

Здравка Паскалева, Мая Алашка, Райна Алашка

МАТЕМАТИКА

6.
КЛАС

АрхИ(ʌ)εΔ

Означения, използвани в учебника:



Знания, които трябва да се запомнят



Основни знания



Обърнете внимание! – пояснения към решението на задачите



Интересни допълнения към учебния материал

1, 2, ... Задачи с повишена трудност

Рецензенти: проф. д.п.н. Сава Гроздев
доц. д-р Драго Михалев
Владимир Николов

Консултант по графичния дизайн: проф. Илия Иванов Илиев

- © Издателство “АРХИМЕД 2” ЕООД, 2017 г.
- © Здравка Крумова Паскалева, Мая Събчева Алашка, Райна Милкова Алашка – автори, 2017 г.
- © Емил Генков Христов – художник на корицата, 2017 г.
- © Ангелина Владиславова Аврамова – графичен дизайн, 2017 г.

ISBN:

СЪДЪРЖАНИЕ

ВХОДНО НИВО

1.	Действия с дроби	6
2.	Част от число. Процент	8
3.	Геометрични фигури	10
4.	Примерен тест с решения	12
5.	Входно ниво.....	15

ТЕМА 1. ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ И ТЕЛА

6.	Окръжност. Дължина на окръжност	18
7.	Окръжност. Дължина на окръжност. Упражнение	20
8.	Дължина на окръжност. Практически задачи. Упражнение	22
9.	Кръг. Лице на кръг	24
10.	Лице на кръг. Упражнение	26
11.	Многоъгълник. Правилен многоъгълник	28
12.	Лице на многоъгълник	30
13.	Призма. Правилна призма.....	32
14.	Права призма. Упражнение.....	34
15.	Лице на повърхнина на права призма.....	36
16.	Лице на повърхнина на права призма. Упражнение	38
17.	Обем на права призма	40
18.	Обем и повърхнина на права призма. Упражнение	42
19.	Пирамида. Правилна пирамида	44
20.	Правилна пирамида. Упражнение	46
21.	Лице на повърхнина на правилна пирамида ..	48
22.	Лице на повърхнина на правилна пирамида. Упражнение	50
23.	Изработване на модели на геометрични тела. Практическа работа. Упражнение	52
24.	Обем на правилна пирамида.....	54
25.	Обем и повърхнина на правилна пирамида. Упражнение	56
26.	Обобщение на темата „Геометрични фигури и ръбести тела“	58
27.	Геометрични фигури и ръбести тела Тест № 1, Тест № 2	60
28.	Прав кръгов цилиндър.....	62
29.	Лице на повърхнина на прав кръгов цилиндър.....	64
30.	Обем на прав кръгов цилиндър	66
31.	Прав кръгов конус.....	68
32.	Лице на повърхнина на прав кръгов конус ..	70
33.	Лице на повърхнина на прав кръгов конус. Упражнение	72
34.	Обем на прав кръгов конус	74

35.	Сфера. Лице на повърхнина на сфера.....	76
-----	---	----

36.	Кълбо. Обем на кълбо	78
37.	Повърхнина и обем на кълбо. Упражнение....	80
38.	Валчести тела. Практически задачи. Упражнение	82
39.	Обобщение на темата „Валчести тела“	84
40.	Тест върху темата „Валчести тела“.....	86

ТЕМА 2. РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

41.	Положителни и отрицателни числа. Множество на рационални числа	88
42.	Изобразяване на рационалните числа върху числовата ос	90
43.	Противоположни числа. Абсолютна стойност (модул) на рационално число	92
44.	Модул на рационални числа. Упражнение	94
45.	Сравняване на рационални числа	96
46.	Събиране на рационални числа с еднакви значи	98
47.	Събиране на рационални числа с различни значи	100
48.	Свойства на събирането	102
49.	Изваждане на рационални числа.....	104
50.	Събиране и изваждане на рационални числа. Разкриване на скоби	106
51.	Алгебричен сбор	108
52.	Алгебричен сбор. Упражнение.....	110
53.	Намиране на неизвестно събирамо	112
54.	Умножение на рационални числа.....	114
55.	Свойства на умножението.....	116
56.	Събиране, изваждане и умножение на рационални числа. Упражнение	118
57.	Деление на рационални числа. Свойства	120
58.	Деление на рационални числа. Свойства. Упражнение	122
59.	Умножение и деление на рационални числа. Упражнение	124
60.	Намиране на неизвестен множител	126
61.	Действия с рационални числа. Упражнение	128
62.	Декартова координатна система. Координати на точка	130
63.	Декартова координатна система. Упражнение	132
64.	Построяване на симетрични точки на дадена точка спрямо началото и осите на координатната система	134
65.	Обобщение на темата „Рационални числа“ ..	136

66	Обобщение на темата „Рационални числа“.	
	Продължение.....	138
67	Тест върху темата „Рационални числа“.....	140
ТЕМА 3. СТЕПЕНУВАНЕ		
68	Действие степенуване с естествен степенен показател	142
69	Числови изрази, съдържащи степени	144
70	Намиране на неизвестни компоненти при действие степенуване	146
71	Умножение на степени с равни основи	148
72	Деление на степени с равни основи.....	150
73	Намиране на числена стойност на изрази, съдържащи степени.....	152
74	Степенуване на произведение	154
75	Степенуване на частно	156
76	Степенуване на степен	158
77	Действия със степени. Упражнение.....	160
78	Степенуване на рационални числа.....	162
79	Степен с нулев показател и степен с цял показател.....	164
80	Степен с цял показател. Упражнение.....	166
81	Стандартен запис на число	168
82	Питагорова теорема – приложение на степените	170
83	Питагорова теорема. Упражнение.....	172
84	Обобщение на темата „Степенуване“.....	174
85	Тест върху темата „Степенуване“	176
ТЕМА 4. УРАВНЕНИЯ		
86	Числови равенства. Свойства	178
87	Уравнения от вида $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$)	180
88	Решаване на уравнения от вида $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$). Упражнение.....	182
89	Правила за решаване на уравнения.....	184
90	Решаване на уравнения. Упражнение № 1	186
91	Решаване на уравнения. Упражнение № 2	188
92	Моделиране с уравнения от вида $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$).....	190
93	Текстови задачи, които се решават с уравнения от вида $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$).....	192
94	Практически задачи, които се решават с уравнения	194
95	Решаване на текстови задачи от движение...196	
96	Обобщение на темата „Уравнения“	198
97	Тест върху темата „Уравнения“	200
ТЕМА 5. ПРОПОРЦИИ		
98	Отношение. Пропорция	202
99	Пропорционалност. Коефициент на пропорционалност	204
100	Основно свойство на пропорциите	206
101	Свойства на пропорциите	208
102	Приложение на пропорциите.....	210
103	Отношението $a : b : c$. Упражнение.....	212
104	Права пропорционалност.....	214
105	Права пропорционалност. Графика.....	216
106	Обратна пропорционалност. Графика.....	218
107	Разчитане на данни, представени чрез диаграми и графики.....	220
108	Разчитане на данни, представени чрез кръгова диаграма	222
109	Обобщение на темата „Пропорции“	224
110	Тест върху темата „Пропорции“	226
ТЕМА 6. ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА		
111	Множества. Елементи	228
112	Множества. Подмножества.....	230
113	Множества и операции с тях. Графично представяне на множества	232
114	Случайно събитие	234
115	Вероятност на случайно събитие като отношение на възможности	236
116	Вероятност на случайно събитие. Упражнение	238
117	Описание на данни – средноаритметично.....	240
118	Таблично или графично представяне на данни	242
119	Организиране и представяне на данни	244
120	Графични или таблични представления на едни и същи данни. Упражнение.....	246
121	Обобщение на темата „Елементи от вероятности и статистика“	248
ИЗХОДНО НИВО		
122	Ръбести тела (преговор)	252
123	Валчести тела (преговор).....	254
124	Рационални числа (преговор)	256
125	Степени (преговор).....	258
126	Уравнения (преговор)	260
127	Пропорции (преговор).....	262
128	Изходно ниво. Тест с решения	264
129	Изходно ниво.....	266
ОТГОВОРИ		
		268

ВХОДНО НИВО

(Урок № 1 – Урок № 5)

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

- Действия с дроби
- Част от число. Процент
- Геометрични фигури

ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА ВХОДНО НИВО С РЕШЕНИЯ

ДВА ПРИМЕРНИ ТЕСТА ЗА ВХОДНО НИВО

**УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНКА НА ВСИЧКИ ТЕСТОВЕ,
ДАДЕНИ В УЧЕБНИКА**

ДЕЙСТВИЯ С ДРОБИ

ЗАДАЧА 1 Пресметнете:

$$\text{а)} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}; \quad \text{б)} \frac{3}{5} + \frac{1}{3}; \quad \text{в)} \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right); \quad \text{г)} \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right).$$

Решение:

$$\text{а)} \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{б)} \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$$

$$\text{в)} \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$\text{г)} \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{5}{6} - \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} \right) =$$

$$= \frac{5}{6} - \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right) =$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ЗАДАЧА 2 Пресметнете $0,3 : \frac{1}{2}$ по три начина.

Решение:

$$0,3 : \frac{1}{2} = \begin{cases} 0,3 \cdot 2 = 0,6 \\ 0,3 : 0,5 = 3 : 5 = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6 \\ \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{10} = 0,6 \end{cases}$$

ЗАДАЧА 3 Пресметнете:

$$\text{а)} \frac{5}{7} \cdot 0,7 + \frac{4}{9} : 8; \quad \text{б)} 1,2 : 1\frac{1}{3} - 0,9 : 1\frac{1}{2}.$$

Решение:

$$\text{а)} \frac{5}{7} \cdot 0,7 + \frac{4}{9} : 8 = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$\text{б)} 1,2 : 1\frac{1}{3} - 0,9 : 1\frac{1}{2} = \frac{12}{10} : \frac{4}{3} - \frac{9}{10} : \frac{3}{2} = \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{10} - \frac{6}{10} = \frac{3}{10} = 0,3$$

ЗАДАЧА 4

Намерете стойността на числовия израз $A = \frac{2}{3} \cdot \left(7 : 3\frac{1}{2} - (6 - 5,8) \right)$.

Решение:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \left(7 : 3\frac{1}{2} - (6 - 5,8) \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(7 : \frac{7}{2} - 0,2 \right) = \frac{2}{3} \cdot (2 - 0,2) = \frac{2}{3} \cdot 1,8 = 1,2$$

ЗАДАЧА 5

Пресметнете рационално: а) $22,9 \cdot 3,2 + 22,9 \cdot 6,8$; б) $18\frac{1}{4} + 17\frac{3}{8}$.

Решение:

$$\text{а)} 22,9 \cdot 3,2 + 22,9 \cdot 6,8 = 22,9 \cdot (3,2 + 6,8) = 22,9 \cdot 10 = 229$$

$$\text{б)} 18\frac{1}{4} + 17\frac{3}{8} = 18\frac{2}{8} + 17\frac{3}{8} = 35\frac{5}{8}$$

ЗАДАЧА 6

Пресметнете числената стойност на израза $A = \left(\frac{7}{9} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : 3 \right) \right) \cdot x$ за:

а) $x = 36$; б) $x = \frac{4}{5}$; в) $x = 1,2$; г) $x = 2\frac{2}{5}$.

Решение: В израза A множителят в скобите не съдържа x .

Ще намерим числената му стойност:

$$\begin{aligned}\frac{7}{9} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : 3 \right) &= \frac{7}{9} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{9} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \\ &= \frac{7}{9} - \frac{3-2}{12} = \frac{7}{9} - \frac{1}{12} = \frac{28}{36} - \frac{3}{36} = \frac{25}{36}\end{aligned}$$

$$A = \frac{25}{36} \cdot x$$

а) за $x = 36$

$$A = 25$$

б) за $x = \frac{4}{5}$

$$A = \frac{25}{36} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{9}$$

в) за $x = 1,2$

$$A = \frac{25}{36} \cdot \frac{12}{10} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

г) за $x = 2\frac{2}{5}$

$$A = \frac{25}{36} \cdot 2\frac{2}{5} = \frac{25}{36} \cdot \frac{12}{5} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

ЗАДАЧА 7

Разпространител на учебници за един ден продал 120 сборника за 5. клас с единична цена 5,60 лв. и сборници за 6. клас с единична цена 6,20 лв. От реализираните продажби получил 1 168 лв. Колко сборника за 6. клас е продал разпространителят?

Решение: 1. x е броят на продадените сборници за 6. клас.

2.

	брой	цена за 1 брой (лв.)	обща сума (лв.)
сборници за 5. клас	120	5,60	120 . 5,60
сборници за 6. клас	x	6,20	$x \cdot 6,20$
			1 168

3. Намираме x : $x \cdot 6,20 = 1 168 - 120 \cdot 5,60$

$$x \cdot 6,20 = 496, \quad x = 496 : 6,2, \quad x = 80.$$

4. Разпространителят е продал 80 сборника за 6. клас.

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете:

а) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}$;

в) $3,2 : 0,2 - 2 \cdot 5,6$;

г) $2,1 : \frac{1}{3} - 5,2 : 4$.

2 Пресметнете числената стойност на изразите:

а) $A = \left(43\frac{1}{3} - 42,8 \right) : \left(\frac{1}{3} + 0,2 \right)$;

б) $B = \left(8\frac{2}{3} - 3\frac{1}{7} \cdot 2,5 \right) : 2\frac{3}{7}$;

в) $C = \left(6 + 5\frac{1}{3} \right) : 5\frac{2}{3} + 1 : 0,25$.

3 Пресметнете числената стойност на израза $A = x : 2\frac{1}{7} + 3,2$, ако:

а) $x = 1,5$; б) $x = 4,5$.

4 Намерете x , ако:

а) $10,8 - x : \frac{5}{9} = 1,8$;

б) $15,3 \cdot \frac{7}{3} - 14,5 : x = 32,8$.

5 Петър купил 5 кисели млека и 2 хляба за 6,90 лв. Намерете цената на едно кисело мляко, ако цената на един хляб е 1,05 лв.

ЧАСТ ОТ ЧИСЛО: Част от число намираме, като умножим дробта, която означава тази част, с числото.

$$\frac{a}{b} \text{ от } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

ЗАДАЧА 1 Намерете x , ако:

a) $x = \frac{3}{7}$ от 56; б) $\frac{5}{8}$ от $x = 450$; в) x от 600 = 240.

Решение:

a) $x = \frac{3}{7}$ от 56	б) $\frac{5}{8}$ от $x = 450$	в) x от 600 = 240
$x = \frac{3}{7} \cdot 56$	$\frac{5}{8} \cdot x = 450$	$x \cdot 600 = 240$
$x = 24$	$x = 450 : \frac{5}{8}$	$x = 240 : 600$
	$x = 720$	$x = \frac{2}{5}$

ПРОЦЕНТ: $\frac{1}{100}$ част от дадено число е прието да се означава с **1%** от това число.

$$p\% \text{ от } A = \frac{p}{100} \text{ от } A = \frac{p}{100} \cdot A$$

ЗАДАЧА 2 Намерете x , ако:

a) 33% от 1200 = x ; б) 27% от $x = 540$; в) $x\%$ от 1 200 = 288.

Решение:

a) 33% от 1 200 = x	б) 27% от $x = 540$	в) $x\%$ от 1 200 = 288
$\frac{33}{100} \cdot 1 200 = x$	$\frac{27}{100} \cdot x = 540$	$\frac{x}{100} \cdot 1 200 = 288$
$x = 396$	$x = 540 : \frac{27}{100}$	$x \cdot 12 = 288$
или 33% от 1 200 = x	$x = 2 000$	$x = 288 : 12$
$0,33 \cdot 1 200 = x$	или 27% от $x = 540$	$x = 24$
$33 \cdot 12 = x$	$0,27 \cdot x = 540$	
$x = 396$	$x = 540 : 0,27$	
	$x = 2 000$	

Решихме три вида задачи:

I вид – намерихме % от дадено число → 33% от 1200;

II вид – намерихме число по даден % от него → 27% от $x = 540$;

III вид – намерихме какъв % от едно число е друго число → $x\%$ от 1200 = 288.

ЗАДАЧА 3 Васил внесъл в банка 1200 лв. на едногодишен срочен влог при годишна лихва 4%.

- а) Каква сума ще спечели след изтичане на срока?
- б) Колко лева ще стане влогът му след една година?

Решение:

- a) За една година ще спечели x лв.
 4% от $1200 = x$,
 $x = 48$ лв.
 Васил ще спечели 48 лв.

- б) $1200 + 48 = 1248$ (лв.)
 Влогът на Васил след една година ще стане 1248 лв.

ЗАДАЧА 4

При групово провеждане на екскурзия с една туристическа фирма се ползва намаление и се заплаща 85% от действителната цена. Участниците в екскурзията платили по 102 лв.

- а) Колко лева е действителната ѝ цена?
 б) Колко лева е намалението при групово провеждане на екскурзията?

Решение:

- а) x лв. е действителната цена. 85% от $x = 102$, $x = 120$ лв.
 120 лв. е действителната цена на екскурзията.

- | | |
|------------------------------|--|
| б) I начин: $120 - 102 = 18$ | II начин: $100\% - 85\% = 15\%$ |
| 18 лв. е намалението. | $15\% \text{ от } 120 = 0,15 \cdot 120 = 18$ |
| | 18 лв. е намалението. |

ЗАДАЧА 5

Дадени са 140 задачи за самостоятелна работа. Петя решила вярно 105 от тях. Колко процента от задачите е решила Петя?

Решение:

$$x\% \text{ от задачите е решила Петя.}$$

$$x\% \text{ от } 140 = 105, \quad x \cdot 1,40 = 105, \quad x = 75$$

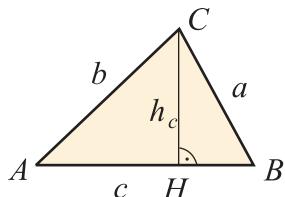
Петя е решила вярно 75% от задачите за самостоятелна работа.

ЗАДАЧИ

- 1 Намерете x , ако:
 а) 15% от $x = 6$; б) $5,2\%$ от $x = 14,56$.
- 2 Олга успяла да реши вярно 36 задачи от математическия тест, което е $\frac{4}{5}$ от зададените задачи. Намерете:
 а) колко задачи съдържа математическият тест;
 б) колко задачи не е успяла да реши Олга.
- 3 Намерете x , ако:
 а) x от $48 = 12$; б) x от $15,6 = 5,2$;
 в) $\frac{2}{9} = x$ от $\frac{2}{3}$; г) $\frac{7}{9} = x$ от $2\frac{1}{3}$.
- 4 Намислих едно число. $\frac{1}{4}$ от него увеличих с $\frac{2}{3}$ от 36 и получих $\frac{2}{7}$ от 119. Кое число съм намислил?
- 5 Служител получил парична награда. С 35% от сумата той си купил телевизор за 875 лв.
 а) Колко лева е получил служителят за награда?
 б) Каква сума му е останала след покупката?
- 6 Намерете x , ако:
 а) $x\%$ от $200 = 24$;
 б) $x\%$ от $56 = 67,2$;
 в) $x\%$ от $280 = 14,56$;
 г) $21,3 = x\%$ от 639 .
- 7 Поради сезонно намаление костюми от 240 лв. се продават за 192 лв. и палта от 280 лв. – за 210 лв. Намерете процента на намалението за всяка от двата вида стоки.
- 8 Намалете a с 20% от a , ако:
 а) $a = 68$; б) $a = 56,8$.

Формули

Триъгълник



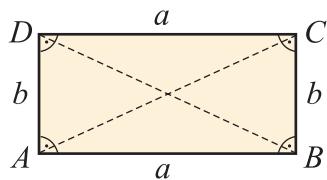
CH – разстояние от точката C до правата AB

$CH = h_c$ – височина в $\triangle ABC$

Обиколка* (периметър) $P = a + b + c$

$$\text{Лице } S_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

Правоъгълник



Измерения (стражи)

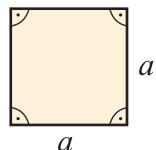
$AB = CD = a$, $AD = BC = b$,

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

Диагонали AC , BD

$$P = 2 \cdot (a + b), \quad S = a \cdot b$$

Квадрат (вид правоъгълник)

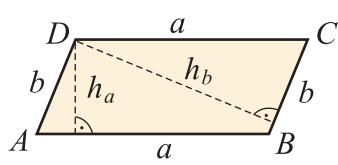


Измерение a

$$P = 4 \cdot a$$

$$S = a \cdot a$$

Успоредник



Стражи $AB = CD = a$,

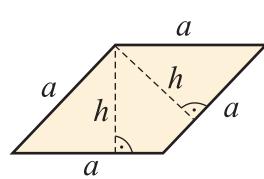
$AD = BC = b$,

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

Височини h_a , h_b

$$P = 2 \cdot (a + b), \quad S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Ромб (вид успоредник)



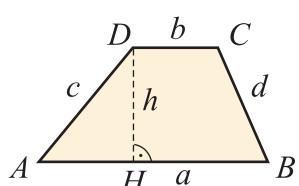
Страна a

Височина h

$$P = 4 \cdot a$$

$$S = a \cdot h$$

Трапец



Основи $a \parallel b$

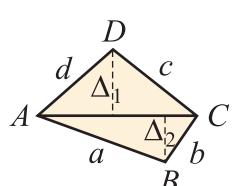
Бедра c, d

Височина $DH = h$

$$P = a + b + c + d$$

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Четириъгълник



$$P = a + b + c + d$$

Всеки диагонал разделя четириъгълника на два триъгълници.

$$S = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2}$$

ЗАДАЧА 1 Катетите на правоъгълен $\triangle ABC$ са $a = 9$ см и $b = 12$ см, а периметърът му е 36 см. Намерете:

- а) лицето на $\triangle ABC$; б) хипотенузата c ; в) височината h_c .

