
**ТЕОРЕМА ПОНСЕЛЕ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ
МНОГОЧЛЕНЫ И ИНВАРИАНТНАЯ
МЕРА ПРОЦЕССА ПОНСЕЛЕ**

Дипломная Работа

Кирилл Ленский
МФТИ
2025

1 Введение

1.1 Теорема Понселе

Теорема Понселе (поризм Понселе) – классический результат проективной геометрии, утверждающая, что если для пары эллипсов e_1 и e_2 найдется замкнутая n -звенная ломанная, вписанная в e_1 и описанная вокруг e_2 , то для любой точки $P \in e_1$ найдется такая ломанная, содержащая P . Эти ломанные называются *многоугольниками Понселе*. Элементарное доказательство этого утверждения можно найти в заметке В. Прасолова [7].

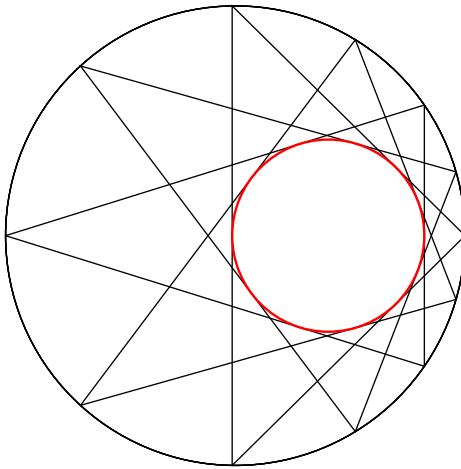


Рис. 1: Теорема Понселе для треугольников и окружностей

Теорема Понселе тесно связана с эллиптическими билльярдами [4] и эллиптическими кривыми [9]. Ричард Шварц обнаружил, что диагонали многоугольников Понселе огибают семейство эллипсов а пересечения продолжений их сторон лежат на другом семействе эллипсов [8]. Первое из этих семейств называется *внутренним*, а второе – *внешним*. В настоящей работе большее внимание посвящено исследованию свойств внутренних семейств Понселе.

1.2 Ортогональные многочлены на единичной окружности

Определение 1.1. Пусть на единичной окружности $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}$ задана вероятностная мера μ . Тогда на множестве $L_2(\mathbb{S})$ задано скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}} f(z) \overline{g(z)} \mu(dz)$$

множество $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}[z]$, полученное из $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ ортогонализацией Грама-Шмидта, называется множеством ортогональных многочленов на единичной окружности.

Определение 1.2. Пусть $P \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P = n$. Тогда многочлен

$$P^*(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$$

называется сопряженным к P .

Введение в теорию ортогональных многочленов на единичном круге изложено в заметке Барри Саймона [1]. Нам же потребуется лишь несколько общих фактов.

Определение 1.3 (Рекурсия Сегё). Нули многочлена $\Phi_n(z)$ лежат в единичном круге $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq 1\}$. Если мера μ не имеет конечного носителя, нули Φ_n лежат строго внутри $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. В этом случае существует такое $\alpha_n \in \mathbb{D}$, что

$$\Phi_n = z\Phi_{n-1} - \overline{\alpha_n}\Phi_{n-1}^*$$

Последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ называется коэффициентами Верблунского меры μ . Последовательность $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется коэффициентами Верблунского многочлена Φ_n и зависит только от Φ_n . Процесс построения Φ_n по α_i называется рекурсией Сегё, а процесс построения $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ по Φ_n – обратной рекурсией Сегё.

Определение 1.4. Пусть $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$, а $\Phi(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$. Тогда

$$b_\Phi(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi^*(z)} = \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z}$$

называется произведением Бляшке. b отображает \mathbb{D} , \mathbb{S} и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ в себя, причем $b: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ – n -листное накрытие окружности.

1.3 Связь ортогональных многочленов с теоремой Понселе

Оказывается, ортогональные многочлены и произведения Бляшке тесно связаны с теоремой Понселе и с её обобщениями. Впервые эта связь была обнаружена в 2019 году в статье [5]. Обзор смежных статей и унифицированные обозначения можно найти в [3]. Приведем несколько полезных определений и теорем.

Определение 1.5 (Полная кривая Понселе). Пусть $P(\lambda) := \{P_1(\lambda), \dots, P_n(\lambda)\}$ – семейство точек \mathbb{S} , различных при каждом $\lambda \in \mathbb{S}$, причем $P_i: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ – непрерывные отображения окружности на себя, а $P(\lambda) \cap P(\lambda') \neq \emptyset \rightarrow P(\lambda) = P(\lambda')$. Тогда семейство огибающих хорд $P_i P_j$ называется полной кривой Понселе порядка n , а точки P_i – вершинами многоугольников Понселе для этой кривой.

Определение 1.6 (Фокусы вещественной алгебраической кривой). Пусть Γ – вещественная алгебраическая кривая, а Γ' – полярно-двойственная к ней относительно единичной окружности. Тогда, если Γ' задана в проективных координатах однородным уравнением $F(x, y, z) = 0$, то, отождествляя \mathbb{R}^2 с \mathbb{C} , её вещественными фокусами будут корни уравнения $F(1, i, z) = 0$ с учетом кратности. Классом кривой Γ называется степень Γ' или, что то же самое, количество вещественных фокусов Γ . Определение фокусов согласовано со стандартным определением для коник.

Теорема 1.1 (A. Martinez, B. Simanek, B. Simon). Вещественная алгебраическая кривая Γ является полной кривой Понселе порядка n и класса $n - 1$ в том и только том случае, когда её вещественные фокусы f_1, \dots, f_n лежат в \mathbb{D} , вершины многоугольников Понселе являются корнями в \mathbb{C} многочлена

$$z\Phi_\Gamma(z) - \lambda\Phi_\Gamma^*(z), \text{ где } \Phi_\Gamma(z) = \prod_{i=1}^n (z - f_i), \lambda \in \mathbb{S}$$

а уравнение $F(x, y, z)$ двойственной кривой Γ' удовлетворяет соотношению

$$F(1 + zw, i - izw, z + w) = \frac{z\Phi_\Gamma(z)\Phi_\Gamma^*(w) - w\Phi_\Gamma(w)\Phi_\Gamma^*(z)}{z - w}$$

Эта теорема позволяет поставить в соответствие внутренниму семейству эллипсов для единичной окружности, которое мы обозначим за E , произведение бляшке $b_E = z\Phi_E(z)/\Phi_E^*(z)$. Основным результатом, доказанным в настоящей работе является следующая теорема:

Теорема 1.2 (О факторизации эллипсов). Если E и E' – два внутренних семейства эллипсов, причем $E \subset E'$, то $b'_E(z) = b_{E'/E}(b_E(z))$ для некоторого внутреннего семейства эллипсов E'/E .

