourier

Frecvenţe spaţiale: dacă f(x,y) este luminozitatea iar x,y sunt coordonatele spaţiale ale imaginii, atunci u, v sunt frecvenţele spaţiale, reprezentând viteza de schimbare a luminozităţii cu distanţa. Frecvenţele u, v se măsoară în inversul unităţilor de distanţă.

Unicitate: pentru funcţii continue, f(x,y) şi F(u,v) sunt unice una faţă de cealaltă.

Separabilitate: transformata Fourier este separabilă, astfel că o transformată Fourier 2D poate fi realizată prin două transformări 1D de-a lungul celor două axe de coordonate.

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Proprietăţile transformatei Fourier

Liniaritate: transformata Fourier este o operaţie liniară, astfel că transformata sumei a două funcţii este suma transformatelor Fourier individuale:

$$F\{a f(x,y)+bg(x,y)\} = aF(u,v)+bG(u,v)$$

Conjugata complexă:

$$F\{f^*(x,y)\} = F^*(-u,-v)$$

Direct şi invers:

$$F\{F(u,v)\} = f(-x,-y)$$

$$F^{-1}\{f(x,y)\} = F(-u,-v)$$

Transformata directă şi inversă diferă doar prin semnul argumentelor.

Proprietăţile transformatei Fourier

Scalare:

$$f(a*x) <--> (1/|a|) * F(u/a)$$

Dacă funcţia devine mai lată în direcţia x, frecvenţa ei devine mai mică în această direcţie, şi viceversa.

Deplasament temporal (translaţie în domeniul spaţial)

$$f(x-x_0, y-y_0) <----> F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0+vy_0}{N})}$$

Când se deplasează timpul, transformata Fourier se multiplică cu funcţia exponenţială a unui număr imaginar, astfel că nu se modifică amplitudinea ci doar faza.

Deplasamentul în frecvenţă: complementul transformării temporale

$$f(x,y)\exp[-j2\pi(u_0 x/N + v_0 y/N)] <--> F(u-u_0, v-v_0)$$

Proprietăţile transformatei Fourier

Derivate: transformata Fourier a derivatei unei funcţii este:

$$F\{d f(x)/dx\} = j2\pi u F(u)$$

iar derivata a doua este:

$$F\{d^2 f(x)/dx^2\} = -(2\pi u)^2 F(u)$$

$$F\{df(x,y)/dx = j2\pi u F(u,v)$$

$$F\{d f(x,y)/dy\} = j2\pi v F(u,v)$$

$$F\{\Delta f(x,y)\} = -(2\pi w)^2 F(u,v) \qquad \text{where } w^2=u^2+v^2$$

Teorema convoluţiei: $g(x,y)=h(x,y)*f(x,y) \quad G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$

Conservarea produsului scalar: produsul scalar a două funcţii este egal cu produsul scalar al transformatelor lor Fourier. De aici se obţine formula conservării energiei (Parseval):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2 dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(u,v)|^2 dudv$$

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Proprietăţile transformatei Fourier

Coeficienţii Fourier sunt în general numere complexe, având parte reală şi imaginară:

$$F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)$$

O reprezentare echivalentă este sub formă de magnitudine şi unghi de fază:

$$F(u,v)=|F(u,v)|e^{j\theta(u,v)}$$

Spectru Fourier: $|F(u,v)| = sqrt(R(u,v)^2+I(u,v)^{2)}$

Unghiul de fază: $\Theta(u,v)=tan^{-1}(I(u,v)/R(u,v))$)

Spectrul de putere: $|F(u,v)|^2=R(u,v)^2+I(u,v)^2=P(u,v)$

Proprietăţile transformatei Fourier

Transformata DFT pe o imagine NxN este ciclică, de perioadă N, în ambele direcţii:

$$F(u + nN, v + mN) = F(u, v)$$

Calculul transformatei ne dă valoarea F(0,0) în colţul stânga sus. Putem deplasa F(u,v) pentru a plasa F(0,0) în centrul imaginii. Pentru acest lucru, se aplică o translaţie în domeniul de frecvenţă, cu u_0=N/2, şi v_0=N/2.

$$e^{j2\pi\left(\frac{\frac{N}{2}x+\frac{N}{2}y}{N}\right)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