Решение:

$$\text{а)} \quad S = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$S = \frac{9 \cdot 12}{2}$$

$$S = 54 \text{ cm}^2$$

$$\text{б)} \quad P = a + b + c$$

$$36 = 9 + 12 + c$$

$$c = 36 - 21$$

$$c = 15 \text{ cm}$$

$$\text{в)} \quad S = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$54 = \frac{15 \cdot h_c}{2}$$

$$15 \cdot h_c = 108$$

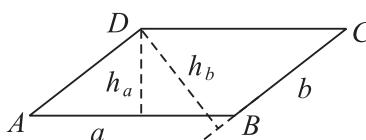
$$h_c = 7,2 \text{ cm}$$

* Обиколката се нарича още периметър.

ЗАДАЧА 2

Страните на успоредник $ABCD$ са $a = 12,6$ см, $b = \frac{1}{3}$ от a , а лицето му е $37,8$ cm^2 . Намерете:

- периметъра на $ABCD$;
- височините h_a и h_b .

Решение:

a) 1. $P = 2 \cdot (a + b)$

$P = 2 \cdot (12,6 + 4,2)$

$P = 33,6$ см

2. $b = \frac{1}{3} \cdot a$

$b = \frac{1}{3} \cdot 12,6$

$b = 4,2$ см

б) 1. $S = a \cdot h_a$

$37,8 = 12,6 \cdot h_a$

$h_a = 37,8 : 12,6$

$h_a = 3$ см

2. $S = a \cdot h_b$

$37,8 = 4,2 \cdot h_b$

$h_b = 37,8 : 4,2$

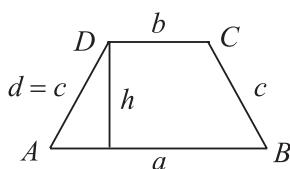
$h_b = 9$ см

ЗАДАЧА 3

Периметърът на равнобедрен трапец е $57,6$ м, а лицето му е $189,6$ m^2 . Ако голямата основа на трапеца е $20,8$ м, а височината му – 12 м, намерете:

а) малката основа на трапеца;

б) бедрата на трапеца.

Решение:

a) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$
 $189,6 = \frac{20,8+b}{2} \cdot 12$
 $(20,8+b) \cdot 6 = 189,6$
 $20,8+b = 31,6$
 $b = 10,8$ м

б) $P = a + b + 2 \cdot c$
 $57,6 = 20,8 + 10,8 + 2 \cdot c$
 $57,6 = 31,6 + 2 \cdot c$
 $2 \cdot c = 57,6 - 31,6$
 $2 \cdot c = 26$
 $c = 13$
 $c = d = 13$ м

ЗАДАЧИ**1** Периметърът на квадрат е 36 см.

Намерете лицето на квадрата.

2 Лицето на равностранен триъгълнике $15,6$ cm^2 , а височината му е $5,2$ см.

Намерете периметъра на триъгълника.

3 $\triangle ABC$ има страна $c = 18,5$ см и височина към тази страна $h_c = 7,4$ см.

Намерете лицето на триъгълника.

4 Едната страна на успореднике $a = 16,2$ см, а за височината към тази страна е дадено, че $h_a = \frac{1}{3}$ от a . Намерете лицето на успоредника.**5** Периметърът на ромб е $P = 90$ см,а височината му е $\frac{2}{3}$ от страната a на ромба. Намерете страната, височината и лицето на ромба.**6** Правоъгълен триъгълник с катети 7 см и 12 см е равнолицев с триъгълник със страна 6 см. Намерете височината към тази страна.**7** Правоъгълен трапец има бедра 3 см и 5 см. Ако периметърът му е $P = 20$ см, намерете лицето на трапеца.**8** Лицето на квадрат с обиколка 36 см е равно на лицето на правоъгълен триъгълник с катет 90 mm. Намерете другия катет на триъгълника (в см).**9** Лицето на правоъгълен трапец е 144 cm^2 , а основите му са 181 mm и $1,39$ dm. Намерете бедрото, перпендикулярно на основите на трапеца (в см).

ЗАДАЧА 1

От дробните числа $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{23}{30}$ най-голямо е:

- A) $\frac{2}{3}$; Б) $\frac{4}{5}$; В) $\frac{5}{6}$; Г) $\frac{23}{30}$.

Решение:

1. Намираме HOK на знаменателите; $HOK(3; 5; 6; 30) = 30$.

2. Привеждаме дробните числа към общ знаменател.

$$\frac{2}{3} = \frac{20}{30}, \quad \frac{4}{5} = \frac{24}{30}, \quad \frac{5}{6} = \frac{25}{30}, \quad \frac{23}{30}$$

3. Най-голямо е числото $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$.

Отг.: В)

ЗАДАЧА 2

Стойността на израза $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5}$ е:

- A) $\frac{4}{45}$; Б) $\frac{4}{5}$; В) $\frac{7}{5}$; Г) $\frac{5}{9}$.

Решение: $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

Отг.: Г)

ЗАДАЧА 3

Колко лева общо струват три кифли по 1,10 лв. и две банички по 1,25 лв.?

- A) 3,30; Б) 2,50; В) 5,80; Г) 5,95.

Решение: $1,10 \cdot 3 + 1,25 \cdot 2 = 3,30 + 2,50 = 5,80$ лв.

Отг.: В)

ЗАДАЧА 4

Ако $x : \frac{7}{8} - 1,4 = 0,22 \cdot 30$, то $x - 4,4$ е:

- A) 7; Б) 3,6; В) 2,6; Г) 3,4.

Решение: $x : \frac{7}{8} - 1,4 = 6,6$
 $x : \frac{7}{8} = 6,6 + 1,4$
 $x : \frac{7}{8} = 8$
 $x = 8 \cdot \frac{7}{8}$

$$x - 4,4 = 7 - 4,4 = 2,6$$

Отг.: В)

ЗАДАЧА 5

Намислих едно число. $HOD(12; 30)$ разделих на намисленото число и получих $HOK(6; 16)$. Намисленото число е:

- A) 6; Б) 48; В) 8; Г) $\frac{1}{8}$.

Решение:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$HOD(12; 30) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{array}{r|rr} & 6; 16 & 2 \\ & 3 & 8 & 2 \\ & 3 & 4 & 2 \\ & 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & & \end{array} \quad HOK(6; 16) = 2^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$$

$$HOD(12; 30) : x = HOK(6; 16)$$

$$6 : x = 48$$

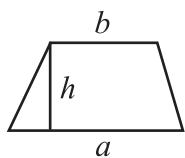
$$x = 6 : 48$$

$$x = \frac{1}{8}$$

Отг.: Г)

ЗАДАЧА 6 Трапец има основи 0,76 dm и 26 mm. Височината на трапеца е 4 см.

Лицето на трапеца в квадратни сантиметри е:



- A) 40,8; Б) 4,08; В) 2,04; Г) 20,4.

Решение: $a = 0,76 \text{ dm} = 7,6 \text{ cm}$, $b = 26 \text{ mm} = 2,6 \text{ cm}$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{7,6+2,6}{2} \cdot 4 = \frac{10,2}{2} \cdot 4 = 5,1 \cdot 4 = 20,4 \text{ cm}^2$$

Отг.: Г)**ЗАДАЧА 7** Иван трябвало да реши определен брой задачи по математика. Решил $\frac{3}{5}$ от тях и установил, че му остават още 24 задачи. Колко задачи е трябвало да реши Иван?

- A) 60; Б) 36; В) 40; Г) 48.

Решение: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ части остават да реши, x – всички задачи.

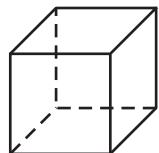
$$\frac{2}{5} \text{ от } x = 24$$

$$\frac{2}{5} \cdot x = 24$$

$$x = 24 : \frac{2}{5} = 24 \cdot \frac{5}{2} = 12 \cdot 5 = 60$$

Отг.: А)**ЗАДАЧА 8** Куб има измерение $a = 5 \text{ см}$. Намерете:

- а) повърхнината на куба в квадратни сантиметри;
б) вместимостта на куба в литри.



Решение: а) $S_1 = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ cm}^2$

б) $V = a^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3 =$

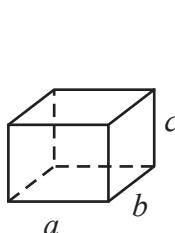
$$= 125 : 1000 =$$

$$= 0,125 \text{ dm}^3 = 0,125 \text{ L}$$

Отг.: а) 150; б) 0,125**ЗАДАЧА 9** Правоъгълен паралелепипед има дължина $a = 0,7 \text{ dm}$ и широчина

$b = 40 \text{ mm}$. Ако обемът на паралелепипеда е $V = 168 \text{ cm}^3$, намерете:

- а) височината на паралелепипеда в сантиметри;
б) околната повърхнина на паралелепипеда в квадратни сантиметри;
в) повърхнината на паралелепипеда в квадратни сантиметри.



Решение:

а) $V = a \cdot b \cdot c$

$$a = 0,7 \text{ dm} = 7 \text{ cm}$$

$$b = 40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}$$

$$168 = 7 \cdot 4 \cdot c$$

$$168 = 28 \cdot c$$

$$c = 6 \text{ cm}$$

б) $S = P \cdot c$

$$S = 2 \cdot (a+b) \cdot c$$

$$S = 2 \cdot (7+4) \cdot 6$$

$$S = 2 \cdot 11 \cdot 6$$

$$S = 132 \text{ cm}^2$$

в) $S_1 = S + 2B$

$$B = a \cdot b = 7 \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2$$

$$S_1 = 132 + 2 \cdot 28 =$$

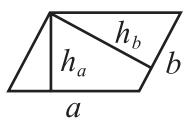
$$= 132 + 56 =$$

$$= 188 \text{ cm}^2$$

Отг.: а) 6; б) 132; в) 188**ЗАДАЧА 10** Успоредник има страна $a = 15 \text{ cm}$, страна $b = \frac{1}{3}$ от a и височина

$h_a = 80\%$ от b . Намерете: а) лицето на успоредника в квадратни сантиметри;

б) височината h_b в сантиметри.



Решение:

а) $b = \frac{1}{3}$ от $15 = 5 \text{ cm}$

$$h_a = 80\% \text{ от } 5 = 0,8 \cdot 5 = 4 \text{ cm}$$

$$S = a \cdot h_a = 15 \cdot 4 = 60 \text{ cm}^2$$

б) $S = b \cdot h_b$

$$60 = 5 \cdot h_b$$

$$h_b = 60 : 5 = 12 \text{ cm}$$

Отг.: а) 60;**б) 12**

УКАЗАНИЯ ЗА РЕШАВАНЕ НА ТЕСТОВЕТЕ, ДАДЕНИ В ТОЗИ УЧЕБНИК

В учебника са дадени 15 теста. Във всеки от тях има 10 задачи:

- 7 с избираем отговор,
- 2 със свободен отговор и
- 1, за която се изисква писмено аргументирано решение.

След всяка задача с избираем отговор са посочени 4 отговора, от които само един е верен.

В бланката за отговори се записва:

- за задачите с избираем отговор – буквата, отговаряща на верния отговор;
- за задачите със свободен отговор – отговора на задачата, без да се посочва хода на решението.

За даден грешен отговор **не се отнемат точки**.

Ако решите да промените отговора на дадена задача, зачертнете с “X” първия си отговор и запишете до него новия отговор.

Задачите в теста са с различна трудност.

В бланката за отговори е посочен броят на точките, които получавате при верен отговор за всяка от първите 9 задачи. Задача 10 се оценява с най-много 10 точки.

Максималният брой точки е 40.

Бланка за отговори		
Задача №	Отговор	Точки
1		2
2		2
3		2
4		3
5		3
6		3
7		3
Задача 8		
a)		3
б)		3
Задача 9		
a)		2
б)		2
в)		2
Задача 10		
		до 10

Препоръчително време – 1 учебен час.
Задачите се решават на допълнителни листове.
Върху теста не се пише и огражда.
Не се използва калкулатор.

Вариант за оценка:	
Точки	Представяне
от 0 до 6	слабо
от 7 до 14	средно
от 15 до 22	добро
от 23 до 30	много добро
от 31 до 40	отлично

ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 1

1. На 3 и на 5 се дели числото:
 А) 2 154;
 Б) 1 055;
 В) 5 360;
 Г) 3 150.
2. Разликата на дробта $\frac{11}{6}$ и реципрочната ѝ дроб е:
 А) $2\frac{25}{66}$;
 Б) $1\frac{19}{66}$;
 В) $2\frac{19}{66}$;
 Г) $1\frac{25}{66}$.
3. Шестокласниците в едно училище са 155. От тях $\frac{3}{5}$ са момичета. Момчетата са:
 А) 31;
 Б) 52;
 В) 62;
 Г) 93.
4. Стойността на израза

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$
 е:
 А) $\frac{1}{2}$;
 Б) $1\frac{1}{4}$;
 В) $\frac{1}{4}$;
 Г) $1\frac{1}{2}$.
5. Ако $x\%$ от $3\frac{1}{3}$ е 2,5, то x е:
 А) 37,5;
 Б) 75;
 В) 47,5;
 Г) 85.
6. Намислих число. От $\frac{2}{7}$ части от това число извадих 0,4 и получих $\frac{3}{5}$. Намисленото число е:
 А) $\frac{2}{7}$;
 Б) $\frac{2}{5}$;
 В) 3,5;
 Г) 4,5.
7. Лицето на ромб с височина 0,5 dm е 35 cm². Периметърът на ромба в дециметри е:
 А) 2,8;
 Б) 28;
 В) 0,28;
 Г) 8,2.
8. Цената на телевизор е 800 лв. При закупуване на разсрочено плащане цената му е увеличена с 12%. Намерете:
 а) с колко лева е посъпнал телевизорът;
 б) цената на телевизора при разсрочченото плащане.
9. Сборът от всички ръбове на куб е 48 dm. Намерете:
 а) околната му повърхнина в квадратни сантиметри;
 б) повърхнината му в квадратни сантиметри;
 в) обема му в литри.
10. Успоредник със страна $a = 7$ cm има обиколка $P = 2,4$ dm. Ако едната височина на успоредника е 25% от P , намерете:
 а) височините на успоредника в сантиметри;
 б) лицето на успоредника в квадратни сантиметри.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 2

1. На 2 и на 3 се дели числото:
A) 10 840;
B) 35 070;
C) 68 812;
D) 16 905.
2. Сборът на дробта $\frac{5}{7}$ с реципрочната ѝ дроб е:
A) $1\frac{4}{35}$;
B) $\frac{24}{35}$;
C) $2\frac{4}{35}$;
D) $1\frac{11}{24}$.
3. Ако $\frac{2}{3}$ от $x = 62$, то x е:
A) 93;
B) 103;
C) 81;
D) 155.
4. Стойността на израза $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - 6 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12}\right)$ е:
A) $\frac{1}{2}$;
B) $\frac{1}{6}$;
C) $\frac{17}{36}$;
D) $\frac{1}{3}$.
5. Ако 80% от x е 2,8, то x е:
A) 2,8; **B) 3;** **C) 3,2;** **D) 3,5.**
6. Намислих число. Към 8% от това число прибавих произведението $4 \cdot 0,01$ и получих 2,6. Намисленото число е:
A) 32; **B) 320;** **C) 230;** **D) 23.**
7. Успоредник със страна 7 см и височина към нея 6 см е равнолицев с триъгълник, основата на който е 8 см. Височината към основата на триъгълника в сантиметри е:
A) 5,25;
B) 10,25;
C) 10,5;
D) 2,6.
8. Цената на зимни обувки е 105 лв. При сезонна разпродажба е направено намаление от 20%. Намерете:
a) колко лева е намалението;
б) цената на обувките след намалението.
9. Правоъгълен паралелепипед има основни ръбове $a = 6$ см и $b = 5$ см. Ако околната му повърхнина е 88 cm^2 , намерете:
a) височината на паралелепипеда в сантиметри;
б) повърхнината му в квадратни сантиметри;
в) обема му в литри.
10. Равнобедрен трапец има бедро 14,3 см и височина 1 dm. Ако сборът от дълчините на основите му е равен на събрана от дълчините на бедрата му, намерете:
а) обиколката на трапеца в сантиметри;
б) лицето на трапеца в квадратни сантиметри.

ТЕМА 1

ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ И ТЕЛА

(Урок № 6 – Урок № 40)

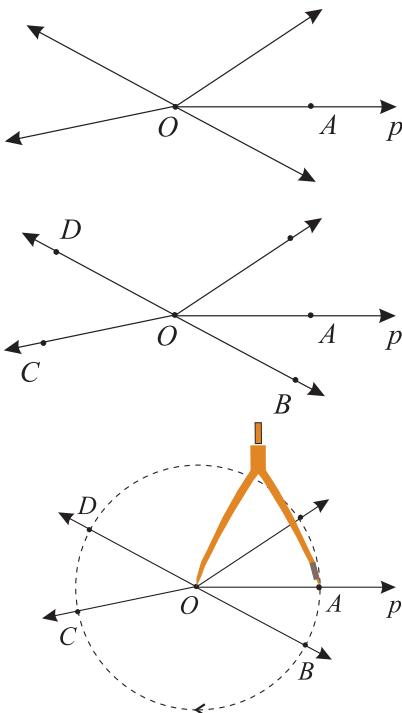
В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- окръжност, кръг, правилен многоъгълник;
- ръбести тела – права призма,
правилна призма,
правилна пирамида;
- валчести тела – прав кръгов цилиндър,
прав кръгов конус,
кълбо.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да намират обиколка и лице на изучаваните равнинни фигури;
- да намират основните линейни елементи чрез използване на формулите за обиколка и лице;
- да пресмятат лице на повърхнина и обем на изучените тела;
- да намират основните елементи на разглежданите тела чрез използване на формулите за лица и обеми.

ОКРЪЖНОСТ. ДЪЛЖИНА НА ОКРЪЖНОСТ



Нека точката O е начало на лъч Op и $OA = 2$ см.
Колко лъча с начало O можем да начертаем върху чертожния лист?
С начало O можем да начертаем безброй много лъчи.

Върху всеки лъч намираме точка, която е на 2 см от точката O :

$$OA = OB = OC = OD = \dots = 2 \text{ см.}$$

Лъчите са безброй много и върху всеки лъч има такава точка. Тогава точките A, B, C, \dots също са безброй много.

Ако поставим остието на пергела в точката O и писеща му в точката A , т.е. разтворът му е 2 см, и започнем да движим писеща, той ще премине през точките B, C, D, \dots . Забелязваме, че всички точки от тази фигура са на разстояние 2 см от точката O .

Всички точки в равнината, които са на едно и също разстояние r от избрана точка O , образуват **окръжност** $k(O; r)$.



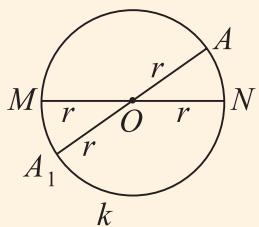
Окръжност

Всички точки в равнината, които са на едно и също разстояние r от избрана точка O , образуват **окръжност** $k(O; r)$.

Точката O се нарича **център** на окръжността.

Разстоянието (OA) от центъра O до точка A на окръжността се нарича **радиус** и се означава с r .

AA_1 е **диаметър** на окръжността и се означава с d . Диаметърът минава през центъра на окръжността и има дължина $2 \cdot r$, т.е. $AA_1 = MN = d = 2 \cdot r$.



Окръжност k :

O – център на k

OA – радиус r

AA_1 – диаметър, $d = 2 \cdot r$, $r = \frac{1}{2} \cdot d$

\widehat{AN} – дъга от окръжност

ЗАДАЧА

Дадена е окръжност.

а) Ако $r = 12$ см, намерете диаметъра ѝ.

б) Ако $d = 10$ см, намерете радиуса ѝ.

Решение:

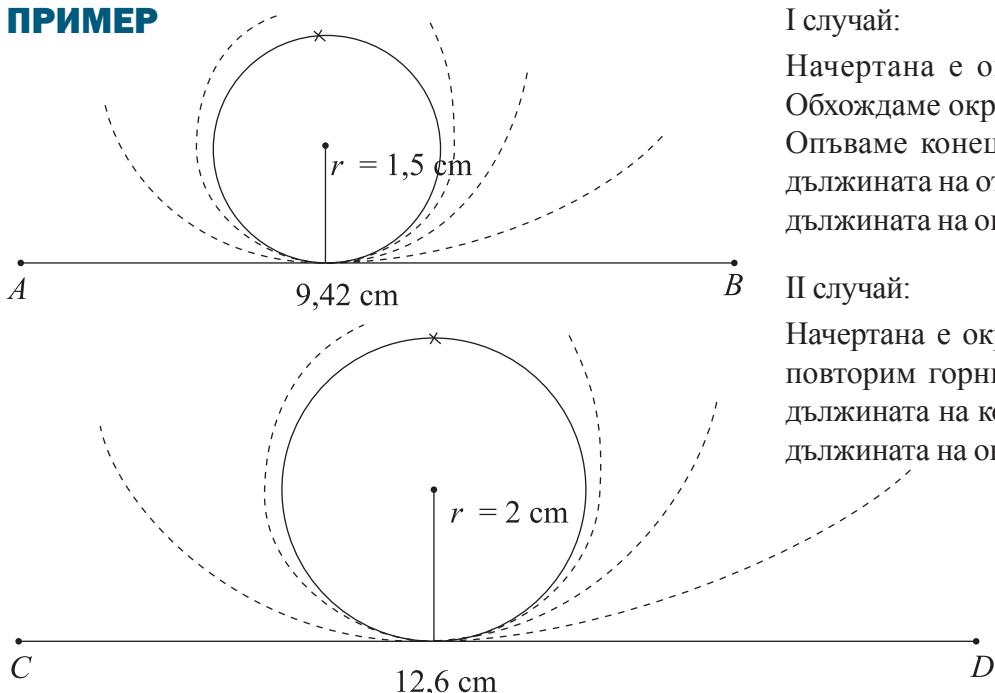
а) $d = 2 \cdot r$, $d = 2 \cdot 12 = 24$, $d = 24$ см

б) $r = \frac{1}{2}$ от d , $r = \frac{1}{2} \cdot d$, $r = \frac{10}{2} = 5$, $r = 5$ см

Окръжността е геометрична фигура, обиколката на която, т.е. дължината ѝ, не може да се измери точно с линия.