1.4 Теорема Понселе и эллиптические функции

Определение 1.7 (Эллиптические функции). Пусть

$$F_k(\varphi) := \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

Определим эллиптическую амплитуду $\operatorname{am}_k(x)$ как функцию, обратную к F_k , $K := F_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}_k(x) &:= \sin(\operatorname{am}_k(x)) \\ \operatorname{sn}_k(x) &:= \cos(\operatorname{am}_k(x)) \\ \operatorname{dn}_k(x) &:= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}_k^2(x)} \end{aligned}$$

Одно из доказательств теоремы Понселе, принадлежащее Лоану и Эрмиту, использует формулы сложения для эллиптических функций, чтобы доказать следующее

Предложение 1.3. Пусть $E = \{(x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$, $a > b > 1$, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Пусть $k := \sqrt{(a^2 - b^2)/(a^2 - 1)}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ таково, что $\operatorname{cn} \beta = 1/a$. Введем на кривых параметризации: $P(\varphi) = (a \operatorname{cn} \varphi, b \operatorname{sn} \varphi) \in E$ и $M(\varphi) = (\operatorname{cn} \varphi, \operatorname{sn} \varphi)$. Тогда касательная к S в точке $M(\varphi)$ пересекает E в точках $P(\varphi - \beta)$ и $P(\varphi + \beta)$.

Доказательство приведено в [6]. Это утверждение позволит нам связать эллиптические функции и произведения Бляшке.

2 Итерации кривых Понселе

Здесь и далее, если не оговорено обратное, под кривой Понселе мы будем подразумевать полную алгебраическую кривую Понселе, порядок которой на 1 больше, чем её класс.

2.1 Прямые и обратные итерации

Определение 2.1. Прямой итерацией (или просто итерацией) степени n кривой Понселе Γ порядка nd назовем огибающую хорд $P_{ni}P_{nj}$, где $i, j \in \{1, \dots, d\}$ и обозначать её Γ^n .

Замечание 2.1. Итерация алгебраической кривой Понселе, вообще говоря, не алгебраическая кривая.

Определение 2.2. Обратной итерацией степени n кривой Понселе Γ порядка d назовем любую кривую Понселе $\Gamma^{1/n}$, для которой $(\Gamma^{1/n})^n = \Gamma$.

Замечание 2.2. Как мы увидим далее, обратные итерации степени n фиксированной кривой Понселе однозначно параметризуются точкой в \mathbb{D}^{n-1} , то есть их достаточно много.

Из теоремы (1.1) следует, что для того, чтобы кривая Понселе Γ была итерацией кривой Понселе Γ' , необходимо и достаточно, чтобы

$$z\Phi_{\Gamma'}(z)\Phi_{\Gamma'}^*(w) - w\Phi_{\Gamma'}(w)\Phi_{\Gamma'}^*(z) : z\Phi_{\Gamma}(z)\Phi_{\Gamma}^*(w) - w\Phi_{\Gamma}(w)\Phi_{\Gamma}^*(z) \quad (2.1)$$

Определение 2.3. Пусть $Q \in \mathbb{C}[z]$. Назовем дискриминантной формой Q многочлен

$$Q(z, w) := Q(z)Q^*(w) - Q(w)Q^*(z)$$

Условие (2.1) можно переписать в терминах дискриминантных форм: пусть $P(z) = z\Phi_{\Gamma'}(z)$, $Q(z) = z\Phi_{\Gamma}(z)$. Тогда

$$(2.1) \Leftrightarrow P(z, w) : Q(z, w)$$

2.2 Делимость дискриминантных форм

В этом разделе мы рассматриваем только многочлены, корни которых лежат в \mathbb{D} .

Определение 2.4. Назовем многочлен P нормальным, если он унитарен и $P(0) = 0$

Предложение 2.3. Пусть $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ – многочлены степени n . Тогда

$$P(z, w) \sim Q(z, w) \Leftrightarrow P(z) \sim Q(z) + rQ^*(z) \text{ для некоторого } r \in \mathbb{D}$$

Доказательство. Пусть $P = Q + rQ^*$. Тогда

$$\begin{aligned} P(z, w) &= [Q(z) + rQ^*(z)][Q^*(w) + \bar{r}Q(w)] - [Q(w) + rQ^*(w)][Q^*(z) + \bar{r}Q(z)] = \\ &= (1 - r\bar{r})[Q(z)Q^*(w) - Q(w)Q^*(z)] = (1 - |r|^2)Q(z, w) \end{aligned}$$

, откуда утверждение $[\Leftarrow]$ следует тривиально.

Обратно, пусть $P(z, w) \sim Q(z, w)$. Рассмотрим $P' = c_P(P + r_P P^*)$ и $Q' = c_Q(Q + r_Q Q^*)$ такие, что P' и Q' нормальны. Тогда

$$P'(z, w) \sim P(z, w) \sim Q(z, w) \sim Q'(z, w)$$

, откуда $P'(z) = P'(z, 0) \sim Q'(z, 0) = Q(z)$. Остается только заметить, что эндоморфизмы $\mathbb{C}[z]$ вида $T \rightarrow c(T + rT^*)$ образуют группу. \square

Замечание 2.4. Корни $P + rP^*$ все еще лежат в \mathbb{D} , поскольку P/P^* – произведение Бляшке, которое не смешивает \mathbb{D} , \mathbb{S} и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Предложение 2.5. *Пусть P, Q – нормальные многочлены, $P(z, w) : Q(z, w)$. Тогда $P(z) = S(z)Q(z)$, причем $S(z, w) : Q(z, w)$.*

Доказательство. $P(z) = P(z, 0) : Q(z, 0) = Q(z)$, поэтому $P(z) = S(z)Q(z)$.

$$\begin{aligned} (SQ)(z, w) &= [Q(z)Q^*(w)]S(z, w) + [S(w)S^*(z)]Q(z, w) : Q(z, w) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [Q(z)Q^*(w)]S(z, w) : Q(z, w) \end{aligned}$$

Но $(Q(z), Q^*(z)) = 1$, поскольку Q и Q^* не имеют общих корней. Значит, $Q(z)$ и $Q(z, w)$ взаимно просты. Аналогично, $Q^*(w)$ и $Q(z, w)$ взаимно просты. Поэтому

$$S(z, w) : Q(z, w)$$

\square

Предложение (2.5) дает нам многочлен $S(z)$. По предложению (2.3), мы можем перейти к $S'(z) = S(z) + rS^*(z)$ так, чтобы $S'(z)$ был нормальным многочленом и $S'(z, w) : Q(z, w)$, после чего снова можем применить предложение (2.5) уже к S' и так далее, пока не дойдем до $P(z) = Q(z)$. Получается процесс, похожий на обратную рекурсию Серё.

Определение 2.5. *Пусть P, Q – нормальные многочлены, $P(z, w) : Q(z, w)$. Положим $P_0(z) = P(z)$. Определим P_i , S_i и α_i по индукции:*

$$\begin{aligned} S_i(z) &= P_{i-1}(z)/Q(z) \\ -\bar{\alpha}_{n-i} &= S_i(0)/S_i^*(0) \\ P_i(z) &= (S_i(z) + \bar{\alpha}_i S_i^*(z))/(1 - |\alpha_{n-1}|^2) \end{aligned}$$

для $i = 1, 2, \dots, n-1$, причем $n = \deg P / \deg Q$ ($\deg P : \deg Q$, поскольку $\deg P_i = \deg P - i \deg Q$, а процесс останавливается на $P_{n-1} = Q$). Последовательность $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ назовем коэффициентами верблунского P/z относительно Q/z и обозначим $[P : Q]$.

Замечание 2.6. Если $P = z\Phi(z)$, $Q = z$, то $[P : Q]$ – в точности коэффициенты Верблунского многочлена Φ .