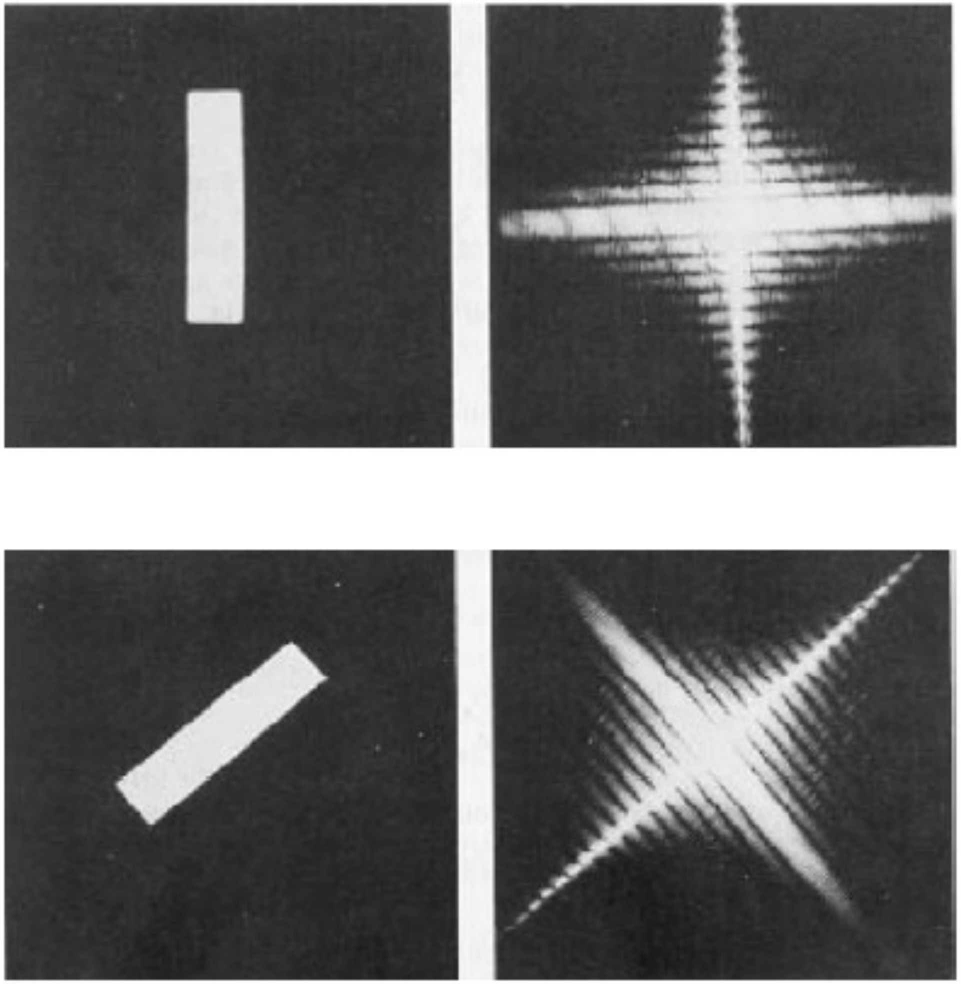
$$f(x,y)(-1)^{x+y} <--> F(u - N/2, v - N/2)$$

Pentru afişarea |F(u,v)| se obişnuieşte să se scaleze rezultatul:

$$D(u,v)= c \log (1 + |F(u,v)|)$$

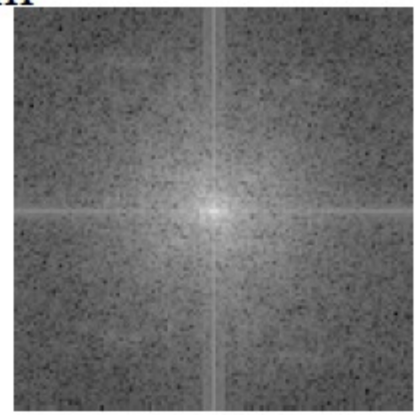
Proprietăţile transformatei Fourier

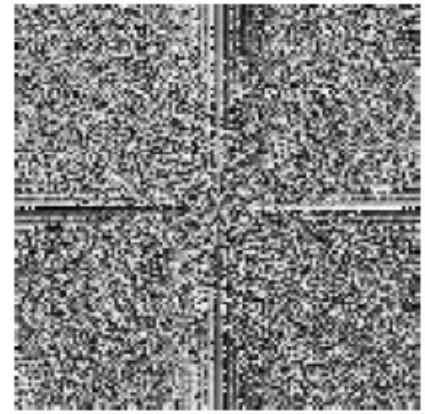
Proprietăţile transformatei Fourier



Proprietăţile transformatei Fourier

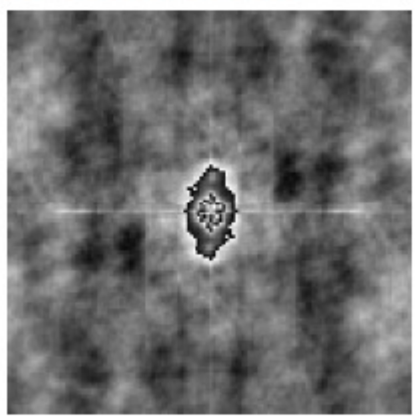