Дължината на окръжността се означава с буквата c .

ПРИМЕР



I случай:

Начертана е окръжност с $r = 1,5$ см.
Обхождаме окръжността с конец.
Опъваме конеца и неговата дължина е
дължината на отсечката $AB \approx 9,42$ см, т.e.
дължината на окръжността е $c_1 \approx 9,42$ см.

II случай:

Начертана е окръжност с $r = 2$ см. Ако
повторим горния опит, ще получим, че
дължината на конеца е $CD \approx 12,6$ см, т.e.
дължината на окръжността е $c_2 \approx 12,6$ см.

Забелязваме, че дължината на окръжността зависи от големината на
нейния радиус:

I случай: $r_1 = 1,5$ см $\rightarrow AB = c_1 \approx 9,42$ см; II случай: $r_2 = 2$ см $\rightarrow CD = c_2 \approx 12,6$ см,
т.e. ако r се увеличава, то и c се увеличава.

Пресмятаме частното от дълчините на отсечките AB , CD и диаметрите
на съответните им окръжности:

$$\text{I случай: } \frac{c_1}{d_1} = \frac{AB}{2 \cdot r_1} \approx \frac{9,42}{3} = 3,14; \quad \text{II случай: } \frac{c_2}{d_2} = \frac{CD}{2 \cdot r_2} \approx \frac{12,6}{4} = 3,15.$$

Ако се направят повече такива опити с по-прецизни измервания, се
забелязва, че частното $\left(\frac{c}{d}\right)$ е близко до числото 3,14.

Установено е, че частното от дълчината на окръжност и нейния
диаметър ($d = 2 \cdot r$) е едно и също число за всички окръжности, т.e. е
константа. **Това число се означава с π (пи).** π е безкрайна десетична
дроб, $\pi = 3,141592\dots$

За дължината на окръжността получаваме $\frac{c}{d} = \pi$, т.e. $c = \pi \cdot d$.



Дължината с на окръжност намираме по една от формулите:

$$c = \pi \cdot d \text{ или } c = 2 \cdot \pi \cdot r, \text{ където } \pi \approx 3,14 \left(\pi \approx \frac{22}{7} \right).$$



3,14 $\left(\frac{22}{7}\right)$ е приблизителна стойност на π . Следователно дължината на
окръжност е число, приблизително равно на $2 \cdot 3,14 \cdot r \left(2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r\right)$.
Прието е да се пише знак за равенство.

ОКРЪЖНОСТ. ДЪЛЖИНА НА ОКРЪЖНОСТ. УПРАЖНЕНИЕ

Заобиколени сме от предмети, в които има окръжности:



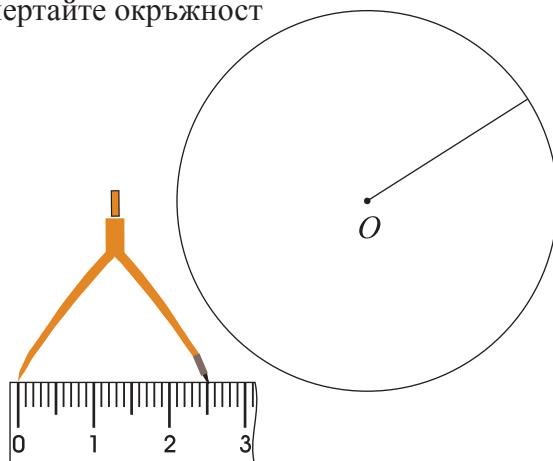
ЗАДАЧА 1 Изберете точка O от чертожния лист и начертайте окръжност с център O и радиус $r = 2,5$ см.

Решение:

С пергела отмерваме върху линийката 2,5 см и с този разтвор на пергела чертаем окръжност с $r = 2,5$ см и център точката O .



При избора на точката O съобразяваме окръжността да не излезе извън чертожния лист.

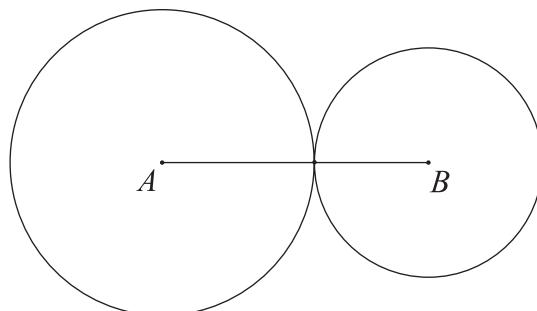


ЗАДАЧА 2 Начертайте отсечка $AB = 3,5$ см и окръжност:

- с център A и $r = 2$ см;
- с център B и $r = 1,5$ см.

Решение:

Забелязваме, че двете окръжности имат точно една общая точка.

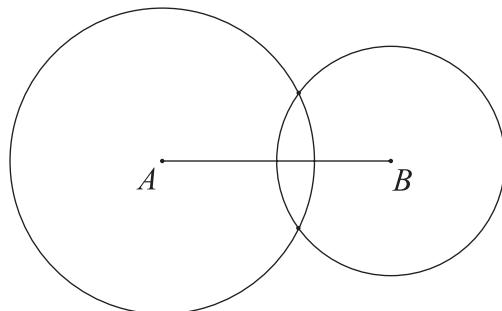


ЗАДАЧА 3 Начертайте отсечка $AB = 3$ см и окръжност:

- с център A и $r = 2$ см;
- с център B и $r = 1,5$ см.

Решение:

Забелязваме, че двете окръжности имат точно две общи точки.



ЗАДАЧА 4 Намерете дължината на окръжност, ако: а) $r = 2$ см; б) $d = 5$ см.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad c &= 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \\ &= 12,56 \text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad c &= \pi \cdot d \\ &= 3,14 \cdot 5 \\ &= 15,7 \text{ см} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5

Дължината на окръжност е 34,54 см. Намерете: а) r ; б) d .

Решение:

а) $c = 2 \cdot \pi \cdot r$

$$34,54 = 2 \cdot 3,14 \cdot r$$

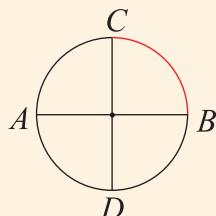
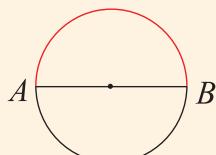
$$6,28 \cdot r = 34,54$$

$$r = 34,54 : 6,28, \quad r = 5,5 \text{ см}$$

б) $d = 2 \cdot r$

$$d = 2 \cdot 5,5$$

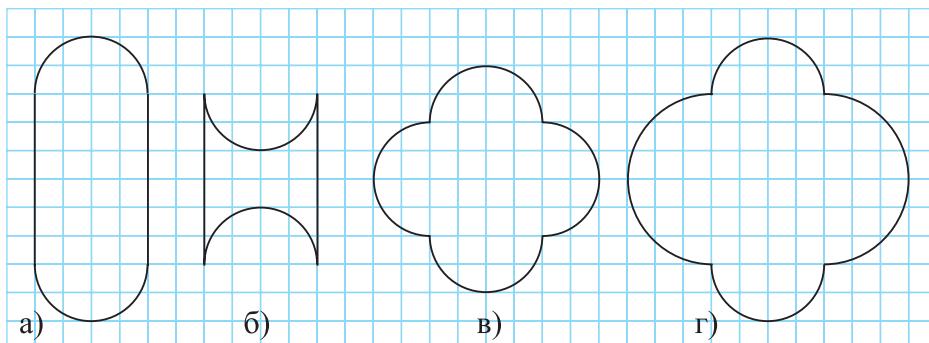
$$d = 11 \text{ см}$$



- Диаметърът AB разделя окръжността на две равни части, всяка от които има дължина $\frac{1}{2}$ от c . Всяка от тези две части се нарича **полуокръжност**.
- Два диаметъра, които образуват прав ъгъл (т.е. са перпендикулярни), разделят окръжността на 4 равни части, всяка от които има дължина $\frac{1}{4}$ от c . Всяка от тези части е **четвърт окръжност**.

ЗАДАЧА 6

На квадратна мрежа (приемаме едно деление за 1 см) са начертани фигури. Намерете обиколките им.



Решение:

а) $P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12 + 4 \cdot 3,14 = 24,56,$

$$P = 24,56 \text{ см}$$

б) $P = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3,14 = 24,56,$

$$P = 24,56 \text{ см}$$

в) $P = 2 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 8 \cdot 3,14 = 25,12,$

$$P = 25,12 \text{ см}$$

г) $P = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 3 = 4 \cdot 3,14 + 6 \cdot 3,14 = 10 \cdot 3,14 = 31,4,$

$$P = 31,4 \text{ см}$$

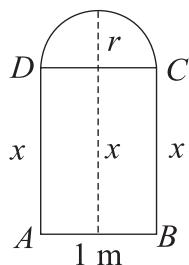
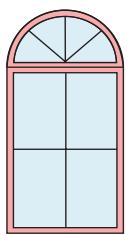
ЗАДАЧИ

- 1 Начертайте окръжност с радиус r и намерете дължината ѝ, ако:
а) $r = 3 \text{ см}$; б) $r = 1,5 \text{ см}$; в) $r = 2,8 \text{ см}$.
- 2 Начертайте окръжност с диаметър d и намерете дължината ѝ, ако:
а) $d = 7 \text{ см}$; б) $d = 4,4 \text{ см}$; в) $d = 5 \text{ см}$.
- 3 Намерете радиуса на окръжност с дължина: а) $c = 10 \pi \text{ см}^*$;
- 4 б) $c = 4,8 \pi \text{ см}$; в) $c = 18,84 \text{ см}$.
- 5 Начертайте окръжност с радиус 4 см. Намерете дължината на:
а) окръжността;
б) полуокръжността;
- 5 Намерете дължината на земния екватор, ако диаметърът му е 12 756 km.
Отговора закръглете в километри.

* $10 \cdot \pi, 4,8 \cdot \pi, \dots$ могат да се записват без знака за умножение: $10 \pi, 4,8 \pi, \dots$

ДЪЛЖИНА НА ОКРЪЖНОСТ. ПРАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Рамката на прозорец е с форма на правоъгълник и полуокръжност и има обиколка 5,37 м. Намерете височината на прозореца, ако широчината му е 1 м.



Решение:

Означаваме правоъгълната част на прозореца с $ABCD$.

$$\text{Тогава } AB = CD = 1 \text{ м}, \\ AD = BC = x.$$

CD е диаметърът на полуокръжността, а

$$r = \frac{1}{2} \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5 \text{ м.}$$

Дължината на полуокръжността е

$$\frac{1}{2} \text{ от } c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot r = 3,14 \cdot 0,5 = 1,57 \text{ м.}$$

$$\text{От равенството } \frac{1}{2} \cdot c + AB + 2 \cdot x = 5,37 \quad \text{намираме неизвестното } x: \\ 1,57 + 1 + 2 \cdot x = 5,37$$

$$2,57 + 2 \cdot x = 5,37$$

$$2 \cdot x = 5,37 - 2,57$$

$$2 \cdot x = 2,80$$

$$x = 2,80 : 2$$

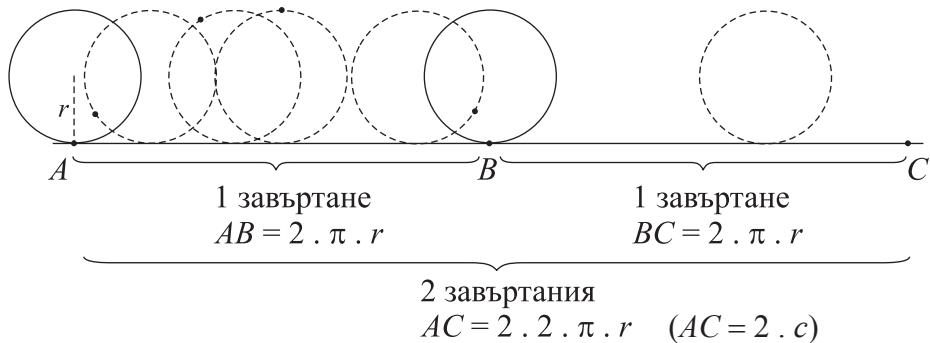
$$x = 1,40.$$

Височината на прозореца получаваме от $x + r = 1,40 + 0,50 = 1,90$.

Височината на прозореца е 1,90 м.

ЗАДАЧА 2 Гимнастичка играе с обръч, който има диаметър 80 см. Колко метра ще измине обръчът, ако направи 2 пълни завъртания? А 10 пълни завъртания?

Решение:



Получаваме зависимостта

пътят (S) = броя завъртания (n) . дължината на окръжността (c), $S = n \cdot c$.

За дължината на окръжността получаваме

$$c = \pi \cdot d = 3,14 \cdot 0,8 = 2,512 \text{ м } (80 \text{ см} = 0,8 \text{ м}).$$

При две пълни завъртания $\rightarrow AC = 2 \cdot c = 2 \cdot 2,512 = 5,024 \text{ м.}$

При десет пълни завъртания $\rightarrow 10 \cdot c = 10 \cdot 2,512 = 25,12 \text{ м.}$

ЗАДАЧА 3 Майка разхожда малкото си дете в детската количка. Ако предното колело е с радиус 12 см, можете ли да намерите колко пъти се е завъртяло то, ако майката е изминала 200 м?

Решение: Колелото се е завъртяло x пъти. Изминатият от него път е $S = 200$ м.

От зависимостта $x \cdot c = S$ намираме

$$x \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 20\ 000 \text{ (в см)}$$

$$x \cdot 6,28 \cdot 12 = 20\ 000$$

$$x = 20\ 000 : 75,36$$

$x \approx 265,39$. Броят на пълните завъртания е 265.

ЗАДАЧА 4 Колело на автомобил има радиус 40 см. С каква скорост се движи автомобилът, ако колелото извършва 600 оборота (завъртания) в минута?

Решение:

Скоростта на автомобила е броят на километрите, които той изминава за 1 час (1 час = 60 минути).

1 оборот = 1 пълно завъртане на колелото, т.e.

$$1 \text{ оборот} \rightarrow c = 2 \cdot \pi \cdot 40 = 251,2 \text{ см.}$$

$$\text{За 1 минута прави } 600 \text{ оборота} \rightarrow 600 \cdot 251,2 = 150\ 720 \text{ см.}$$

$$\text{За 1 час прави } 60 \cdot 600 \text{ оборота} \rightarrow 60 \cdot 150\ 720 = 9\ 043\ 200 \text{ см.}$$

$$9\ 043\ 200 \text{ см} = 90\ 432 \text{ м} = 90,432 \text{ km} \approx 90,43 \text{ km.}$$

За 1 час колелото изминава път, равен на 90,43 km, т.e. скоростта на автомобила е $v = 90,43 \text{ km/h}$.



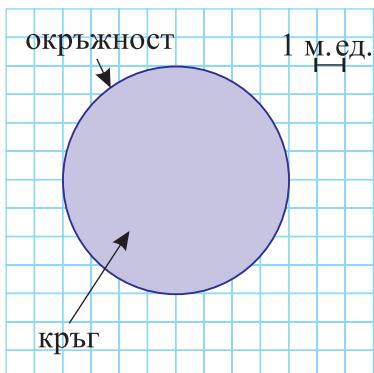
Още древните вавилонци са смятали, че частното от дължината на всяка окръжност и дължината на нейния диаметър е числото 3. Египтяните са използвали числото 3,16.

Архимед (287 – 212 г. пр.н.е.) е определил числото π с точност до 3 знака след десетичната запетая. Рудолф ван Цойлен (1540 – 1610 г.) е въвел означението на това число – π (пи).

Днес с помощта на компютрите π може да се изчислява до хиляди знаци след десетичната запетая: $\pi = 3,14159265358979323846 \dots$

ЗАДАЧИ

- 1** Кръгло огледало има диаметър 80 см. Намерете колко метра ще бъде обиколката на рамката му.
- 2** Имате голямо парче стъкло и искате да покриете с него кръглата маса в столовата, която има диаметър 1 м. За изрязване на стъклото стъкларят иска 12 лв., а за шлайфане на ръба – по 1,20 лв. за 10 см. Колко лева трябва да платите?
- 3** Ани търкаля обръч с диаметър 80 см. Ако обръчът направи 5 пълни завъртания, колко метра е изминал?
- 4** Милен изминал с велосипед 150 м. По колко завъртания са направили колелетата на велосипеда, ако и двете са с диаметър 56 см?
- 5** Колелото на лек автомобил има радиус 40 см. С каква скорост се движи автомобилът, ако колелото извършва 550 оборота в минута?



На квадратна мрежа е начертана окръжност с център O и $r = 4$ деления ($r = 4$ м. ед.). Дължината на тази окръжност е $c = 8\pi$ м. ед.

Оцветената част, т.е. частта, заградена от окръжността, се нарича **кръг**.



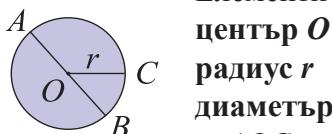
Кръг

Частта от равнината, заградена от окръжност, се нарича **кръг**.

Начертаната геометрична фигура има:

- **обиколка** → дължината на окръжността;
- **лице** → лицето на кръга.

Елементи на кръга:

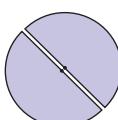


центрър O

радиус r

диаметър $AB = d = 2 \cdot r$

$\angle AOC$ – централен ъгъл



1 диаметър
разделя кръга
на два полукръга.

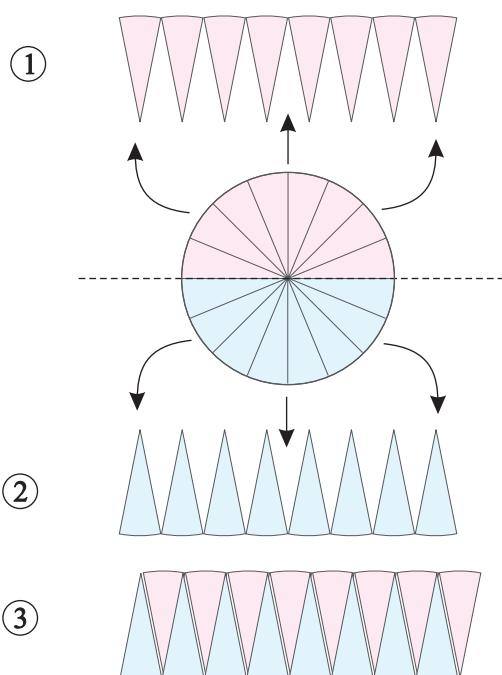


2 радиуса
разделят кръга
на два сектора.



Централен ъгъл

Ъгъл, чийто връх е центърът на кръг, а раменете му са радиуси на кръга, се нарича централен ъгъл.



Как да намерим формула за лице на кръг?

I случай:

Разделяме кръга на 16 равни части (сектори), 8 от които образуват полукръг.

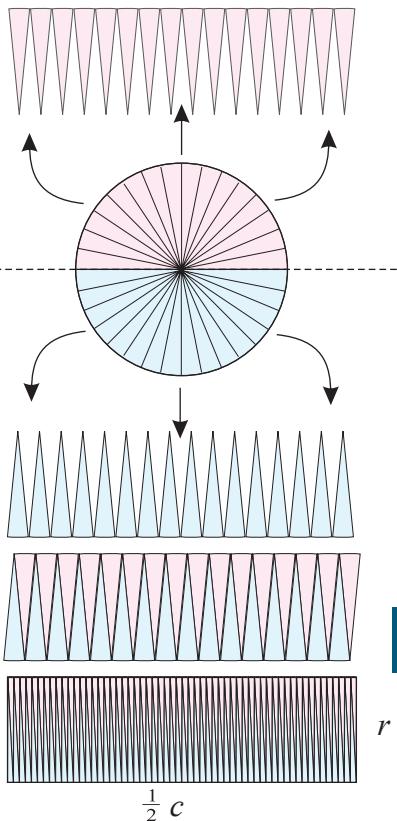
Оцветеният в розово полукръг може да заеме положение ①.

Оцветеният в синьо полукръг може да заеме положение ②.

Оцветените части ① и ② поставяме в положение ③.

Ивицата ③ съдържа 16-те сектора, на които е разделен кръгът, т.е. лицето ѝ е равно на лицето на кръга.

①



II случай:

Разделяме същия кръг на 32 равни части (сектора). Повтаряме същите действия като в I случай и получаваме ивицата ③. Тя съдържа 32 сектора, на които е разделен кръгът, т.e. лицето ѝ е равно на лицето на кръга.

②

③

④

С компютър същият кръг може да се раздели на 64, на 128 и т.н. равни части. Тогава ивицата от вида ③ ще се приближи до геометричната фигура **правоъгълник** ④ с измерения $\frac{1}{2} \cdot c$ и r . Лицето на кръга ще е равно на лицето на този правоъгълник, т.e.

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

Лице на кръг

$$S = \pi \cdot r^2$$

ЗАДАЧА 1

Намерете лицето на кръг с радиус:

a) 10 cm ; б) 2 cm ; в) $2 \frac{1}{3} \text{ cm}$.

Решение:

a) $S = \pi \cdot r^2$

$$S = 3,14 \cdot 10^2$$

$$S = 314 \text{ cm}^2$$

б) $S = \pi \cdot r^2$

$$S = 3,14 \cdot 2^2$$

$$S = 12,56 \text{ cm}^2$$

в) $S = \pi \cdot r^2$

$$S = \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3}$$

$$S = \frac{154}{9}, \quad S = 17\frac{1}{9} \text{ cm}^2$$

ЗАДАЧА 2

Намерете лицето на кръг, ако дължината на окръжността, която го загражда, е $50,24 \text{ cm}$.

Решение: 1.

$$c = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$2 \cdot \pi \cdot r = c$$

$$2 \cdot 3,14 \cdot r = 50,24$$

$$r = 50,24 : 6,28, r = 8 \text{ cm}$$

2. $S = \pi \cdot r^2$

$$S = 3,14 \cdot 8^2$$

$$S = 200,96 \text{ cm}^2$$

ЗАДАЧИ

1 Намерете лицето на кръг с радиус:

а) 7 cm ; б) $1,2 \text{ cm}$; в) $2 \frac{6}{11} \text{ cm}$.