2.3 Связь с произведениями Бляшке

Предложение 2.7. $P(z, w) : Q(z, w) \Leftrightarrow P(z) = \varphi(Q(z), Q^*(z))$ для некоторого однородного многочлена φ , причем все корни $\varphi(z, 1)$ лежат в \mathbb{D} .

Доказательство. Без ограничения общности можем считать P и Q нормальными многочленами. Если $P(z, w) : Q(z, w)$ по индукции, используя рекурсию Серё, нетрудно доказать, что ϕ можно определить соотношением $\phi(z, 1) = z\Phi(z)$, где $\Phi(z)$ – многочлен с коэффициентами верблунского $[P : Q]$. \square

Замечание 2.8. Если P, Q нормальные, то $\varphi(z, 1) : z$

Определение 2.6. Если P, Q – нормальные многочлены и $P = \varphi(Q, Q^*)$, то

$$f(P, Q) := \varphi(z, 1)$$

Теперь выразим $P(z, w) : Q(z, w)$ в терминах произведений Бляшке.

Предложение 2.9. Пусть $P(z) = z\Phi'(z)$, $Q(z) = z\Phi(z)$ для унитарных Φ и Φ' . Тогда

$$P(z, w) : Q(z, w) \Leftrightarrow b_{\Phi'} = b_{\tilde{\Phi}} \circ b_{\Phi}$$

причем $z\tilde{\Phi}(z) = f(P, Q)$.

Доказательство. Пусть $P = \varphi(Q, Q^*)$, $H = \varphi(z, 1)$. Тогда

$$b_{\Phi'} = \frac{P}{P^*} = \frac{\varphi(Q, Q^*)}{\bar{\varphi}(Q^*, Q)} = \frac{\varphi\left(\frac{Q}{Q^*}, 1\right)}{\bar{\varphi}\left(1, \frac{Q}{Q^*}\right)} = \frac{H(b_{\Phi})}{H^*(b_{\Phi})} = b_{\tilde{\Phi}} \circ b_{\Phi}$$

Обратно, пусть $b_{\Phi'} = b_{\tilde{\Phi}} \circ b_{\Phi}$. Тогда

$$(Q(z, w) = 0) \Leftrightarrow (b_{\Phi}(z) = b_{\Phi}(w)) \rightarrow (b_{\Phi'}(z) = b_{\Phi'}(w)) \Leftrightarrow (P(z, w) = 0)$$

, а потому $P(z, w) : Q(z, w)$. \square

2.4 Факторкривые Понселе

Из вышеизложенного следует, что для кривых Понселе $\Gamma' \supseteq \Gamma$ в том и только том случае, когда $b_{\Gamma'} = b_{\Phi} \circ b_{\Gamma}$.

Определение 2.7. Кривая Понселе с фокусами в нулях Φ называется факторкривой Γ' по Γ и обозначается Γ'/Γ .

Предложение 2.10. Пусть F, G, H – кривые Понселе и $H \subseteq F, G$. Тогда

$$(F/H) \diagup (G/H) = F/G$$

причем если определена одна сторона равенства, то определена и другая.

Доказательство. Достаточно просто заметить, что

$b_F = b_{F/G} \circ b_{G/H} \circ b_H \Leftrightarrow b_{G/H} = b_{G/F} \circ b_{F/H}$ и воспользоваться предложением (2.9). \square

3 Итерации эллипсов

В случае, когда кривая Понселе – семейство эллипсов, теорема Шварца гарантирует, что прямая итерация будет алгебраической кривой, а кроме того позволяет выделить из всего множества обратных итераций ту единственную, которая сама будет семейством эллипсов.

3.1 Теорема Понселе-Дарбу и эллиптические билльярды

Фокусы эллипса обладают двумя замечательными свойствами – они образуют равные углы с любой касательной и с любой парой касательных, проведенных из точки вне эллипса (см. Рис. 2). Второе утверждение так же верно и для гипербол. Применяя эти

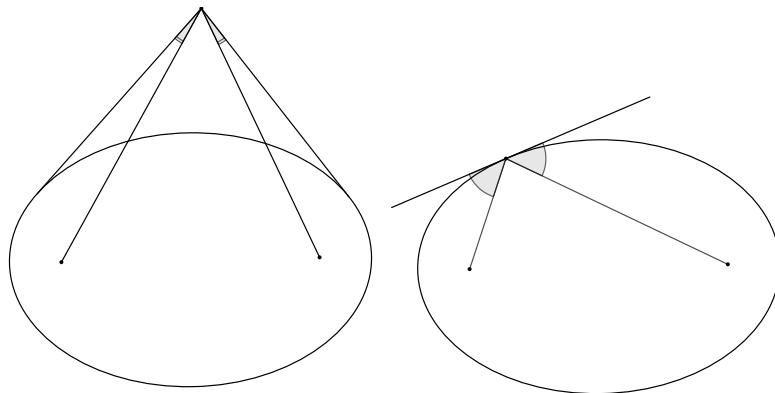


Рис. 2: Геометрические свойства эллипса

свойства, немедленно получаем следующий факт:

Предложение 3.1 (Интегрируемость эллиптического билльярда). *Пусть E – эллипс с уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$. Тогда каустикой для билльярда в нем является эллипс или гипербола с теми же фокусами и уравнением $x^2/(a^2 - \lambda) + y^2/(b^2 - \lambda) = 1$, $\lambda \in (0, a^2)$.*

Предложение (3.1) позволяет доказать теорему Понселе-Дарбу.

Теорема 3.2 (R. Schwartz, M. Levi, S. Tabachnikov). Если внешняя компонента C_1 кривой Понселе F является эллипсом, то все остальные компоненты $C_2, \dots, C_{[d/2]}$ так же являются эллипсами. Более того, если некоторая проективная двойственность $\pi^* : \mathbb{RP}^2 \rightarrow (\mathbb{RP}^2)^*$ переводит \mathbb{S}^1 и C_1 в софокусные эллипсы, то $\pi^*(C_2), \dots, \pi^*(C_{[d/2]})$ будут иметь фокусы в тех же точках.

Доказательство. Приведем схематичное доказательство. За подробностями читатель может обратиться к [4].

Пусть E – эллипс. Рассмотрим многообразие $E \times E$ – его точки параметризуют все направленные прямые, пересекающие E . Бильярд определяет автоморфизм $b : E \times E \rightarrow E \times E$, сопоставляющий прямой её отражение. Кроме того, на $E \times E$ задана

мера μ , инвариантная относительно b , порожденная формой объема

$$\omega = dp \wedge d\varphi$$

, где p – ориентированное расстояние от начала координат до прямой, а ϕ – её направление. Ввиду компактности $E \times E$, построенную меру можно считать вероятностной. Пусть ξ – случайный элемент $E \times E$ с распределением μ . Пусть $\lambda(\xi)$ – параметр каустики из предложения (3.1), которая касается прямой ξ . $\lambda(\xi)$ так же случайная величина, и на любой каустике с уравнением $\lambda = c$ задана мера $\mu_\lambda(X) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_X(\xi) | \lambda(\xi) = c)$. Она инвариантна относительно b , поскольку инвариантны μ и λ .