Direct Fourier Transform





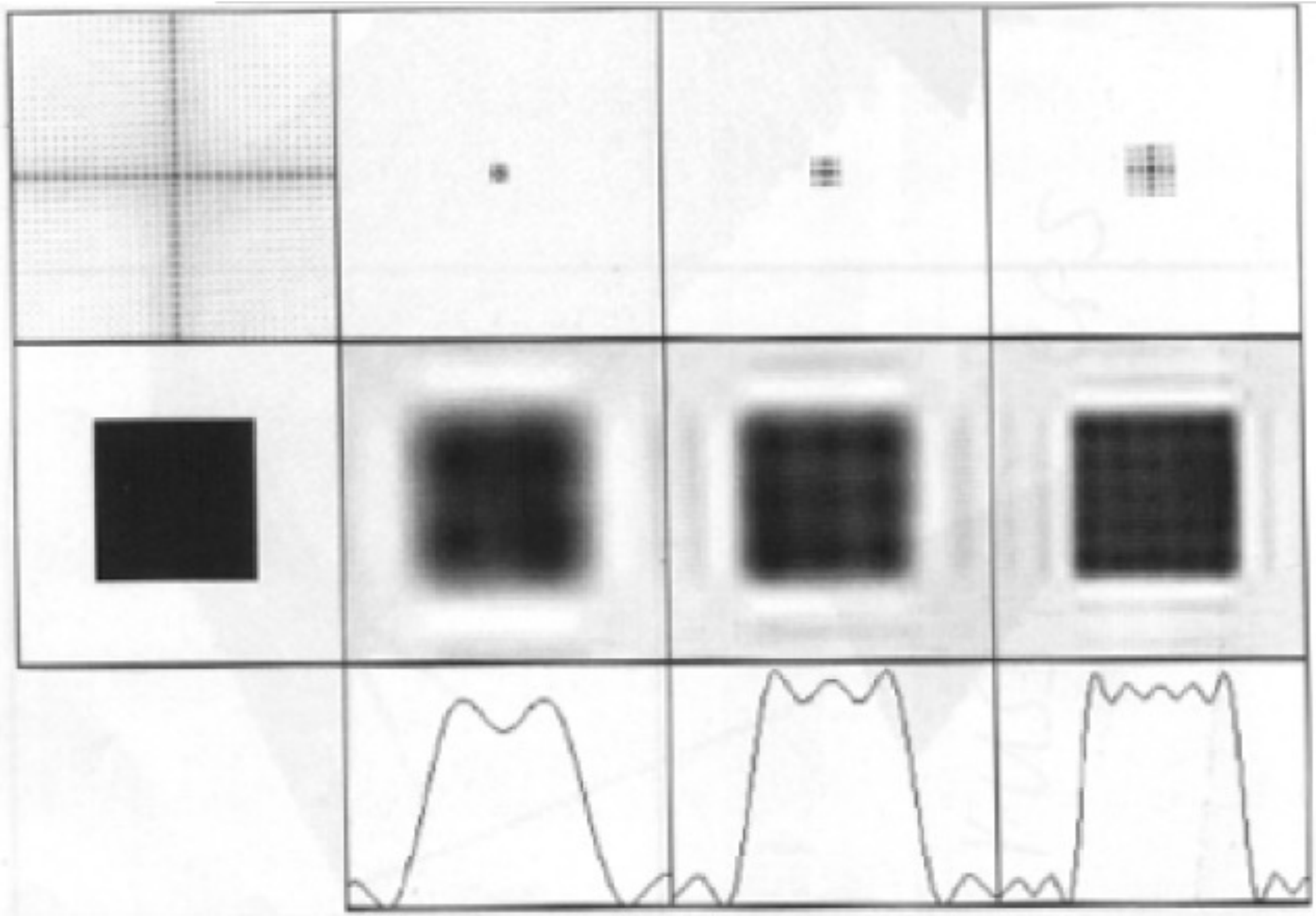
Original $\log(1+|F(u,v)|)$ $\phi(u,v)$

Invers Fourier Transform

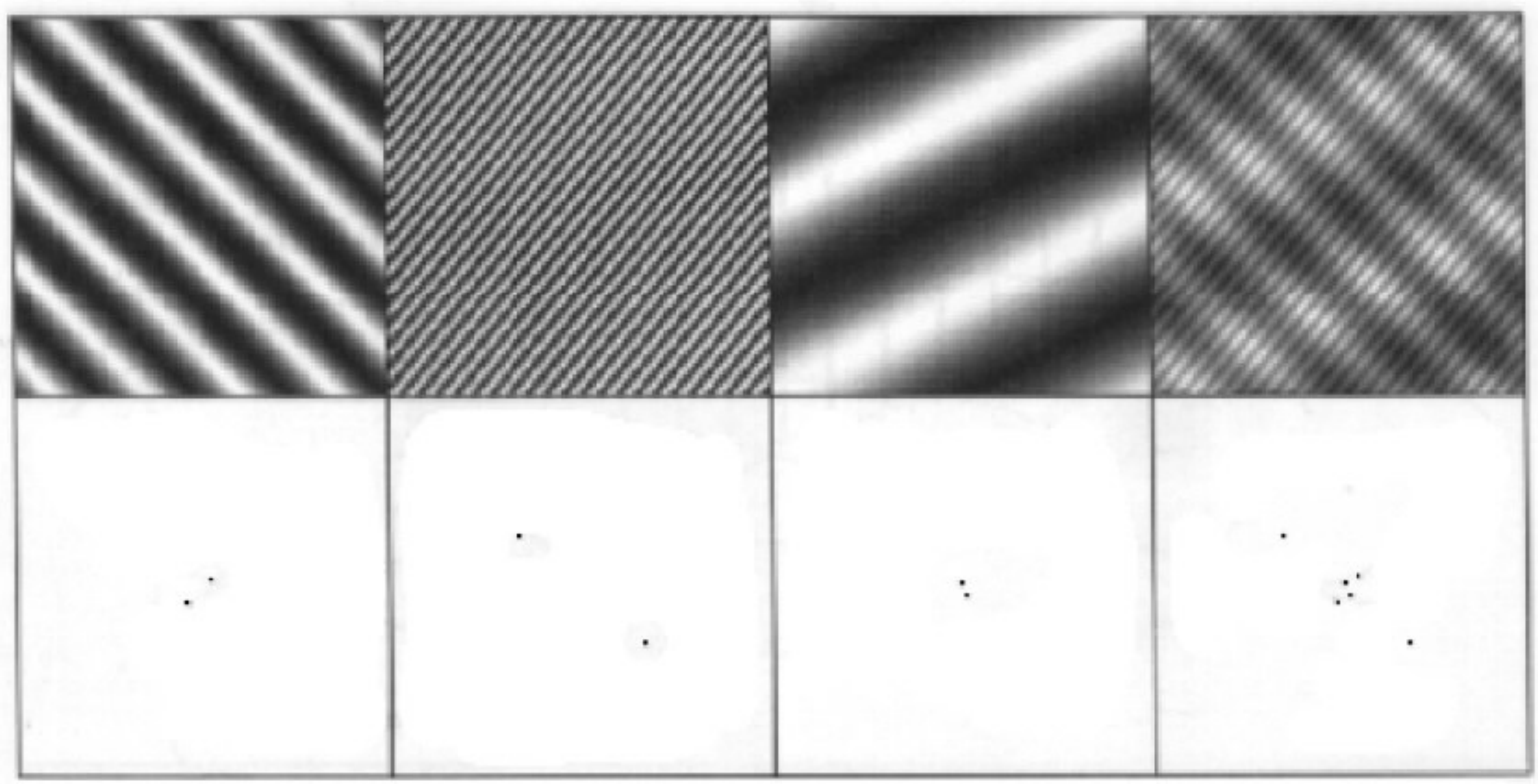


Eliminarea informaţiei de fază Eliminarea informatiei de magnitudine