2 Намерете лицето на кръг с диаметър:

а) 16 cm ; б) $5,8 \text{ dm}$; в) $0,6 \text{ m}$.

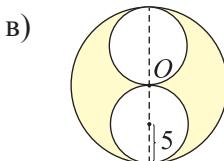
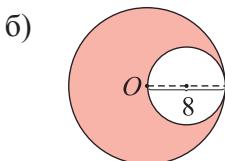
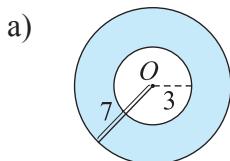
3 Готварска печка има 4 нагревателни площи с диаметри 12 cm , 14 cm , 18 cm и 24 cm . Намерете лицето на всяка от плочите.

4 Кръгло огледало има диаметър 80 cm . Намерете цената му, ако 1 m^2 огледало струва 60 лв . и за направата му се плаща 15 лв .

5 Намерете лицето на кръг, ако дължината на окръжността, която го загражда, е:

а) $37,68 \text{ cm}$; б) $56,52 \text{ cm}$; в) $131,88 \text{ cm}$.

ЗАДАЧА 1 Начертани са геометрични фигури. По дадените измерения (в см) намерете лицата на оцветените части:



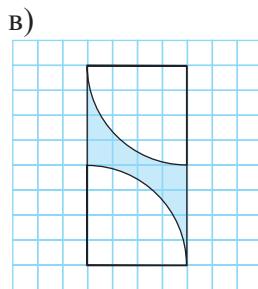
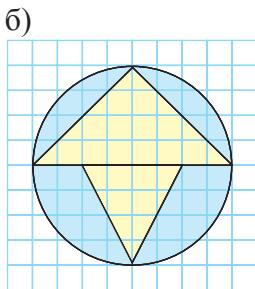
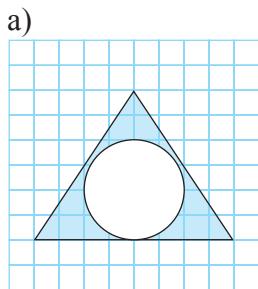
Решение:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad S &= \pi \cdot 7^2 - \pi \cdot 3^2 \\ S &= \pi \cdot 49 - \pi \cdot 9 \\ S &= (49 - 9) \cdot \pi \\ S &= 40 \cdot \pi \\ S &= 40 \cdot 3,14 \\ S &= 125,6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad S &= \pi \cdot 8^2 - \pi \cdot 4^2 \\ S &= \pi \cdot 64 - \pi \cdot 16 \\ S &= (64 - 16) \cdot \pi \\ S &= 48 \cdot \pi \\ S &= 48 \cdot 3,14 \\ S &= 150,72 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad S &= \pi \cdot 10^2 - 2 \cdot \pi \cdot 5^2 \\ S &= \pi \cdot 100 - \pi \cdot 50 \\ S &= (100 - 50) \cdot \pi \\ S &= 50 \cdot \pi \\ S &= 50 \cdot 3,14 \\ S &= 157 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 На квадратна мрежа (1 м. ед. = 1 деление) са начертани геометрични фигури. Намерете лицето на оцветената част (в кв. м. ед.).

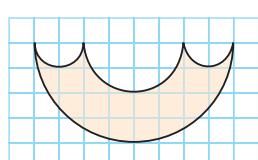


Решение:

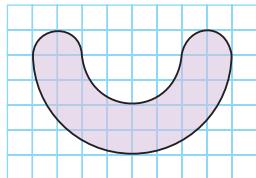
$$\begin{aligned} \text{а)} \quad S &= \frac{8 \cdot 6}{2} - \pi \cdot 2^2 = 24 - 3,14 \cdot 4 = 24 - 12,56 = 11,44 \text{ кв. м. ед.} \\ \text{б)} \quad \text{жълта част: } S &= \frac{8 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 16 + 8 = 24 \text{ кв. м. ед.} \\ \text{синя част: } S &= \pi \cdot 4^2 - 24 = 3,14 \cdot 16 - 24 = 50,24 - 24 = 26,24 \text{ кв. м. ед.} \\ \text{в)} \quad S &= 4 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 32 - 3,14 \cdot 8 = 32 - 25,12 = 6,88 \text{ кв. м. ед.} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3 На квадратна мрежа (1 м. ед. = 1 деление) са начертани геометрични фигури. Намерете лицето на оцветената част (в кв. м. ед.).

Решение:



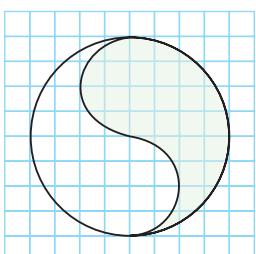
$$\begin{aligned} \text{а)} \quad S &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \\ S &= 8\pi - 1\pi - 2\pi \\ S &= (8 - 1 - 2)\pi \\ S &= 5\pi \\ S &= 5 \cdot 3,14 \\ S &= 15,7 \text{ кв. м. ед.} \end{aligned}$$



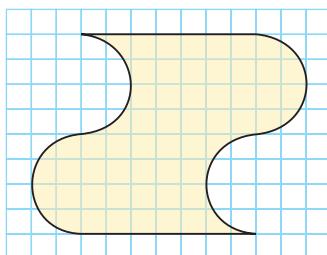
$$\begin{aligned}
 6) \quad S &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \\
 S &= 8\pi + 1\pi - 2\pi \\
 S &= (8+1-2)\pi \\
 S &= 7\pi \\
 S &= 7 \cdot 3,14 \\
 S &= 21,98 \text{ кв. м. ед.}
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4 На квадратна мрежа (1 м. ед. = 1 деление) са начертани геометрични фигури. Намерете лицето на оцветената част (в кв. м. ед.).

Решение:



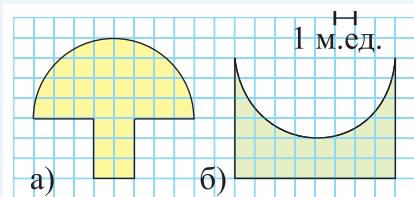
$$\begin{aligned}
 a) \quad S &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \\
 S &= 8\pi + 2\pi - 2\pi \\
 S &= 8\pi \\
 S &= 8 \cdot 3,14 \\
 S &= 25,12 \text{ кв. м. ед.}
 \end{aligned}$$



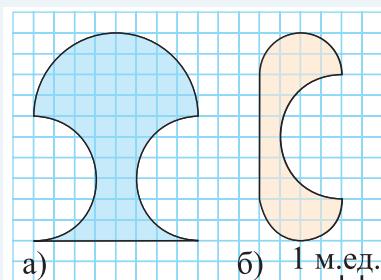
$$\begin{aligned}
 b) \quad S &= 8 \cdot 7 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \\
 S &= 56 + 4\pi - 4\pi \\
 S &= 56 \text{ кв. м. ед.}
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- 1** Колко пъти ще се увеличи лицето на кръг, ако радиусът му се увеличи 3 пъти?
- 2** Намерете лицето на оцветените фигури (в кв. м. ед.):



- 4** Намерете обиколката и лицето на оцветените фигури.

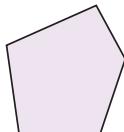


- 3** Арената на цирк има радиус 15 м. Намерете:
- а) колко квадратни метра е площта на арената;
- б) колко квадратни метра настилка трябва да се закупи за покриването ѝ, като предвидите 10% загуби при разкрояването?

- 5** Баба иска да изплете кръгла покривка за нашата кръгла маса. Премерих, че масата има диаметър 90 см. Колко квадратни сантиметра дантела трябва да изплете баба, ако покривката:
- а) покрива цялата маса и "пада" от всички страни с 10 см;
- б) покрива средата на масата, като наоколо остават по 15 см?

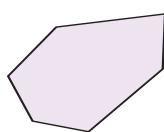
Има равнинни фигури, които имат повече от четири ъгъла и повече от четири страни.

Например



петоъгълникът има

пет ъгъла и
пет страни,



шестоъгълникът има

шест ъгъла и
шест страни и т.н.

Начертаните фигури наричаме с общо име – **многоъгълници**.

Ще припомним, че:

- равностранният триъгълник има 3 равни страни и 3 равни ъгъла;
- квадратът има 4 равни страни и 4 равни ъгъла.



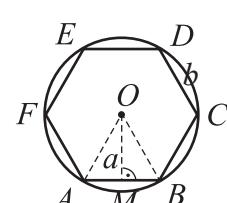
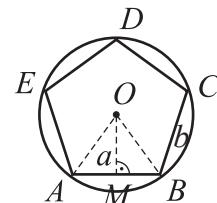
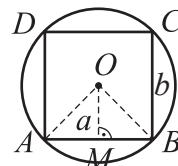
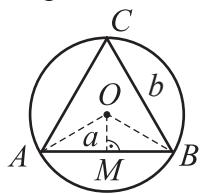
Правилен многоъгълник

Многоъгълник, на който всички страни са равни и всички ъгли са равни, се нарича **правилен многоъгълник**.

Равностранният триъгълник е правилен триъгълник.

Квадратът е правилен четириъгълник.

Върховете на всеки правилен многоъгълник лежат на окръжност, която те разделят на равни части (дъги).



Точката O – центърът на окръжността, се нарича **центрър на правилния многоъгълник**.

$OM = a$, която е височината в $\triangle ABO$, се нарича **апотема на правилния многоъгълник**.



Апотемата на правилния многоъгълник е прието да се означава с буквата **a**. Затова е удобно страната му да се отбелязва с буквата **b**.

Периметърът на правилния многоъгълник е $P = \underbrace{b + b + \dots + b}_{P = n \cdot b}$

$$P = n \cdot b ,$$

където естественото число n ($n \geq 3$) е броят на страните на многоъгълника. Ако:

- $n = 5$, многоъгълникът е правилен петоъгълник;
- $n = 6$, многоъгълникът е правилен шестоъгълник и т.н.

ЗАДАЧА 1

Намерете периметъра на правилен многоъгълник, ако:

a) $n = 6$, $b = 4,8$ см; b) $n = 12$, $b = 3,5$ см.

Решение:

a) $P = n \cdot b$

$P = 6 \cdot 4,8$, $P = 28,8$ см

b) $P = n \cdot b$

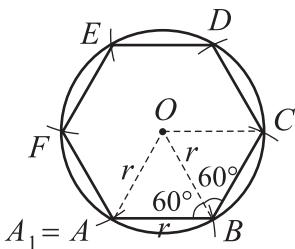
$P = 12 \cdot 3,5$, $P = 42$ см

ЗАДАЧА 2 Намерете броя на страните на правилен многоъгълник, ако $P = 42 \text{ см}$, $b = 8,4 \text{ см}$.

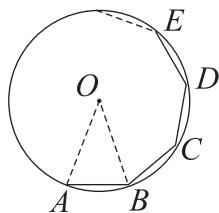
Решение: $P = n \cdot b$
 $42 = n \cdot 8,4, \quad n = 5$

ЗАДАЧА 3 Като използвате окръжност, начертайте правилен шестоъгълник.

- Решение:**
- Начертаваме окръжност $k(O; r)$ с $r = 2 \text{ см}$.
 - От произволна точка A на окръжността последователно в една и съща посока отмерваме с пергела (с разтвор $r = 2 \text{ см}$) равни отсечки $AB = BC = CD = DE = EF = FA_1$.
При това нанасяне точките A и A_1 съвпадат.
 - Съединяваме последователно точките A с B , B с C , ..., F с A .
Начертаният по този начин шестоъгълник е правилен, защото има:
 - 6 равни страни – $AB = BC = CD = DE = EF = FA = r$;
 - 6 равни ъгъла – $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.



За правилния шестоъгълник е вярно, че страната му е равна на радиуса на окръжността, която минава през върховете на шестоъгълника.



Забелязваме, че големината на централния $\angle AOB$ на правилния шестоъгълник $ABCDEF$ е $\frac{360^\circ}{6}$.

За всеки правилен многоъгълник $ABCDE$...

$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, където n е броят на страните на многоъгълника.

ЗАДАЧА 4 С помощта на окръжност начертайте правилен петоъгълник.

Решение: За да начертаем правилен петоъгълник $ABCDE$, трябва да намерим големината на централния $\angle AOB$.

За $n = 5$ $\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

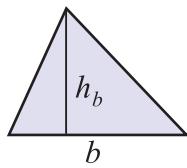
Чертаем:

- окръжност $k(O; r)$ с r – произволна отсечка, и избираме произволна точка A от k ;
- $\angle AOB = 72^\circ$ (с помощта на транспортир);
- $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 72^\circ$;
- отсечките AB, BC, CD, DE, EA .

$ABCDE$ е правилен петоъгълник.

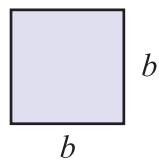
ЗАДАЧИ

- Намерете периметъра на правилен многоъгълник, ако:
 - $n = 7$, $b = 3,2 \text{ см}$;
 - $n = 8$, $b = 0,9 \text{ dm}$.
- Намерете броя на страните на правилен многоъгълник, ако:
 - $P = 65,6 \text{ см}$, $b = 8,2 \text{ см}$;
 - $P = 106,8 \text{ см}$, $b = 89 \text{ mm}$.
- Намерете дължината на страната на правилен многоъгълник, ако:
 - $P = 14 \text{ см}$, $n = 5$;
 - $P = 110,7 \text{ см}$, $n = 9$.
- Начертайте окръжност ($r = 3 \text{ см}$) и правилен шестоъгълник, върховете на който лежат върху тази окръжност.
- Начертайте правилен шестоъгълник със страна:
 - 2 см;
 - 3,5 см.



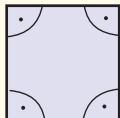
Лицето на триъгълник с основа b и височина h_b ще означаваме с B^*

$$B = \frac{b \cdot h_b}{2}$$



Лицето на квадрат със страна b е
 $B = b^2$.

Мерни единици за лице



$$1 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ m}^2$$

1 m

Превръщане на 1 m^2 в по-малки квадратни мерни единици:

$$\begin{cases} 1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm} \\ 1 \text{ m}^2 = 10 \cdot 10 \text{ dm}^2 = 100 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 1000 \cdot 1000 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

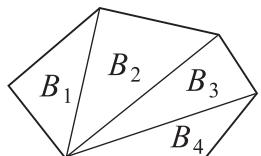
Превръщане на 1 mm^2 в по-големи квадратни мерни единици:

$$\begin{cases} 1 \text{ mm} = \frac{1}{10} \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ dm} = \frac{1}{1000} \text{ m} \\ 1 \text{ mm}^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \text{ cm}^2 = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \text{ dm}^2 = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} \text{ m}^2 \\ (0,01 \text{ cm}^2 = 0,0001 \text{ dm}^2 = 0,000001 \text{ m}^2) \end{cases}$$

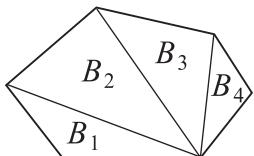
Лице на многоъгълник



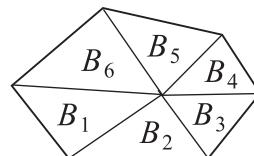
Лицето на произволен многоъгълник намираме като сбор от лицата на триъгълниците, които го съставят.



или



или



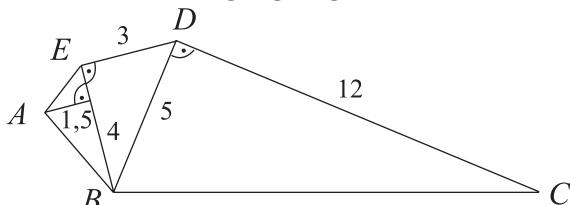
$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6$$

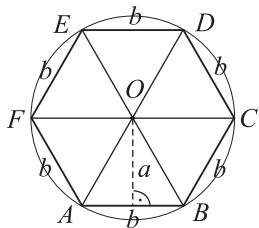
ЗАДАЧА 1 По дадените измерения на чертежа намерете лицето B на петоъгълника $ABCDE$.

Решение:



$$\begin{aligned} B &= B_{\triangle ABE} + B_{\triangle BDE} + B_{\triangle BCD} = \\ &= \frac{4 \cdot 1.5}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} = 3 + 6 + 30 = 39 \\ B &= 39 \text{ кв. м. ед.} \end{aligned}$$

Лице на правилен многоъгълник



Даден е правилен шестоъгълник $ABCDEF$ с център O . Ако съединим всеки от върховете му с центъра O , получаваме шест триъгълника:

$\triangle ABO, \triangle BCO, \triangle CDO, \triangle DEO, \triangle EFO, \triangle FAO$.

Лицето на шестоъгълника е сборът от лицата на тези триъгълници.

* За удобство лицето на равнинна фигура означаваме с B .

Забелязваме, че ако отрежем триъгълниците и ги наложим един върху друг, те ще съвпаднат, т.e. те имат равни лица.

Тогава за лицето B на правилния шестоъгълник получаваме:

$$B = 6 \cdot B_{\triangle ABO}, \quad B = \frac{6 \cdot b \cdot a}{2}, \quad B = \frac{P \cdot a}{2}.$$

Чрез аналогични разсъждения може да се намери лицето на всеки правилен многоъгълник.



Лице на правилен многоъгълник

Лицето на правилен многоъгълник се намира по формулата

$$B = \frac{P \cdot a}{2} \text{ или } B = \frac{n \cdot b \cdot a}{2},$$

където $P = n \cdot b$ е периметърът, n – броят на страните, b – страната, и a – апотемата на правилния многоъгълник.



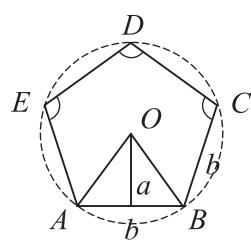
Равностранният триъгълник и квадратът са правилни многоъгълници. Лицата им обикновено пресмятаме по познатите формули: $B = \frac{b \cdot h}{2}$ и $B = b^2$.

ЗАДАЧА 2 Правилен шестоъгълник има страна $b = 3$ см и апотема $a = 2,6$ см ($a^* \approx 2,6$ см). Намерете периметъра и лицето на шестоъгълника.

Решение: 1. $P = 6 \cdot b \quad P = 6 \cdot 3 \quad | \quad 2. B = \frac{P \cdot a}{2} \quad B = \frac{18 \cdot 2,6}{2}$
 $P = 18 \text{ см} \quad \quad \quad B = 23,4 \text{ см}^2$

ЗАДАЧА 3 Правилен петоъгълник има лице 2100 mm^2 и апотема $2,4$ см.

Намерете периметъра и страната на петоъгълника.



Решение:

$$\begin{aligned} 1. B &= 2100 \text{ mm}^2 = \left(\frac{1}{100} \cdot 2100 \right) \text{ cm}^2 = 21 \text{ cm}^2 \\ 2. B &= \frac{P \cdot a}{2} \quad 21 = \frac{P \cdot 2,4}{2} \quad 3. P = 5 \cdot b \\ 1,2 \cdot P &= 21 \quad 1,2 = \frac{P}{5} \quad 17,5 = 5 \cdot b \\ P &= 17,5 \text{ см} \quad P = 17,5 \quad b = 3,5 \text{ см} \end{aligned}$$

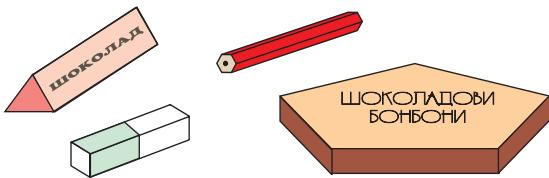
ЗАДАЧИ

За правилен многоъгълник са приети следните означения:

n – брой на страните, b – страна, a – апотема, P – периметър, и B – лице.

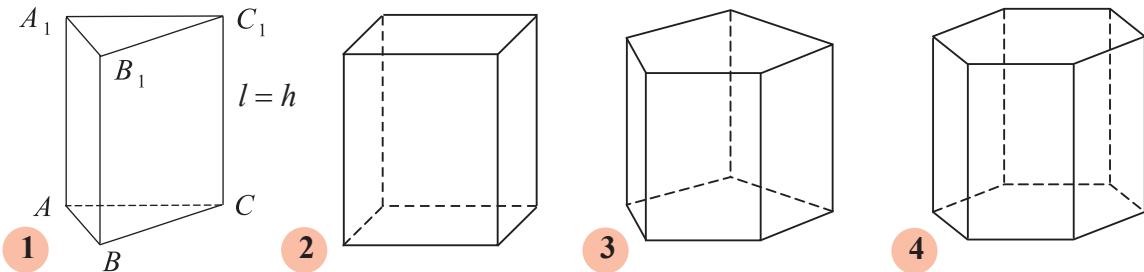
- 1 Даден е правилен десетоъгълник с $b = 5,2$ см и $a = 8$ см. Намерете P и B .
- 2 Даден е правилен петоъгълник с $P = 58$ см и $B = 232 \text{ cm}^2$. Намерете b и a .
- 3 Даден е правилен многоъгълник с $P = 52,2$ см, $b = 5,8$ см и $a = 8$ см. Намерете n и B .
- 4 Даден е правилен многоъгълник с $b = 2,5$ см, $B = 200 \text{ cm}^2$ и $a = 8$. Намерете P и n .
- 5 Даден е правилен шестоъгълник с $P = 42$ см и $a = 6$ см. Намерете B .
- 6 Даден е правилен шестоъгълник с $a = 10,4$ см и $B = 374,4 \text{ cm}^2$. Намерете P .

* При правилните многоъгълници се налага да използваме приближени стойности и обикновено знака “ \approx ” условно заменяме с “ $=$ ”.



Шоколадът, тебеширът, кутията за бонбони, моливът на рисунката са предмети, които имат форма на геометричното тяло **права призма**.

Геометричните модели на разглежданите предмети са:



Правата призма на чертеж **2** (моделът на тебешира) е правоъгълен паралелепипед. Другите прости призми имат по две стени, които не са правоъгълници, а останалите стени са правоъгълници.

Фигура **1** е модел на **права триъгълна призма**.

Фигура **2** е модел на **права четириъгълна призма**.

Фигура **3** е модел на **права петоъгълна призма**.