Если E' – эллипс, софокусный E и лежащий снаружи, то E и E' задают одинаковые меры на множестве прямых, пересекающих E по построению формы объема, а потому они индуцируют одинаковые меры на любой общей каустике, что тривиально влечет утверждение про $\pi^*(C_k)$. \square

Следствие 3.3. *Если E – кривая Понселе, являющаяся семейством эллипсов, то существует в точности одна кривая $E' = E^{1/n}$, которая так же является семейством эллипсов.*

3.2 Теорема о факторизации эллипсов

Теорема 3.4 (О факторизации эллипсов). Пусть E, E' – внутренние семейства эллипсов Понселе и $E' = E^{1/n}$. Тогда E'/E так же будет семейством эллипсов Понселе

Доказательство. Пусть $f_i(x, y, z) = 0$ – уравнения двойственных кривых к эллипсам, из которых состоит E' . Пусть $T(z) = z\Phi_{E'}(z), Q(z) = z\Phi_{E'/E}(z), P = z\Phi_E(z)$. Пусть $\deg P = d, \deg Q = n$. В таком случае,

$$T = (P^*)^n Q \left(\frac{P}{P^*} \right)$$

Пусть $F = \prod_i f_i$. Тогда

$$F(1 + zw, i - izw, z + w) = \frac{T(z)T^*(w) - T(w)T^*(z)}{z - w}$$

Пусть $Z = P(z)/P^*(z), W = P(w)/P^*(w)$.

$$\begin{aligned} \frac{T(z)T^*(w) - T(w)T^*(z)}{z - w} &= (P^*(z))^n (P^*(w))^n \frac{Q(Z)Q^*(W) - Q(W)Q^*(Z)}{z - w} = \\ &= (P^*(z))^n (P^*(w))^n \frac{Q(Z, W)}{(Z - W)P^*(z)P^*(w)} \cdot \frac{P(z, w)}{z - w} = \\ &= (P^*(z))^{n-1} (P^*(w))^{n-1} \frac{Q(Z, W)}{Z - W} \cdot \frac{P(z, w)}{z - w} \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{Q(z, w)}{z - w} = G(1 + zw, i - izw, z + w)$, где G – уравнение кривой, двойственной к кривой понселе с многочленом Q . Для удобства, пусть $G'(x, y, z) = G(x + y, i(y - x), z)$.

Заметим, что $P(z, w)/(z - w) = \prod_{i=1}^{\lceil(n-1)/2\rceil} f_i$, а потому можем сократить на них обе части равенства. Получим

$$\prod_j f_j = (P^*(z))^{n-1} (P^*(w))^{n-1} G'(ZW, 1, Z + W)$$

Рассмотрим это равенство в кольце $K = \mathbb{C}(w)$ рациональных функций от ω . Разложим $G'_w(z)$ на неприводимые сомножители G_1, \dots, G_k . Заметим, что $(P^*(z))^{n-1} G_k(Z) : f_r$ для некоторого $r(k)$. Рассмотрим алгебраическое расширение $\mathbb{C}(w)$ каким-либо корнем ξ неприводимого многочлена $f_k(z)$. Тогда $\deg f_k = [\mathbb{C}(w, \xi) : \mathbb{C}(w)]$. Но поскольку все корни $P^*(z)$ лежат просто в \mathbb{C} , $G_k(Z(\xi)) = 0$. Но $Z(\xi) \in \mathbb{C}(w, \xi)$, а потому

$$\deg G_k = [\mathbb{C}(w, Z(\xi)) : \mathbb{C}(w)] \leq [\mathbb{C}(w, \xi) : \mathbb{C}(w)] = \deg f_k$$

то есть $\deg_z G_k(zw, 1, z + w) \leq 2$, поэтому $\deg G_k \leq 2$, и G является объединением коник и прямых. Откуда тривиально следует, что G – двойственная кривая к семейству эллипсов Понселе. \square

Замечание 3.5. Если E – семейство эллипсов Понселе, то $E^{1/(an)}/E^{1/a}$ вообще говоря не равно $E^{1/(bn)}/E^{1/b}$.

Теорема (3.4) – типичное доказательство существования, и не дает явной конструкции E'/E , но тем не менее она позволяет сделать на удивление далеко идущие выводы.

3.3 Следствия теоремы о факторизации

Определение 3.1. Два внутренних семейства эллипсов E_1 и E_2 принадлежат одному классу Понселе, если для некоторых n, m выполнено $E_1^{1/n} = E_2^{1/m}$.

Предложение 3.6. Пусть $E' = E^{1/a}$, $E'' = E^{1/b}$. Тогда E'/E и E''/E принадлежат одному классу Понселе.

Доказательство. Заметим, что $(E^{1/(nd)}/E)^n = E^{1/d}/E$, поскольку по предложению (2.10)

$$(E^{1/(nd)}/E) / (E^{1/d}/E) = E^{1/(nd)}/E^{1/d}$$

Тогда $(E'/E)^{1/b} = E^{1/(ab)}/E = (E''/E)^{1/a}$. \square

Определение 3.2. Стандартным эллипсом будем называть эллипс с уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $1 > a \geq b$. Из теоремы Шварца следует, что если один эллипс в классе Понселе стандартный, то и все остальные тоже. Такие классы будем называть стандартными.

Предложение 3.7. Пусть E – семейство эллипсов Понселе нечетного порядка, лежащее в стандартном классе. Тогда $[E^{1/2} : E] = (0)$.

Доказательство. Пусть E было внутренним семейством порядка n . Тогда $E^{1/2}$ – семейство порядка $2n$, а стало быть у него $2n - 1$ фокус. Ввиду симметрии, в 0 у $E^{1/2}$ должно быть нечетное число фокусов, а у E – четное. Пусть $P = z\Phi_{E^{1/2}}(z)$, $Q = z\Phi_E(z)$. Тогда $(P/Q)(0) = 0$, а значит коэффициент α_1 равен 0. \square

Предложение 3.8. Пусть E – стандартное внутреннее семейство Понселе нечетного порядка. Тогда $E^{1/n}/E$ так же будет стандартным семейством.

Доказательство. По предложению (3.7), $[E^{1/2} : E] = (0)$, а значит весь класс $E^{1/n}/E$ обладает центральной симметрией. Кроме того, $[E^{1/3} : E] \in \mathbb{R}^2$, поскольку $\Phi_{E^{1/3}}$ и $\Phi_E \in \mathbb{R}[z]$. Поэтому фокусы $E^{1/3}/E$ сопряжены, как комплексные корни вещественного многочлена, или лежат в \mathbb{R} . Если фокусы сопряжены, то, ввиду симметрии, они должны быть чисто мнимыми, а потому многочлен $\varphi(z, 1)$ имеет вид $z(z^2 + a^2)$. Тогда, если $Q(z) = z\Phi_E(z)$, $Q^2 + a^2(Q^*)^2$ не может иметь вещественных корней, но его корни содержатся во множестве фокусов $E^{1/3}$, которые $\in \mathbb{R}$. Поэтому фокусы $E^{1/3}/E$ – противоположные вещественные числа, а значит $E^{1/3}/E$ и весь его класс Понселе стандартны. \square

Лемма 3.9 (О кругах). *Если в семействе эллипсов Понселе один является окружностью, то все остальные – тоже.*

Доказательство. Следуя [2], заметим, что если E_k – семейство софокусных эллипсов, то они задаются семейством уравнений $x^2/(a^2 + \lambda) + y^2/(b^2 + \lambda) - z^2 = 0$, а проективно-двойственные к ним – семейством $(a^2 + \lambda)x^2 + (b^2 + \lambda)y^2 - z^2 = 0$. Заметим, что все семейство порождается линейными комбинациями любых двух его представителей – то есть это пучок коник. Проективные преобразования переводят пучки в пучки, а значит все эллипсы Понселе лежат в одном пучке с \mathbb{S} . Если среди эллипсов есть окружность, то пусть $G = x^2 + y^2 - z^2$, F – уравнение окружности. Линейная комбинация F и G не содержит члена xy , имеет один и тот же коэффициент при x^2 и y^2 , а если это эллипс Понселе, то при таких условиях он обязан быть окружностью. \square

Предложение 3.10. Пусть E – стандартное семейство эллипсов Понселе четного порядка. Тогда для любого семейства $E' \supset E$, E'/E – пучок окружностей.