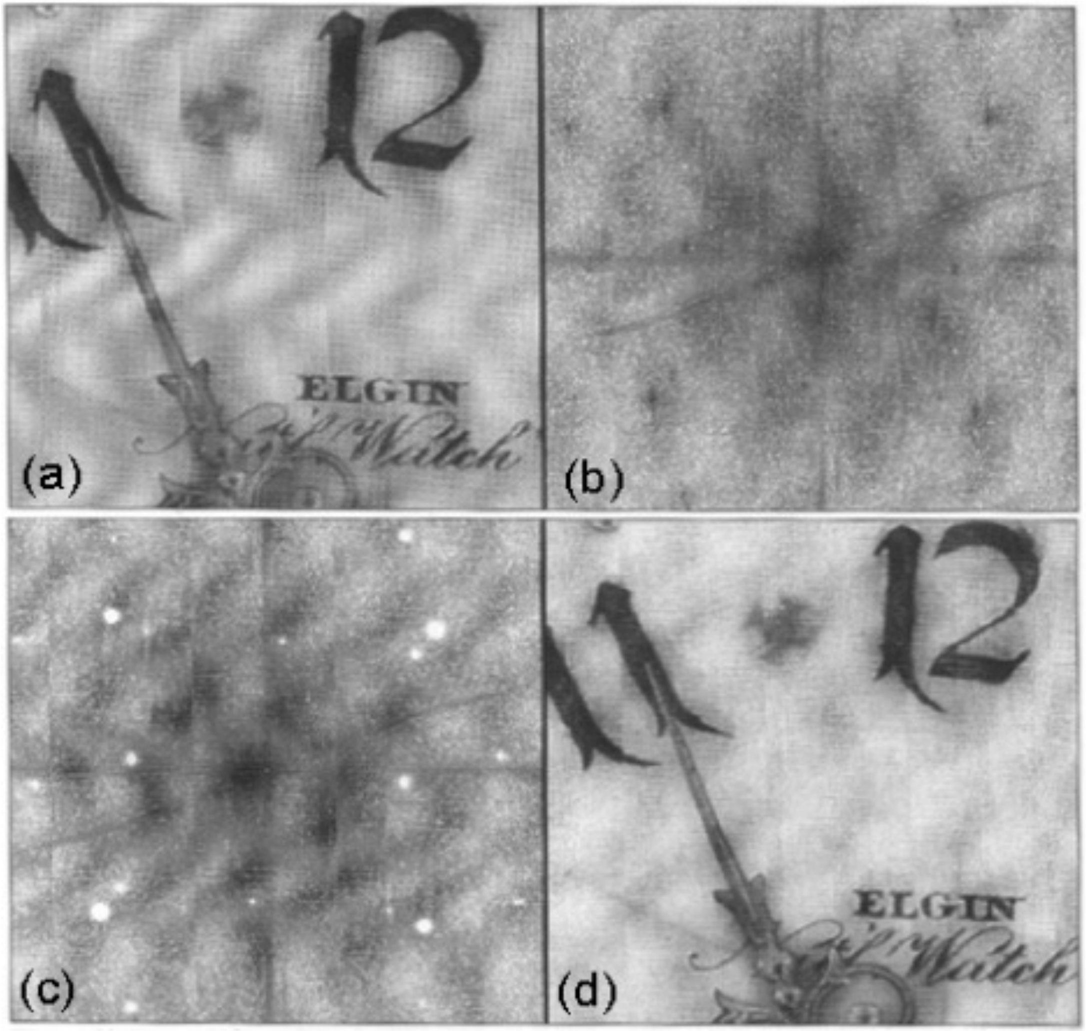
Proprietăţile transformatei Fourier



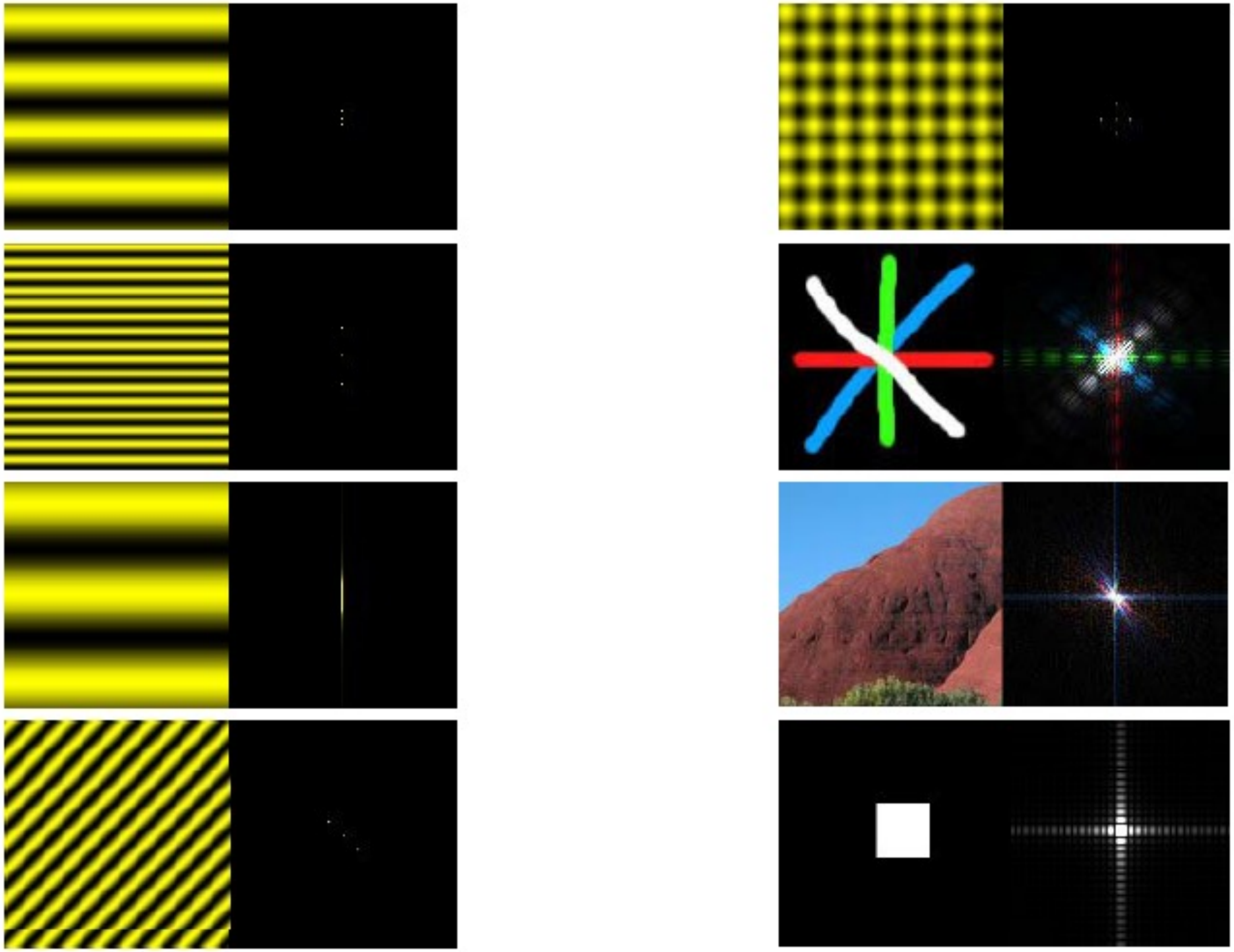
Proprietăţile transformatei Fourier



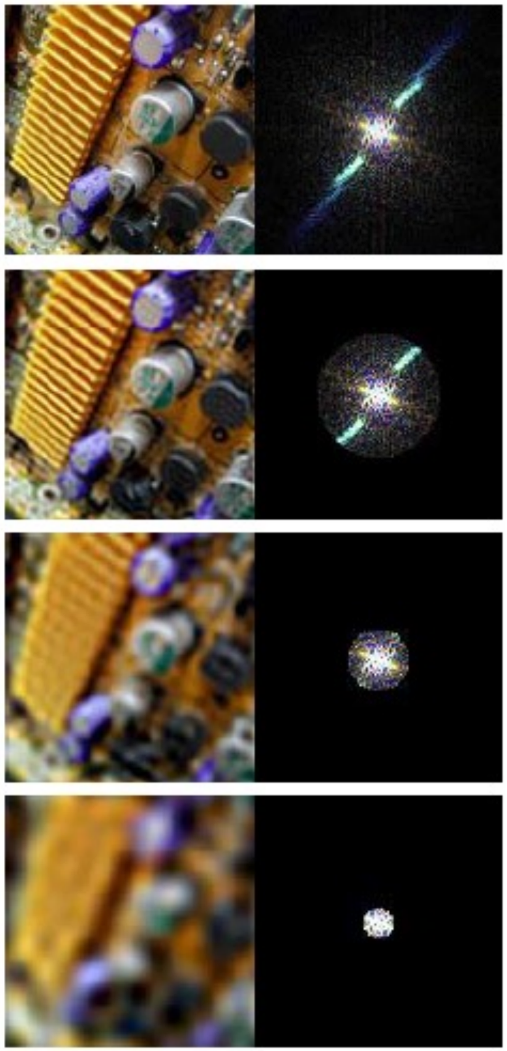
Proprietăţile transformatei Fourier