Фигура **4** е модел на **права шестоъгълна призма**.

Всяка права призма (например фиг. **1**) има:

две основи $\rightarrow \triangle ABC$ – **долна основа**, $\triangle A_1B_1C_1$ – **горна основа**;

основни ръбове $\rightarrow AB, BC, CA, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1$;

околни стени \rightarrow **правоъгълниците** $ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1$;

околни ръбове $\rightarrow AA_1, BB_1, CC_1$.

Всички околни стени на правите призми са правоъгълници. Тогава:

- **всички околни ръбове са равни** като срещуположни страни в правоъгълник:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = l;$$

- **всеки околнен ръб е перпендикулярен на два основни ръба** от всяка основа, които пресича, защото съседните страни на правоъгълника образуват прости ъгли.

Всеки околнен ръб на една права призма дава представа за височината ѝ и се нарича **височина на правата призма**. Височината се означава с **h** .

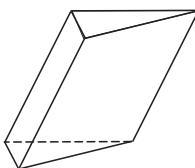
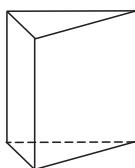
За всяка права призма $l = h$, или

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = h;$$

- **всеки основен ръб от долната основа има равен на него основен ръб от горната основа** като срещуположни страни на правоъгълник:

$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1.$$

Основите на правите призми могат да бъдат триъгълници, четириъгълници, петоъгълници и т.н. Ако изрежем двете основи на една призма и ги наложим по подходящ начин, те ще съвпаднат. Затова **двете основи са еднакви многоъгълници и имат равни лица**.



Освен прави има и други призми, които не са прави. Те се наричат наклонени. В шести клас ще изучаваме само прави призми.



Правилна призма

Права призма, на която основите са правилни многоъгълници, се нарича правилна призма.

Страната b на правилния многоъгълник е основен ръб на правилната призма.

Например: Правоъгълният паралелепипед е права призма.

Правоъгълният паралелепипед с основа квадрат (фиг. 2) е правилна четириъгълна призма.

Кубът е правилна четириъгълна призма.

ЗАДАЧА 1 (Устно) Правилна ли е права четириъгълна призма с основа:

- а) квадрат; б) трапец?

Отговор: а) да б) не

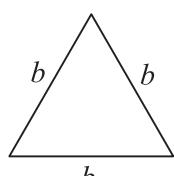
ЗАДАЧА 2 Правилна триъгълна призма има основен ръб $b = 5$ см и околнен ръб $l = 7$ см.

Намерете: а) сбора на основните ръбове;

б) сбора на околните ръбове;

в) сбора на всички ръбове на призмата.

Решение:



а) Всяка от двете основи на призмата е равностранен триъгълник и има три равни ръба. Правилната триъгълна призма има 6 равни основни ръба. Тогава за

$$b = 5 \text{ см} \quad 6 \cdot b = 6 \cdot 5 = 30. \text{ Сборът на основните ръбове е } 30 \text{ см.}$$

б) Всяка триъгълна призма има 3 равни околнни ръба. За

$$l = 7 \text{ см} \quad 3 \cdot l = 3 \cdot 7 = 21. \text{ Сборът на околните ръбове е } 21 \text{ см.}$$

в) Сборът на всички ръбове на правилната триъгълна призма е $6 \cdot b + 3 \cdot l = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 51$. Сборът на всички ръбове е 51 см.

ЗАДАЧИ

1 Правилна ли е права призма с основа:

- а) разностранен триъгълник; б) равностранен триъгълник;
в) равнобедрен трапец; г) правоъгълник, който не е квадрат?

2 Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете.

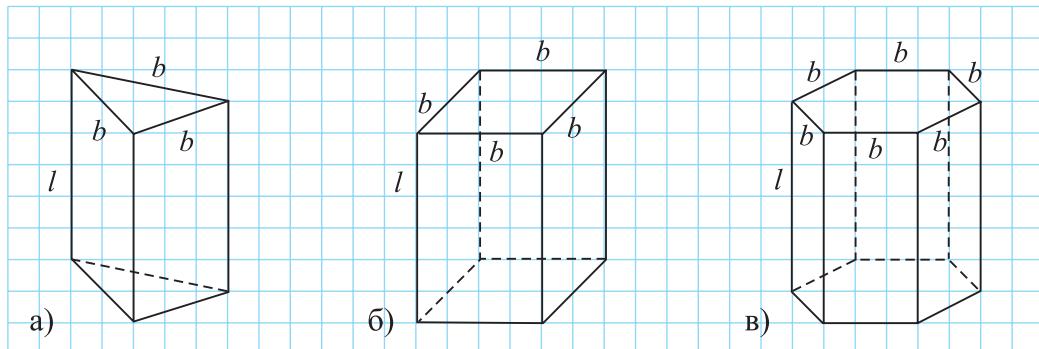
3 Периметърът на основата на правилна дванадесетоъгълна призма е 54 см, а околният ѝ ръб е 5 см. Намерете сбора на всички ръбове на призмата.

Правилна призма	Брой ръбове		
	основни	околни	общо
триъгълна	?	?	?
четириъгълна	?	?	?
петоъгълна	?	?	?
шестоъгълна	?	?	?

ЗАДАЧА 1 На квадратна мрежа начертайте модели на:

- правилна триъгълна призма;
- правилна четириъгълна призма;
- правилна шестоъгълна призма.

Решение:



При чертане на модел на права призма:

- на чертежа всички околнни ръбове са равни и са успоредни;
- ако в основата има успоредни основни ръбове, на чертежа те остават успоредни;
- основите на призмата не се чертаят в действителния им вид, а така, че представата за тялото да е по-добра;
- ако тялото е пълно, ръбовете, които не се виждат, се чертаят с прекъсната линия.

ЗАДАЧА 2 На чертежа е даден модел на права призма с основа трапец.

Ако $a = 8 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$, $d = 5 \text{ cm}$ и $l = 10 \text{ cm}$,

намерете сбора от всички ръбове на призмата.

Решение:

I начин:

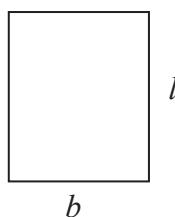
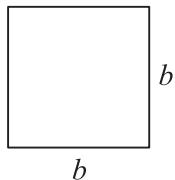
$$\begin{aligned}\Sigma &= 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c + 2 \cdot d + 4 \cdot l = \\ &= 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 80 \\ \Sigma &= 80 \text{ cm}\end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned}\Sigma &= 2 \cdot P + 4 \cdot l, \text{ където} \\ P &= a + b + c + d \\ P &= 8 + 4 + 3 + 5 = 20 \\ \Sigma &= 2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 80 \\ \Sigma &= 80 \text{ cm}\end{aligned}$$

* Прието е с буквата Σ (сигма) да се означава сбор.

- ЗАДАЧА 3** Основният ръб на правилна четириъгълна призма е 6 см, а околният ѝ ръб е 10 см. Намерете периметъра и лицето:
- на основата;
 - на една околна стена.



Решение:

- a) Основата е квадрат със страна b .

$$\mathbf{1.} \quad P = 4 \cdot b$$

$$P = 4 \cdot 6$$

$$P = 24 \text{ см}$$

$$\mathbf{2.} \quad B = b \cdot b$$

$$B = 6 \cdot 6$$

$$B = 36 \text{ см}^2$$

- b) Околната стена е правоъгълник със страни b и l .

$$\mathbf{1.} \quad P_{\text{ок. ст.}} = 2 \cdot (b + l)$$

$$P_{\text{ок. ст.}} = 2 \cdot (6 + 10)$$

$$P_{\text{ок. ст.}} = 32 \text{ см}$$

$$\mathbf{2.} \quad B_{\text{ок. ст.}} = b \cdot l$$

$$B_{\text{ок. ст.}} = 6 \cdot 10$$

$$B_{\text{ок. ст.}} = 60 \text{ см}^2$$

- ЗАДАЧА 4** Правилна шестоъгълна призма има основен ръб 8 см и апотема 6,9 см. Намерете събрана от лицата на двете основи.

Решение:

Основата е правилен шестоъгълник със страна b .

$$\mathbf{1.} \quad P = 6 \cdot b$$

$$P = 6 \cdot 8 = 48$$

$$P = 48 \text{ см}$$

$$\mathbf{2.} \quad B = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$B = \frac{48 \cdot 6,9}{2}$$

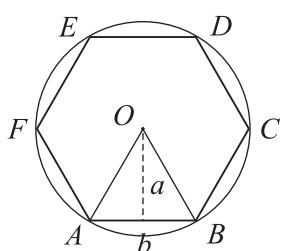
$$B = 165,6 \text{ см}^2$$

3. Двете основи имат равни лица.

$$B + B = 2 \cdot B$$

$$2 \cdot B = 2 \cdot 165,6 = 331,2$$

Събранът от лицата на двете основи е $331,2 \text{ см}^2$.



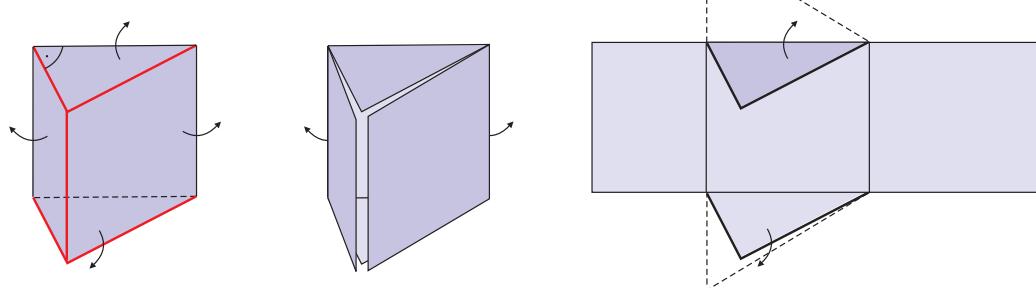
ЗАДАЧИ

- На квадратна мрежа начертайте модели на правилна триъгълна, четириъгълна и шестоъгълна призми. Оцветете стените, които се виждат.
- Правилна четириъгълна призма има основен ръб $b = 0,8 \text{ dm}$ и околнен ръб $l = 11 \text{ см}$. Намерете периметъра и лицето на:
 - основата;
 - една околна стена.
- Периметърът на основата на правилна триъгълна призма е 21 см, а околният ѝ ръб е 10,5 см. Намерете периметъра и лицето на една околна стена.
- Околна стена на правилна шестоъгълна призма има периметър 48 см, а основният ръб b е $\frac{5}{7}$ части от околнния ръб l . Намерете:
 - периметъра на основата;
 - лицето на основата, ако апотемата е 8,7 см;
 - събрана от всички ръбове на призмата.

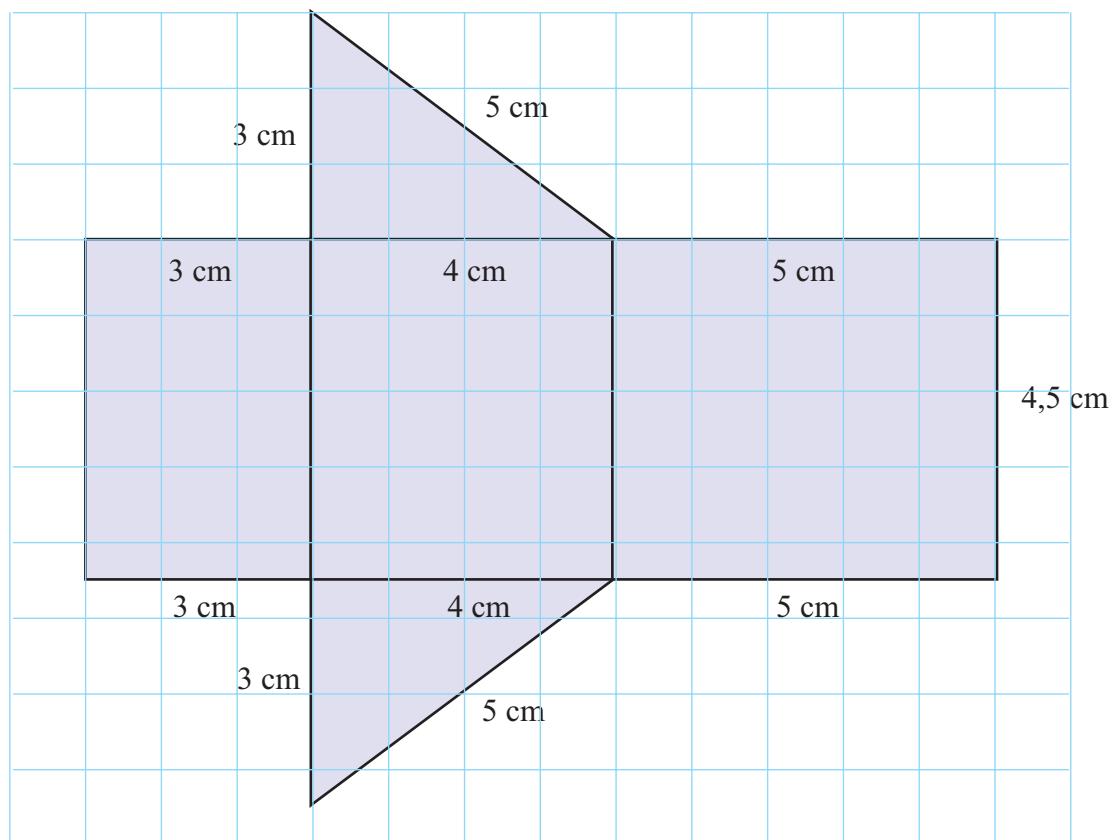
ЗАДАЧА 1

Начертайте върху квадратна мрежа разивката на права триъгълна призма с височина 4,5 см и основа правоъгълен триъгълник с катети 3 см и 4 см и хипотенуза 5 см.

Решение: Дадена е права триъгълна призма. Ако изрежем по оцветените ръбове и разгънем по стрелките вляво и вдясно и по стрелките нагоре и надолу, ще получим **разивката на правата триъгълна призма**.



Начертаваме разивката (в см).



Околните стени на призмата образуват околната ѝ повърхнина, а околните стени и основите – повърхнината (пълната повърхнина) на призмата.

Лице на околната повърхнина S на права призма е сборът от лицата на околните ѝ стени.

Правата призма от Задача 1 има лице на околната повърхнина

$$\begin{aligned} S &= 3 \cdot 4,5 + 4 \cdot 4,5 + 5 \cdot 4,5 = \\ &= \underbrace{(3 + 4 + 5)}_P \cdot \underbrace{4,5}_l = 12 \cdot 4,5 = 54, \quad S = 54 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Забелязваме, че $3 + 4 + 5$ е периметърът P на основата, а $4,5$ е околният ръб, който е равен на височината h на правата призма. Тогава за лицето на околната повърхнина на правата триъгълна призма от Задача 1 получихме, че $S = P \cdot h$.

Като разсъждаваме по същия начин, получаваме:



Лицето на околната повърхнина на всяка права призма се намира по формулата $S = P \cdot h$, където P е периметърът на основата, а h е височината (околният ръб l) на правата призма.

Двете основи на правата призма имат равни лица B и сборът от двете лица е $B + B = 2 \cdot B$.

Ако към лицето на околната повърхнина S на права призма прибавим и лицата на двете основи, получаваме лицето на повърхнината (пълната повърхнина) S_1 на правата призма, което намираме по формулата

$$S_1 = S + 2 \cdot B.$$



Лице на повърхнина на права призма:

- формула за лице на околната повърхнина $\rightarrow S = P \cdot h$
- формула за лице на повърхнина (пълна повърхнина) $\rightarrow S_1 = S + 2 \cdot B$

ЗАДАЧА 2 Намерете повърхнината* на дадената в Задача 1 права триъгълна призма.

Решение: $S_1 = S + 2 \cdot B$. Намерихме, че $S = 54 \text{ cm}^2$.

Основата е правоъгълен триъгълник с катети 4 см и 3 см.

Тогава $B = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$,

$$S_1 = S + 2 \cdot B = 54 + 2 \cdot 6 = 66, \quad S_1 = 66 \text{ cm}^2.$$

ЗАДАЧИ

- Върху квадратна мрежа (1 деление = 1 м. ед.) начертайте развивката на правилна четириъгълна призма с основен ръб 3 м. ед. и височина 4 м. ед.
- Основата на права призма е триъгълник със страни $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ и $c = 7 \text{ cm}$, а височината на призмата е $h = 10 \text{ cm}$. Намерете околната повърхнина на призмата.
- Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с катети $a = 6 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ и хипотенуза $c = 10 \text{ cm}$, а височината на призмата е 20 см. Намерете околната и пълната повърхнина на призмата.
- Периметърът на основата на правилна четириъгълна призма е 2 dm, а височината ѝ е 80 mm. Намерете околната и пълната повърхнина на призмата (в cm^2).

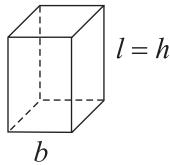
* За по-кратко вместо "лице на повърхнина" ще казваме "повърхнина".

16.

ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА ПРАВА ПРИЗМА. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Правилна четириъгълна призма има основен ръб 10 см и околнен ръб 25 см. Намерете околната повърхнина и повърхнината на призмата.

Решение:

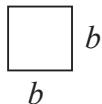


Основата на призмата е квадрат със страна b .

1. $P = 4 \cdot b$

$$P = 4 \cdot 10$$

$$P = 40 \text{ см}$$



3. $B = b \cdot b$

$$B = 10 \cdot 10$$

$$B = 100 \text{ см}^2$$

2. $S = P \cdot h$

$$S = 40 \cdot 25$$

$$S = 1000 \text{ см}^2$$

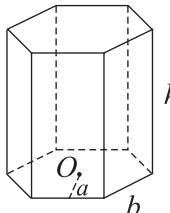
4. $S_1 = S + 2 \cdot B$

$$S_1 = 1000 + 2 \cdot 100$$

$$S_1 = 1200 \text{ см}^2$$

ЗАДАЧА 2 Правилна шестоъгълна призма има страна $b = 9$ см, апотема $a = 7,8$ mm, а височината на призмата е $h = 1,5$ dm. Намерете околната повърхнина и повърхнината на призмата.

Решение:

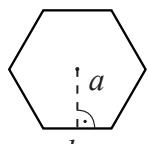


Основата на призмата е правилен шестоъгълник със страна b и апотема a .

1. $P = 6 \cdot b$

$$P = 6 \cdot 9$$

$$P = 54 \text{ см}$$



3. $B = \frac{P \cdot a}{2}$

$$B = \frac{54 \cdot 7,8}{2}$$

$$B = 210,6 \text{ см}^2$$

2. $S = P \cdot h$

$$S = 54 \cdot 15$$

$$S = 810 \text{ см}^2$$

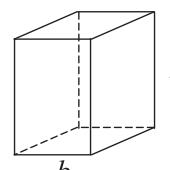
4. $S_1 = S + 2 \cdot B$

$$S_1 = 810 + 2 \cdot 210,6$$

$$S_1 = 1231,2 \text{ см}^2$$

ЗАДАЧА 3 Права призма с основа ромб има височина 5 см и околнна повърхнина 120 см². Намерете страната на ромба.

Решение:



Основата на призмата е ромб със страна b .

1. $S = P \cdot h$

$$120 = P \cdot 5$$

$$P \cdot 5 = 120$$

$$P = 120 : 5$$

$$P = 24 \text{ см}$$

2. $P = 24 \text{ см}$

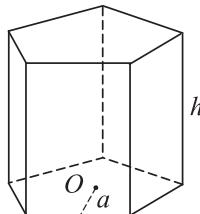
$$P = 4 \cdot b$$

$$4 \cdot b = 24$$

$$b = 24 : 4$$

$$b = 6 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 4 Правилна петоъгълна призма има околнна повърхнина $S = 210$ см, височина $h = 12$ см и апотема на основата $a = 2,4$ см. Намерете основния ръб b и повърхнината S_1 на призмата.



Решение:

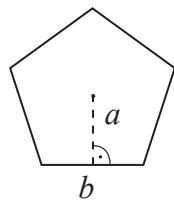
Основата на призмата е правилен петоъгълник със страна b и апотема a .

$$\begin{aligned}1. \quad S &= P \cdot h \\210 &= P \cdot 12 \\P &= 210 : 12 \\P &= 17,5 \text{ см}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad P &= 5 \cdot b \\5 \cdot b &= 17,5 \\b &= 17,5 : 5 \\b &= 3,5 \text{ см}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad B &= \frac{P \cdot a}{2} \\B &= \frac{17,5 \cdot 2,4}{2} \\B &= 21 \text{ см}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \quad S_1 &= S + 2 \cdot B \\S_1 &= 210 + 2 \cdot B \\S_1 &= 210 + 2 \cdot 21 \\S_1 &= 252 \text{ см}^2\end{aligned}$$



ЗАДАЧА 5 Правилна триъгълна призма има повърхности $S = 315$ см² и $S_1 = 357,7$ см², а височината ѝ е $h = 15$ см. Намерете основния ръб b и височината на основата h_b .

Решение:

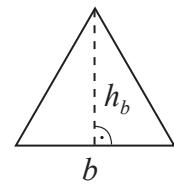
Основата на призмата е равностранен триъгълник със страна b и височина h_b .

$$\begin{aligned}1. \quad S &= P \cdot h \\315 &= P \cdot 15 \\P &= 315 : 15 \\P &= 21 \text{ см}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad P &= 3 \cdot b \\3 \cdot b &= 21 \\b &= 21 : 3 \\b &= 7 \text{ см}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad S_1 &= S + 2 \cdot B \\357,7 &= 315 + 2 \cdot B \\2 \cdot B &= 42,7 \\B &= 21,35 \text{ см}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \quad B &= \frac{b \cdot h_b}{2} \\21,35 &= \frac{7 \cdot h_b}{2} \\h_b &= 6,1 \text{ см}\end{aligned}$$



ЗАДАЧИ

1 Правилна четириъгълна призма има височина $h = 22$ см и околнна повърхнина $S = 1408$ см². Намерете повърхнината на призмата.