Доказательство. Пусть $E = K^{1/2^t}$, где K – внутреннее семейство нечетного порядка. Тогда

$$E^{1/n}/E = (E/K)^{1/n} \Big/ (E/K)$$

По предложению (3.8), E/K – стандартный эллипс, а потому без ограничения общности можно считать, что порядок $E = 2^t$. Лемма о кругах позволяет нам ограничиться случаем $E' = E^{1/3}$. Проведем доказательство индукцией по t .

База : Пусть $t = 1$. Тогда E – стандартный эллипс Понселе порядка 2, то есть у E есть единственный фокус в 0. Пусть $E' = E^{1/3}$, а $L = E'^2$. L имеет фокусы в точках $\pm a$, а значит, по предложению (3.7), E' имеет своими фокусами $\{-a, -a, 0, a, a\}$.

$P := z\Phi_{E'} = z^2(z^2 - a^2)^2$, $Q := z\Phi_E = z^2$. Заметим, что для $\varphi(x, y) = x(x - a^2y)^2$ выполнено $P(z) = \varphi(Q(z), Q^*(z))$, а потому E'/E имеет двойной фокус в точке a^2 .

Переход : Пусть утверждение доказано для эллипсов порядка 2^{t-1} . Факторизуем $E^{1/3}$ и E по E^2 . Таким образом требуемый факт сводится к следующему: пусть E_6 – семейство окружностей с центрами в \mathbb{R} порядка 6, E_2 – кривая порядка 2 из того же семейства. Тогда E_6/E_2 – окружность с центром в \mathbb{R} . Пусть фокусы $E_6 = \{f, a, a, b, b\}$, а фокус $E_2 = \{f\}$. Тогда, если $\Phi_{E_6/E_2}(z) = (z - x)(z - y)$, то

$$z\Phi_{E_6}(z) = (\varphi_{E_6/E_2}) \circ (z\Phi_{E_2})(z) = z(z - f)(z^2 + (x - 1) fz - x)(z^2 + (y - 1) fz - y)$$

С другой стороны, $z\Phi_{E_6}(z) = z(z-f)(z-a)^2(z-b)^2$. Если a и b входят в каждую из скобочек, содержащую x и y , то $x = y$ и утверждение доказано. Пусть

$$\begin{aligned} z^2 - 2az + a^2 &= z^2 + (x-1) fz - x \\ z^2 - 2bz + b^2 &= z^2 + (y-1) fz - y \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $x = -a^2$, $y = -b^2$ и $(1-x)f = (1+a^2)f = 2a$, $(1+b^2)f = 2b$. Пусть, без ограничения общности, a – центр окружности $E_3 = E_6^2$. Тогда $z\Phi_{E_6}$ выражается через $z\Phi_{E_3}$, а потому

$$(z-f)(z-b)^2 = z(z-a)^2 - \alpha(1-az)^2$$

Подставив $z = 0$, заметим, что $\alpha = fb^2$. После раскрытия скобок, приравняв коэффициенты перед z^2 , получим следующее соотношение:

$$2a + a^2b^2f = 2b + f$$

Заметим, что $a \neq b$, поскольку у двух окружностей из пучка центры совпадают только если весь пучок, включая \mathbb{S} , концентрический, а такой случай разбирается тривиально. По теореме Виета для корней $x^2 - (2/f)x + 1$ произведение $ab = 1$. То есть второе уравнение вырождается в

$$2a + f = 2b + f$$

Отсюда $a = b$ и мы получили противоречие. \square

Предложение (3.10) позволяет сводить утверждения для эллипсов к утверждениям для окружности. Как будет показано далее, факторизация относительно разумно проносится сквозь проективные преобразования \mathbb{D} , поэтому любой эллипс четного порядка можно перевести в стандартный, после чего отфакторизовать его по E_2 из его класса, и произведение Бляшке для эллипса будет выражаться через произведение Бляшке для окружности, взятому в композиции с z^2 и некоторым преобразованием Мебиуса.

3.4 Открытые вопросы

Было бы интересно понять, что происходит с эллиптическим модулем при факторизации, например, по E_3 . Стандартный класс эллипсов переходит в стандартный класс, но эллиптический модуль, связанный с ним меняется по непонятному закону.

4 Связь с проективными преобразованиями

Формулировка теоремы Понселе проективно-инвариантна, однако конструкции, приведенные выше, очень сильно привязаны к комплексной структуре \mathbb{R}^2 . Оказывается, вещественные и комплексные проективные преобразования, оставляющие окружность \mathbb{S} на месте, "с точки зрения окружности" не отличаются. В этом разделе мы формулируем это утверждение.

4.1 Проективные преобразования $\mathbb{R}P^2$ и $\mathbb{C}P^1$

Рассмотрим преобразования $\mathbb{R}P^2$, оставляющие на месте единичную окружность. Хорошо известно, что группа таких преобразований порождена своими тремя подгруппами R_x , R_y и R_z , где

$$R_x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \theta & \operatorname{sh} \theta \\ 0 & \operatorname{sh} \theta & \operatorname{ch} \theta \end{pmatrix} \right\}_{\theta \in \mathbb{R}}$$

$$R_y = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \theta & 0 & \operatorname{sh} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} \theta & 0 & \operatorname{ch} \theta \end{pmatrix} \right\}_{\theta \in \mathbb{R}}$$

$$R_z = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\varphi \in [0, 2\pi)}$$

Причем, если G – вся группа проективных преобразований, оставляющих \mathbb{S} на месте как множество, то $G = R_z R_y R_x$. Элементы R_x и R_y называются гиперболическими поворотами вокруг оси x и y соответственно.

Предложение 4.1. *Пусть $\pi: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, оставляющее на месте единичную окружность. Тогда $\pi|_{\mathbb{S}}$ совпадает с ограничением какого-либо преобразования Мёбиуса при отождествлении \mathbb{R}^2 с \mathbb{C} .*

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$. Тогда вещественные координаты ζ выражаются как $x = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $y = (\zeta - 1/\zeta)/(2i)$. Непосредственно или с помощью средств компьютерной алгебры можно убедиться, что если $r_x(\theta)$ и $r_y(\theta)$ – гиперболические повороты, то

$$r_x(\theta, \zeta) = \frac{\zeta + i \tanh \frac{\theta}{2}}{1 - (i \tanh \frac{\theta}{2}) \zeta} \quad (4.1)$$

$$r_y(\theta, \zeta) = \frac{\zeta + \tanh \frac{\theta}{2}}{1 + (\tanh \frac{\theta}{2}) \zeta} \quad (4.2)$$

То есть R_x и R_y действуют как произведения Бляшке. R_z – обычный поворот, то есть умножение на $e^{i\varphi}$. Отсюда утверждение следует тривиально. \square

Поскольку вершины многоугольников Понселе лежат на окружности, предложение (4.1) дает нам инструмент для работы с проективными преобразованиями.