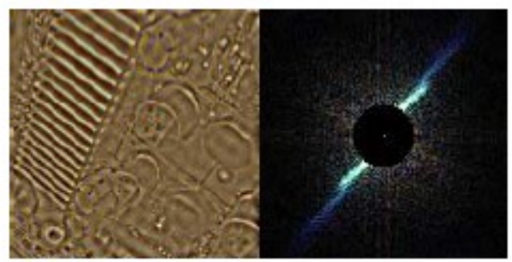


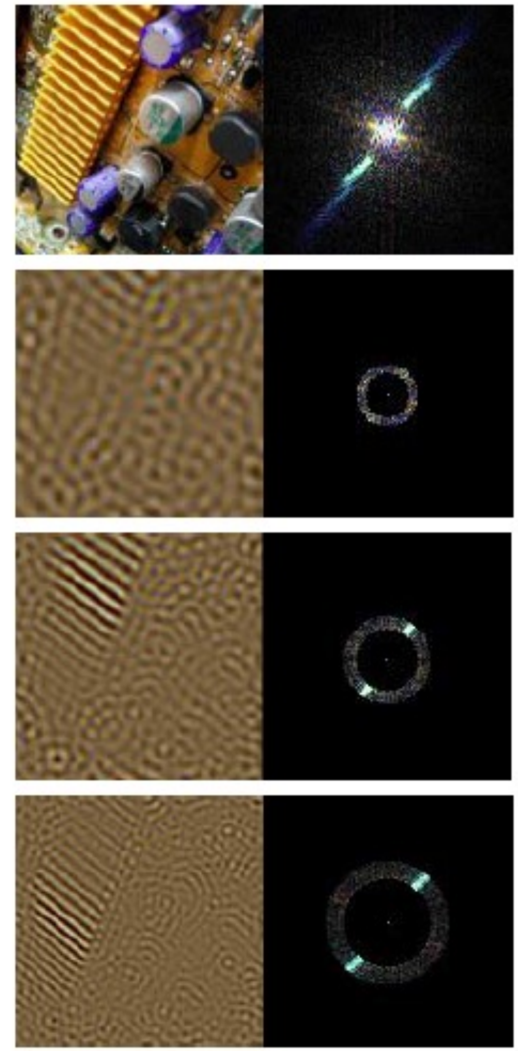
Proprietăţile transformatei Fourier



Proprietăţile transformatei Fourier

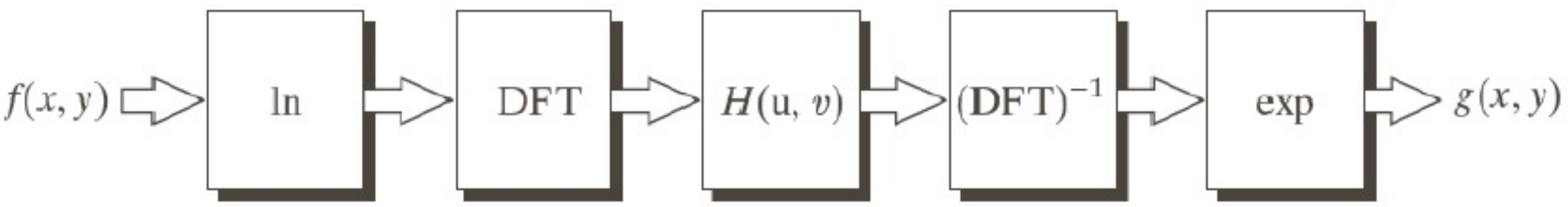






Filtrarea folosind transformata Fourier

1. Se converteşte imaginea spaţială în domeniul de frecvenţă, folosind Transformata Fourier
2. Se modifică frecvenţele folosind un filtru în domeniul frecvenţial
3. Se converteşte imaginea rezultat înapoi în domeniul spaţial.



Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department