катет $a = 12$ см и хипотенуза $c = 13$ см. Околната повърхнина на призмата е 300 см², а повърхнината – 360 см². Намерете катета b на основата и височината h на призмата.

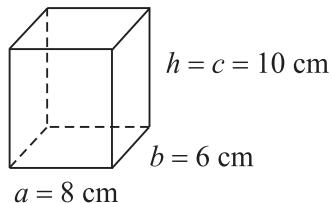
2 Основата на права призма е ромб с височина $h_b = 12$ см. Околната повърхнина на призмата е 1120 см², а повърхнината ѝ е 1456 см². Намерете основния ръб и околния ръб на призмата.

4 Правилна шестоъгълна призма с височина $h = 18$ см има околна повърхнина $S = 1512$ см² и апотема на основата $a = 12,1$ см. Намерете:

3 Права триъгълна призма има за основа правоъгълен триъгълник с

- а) повърхнината S_1 на призмата;
- б) сбора от всички ръбове на призмата.

ЗАДАЧА 1 Намерете обема на правоъгълен паралелепипед с измерения на основата $a = 8 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ и височина $h = c = 10 \text{ cm}$.



Решение:

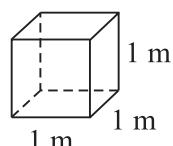
$$\begin{aligned}V &= a \cdot b \cdot c \\V &= 8 \cdot 6 \cdot 10 \\V &= 48 \cdot 10 \\V &= 480 \text{ cm}^3\end{aligned}$$



Формулата за обем на правоъгълен паралелепипед е

$$V = a \cdot b \cdot c, \quad V = B \cdot h, \quad \text{зашто } a \cdot b = B, \quad c = h.$$

Мерни единици за обем



$$1 \text{ m}^3 \rightarrow ? \text{ cm}^3 \quad 1 \text{ m}^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ cm}^3 = 1 \ 000 \ 000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 \rightarrow ? \text{ m}^3 \quad 1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{100 \cdot 100 \cdot 100} \text{ m}^3 = 0,000001 \text{ m}^3$$

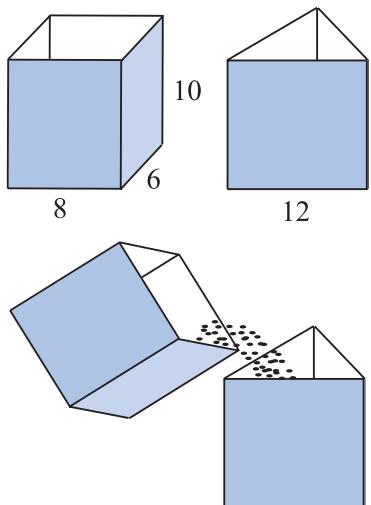
Опит

Разполагаме с два съда с равни височини $h = 10 \text{ cm}$.

- Първият съд има форма на правоъгълен паралелепипед с измерения на основата 8 cm и 6 cm . Тогава лицето на основата е $B = 48 (\text{cm}^2)$ и обемът е $V = 48 \cdot 10 = 480 (\text{cm}^3)$.
- Вторият съд има форма на права триъгълна призма с основа триъгълник със страна 12 cm и височина към тази страна 8 cm . Тогава лицето на основата е $B = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 (\text{cm}^2)$.

$$V = ?$$

За да намерим обема на втория съд, сравняваме обемите на правоъгълния паралелепипед и на правата триъгълна призма, като правим следния опит:

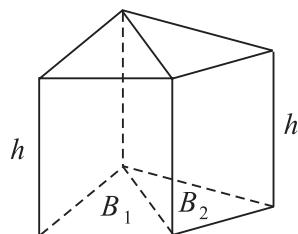


Напълваме първия съд например с ориз (захар, течност...) и го пресипваме във втория. Установяваме, че съдържанието на първия съд напълва точно втория. Това показва, че двата съда имат равни обеми, т.е. обемът на правата призма с основа триъгълник също е 480 cm^3 и може да се намери по формулата $V = B \cdot h (48 \cdot 10)$.

Извод: Обемът на всяка права триъгълна призма се намира по формулата

$$V = B \cdot h,$$

където B е лицето на основата, а h – височината на призмата.

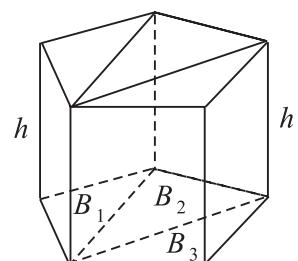


Всяка права четириъгълна призма може да се разглежда като две долепени една до друга прави триъгълни призми с равни височини h и лица на основите B_1 и B_2 . Тогава обемът V е

$$V = B_1 \cdot h + B_2 \cdot h = (B_1 + B_2) \cdot h = B \cdot h,$$

$$V = B \cdot h.$$

Обемът на всяка права четириъгълна призма се намира по формулата $V = B \cdot h$.



Всяка права петоъгълна призма може да се разглежда като три долепени една до друга прави триъгълни призми с равни височини h и лица на основите B_1 , B_2 и B_3 . Тогава обемът V е

$$V = B_1 \cdot h + B_2 \cdot h + B_3 \cdot h = (B_1 + B_2 + B_3) \cdot h = B \cdot h,$$

$$V = B \cdot h.$$

По същия начин може да се намери обемът на всяка права призма.



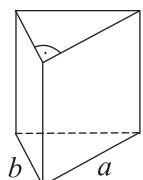
Обем на права призма

Обемът на всяка права призма се намира по формулата

$$V = B \cdot h, \text{ където } B \text{ е лицето на основата, а } h \text{ е височината на призмата.}$$

ЗАДАЧА 2 Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с катети $a = 9$ см и $b = 8$ см. Намерете обема на призмата, ако височината ѝ е $h = 16$ см.

Решение:



$$\begin{aligned} 1. \quad B &= \frac{a \cdot b}{2} \\ &= \frac{9 \cdot 8}{2} \\ &= 36 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad V &= B \cdot h \\ &= 36 \cdot 16 \\ &= 576 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1 Основата на права призма е триъгълник със страна $b = 7$ см и височина към нея $h_b = 6$ см. Височината на призмата h е 8 см. Намерете обема на призмата.

2 Основата на права призма е ромб със страна $b = 8$ см и височина $h_b = 7$ см. Намерете обема на призмата, ако височината ѝ е $h = 12$ см.

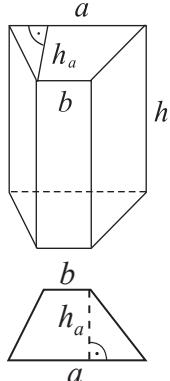
3 Намерете обема на правилна четириъгълна призма с основен ръб $b = 1,1$ dm и $h = 14$ см.

4 Резервоар с форма на правилна четириъгълна призма е напълнен с нафта. Намерете колко литра нафта съдържа резервоарът, ако дълбината му е 1,50 m, а основният ръб на призмата е 2 m.

18.

ОБЕМ И ПОВЪРХНИНА НА ПРАВА ПРИЗМА. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Основата на права призма е трапец с основи $a = 12$ см, $b = 4$ см и $h_a = 7$ см. Намерете обема на призмата, ако височината ѝ е $h = 18$ см.

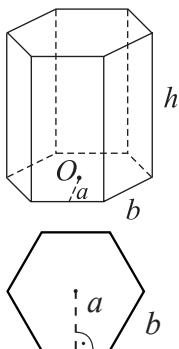


Решение:

$$\begin{aligned}1. \quad B &= \frac{a+b}{2} \cdot h_a \\B &= \frac{12+4}{2} \cdot 7 = 56 \\B &= 56 \text{ см}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad V &= B \cdot h \\V &= 56 \cdot 18 \\V &= 1008 \text{ см}^3\end{aligned}$$

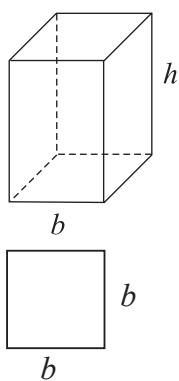
ЗАДАЧА 2 Намерете обема на правилна шестоъгълна призма с височина $h = 15$ см, основен ръб $b = 9$ см и апотема на основата $a = 7,8$ см.



Решение:

$$\begin{aligned}1. \quad P &= 6 \cdot b \\P &= 6 \cdot 9 \\P &= 54 \text{ см} \\2. \quad B &= \frac{P \cdot a}{2} \\B &= \frac{54 \cdot 7,8}{2} \\B &= 210,6 \text{ см}^2 \\3. \quad V &= B \cdot h \\V &= 210,6 \cdot 15 \\V &= 3159 \text{ см}^3\end{aligned}$$

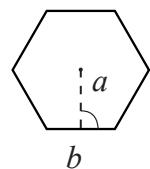
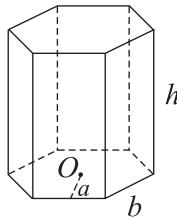
ЗАДАЧА 3 Правилна четириъгълна призма с основен ръб $b = 7$ см има повърхнина $S_1 = 406$ см². Намерете обема на призмата.



Решение:

$$\begin{aligned}1. \quad B &= b \cdot b \\B &= 7 \cdot 7 \\B &= 49 \text{ см}^2 \\2. \quad S_1 &= S + 2 \cdot B \\406 &= S + 2 \cdot 49 \\S &= 308 \text{ см}^2 \\3. \quad P &= 4 \cdot b \\P &= 4 \cdot 7 \\P &= 28 \text{ см} \\4. \quad S &= P \cdot h \\308 &= 4 \cdot 7 \cdot h \\h &= 11 \text{ см} \\5. \quad V &= B \cdot h \\V &= 49 \cdot 11 \\V &= 539 \text{ см}^3\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4 Обемът на правилна шестоъгълна призма е $V = 3654$ см³. Височината ѝ е $h = 14$ см, а апотемата на основата е $a = 8,7$ см. Намерете околната повърхнина и повърхнината на призмата.



Решение:

$$1. \quad V = B \cdot h$$

$$3654 = B \cdot 14$$

$$B = 3654 : 14$$

$$B = 261 \text{ cm}^2$$

$$2. \quad B = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$261 = P \cdot \frac{8,7}{2}$$

$$P = 261 : 4,35$$

$$P = 60 \text{ cm}$$

$$3. \quad S = P \cdot h$$

$$S = 60 \cdot 14$$

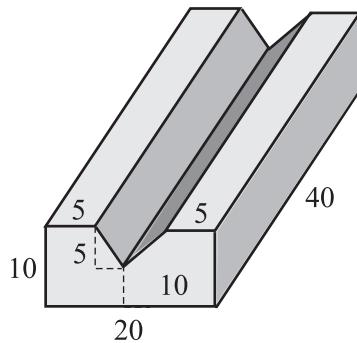
$$S = 840 \text{ cm}^2$$

$$4. \quad S_1 = S + 2 \cdot B$$

$$S_1 = 840 + 2 \cdot 261$$

$$S_1 = 1362 \text{ cm}^2$$

ЗАДАЧА 5 От парче метал с форма на правоъгълен паралелепипед изработили детайл с форма и размери (в см), показани на чертежа. Намерете колко процента от материала е отпаднал при обработката.



Решение:

Парчето метал има обем $V = 20 \cdot 40 \cdot 10 = 8000 \text{ cm}^3$.

Отпадналият материал (в cm^3) е обемът V_1 на права призма с височина $h = 40 \text{ cm}$ и основа равнобедрен триъгълник с основа 10 cm ($20 - 2 \cdot 5 = 10$) и височина към нея 5 cm .

$$V_1 = B \cdot h = \frac{10 \cdot 5}{2} \cdot 40 = 25 \cdot 40 = 1000, \quad V_1 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$x \% \text{ от } V = V_1$$

$$\frac{x}{100} \cdot 8000 = 1000, \quad x \cdot 80 = 1000, \quad x = 12,5 \%$$

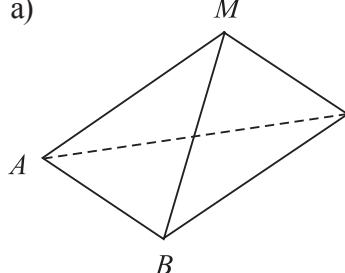
ЗАДАЧИ

- 1 Основата на права призма е трапец с основи $a = 50 \text{ mm}$, $b = 2 \text{ см}$ и височина $h_a = 0,3 \text{ dm}$. Околният ръб на призмата е $l = 7,5 \text{ см}$. Намерете обема на призмата.
- 2 Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с катети 6 см и 8 см . Най-малката околнна стена е квадрат. Намерете обема на призмата.
- 3 Обемът на права призма е 240 cm^3 . Основата на призмата е ромб със страна 8 см и височина 6 см . Намерете височината на призмата.
- 4 Правилна четириъгълна призма има обем 832 cm^3 и основен ръб $b = 8 \text{ см}$. Намерете височината на призмата, околната и пълната ѝ повърхнина.
- 5 Правилна шестоъгълна призма има обем $1123,2 \text{ cm}^3$, апотема на основата $5,2 \text{ см}$ и височина, 2 пъти по-голяма от основния ръб. Намерете:
 - а) основния ръб и височината на призмата;
 - б) лицето на повърхнината на призмата.
- 6 Трябва да се направи подпорна стена за укрепване на свлачище с формата на права призма. Стената е дълга 8 m , висока – $2,80 \text{ m}$, а напречното ѝ сечение е правоъгълен трапец с основи 160 см и 80 см . Колко кубически метра материал са необходими за направата ѝ?

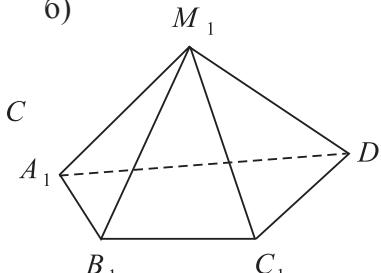
Пирамида

Начертани са модели на тела, които се наричат пирамиди:

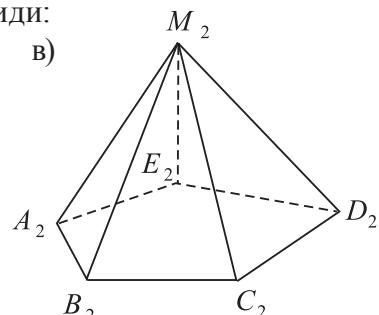
а)



б)



в)



Забелязваме, че на тези тела:

- една от стените е многоъгълник – $\triangle ABC$, четириъгълник $A_1B_1C_1D_1$, петоъгълник $A_2B_2C_2D_2E_2$;
- останалите стени са триъгълници с основи страните на многоъгълника и с общ връх – на черт. а) това са $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$.



Тяло, на което една от стените е произволен многоъгълник, а останалите стени са триъгълници с основи страните на многоъгълника и с общ връх, се нарича **пирамида**.

Пирамидата е многостен (ръбесто тяло).

- Многоъгълникът се нарича **основа на пирамидата**.
На черт. в) основата е петоъгълникът $A_2B_2C_2D_2E_2$.
- Стените, които са триъгълници с общ връх, се наричат **околни стени на пирамидата**.
На черт. а) околни стени са $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$.
- Общият връх на околните стени на пирамидата се нарича **връх на пирамидата**.
На черт. б) връх на пирамидата е M_1 .
- Страните на основата на пирамидата се наричат **основни ръбове**, а останалите ръбове – **околни ръбове**.
На черт. а) основни ръбове са AB , BC , CA ;
околни ръбове са MA , MB , MC .
- Според вида на основата пирамидите биват:
триъгълна (черт. а)), **четириъгълна** (черт. б)), **петоъгълна** (черт. в)) и т.н.

Правилна пирамида



Пирамида, на която основата е правилен многоъгълник и всичките ѝ околни ръбове са равни, се нарича **правилна пирамида**.

Основата на правилна пирамида може да бъде равностранен триъгълник, квадрат, правилен петоъгълник, правилен шестоъгълник и т.н.

Начертана е правилна шестоъгълна пирамида $ABCDEFM$.

Центърът на правилния многоъгълник – основа на пирамидата, се означава с O .

Основният ръб на правилната пирамида се означава с b , а **апотемата на основата** – с a .

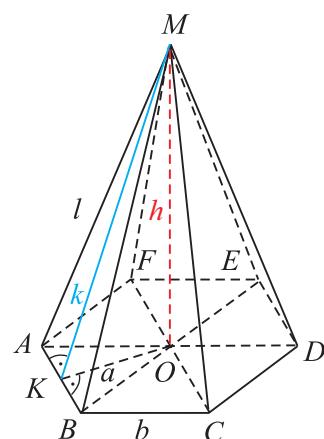
На чертежа $AB = BC = CD = DE = EF = FA = b$, $OK = a$.

Равните околни ръбове на правилната пирамида се означават с l .

На чертежа $MA = MB = MC = MD = ME = MF = l$.

Всички околни стени на правилната пирамида са равнобедрени триъгълници и всеки от тях има основа b и бедро l . Ако изрежем и наложим по подходящ начин околните стени, те ще съвпаднат – ще имат равни лица. Тогава **височините към страните b** ще са равни. Всяка от тези височини се нарича **апотема на правилната пирамида** и се означава с k . На чертежа $MK = k$.

Отсечката, която свързва върха M на правилната пирамида с центъра O на основата ѝ, се нарича **височина** на правилната пирамида и се означава с h . На чертежа $MO = h$.



ЗАДАЧА 1

(Устно) Намерете:

- колко околни ръба има десетоъгълна пирамида;
- най-малкия брой на ръбовете, които може да има една пирамида;
- най-малкия брой стени, които може да има една пирамида;
- какво число е броят на ръбовете на всяка пирамида – четно или нечетно.

Отг.: а) 10, б) 6, в) 4, г) четно, защото броят на околните ръбове е равен на броя на основните ръбове.

ЗАДАЧА 2

(Устно) Намерете:

- периметъра на основата на правилна осмоъгълна пирамида с основен ръб $b = 2$ см;
- сбора на околните ръбове на правилна петоъгълна пирамида, ако $l = 7$ см;
- сбора на всички ръбове на правилна шестоъгълна пирамида, ако $b = 3$ см и $l = 5$ см.

Отг.: а) 16 см, б) 35 см, в) 48 см

ЗАДАЧИ

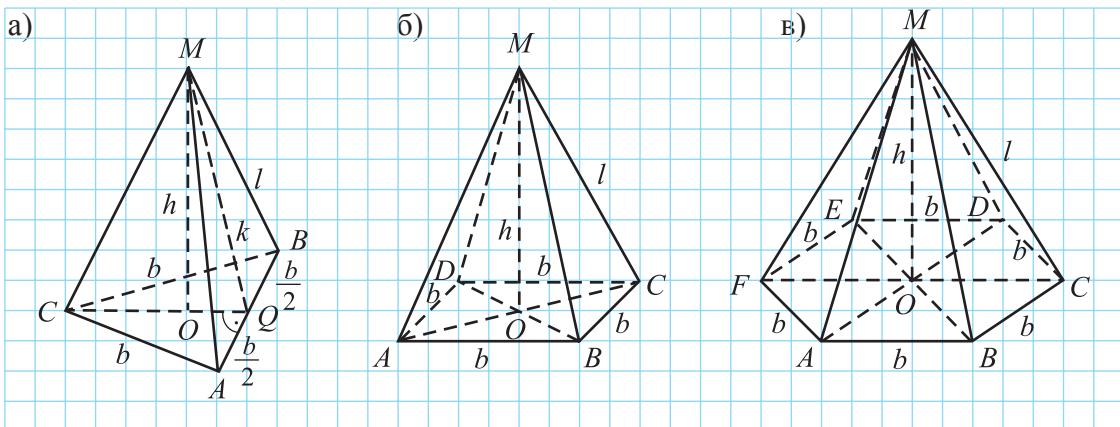
- Намерете периметъра на основата на правилна седмоъгълна пирамида с основен ръб 3 см.
- Намерете сбора на околните ръбове на правилна деветоъгълна пирамида, ако околният ѝ ръб е 5,2 см.
- Намерете сбора на всички ръбове на правилна десетоъгълна пирамида

с основен ръб 3,5 см и околн ръб 1,6 dm.

- Периметърът на основата на правилна шестоъгълна пирамида е 30 см, а околният ѝ ръб е 13 см. Намерете периметъра на една околна стена на пирамидата.

ЗАДАЧА 1

На квадратна мрежа начертайте модели на правилни пирамиди така, както е показано на чертежа.

**При чертане на модел на правилна пирамида:**

Първо – начертаваме основата на пирамидата (черт. а), б), в)). Успоредните основни ръбове запазват успоредността си.

Второ – намираме центъра на правилния многоъгълник – основа на пирамидата (както е показано на чертежа). Точката O е центърът на окръжността, минаваща през върховете на многоъгълника. Ако основата е равностранен $\triangle ABC$ (черт. а)), центърът O е точка от височината CQ на този триъгълник и $AO = \frac{1}{3}CQ$.

Трето – начертаваме височината OM така, че да е върху права, перпендикулярна на страната AB (черт. а), б), в)) (AB обикновено чертаем хоризонтално на чертожния лист).

Четвърто – съединяваме точката M с върховете на основата.

Ако тялото е пълно, ръбовете, които не се виждат, както и височината чертаем с прекъсната линия.

ЗАДАЧА 2

Основният ръб на правилна четириъгълна пирамида е $b = 5$ см, а апетемата ѝ $k = 10$ см. Намерете лицето на околната стена на пирамидата.

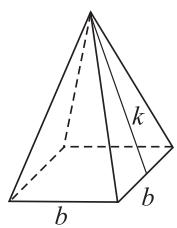
Решение:

Околната стена на пирамидата е триъгълник с основа $b = 5$ см и височина към основата $h_b = k = 10$ см.

$$B_{\text{ок. ст.}} = \frac{b \cdot k}{2}$$

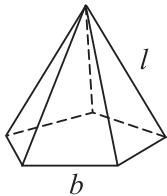
$$B_{\text{ок. ст.}} = \frac{5 \cdot 10}{2}$$

$$B_{\text{ок. ст.}} = 25 \text{ см}^2$$



ЗАДАЧА 3 Правилна петоъгълна пирамида има периметър на основата 26 см и периметър на една околна стена 18 см. Намерете сума от дълчините на всички ръбове на пирамидата.