4.2 Проективные преобразования и произведения Бляшке

Определение 4.1. Проективное преобразование π , сохраняющее \mathbb{S} будем называть прямым, если $\pi|_{\mathbb{S}}$ – дробь Бляшке. Любое проективное преобразование, сохраняющее \mathbb{S} , однозначно раскладывается в композицию поворота и прямого преобразования.

Посмотрим, как ведет себя факторизация под действием проективных преобразований.

Предложение 4.2. Пусть $E' = E^{1/n}$, $\Gamma' = \Gamma^{1/n}$ и E, E' переходят в Γ, Γ' под действием прямого преобразования π . Тогда $E'/E = \Gamma'/\Gamma$.

Доказательство.

$$b_{\Gamma'} = b_{\Gamma'/\Gamma} \circ b_{\Gamma} \Rightarrow b_{E'} = b_{\Gamma'} \circ b = b_{\Gamma'/\Gamma} \circ b_{\Gamma} \circ b = b_{\Gamma'/\Gamma} \circ b_E$$

$$\text{откуда } b_{E'/E} = b_{\Gamma'/\Gamma} \Rightarrow E'/E = \Gamma'/\Gamma. \quad \square$$

Предложение 4.3. Пусть $E' = E^{1/n}$, $\Gamma' = \Gamma^{1/n}$ и E, E' переходят в Γ, Γ' под действием поворота на λ . Тогда $\Gamma'/\Gamma = \lambda^d (E'/E)$, где d – порядок E .

Доказательство. Пусть $P = z\Phi_{E'}$, $\tilde{P} = z\Phi_{\Gamma'}$. Тогда, если $P = \prod(z - z_k)$, то

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z) &= \prod(z - \lambda z_k) = \lambda^{\deg P} \prod(\lambda^{-1}z - z_k) = \lambda^{\deg P} P(z/\lambda) \\ \tilde{P}^*(z) &= \prod(1 - \overline{\lambda z_k} z) = \prod(1 - \lambda^{-1} \overline{z_k} z) = P^*(z/\lambda) \end{aligned}$$

То есть $b_{\Gamma'}(z) = \lambda^{\deg P} b_{E'}(z/\lambda)$. Откуда получаем

$$\begin{aligned} b_{\Gamma'}(z) &= \lambda^{nd} b_{E'}(z/\lambda) = \lambda^{nd} b_{E'/E}(b_E(z/\lambda)) = \lambda^{nd} b_{E/E'}(\lambda^{-d} \lambda^d b_E(z/\lambda)) = \\ &= \lambda^{nd} b_{E/E'}(\lambda^{-d} \lambda^d b_E(z/\lambda)) = (\lambda^d)^n b_{E/E'}(\lambda^{-d} b_E(z)) \end{aligned}$$

Таким образом, $b_{\Gamma'/\Gamma}(z) = (\lambda^d)^n b_{E/E'}(z/\lambda^d)$, откуда следует утверждение. \square

Предложение 4.4. Пусть π – прямое преобразование, $b(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ и $\pi|_{\mathbb{S}} = b|_{\mathbb{S}}$. Пусть $E' = E^{1/n}$ и $\Gamma = \pi(E)$, $\Gamma' = \pi(E')$. Тогда $\Gamma'/\Gamma = \psi(E'/E)$, где ψ – прямое проективное преобразование, $\psi|_{\mathbb{S}} = \tilde{b}|_{\mathbb{S}}$, где $\tilde{b}(z) = (z - \tilde{a})/(1 - \bar{\tilde{a}}z)$, $\tilde{a} = -b_E(a)$.

Доказательство. Пусть $P = z\Phi_{E'}$. Вершины многоугольника Понселе для Γ' задаются уравнением $b_{\Gamma'}(z) = \lambda$, а значит вершины многоугольника Понселе E' удовлетворяют уравнению $b_{\Gamma'}(b(z)) = \lambda$. Пусть P' – числитель $b'_{\Gamma} \circ b$. Тогда $P(z, w) = P'(z, w)$, а значит $P(z) = P'(z) - \alpha P'^*(z)$, то есть $b_{E'} = \tilde{b}' \circ b_{\Gamma'} \circ b$, где \tilde{b}' определяется тем, что переводит $b_{\Gamma'}(b(0))$ в 0. Поэтому,

$$\begin{aligned} b_{E'} &= \tilde{b}' \circ b_{\Gamma'} \circ b = \tilde{b}' \circ b_{\Gamma'/\Gamma} \circ b_{\Gamma} \circ b = \\ &= (\tilde{b}' \circ b_{\Gamma'/\Gamma} \circ b') \circ (\tilde{b} \circ b_{\Gamma} \circ b) = (\tilde{b}' \circ b_{\Gamma'/\Gamma} \circ b') \circ b_E \end{aligned}$$

где \tilde{b} переводит $b_{\Gamma}(b(0))$ в 0, а $b' = \tilde{b}^{-1}$. То есть Γ'/Γ переходит в E'/E под действием преобразования, ограничение которого на \mathbb{S} совпадает с \tilde{b}^{-1} . Значит в обратную сторону E'/E переводится в Γ'/Γ преобразованием с ограничением \tilde{b} . Нетрудно видеть, что \tilde{b}^{-1} переводит $b_E(b(0)) = b_E(a)$ в 0, откуда \tilde{b} имеет требуемый вид. \square

5 Построения циркулем и линейкой

5.1 Движения окружности

Пусть $C \subset \mathbb{D}$ – окружность с центром в $a \in \mathbb{R}$ и радиусом r . Тогда применим к ней гиперболический поворот $r_y(\theta)$. Точки пересечения C с \mathbb{R} перейдут в

$$x_1 = \frac{(a - r) \cosh \theta + \sinh \theta}{\cosh \theta + (a - r) \sinh \theta} \quad x_2 = \frac{(a + r) \cosh \theta + \sinh \theta}{\cosh \theta + (a + r) \sinh \theta}$$

после упрощения, числитель $x_1 + x_2$ можно представить в виде

$N = 2a \cosh(2\theta) + (1 + a^2 - r^2) \sinh(2\theta)$. Приравнивая N к 0, получаем

$$\tanh(2\theta) = \frac{-2a}{1 + a^2 - r^2}$$

Заметим, что у окружностей C и \mathbb{S} есть две комплексные точки касания

$$P_{1,2} = \left(\frac{1 + a^2 - r^2}{2a}, \pm \frac{i\sqrt{(1 - a - r)(1 - a + r)(1 + a - r)(1 + a + r)}}{2a} \right)$$

Пусть под действием нашего преобразования π они перешли в P'_1, P'_2 . Заметим также, что ввиду симметрии относительно оси \mathbb{R} , окружность C перешла в эллипс вида $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$. Мы знаем значение A – это образ $a + r$ при нашей операции. Кроме того, эллипс такого вида имеет с окружностью 4 комплексные точки касания вида (x, y) , где

$$x^2 = \frac{A^2(1 - B^2)}{A^2 - B^2} \quad y^2 = \frac{B^2(1 - A^2)}{B^2 - A^2}$$

Отсюда можно найти B . В итоге, мы получили эллипс стандартного вида, повернутый на $\pi/2$ и порядка Понселе 2. Заметим, что A и B выражаются в квадратных радикалах через a , как и дробь Бляшке, соответствующая построенному преобразованию.

5.2 Правильный эллиптический 2^k -угольник

Пусть мы построили стандартный эллипс E_3 порядка 3. Тогда у эллипса E_6 из его класса будут удвоенные фокусы E_3 и фокус в 0. Мы можем вычислить E_6/E_2 , который будет окружностью, и повторить всю конструкцию сначала. Мы получим серию произведений Бляшке, такую, что $b_k \circ b_{k-1} \circ \dots \circ b_1$ – произведение Бляшке для эллипса порядка 2^k . Причем все коэффициенты b_i построимы по a циркулем и линейкой. Значит, с помощью циркуля и линейки можно построить многоугольник понселе порядка 2^k для класса окружности порядка 3 с центром в точке a .

6 Построение инвариантной меры

В этом разделе мы построим инвариантную меру для процесса Понселе, причем как раз ту самую, которая получается из параметризации эллиптическими функциями или из эллиптических билльярдов.

6.1 Предельная мера Понселе

Пусть $\{E_n\}_{n=2}^\infty$ – класс семейств эллипсов Понселе, где E_n – семейство порядка n . Тогда рассмотрим $\{M_k\}$, где M_k – множество вершин многоугольника Понселе для E_k , содержащего вершину 1. Пусть μ_k – нормированная считающая мера M_k . Нетрудно убедиться, что $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$, где μ – инвариантная мера процесса Понселе, которая приходит из параметризации \mathbb{S} эллиптическими функциями. Назовем μ предельной мерой Понселе. Её можно построить и другим способом, который иногда оказывается более удобным.

Определение 6.1. Пусть Γ – кривая Понселе порядка n . Тогда $b_\Gamma|_{\mathbb{S}}$ – n -листное накрытие окружности и определена вероятностная мера $\hat{\mu}_\Gamma = b_\Gamma^{-1}(\mu_L)$, где μ_L – стандартная мера Лебега. Назовем её мерой Понселе-Лебега.

По сути, $\hat{\mu}_\Gamma$ – такая абсолютно-непрерывная вероятностная мера, что дуга между соседними вершинами многоугольника Понселе измеряется по ней в $1/n$, а $b_\Gamma(\hat{\mu}_\Gamma) = \mu_L$. Поэтому $\hat{\mu}_{E_k} \xrightarrow{w} \mu$. Заметим, что для всякой измеримой функции $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{S}} f(\zeta) d\mu_L(\zeta) = \int_{\mathbb{S}} f(b_\Gamma(z)) d\hat{\mu}_\Gamma(z)$$

в частности,

$$0 = \int_{\mathbb{S}} \zeta^k d\mu_L(\zeta) = \int_{\mathbb{S}} b_\Gamma^k(z) d\hat{\mu}_\Gamma(z) = \langle b_\Gamma^{k+l}, b_\Gamma^l \rangle_{\hat{\mu}_\Gamma}$$

то есть $\{b_\Gamma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образуют в $L_2(\mathbb{S}, \hat{\mu}_\Gamma)$ ортогональную систему функций.

Рассмотрим функции $b_k^{-1} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, $k = 1, \dots, n$, определённые так, что $\{b_1^{-1}(\lambda), b_2^{-1}(\lambda), \dots, b_n^{-1}(\lambda)\}$ – все корни $b_\Gamma(z) = \lambda$, каждая функция b_k^{-1} непрерывна на $\exp([0, 2\pi i])$ и $b_k^{-1}(z) \rightarrow b_{k+1}^{-1}(0)$ при $z \rightarrow \exp(2\pi i - 0i)$. Тогда заметим, что

$$\int_{\mathbb{S}} b_k^{-1}(\zeta) d\mu_L(\zeta) = \int_{\mathbb{S}} b_k^{-1}(b_\Gamma(z)) d\hat{\mu}_\Gamma(z) = n \cdot \int_{[b_k^{-1}(0), b_{k+1}^{-1}(0)]} z d\hat{\mu}_\Gamma(z)$$

Откуда следует, что

$$\int_{\mathbb{S}} z d\hat{\mu}_\Gamma(z) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^{-1}(\zeta) \right) d\mu_L(\zeta)$$

Аналогично получаем

$$\int_{\mathbb{S}} z^m d\hat{\mu}_\Gamma(z) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}} \left(\sum_{k=1}^n (b_k^{-1}(\zeta))^m \right) d\mu_L(\zeta)$$

Но $\sum_{k=1}^n (b_k^{-1}(\zeta))^m$ – симметрический многочлен от корней $z\Phi_\Gamma - \zeta\Phi_\Gamma^*$, а потому выражается через его коэффициенты. Заметим, что в таком выражении все мономы, в

которых участвует ζ , при интегрировании по \mathbb{S} обратятся в 0, а значит

$$\int_{\mathbb{S}^1} z^m d\hat{\mu}_\Gamma(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k^m$$

где z_k – корни $z\Phi_\Gamma$. При всех $m > 0$ можно, разумеется, полагать z_k корнями Φ_Γ . Таким образом мы определили матрицу Грама:

$$\langle z^p, z^q \rangle_{\hat{\mu}_\Gamma} = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k^{p-q}, & p > q \\ 1, & p = q \\ \overline{\langle z^q, z^p \rangle}_{\hat{\mu}_\Gamma}, & p < q \end{cases}$$

Заметим, что Φ_Γ , в частности, ортогонален всем z^{-m} для $m = 0, 1, \dots$, поскольку

$$\langle \Phi_\Gamma, z^{-m} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k^m (c_0 + c_1 z_k + c_2 z_k^2 + \dots + z_k^n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k^m \Phi_\Gamma(z_k) = 0$$

Меру $\hat{\mu}_\Gamma$ можно построить по любой кривой Понселе, и она будет инвариантна относительно процесса понселе, но, конечно, $\hat{\mu}_E$ не является той самой предельной мерой в случае, когда E – эллипс.

6.2 Еще одна конструкция инвариантной меры

Применим построенную в предыдущих разделах теорию, чтобы построить инвариантную меру ещё одним способом.