Решение:



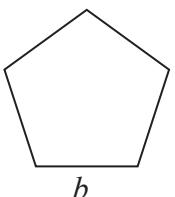
Основата на пирамидата е правилен петоъгълник със страна b .

$$1. \ P = 5 \cdot b$$

$$5 \cdot b = 26$$

$$b = 26 : 5$$

$$b = 5,2 \text{ см}$$



$$2. \ P_{\text{ок. ст.}} = b + 2 \cdot l$$

$$18 = 5,2 + 2 \cdot l$$

$$2 \cdot l = 12,8 \text{ см}$$

$$l = 6,4 \text{ см}$$

$$3. \ \Sigma = 5 \cdot b + 5 \cdot l$$

$$\Sigma = 5 \cdot 5,2 + 5 \cdot 6,4$$

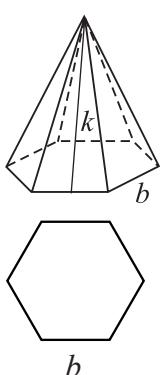
$$\Sigma = 5 \cdot (5,2 + 6,4)$$

$$\Sigma = 5 \cdot 11,6$$

$$\Sigma = 58 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 4 Правилна шестоъгълна пирамида има периметър на основата 36 см, а лицето на една околна стена е 24 см^2 . Намерете апотемата на пирамидата.

Решение:



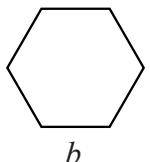
Основата на пирамидата е правилен шестоъгълник със страна b .

$$1. \ P = 6 \cdot b$$

$$6 \cdot b = 36$$

$$b = 36 : 6$$

$$b = 6 \text{ см}$$



$$2. \ B_{\text{ок. ст.}} = \frac{b \cdot k}{2}$$

$$24 = \frac{6 \cdot k}{2}$$

$$24 = 3 \cdot k$$

$$k = 8 \text{ см}$$

ЗАДАЧИ

1 На квадратна мрежа начертайте модели на:

- а) правилна триъгълна пирамида;
 - б) правилна четириъгълна пирамида;
 - в) правилна шестоъгълна пирамида.
- Оцветете стените, които се виждат.

2 Периметърът на основата на правилна петоъгълна пирамида е 35 см, а апотемата на пирамидата е 9 см. Намерете лицето на една околна стена на пирамидата.

3 Апотемата на правилна осмоъгълна пирамида е 12 см, а лицето на една околна стена е 54 см^2 . Намерете периметъра на основата на пирамидата.

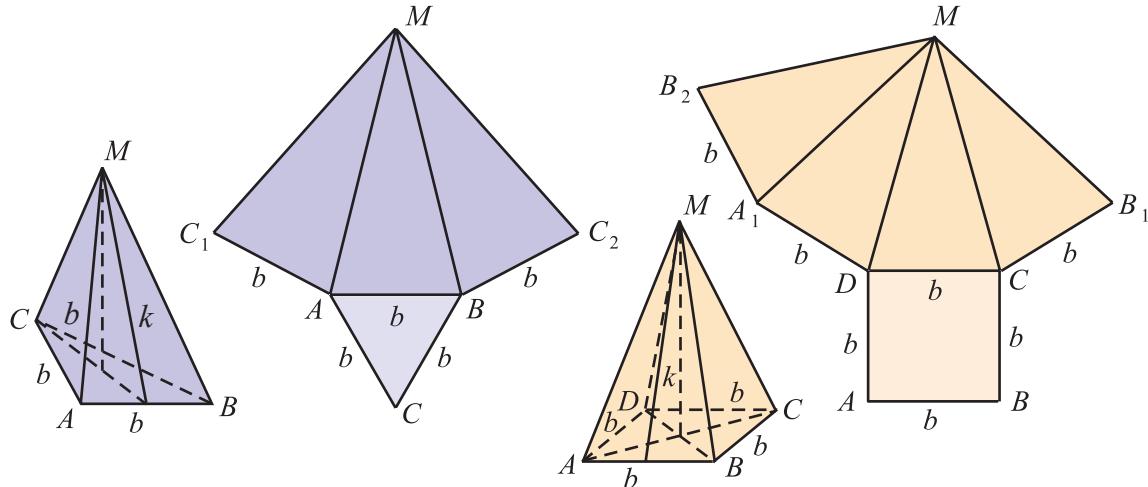
4 Правилна осмоъгълна пирамида има периметър на основата 56 см и периметър на една околна стена 25 см. Намерете сума от дълчините на всички ръбове на пирамидата.

ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА ПРАВИЛНА ПИРАМИДА

Начертани са развицките на

а) правилна триъгълна пирамида;

б) правилна четириъгълна пирамида.



Околните стени на една пирамида образуват **околната ѝ повърхнина**. Сборът от лицата на околните стени се нарича **лице на околната повърхнина** на пирамидата и се обозначава с S .

- Ако пирамидата е правилна триъгълна (черт. а),

$$S = \frac{b \cdot k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} = 3 \cdot \frac{b \cdot k}{2} = \frac{3 \cdot b \cdot k}{2} = \frac{P \cdot k}{2},$$

- Ако пирамидата е правилна четириъгълна (черт. б),

$$S = \frac{b \cdot k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} + \frac{b \cdot k}{2} = 4 \cdot \frac{b \cdot k}{2} = \frac{4 \cdot b \cdot k}{2} = \frac{P \cdot k}{2},$$

където P е периметърът на основата, k е апотемата на пирамидата.

Чрез същите разсъждения може да се намери лицето на околната повърхнина на всяка правилна пирамида.



Лицето на околната повърхнина S на правилна пирамида се намира по формулата $S = \frac{P \cdot k}{2}$, където P е периметърът на основата, а k е апотемата на пирамидата.

Околните стени на пирамидата и основата ѝ образуват **повърхнината (пълната повърхнина)** на пирамидата. Сборът от лицата на околните стени и лицето на основата се нарича лице на повърхнината (лице на пълната повърхнина) на пирамидата и се означава с S_1 .

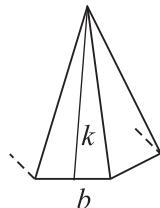


Лицето на повърхнината (пълната повърхнина) S_1 на правилна пирамида се намира по формулата

$$S_1 = S + B,$$

където S е околната повърхнина, а B е лицето на основата на пирамидата.

ЗАДАЧА 1 Намерете лицето на околната повърхнина S на правилна седмоъгълна пирамида с основен ръб $b = 2$ см и апотема $k = 5$ см.



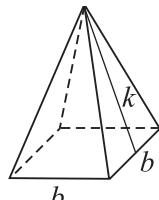
Решение:

$$\begin{aligned}1. \quad P &= 7 \cdot b \\P &= 7 \cdot 2 \\P &= 14 \text{ см}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad S &= \frac{P \cdot k}{2} \\S &= \frac{14 \cdot 5}{2} \\S &= 35 \text{ см}^2\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 Намерете лицето на повърхнината на правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 2 dm и апотема 450 mm.

Решение: $b = 2 \text{ dm} = 20 \text{ см}$, $k = 450 \text{ mm} = 45 \text{ см}$



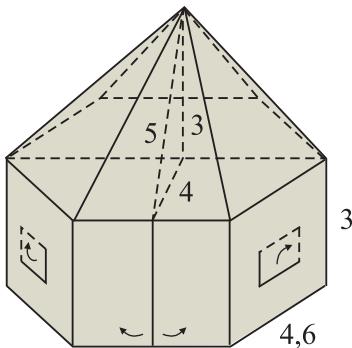
$$\begin{aligned}1. \quad P &= 4 \cdot b \\P &= 4 \cdot 20 \\P &= 80 \text{ см}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad S &= \frac{P \cdot k}{2} \\S &= \frac{80 \cdot 45}{2} \\S &= 1800 \text{ см}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad B &= b \cdot b \\B &= 20 \cdot 20 \\B &= 400 \text{ см}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \quad S_1 &= S + B \\S_1 &= 1800 + 400 \\S_1 &= 2200 \text{ см}^2\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3 Колко материал (специален плат) е необходим за направата на палатка с форма на правилна шестоъгълна призма, чийто покрив е правилна шестоъгълна пирамида (измеренията в метри са дадени на чертежа), ако е предвидено 15% от повърхнината на палатката да са за шевовете?



Решение:

Околната повърхнина на призмата означаваме с S .

$$\begin{aligned}S &= P \cdot h \rightarrow P = 6 \cdot 4,6 = 27,6, \quad P = 27,6 \text{ см} \\S &= 27,6 \cdot 3, \quad S = 82,8 \text{ м}^2.\end{aligned}$$

Околната повърхнина на пирамидата означаваме с S' .

$$S' = \frac{P \cdot k}{2} = \frac{27,6 \cdot 5}{2} = 69, \quad S' = 69 \text{ м}^2$$

Повърхнината на палатката е $S + S'$.

$$S + S' = 82,8 + 69 = 151,8, \quad S + S' = 151,8 \text{ м}^2$$

За шевовете са предвидени 15% от $151,8 = 22,77 \text{ м}^2$.

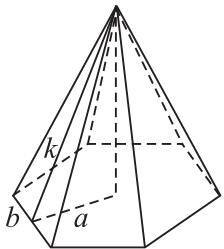
За направата на палатката са необходими $(151,8 + 22,77) 174,57 \text{ м}^2$ плат.

ЗАДАЧИ

- 1** Апотемата на правилна триъгълна пирамида е 5 см, а основата ѝ има страна $10,4$ см и височина 9 см. Намерете околната и пълната повърхнина на пирамидата.
 - 2** Правилна четириъгълна пирамида има основен ръб 16 см и апотема 10 см. Намерете повърхнината ѝ.
 - 3** Правилна шестоъгълна пирамида има апотема 10 см, основен ръб
 - 4** 9,2 см и апотема на основата 8 см. Намерете околната повърхнина и повърхнината на пирамидата.
- 2** Покрив на къща има форма на правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 12 м и апотема 10 м. Колко керемиди са необходими за покриване на къщата, ако 15 керемиди покриват 1 м^2 ?

ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА ПРАВИЛНА ПИРАМИДА. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Намерете повърхнината* на правилна шестоъгълна пирамида с основен ръб 2 см, апотема на основата 1,7 см и апотема на пирамидата 6 см.



Решение:

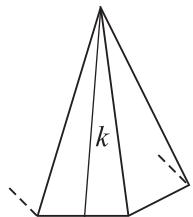
$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad P &= 6 \cdot b \\ P &= 6 \cdot 2 \\ P &= 12 \text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad S &= \frac{P \cdot k}{2} \\ S &= \frac{12 \cdot 6}{2} \\ S &= 36 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad B &= \frac{P \cdot a}{2} \\ B &= \frac{12 \cdot 1,7}{2} \\ B &= 10,2 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4.} \quad S_1 &= S + B \\ S_1 &= 36 + 10,2 \\ S_1 &= 46,2 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 Околната повърхнина на правилна пирамида е 100 см^2 , а периметърът на основата е 20 см. Намерете апотемата на пирамидата.

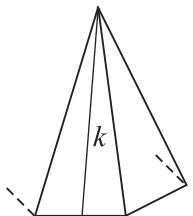


Решение:

$$S = \frac{P \cdot k}{2}$$

$$\begin{aligned} 100 &= \frac{20 \cdot k}{2} \\ 100 &= 10 \cdot k \\ k &= 10 \text{ см} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3 Околната повърхнина на правилна пирамида е 60 см^2 , а апотемата ѝ е 10 см. Намерете периметъра на основата.



Решение:

$$S = \frac{P \cdot k}{2}$$

$$\begin{aligned} 60 &= \frac{P \cdot 10}{2} \\ 60 &= 5 \cdot P \\ P &= 12 \text{ см} \end{aligned}$$



При решаване на Задачи 2 и 3, т.е. когато е дадена околната повърхнина и търсим k или P на правилна пирамида, не е необходимо да знаем броя на страните на правилния многоъгълник – основа на пирамидата.

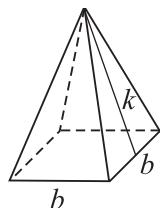
ЗАДАЧА 4 Ако S , P и k са съответно околната повърхнина, периметърът на основата и апотемата на пирамида, проверете вярно ли е попълнена таблицата.

S	P	k
49 см^2	$2,8 \text{ dm}$	35 mm
$123,2 \text{ см}^2$	385 mm	$6,4 \text{ см}$
$20\ 020 \text{ mm}^2$	$45,5 \text{ см}$	$0,88 \text{ dm}$

Отв.: Таблицата е попълнена вярно.

* Под “повърхнина” ще разбираме “лице на повърхнина”.

ЗАДАЧА 5 Правилна четириъгълна пирамида има околна повърхнина 42 cm^2 и апотема 7 см. Намерете повърхнината ѝ.



Решение:

$$\begin{aligned} 1. \quad S &= \frac{P \cdot k}{2} \\ 42 &= \frac{P \cdot 7}{2} \\ P &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

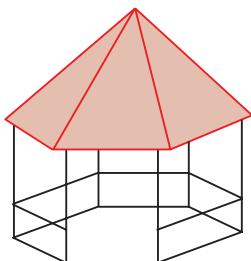
$$\begin{aligned} 3. \quad B &= b \cdot b \\ B &= 3 \cdot 3 \\ B &= 9 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$2. \quad P = 4 \cdot b$$

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot b \\ b &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad S_1 &= S + B \\ S_1 &= 42 + 9 \\ S_1 &= 51 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 6 Покривът на беседка има форма на правилна шестоъгълна пирамида с апотема 2 м и основен ръб 2 м. Колко листа ламарина са необходими за покриването ѝ, ако 1 лист покрива $1,5 \text{ m}^2$, а 1 лист е предвиден за загуба при покриването.



Решение:

$$\begin{aligned} 1. \quad P &= 6 \cdot b \\ P &= 6 \cdot 2 \\ P &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \text{Необходими са } x \text{ листа ламарина.} \\ x \cdot 1,5 &= 12 \\ x &= 8 \\ 8 + 1 &= 9 \end{aligned}$$

Необходими са 9 листа ламарина.

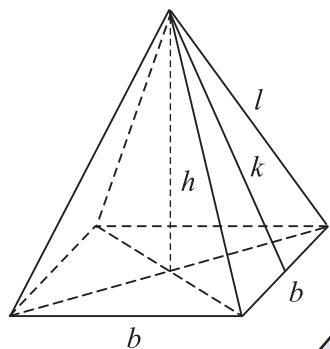
ЗАДАЧИ

- 1** Правилна четириъгълна пирамида има околна повърхнина 720 cm^2 и апотема 15 см. Намерете повърхнината ѝ.
- 2** Намерете повърхнината на правилна шестоъгълна пирамида с основен ръб 2 см, апотема на основата 1,7 см и апотема на пирамидата 5 см.
- 3** Правилна триъгълна пирамида има околна повърхнина $337,35 \text{ cm}^2$, апо тема 13 см и височина на основата 15 см. Намерете основния ръб и повърхнината на пирамидата.
- 4** Правилна шестоъгълна пирамида има околна повърхнина 897 cm^2 , апотема 26 см и апотема на основата 10 см. Намерете основния ръб и повърхнината на пирамидата.
- 5** Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете, като използвате приетите означения за правилна четириъгълна пирамида.

$b (\text{cm})$?	10	8
$k (\text{cm})$	5	?	?
$P (\text{cm})$	24	?	?
$B (\text{cm}^2)$?	?	?
$S (\text{cm}^2)$?	260	?
$S_1 (\text{cm}^2)$?	?	144

ИЗРАБОТВАНЕ НА МОДЕЛИ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ТЕЛА. ПРАКТИЧЕСКА РАБОТА. УПРАЖНЕНИЕ

Модел на правилна четириъгълна пирамида



Предварително задание

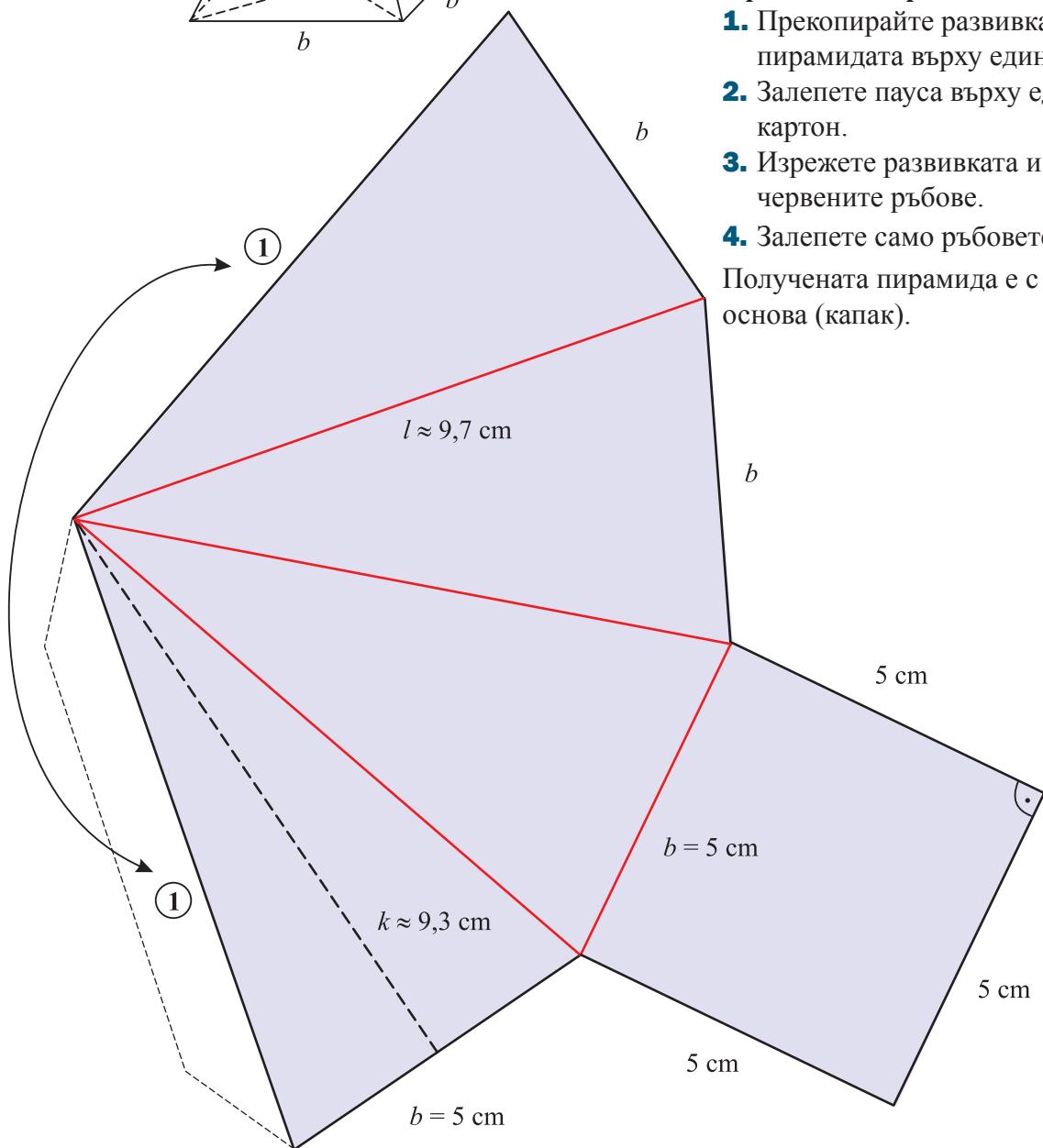
Всеки ученик да има за урока:

- два листа паус, размер А4;
- два листа картон, размер А4;
- лепило, тиксо, ножичка;
- линия, молив, кламери.

Практическа работа в часа

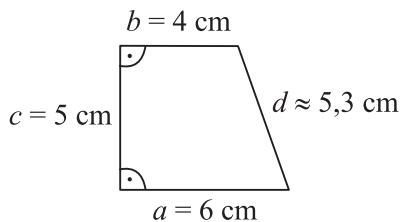
1. Прекопирайте развивката на пирамидата върху единия лист паус.
2. Залепете пауса върху единия лист картон.
3. Изрежете развивката и сгънете по червените ръбове.
4. Залепете само ръбовете ① и ①.

Получената пирамида е с отваряща се основа (капак).

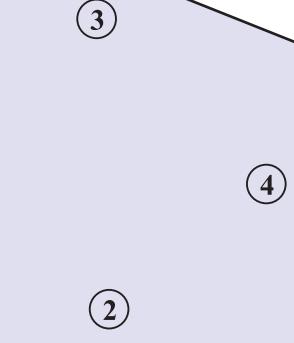


Модел на права призма

Начертана е развивката на права четириъгълна призма без горна основа с височина $h = 9$ см и основа правоъгълен трапец с размери, дадени на чертежа.

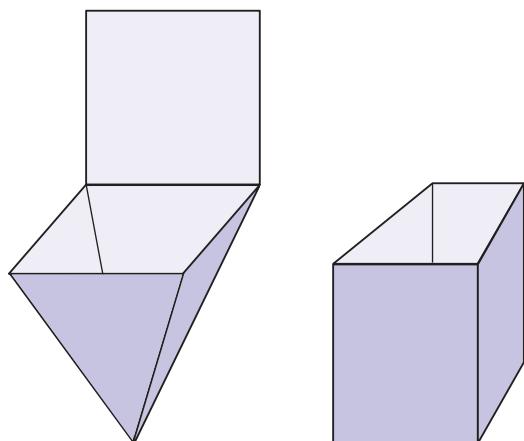


1. Прекопирайте развивката на пирамидата върху другия лист паус.
2. Залепете пауса върху втория картон.
3. Изрежете развивката и сгънете по червените ръбове.
4. Залепете ръбовете с еднаква номерация.