Пусть $\{E_n\}$ – класс стандартных эллипсов. Заметим, что $b_{E_{2k}} = b_{E_{2k}/E_2} \circ b_{E_2} = b_{E_{2k}/E_2}$, по предложению (3.10), семейство окружностей. Кроме того, из доказательства этого предложения, мы знаем вид E_6/E_2 . Если E_3 имел фокусы в точках $\pm a$, то E_6/E_2 – окружность с центром в точке a^2 . Её радиус можно найти по теореме Эйлера, утверждающей, что если радиус описанной вокруг треугольника окружности равен d , а радиус вписанной – r , то расстояние между их центрами можно найти по формуле

$$d = \sqrt{R^2 - 2rR}$$

Таким образом, E_6/E_3 – окружность с центром в a и радиусом $(1-a^2)/2$. Оказывается, для окружности существует следующая инвариантная мера:

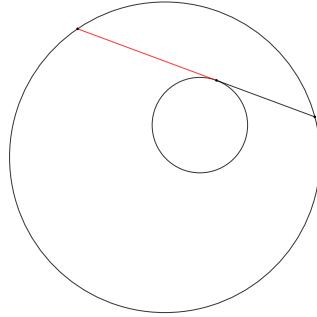


Рис. 3: Касательная ко внутренней окружности

Пусть $\rho(x)$ – длина касательной из точки $x \in \mathbb{S}$ до внутренней окружности C . Тогда $d\mu_L(x)/\rho(x)$ – инвариантная мера.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = t$ – движение точки по \mathbb{S} . Пусть в момент времени t точка находилась в A , а в момент $t + \Delta t$ – в B . Пусть A', B' – образы A, B при отображении Понселе. Пусть $\theta(t)$ – параметр касательной ко внутренней окружности, который является дифференцируемой по t функцией. Пусть $AA' \cap BB' = \{P\}$. Тогда треугольники ABP и $B'A'P$ подобны, а значит $A'B' = (|PA'|/|AP|)|AB|$.

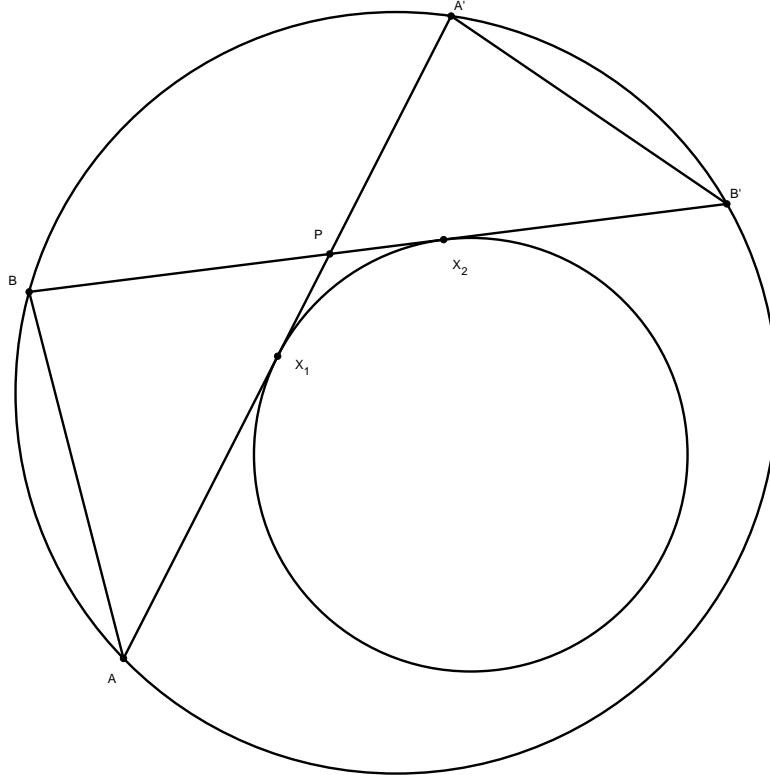


Рис. 4: Треугольники ABP и $B'A'P$ подобны

$AB = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$, $A'B' = 2 \sin \frac{\Delta\varphi'}{2}$, $|AP|/\rho(A) = 1 + o(1)$, $|A'P'|/\rho(A') = 1 + o(1)$. Так что

$$(1 + o(1))2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}/\rho(A) = (1 + o(1))2 \sin \frac{\Delta\varphi'}{2}/\rho(A')$$

Поделив обе части на Δt и перейдя к пределу, получим, что $d\varphi/\rho(A) = d\varphi'/\rho(A')$. \square

На самом деле построенная мера будет инвариантной для всех окружностей Понселе в пучке. В самом деле, пусть уравнение $C - F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 z^2$. Тогда, если X имеет координаты $(x : y : z)$, то, как нетрудно проверить, $\rho(X) = \sqrt{F(x, y, z)}$. Пусть $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Тогда, если $X \in \mathbb{S}$, то для другой окружности из пучка с уравнением $F + \lambda G$ $\rho(X)$ не изменится, так как $G(x, y, z) = 0$. Поэтому построенная нами мера будет мерой Понселе, той же самой, что возникала в эллиптических бильярдах или строилась по эллиптическим функциям!

7 Заключение

7.1 Проделанная работа и полученные результаты

Автором было введено новое (насколько ему известно) понятие факторизации кривых Понселе, доказаны соответствующие теоремы и подробно разобран эллиптический случай. Автор привел несколько примеров применения разработанного им аппарата для доказательства утверждений, связанных с теоремой Понселе.

7.2 Направление для дальнейших исследований

Несмотря на тесную связь с проективной геометрией, до сих пор не понятна геометрическая интерпретация операции факторизации. Не понятно, что происходит с эллиптическим модулем при этой операции. Непонятно, можно ли обобщить приведенную конструкцию на старшие размерности. Практически ничего не известно про ортогональные многочлены относительно предельной меры Понселе.

7.3 Отрицательные результаты

Ортогональные многочлены, полученные обратной рекурсией Сегё из Φ_G , по-видимому, не обладают какими-либо замечательными свойствами.

7.4 Благодарности

Автор выражает признательность Владимиру Генриховичу Лысову, своему научному руководителю. А так же сотрудникам "Ардиса", без которых данная работа была бы невозможна.

Список литературы

- [1] Barry Simon. OPUC on One Foot, 2005. URL <https://arxiv.org/abs/math/0502485>.
- [2] V. Dragovic and M. Radnovic. *Poncelet Porisms and Beyond.* 2010. doi: 10.1007/978-3-0348-0015-0.
- [3] M. Hunziker, A. Martinez-Finkelshtein, T. Poe, and B. Simanek. Poncelet-Darboux, Kippenhahn, and Szegő: interactions between projective geometry, matrices and orthogonal polynomials, 2021. URL <https://arxiv.org/abs/2101.12165>.
- [4] M. Levi and S. Tabachnikov. The Poncelet grid and the billiard in an ellipse., 2005. URL <https://arxiv.org/abs/math/0511009>.
- [5] A. Martinez-Finkelshtein, B. Simanek, and B. Simon. Poncelet's theorem, paraorthogonal polynomials and the numerical range of compressed multiplication operators. *Adv. Math.*, 349:992 – 1035, 2019.
- [6] D. Pecker. Poncelet's theorem and Billiard knots, 2011. URL <https://arxiv.org/abs/1110.0415>.
- [7] V. Prasolov. Доказательство теоремы Понселе по Дарбу. *Математическое Просвещение*, 3(5):140–144, 2001.
- [8] R. E. Schwartz. The Poncelet Grid. *Advances In Geometry*, 7(2), 2007. doi: <https://doi.org/10.1515/ADVGEOM.2007.010>.
- [9] D. Speyer. Poncelet's Porism. URL <https://sbseminar.wordpress.com/2007/07/16/poncelets-porism/>.