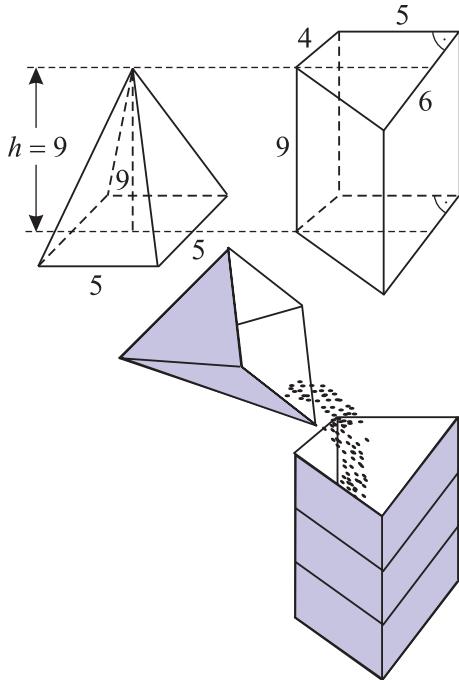
Получената права четириъгълна призма е без горна основа.

Изработихме модели на пирамида и призма. Те се използват за опита в урок № 24.



Опит

Разполагаме с два съда с форма на пирамида и на призма, които имат равни височини h и равнолицеви основи с лице B . На чертежа:



I съд е правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 9$ см и основен ръб $b = 5$ см.

$$B = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$V = ?$$

II съд е права четириъгълна призма с височина $h = 9$ см и основа правоъгълен трапец с основи 6 см, 4 см и височина 5 см.

$$B = \frac{6+4}{2} \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$$

$$V = B \cdot h = 25 \cdot 9 = 225 \text{ cm}^3$$

Напълваме I съд например с ориз (захар, течност, ...) и го пресипваме във II съд. Установяваме, че II съд се напълва след третото пресипване. Това показва, че след първото пресипване се напълва $\frac{1}{3}$ част от II съд, т.e. обемът на пирамидата е $\frac{1}{3}$ част от обема на призмата.

Опитно получаваме формулата

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$



Обемът на пирамида се намира по формулата $V = \frac{B \cdot h}{3}$,
където B е лицето на основата, а h е височината на пирамидата.

Оттук следва, че правилната четириъгълна пирамида с височина $h = 9$ см и основен ръб $b = 5$ см (вж опита) има обем

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 9 = 75, \quad V = 75 \text{ cm}^3.$$

ЗАДАЧА 1 Намерете обема на пирамида с лице на основата $B = 90 \text{ cm}^2$ и височина $h = 10$ см.

Решение:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 90 \cdot 10$$

$$V = 300 \text{ cm}^3$$

ЗАДАЧА 2 Намерете обема на правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $b = 5$ см и височина $h = 33$ mm.

Решение: $h = 33 \text{ mm} = 3,3 \text{ cm}$

$$1. \quad B = b \cdot b$$

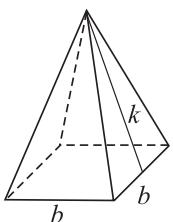
$$B = 5 \cdot 5$$

$$B = 25 \text{ cm}^2$$

$$2. \quad V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 3,3$$

$$V = 27,5 \text{ cm}^3$$



ЗАДАЧА 3 Ако V , B и h са съответно обемът, лицето на основата и височината на пирамидата, попълнете таблицата.

V (m^3)	B (m^2)	h (м)
1.	180	40
23	13,8	2.
28	3.	10

Решение: $V = \frac{B \cdot h}{3}$

1. $V = \frac{180 \cdot 40}{3}$

$V = 60 \cdot 40$

$V = 2400 \text{ m}^3$

2. $23 = \frac{13,8 \cdot h}{3}$

$23 = 4,6 \cdot h$

$h = 5 \text{ m}$

3. $28 = \frac{B \cdot 10}{3}$

$\frac{10}{3} \cdot B = 28$

$B = 8,4 \text{ m}^2$

ЗАДАЧА 4 Обемът на правилна осмоъгълна пирамида е $38,4 \text{ cm}^3$. Апотемата на основата е 24 mm , а височината на пирамидата е $0,6 \text{ dm}$. Намерете основния ръб на пирамидата.

Решение: $h = 0,6 \text{ dm} = 6 \text{ cm}$, $a = 24 \text{ mm} = 2,4 \text{ cm}$

1. $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$

$38,4 = \frac{1}{3} \cdot B \cdot 6$

$38,4 = B \cdot 2$

$B = 19,2 \text{ cm}^2$

2. $B = \frac{P \cdot a}{2}$

$B = \frac{P \cdot 2,4}{2}$

$19,2 = 1,2 \cdot P$

$P = 16 \text{ cm}$

3. $P = 8 \cdot b$

$16 = 8 \cdot b$

$b = 2 \text{ cm}$

ЗАДАЧА 5 Намерете обема на Хеопсовата пирамида, построена в древния Египет.



Основата ѝ е квадрат със страна 230 m , а височината на пирамидата е 144 m .

Решение: Лицето на основата е

$$B = 230 \cdot 230 = 52900, \quad B = 52900 \text{ m}^2.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 52900 \cdot 144 = 2539200, \quad V = 2539200 \text{ m}^3$$



Интересно е да се знае, че обемът на Хеопсовата пирамида е равен на обема на сграда с размери:

широкина 20 m , височина 100 m и дължина $1269,6 \text{ m}$

$$(20 \cdot 100 \cdot 1269,6 = 2539200).$$

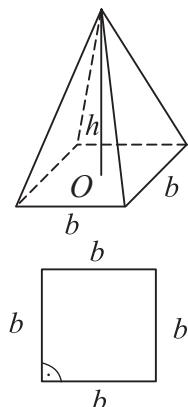
ЗАДАЧИ

- 1** Намерете обема на пирамида с лице на основата 72 cm^2 и височина 13 cm .
- 2** Намерете обема на правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $0,3 \text{ dm}$ и височина 17 cm .
- 3** Намерете обема на правилна пирамида с височина 15 cm и основа:
 - а) равностранен триъгълник със страна 4 cm и височина $3,46 \text{ cm}$;
 - б) правилен петоъгълник със страна 6 cm и апотема $4,13 \text{ cm}$;
- 4** Дадена е правилна триъгълна пирамида с височина $h = 12 \text{ cm}$, апотема $k = 13 \text{ cm}$, височина на основата $h_b = 15 \text{ cm}$ и обем $V = 510 \text{ cm}^3$. Намерете основния ръб b , околната повърхнина S и повърхнината S_1 на пирамидата.
- 5** За правилна шестоъгълна пирамида знаем, че $V = 348 \text{ cm}^3$, $h = 12 \text{ cm}$, $k = 13 \text{ cm}$ и $a = 5 \text{ cm}$. Намерете b , S и S_1 .

ОБЕМ И ПОВЪРХНИНА НА ПРАВИЛНА ПИРАМИДА. УПРАЖНЕНИЕ

Дадена е правилна пирамида. В урока ще използваме означенията: основен ръб b , апотема a на основата, височина h на пирамидата, апотема k на пирамидата, периметър и лице на основата съответно P и B , околнна повърхнина S , повърхнина S_1 и обем V .

ЗАДАЧА 1 Правилна четириъгълна пирамида има $S_1 = 96 \text{ cm}^2$, $h = 4 \text{ cm}$ и $P = 24 \text{ cm}$. Намерете S и V .



Решение:

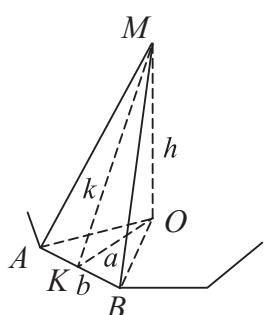
$$\begin{aligned} 1. \quad P &= 4 \cdot b \\ 24 &= 4 \cdot b \\ b &= 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad S_1 &= S + B \\ 96 &= S + 36 \\ S &= 60 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad B &= b \cdot b \\ B &= 6 \cdot 6 \\ B &= 36 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad V &= \frac{B \cdot h}{3} \\ V &= \frac{36 \cdot 4}{3} \\ V &= 48 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 Правилна десетоъгълна пирамида има $S = 260 \text{ cm}^2$, $h = 6 \text{ cm}$, $P = 52 \text{ cm}$, $a = 8 \text{ cm}$. Намерете S_1 , V и k .



Решение:

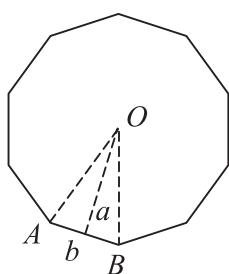
Основата на пирамидата е правилен десетоъгълник със страна b и апотема a .

$$\begin{aligned} 1. \quad B &= \frac{P \cdot a}{2} \\ B &= \frac{52 \cdot 8}{2} \\ B &= 208 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

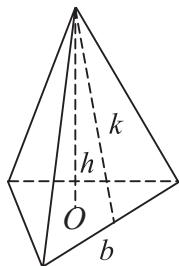
$$\begin{aligned} 2. \quad S_1 &= S + B \\ S_1 &= 260 + 208 \\ S_1 &= 468 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad V &= \frac{B \cdot h}{3} \\ V &= \frac{208 \cdot 6}{3} \\ V &= 416 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad S &= \frac{P \cdot k}{2} \\ 260 &= \frac{52 \cdot k}{2} \\ 260 &= 26 \cdot k \\ k &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

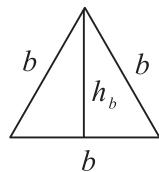


ЗАДАЧА 3 Правилна триъгълна пирамида има $V = 519 \text{ cm}^3$, $h = 12 \text{ см}$, $k = 13 \text{ см}$ и височина на основата $h_b = 15 \text{ см}$. Намерете S и S_1 .



Решение:

$$\begin{aligned} 1. \quad V &= \frac{B \cdot h}{3} \\ 519 &= \frac{B \cdot 12}{3} \\ 519 &= B \cdot 4 \\ B &= 129,75 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3. \quad P &= 3 \cdot b \\ P &= 3 \cdot 17,3 \\ P &= 51,9 \text{ cm} \end{aligned}$$

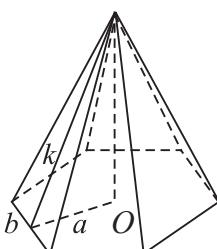
$$5. \quad S_1 = S + B$$

$$S_1 = 467,10 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} 2. \quad B &= \frac{b \cdot h_b}{2} \\ 129,75 &= \frac{b \cdot 15}{2} \\ 129,75 &= b \cdot 7,5 \\ b &= 17,3 \text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad S &= \frac{P \cdot k}{2} \\ S &= \frac{51,9 \cdot 13}{2} \\ S &= 337,35 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

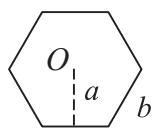
ЗАДАЧА 4 Правилна шестоъгълна пирамида има $S = 69 \text{ cm}^2$, $V = 55,2 \text{ cm}^3$, $k = 5 \text{ см}$, $a = 4 \text{ см}$. Намерете b , h , S_1 .



Решение:

$$\begin{aligned} 1. \quad S &= \frac{P \cdot k}{2} \\ 69 &= \frac{P \cdot 5}{2} \\ P &= 27,6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad B &= \frac{P \cdot a}{2} \\ B &= \frac{27,6 \cdot 4}{2} \\ B &= 55,2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



$$5. \quad S_1 = S + B$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 69 + 55,2 \\ S_1 &= 124,2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad P &= 6 \cdot b \\ 27,6 &= 6 \cdot b \\ b &= 4,6 \text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad V &= \frac{B \cdot h}{3} \\ 55,2 &= \frac{55,2 \cdot h}{3} \\ h &= 3 \text{ см} \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1 Правилна четириъгълна пирамида има обем $V = 48 \text{ cm}^3$, височина $h = 4 \text{ см}$ и апотема $k = 5 \text{ см}$. Намерете основния ръб b , околната повърхнина S и повърхнината S_1 на пирамидата.

2 Правилна шестоъгълна пирамида има околната повърхнина $S = 69 \text{ cm}^2$, височина $h = 3 \text{ см}$, апотема $k = 5 \text{ см}$ и апотема на основата $a = 4 \text{ см}$. Намерете основния ръб b , околната повърхнината S_1 и обема V на пирамидата.

3 Правилна петоъгълна пирамида има повърхнина $S_1 = 522 \text{ cm}^2$, апотема $k = 10 \text{ см}$, апотема на основата $a = 8 \text{ см}$ и обем $V = 464 \text{ cm}^3$. Намерете основния ръб b , околната повърхнина S и височината h на пирамидата.

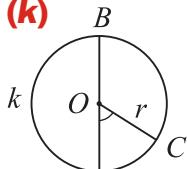
4 Правилна триъгълна пирамида има височина $h = 4 \text{ см}$, обем $V = 62,4 \text{ cm}^3$ и повърхнина $S_1 = 124,8 \text{ cm}^2$. Ако височината на основата е $h_b = 9 \text{ см}$, намерете основния ръб b , апотемата k и околната повърхнина S на пирамидата.

ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА

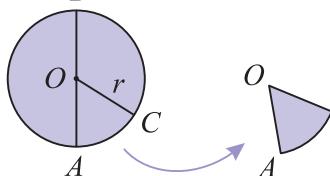
“ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ И РЪБЕСТИ ТЕЛА”

ЗАПОМНЕТЕ!

Окръжност (k)



Кръг



O – център

$$c = 2 \cdot \pi \cdot r$$

r – радиус

$AB = 2r = d$ – диаметър

$$\pi \approx 3,14 \approx \frac{22}{7}$$

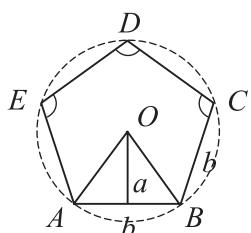
\widehat{AC} – дъга

$\angle AOC$ – централен ъгъл

– кръгов сектор

$$B = \pi \cdot r^2$$

Правилен многоъгълник



$$AB = BC = CD = DE = EA = b$$

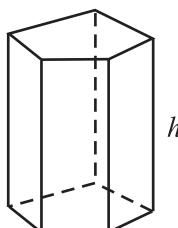
$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$$

a – апотема

$$P = n \cdot b \quad (n – брой на страните)$$

$$B = \frac{P \cdot a}{2}$$

Права призма



Околни стени – правоъгълници,
две основи – многоъгълници,

$$S = P \cdot h, \quad S_1 = S + 2 \cdot B, \quad V = B \cdot h,$$

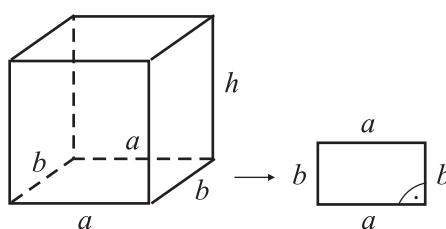
където h е височината на призмата, $h = l$,

P е периметърът на основата,

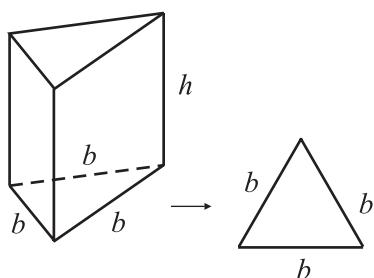
B е лицето на основата.

$$\Sigma = 2 \cdot P + n \cdot h \quad (h = l),$$

където Σ (сигма) е сборът от ръбовете на призмата.

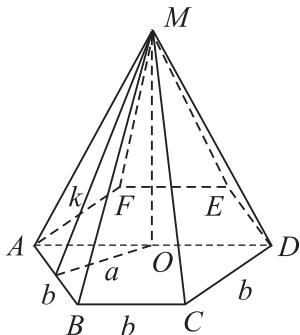


Правоъгълният паралелепипед е вид права призма, на която основите са правоъгълници.



Правилна призма е вид права призма, на която основите са правилни многоъгълници.

Правилна пирамида



Околни стени – еднакви равнобедрени триъгълници, основа – правилен многоъгълник,

$$S = \frac{P \cdot k}{2}, \quad S_1 = S + B, \quad V = \frac{B \cdot h}{3},$$

където k е апотема на пирамидата,

$$B = \frac{P \cdot a}{2}, \quad a \text{ е апотема на основата.}$$

$$\Sigma = P + n \cdot l,$$

където Σ (сигма) е сборът от ръбовете на пирамидата.

Геометрично тяло, заградено от повърхнина, която се състои само от многоъгълници, се нарича многостен. Многоъгълниците се наричат стени, а техните страни – ръбове на многостена.

Многостените се наричат още ръбести тела.

ЗАДАЧА

Дадена е правилна n -ъгълна пирамида с основен ръб b и апотема на основата a . Пирамидата има височина h , апотема k , околна повърхнина S , повърхнина S_1 и обем V . Попълнете таблицата:

n	b (cm)	a (cm)	P (cm)	B (cm^2)	h (cm)	k (cm)	S (cm^2)	S_1 (cm^2)	V (cm^3)
a)	5	11,6	8	?	?	6	10	?	?
б)	6	?	5	?	87	12	?	?	313,2
в)	12	?	8	62,4	?	?	?	312	?
									499,2

Решение:

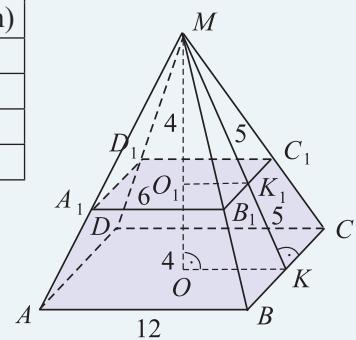
a)	$P = 5 \cdot b$	$B = \frac{P \cdot a}{2}$	$S = \frac{P \cdot k}{2}$	$S_1 = S + B$	$V = \frac{B \cdot h}{3}$
	$P = 58$	$B = 232$	$S = 290$	$S_1 = 522$	$V = 464$
б)	$B = \frac{P \cdot a}{2}$	$P = 6 \cdot b$	$S_1 = S + B$	$S = \frac{P \cdot k}{2}$	$V = \frac{B \cdot h}{3}$
	$P = 34,8$	$b = 5,8$	$S = 226,2$	$k = 13$	$V = 348$
в)	$P = 12 \cdot b$	$B = \frac{P \cdot a}{2}$	$V = \frac{B \cdot h}{3}$	$S = \frac{P \cdot k}{2}$	$S_1 = S + B$
	$b = 5,2$	$B = 249,6$	$h = 6$	$k = 10$	$S_1 = 561,6$

ЗАДАЧИ

1 Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете за правилна шестоъгълна призма с основен ръб b , апотема на основата a , периметър на основата P и лице на основата B . Височината на призмата е h , околната повърхнина – S , повърхнината – S_1 , обемът – V , и сборът от всички ръбове – Σ .

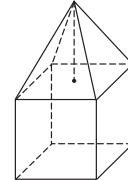
b (cm)	a (cm)	P (cm)	B (cm^2)	h (cm)	S (cm^2)	S_1 (cm^2)	V (cm^3)	Σ (cm)
a)	4,6	4	?	10	?	?	?	?
б)	?	?	21	31,5	?	126	?	?
в)	?	?	34,8	87	?	?	348	?
г)	?	3,5	?	10	?	?	420	?

2 От правилна четириъгълна пирамида е отрязана правилна четириъгълна пирамида по показания начин. Като използвате означенията на чертежа (в см), намерете обема и повърхнината на полученото тяло.



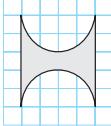
“ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ И РЪБЕСТИ ТЕЛА”

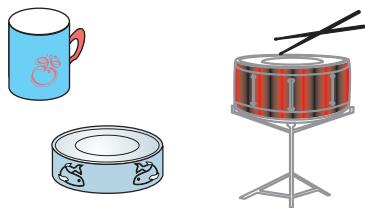
ТЕСТ № 1

1. Дължината на окръжност е 6π см. Лицето на кръга, заграден от тази окръжност, в квадратни сантиметри е:
 - A) 3π ;
 - B) 6π ;
 - C) 9π ;
 - D) 12π .
2. Права призма има височина 10 см и основа правоъгълен триъгълник с катети 5 см и 12 см. Обемът на призмата в кубически сантиметри е:
 - A) 200;
 - B) 300;
 - C) 400;
 - D) 600.
3. Правилна петоъгълна пирамида има основен ръб 6 см и апотема 8 см. Околната повърхнина на пирамидата в квадратни сантиметри е:
 - A) 120;
 - B) 160;
 - C) 220;
 - D) 240.
4. Пирамида има 18 ръба. Броят на стените на пирамидата е:
 - A) 6;
 - B) 4;
 - C) 9;
 - D) 10.
5. Правилна триъгълна пирамида има периметър на основата 27 см и лице на околната стена 36 cm^2 . Апотемата k на пирамидата в сантиметри е:
 - A) 6;
 - B) 7;
 - C) 8;
 - D) 9.
6. Обемът на правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 9 см и височина, която е $\frac{2}{3}$ от основния ръб, в кубически сантиметри е:
 - A) 162;
 - B) 232;
 - C) 243;
 - D) 486.
7. Околните стени на правилна шестоъгълна призма са квадрати и събрът от дълчините на всичките ѝ ръбове е 90 см. Околната повърхнина на призмата в квадратни сантиметри е:
 - A) 120;
 - B) 140;
 - C) 150;
 - D) 180.
8. Тялото на чертежа е съставено от куб и правилна четириъгълна пирамида. Ако височината на пирамидата е 6 см и е равна на ръба на куба, намерете в кубически сантиметри:
 - a) обема на пирамидата;
 - b) обема на тялото.
9. Околната повърхнина на правилна четириъгълна призма с височина $h = 10 \text{ cm}$ е 240 cm^2 . Намерете:
 - a) основния ръб на призмата (в см);
 - b) повърхнината на призмата (в cm^2);
 - c) обема на призмата (в cm^3).
10. Правилна шестоъгълна пирамида има околна повърхнина 210 cm^2 , апотема на основата $a = 6 \text{ cm}$, апотема на пирамидата $k = 10 \text{ cm}$ и височина на пирамидата $h = 80 \text{ mm}$. Намерете обема на пирамидата в кубически сантиметри и повърхнината в квадратни сантиметри.

“ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ И РЪБЕСТИ ТЕЛА”

ТЕСТ № 2

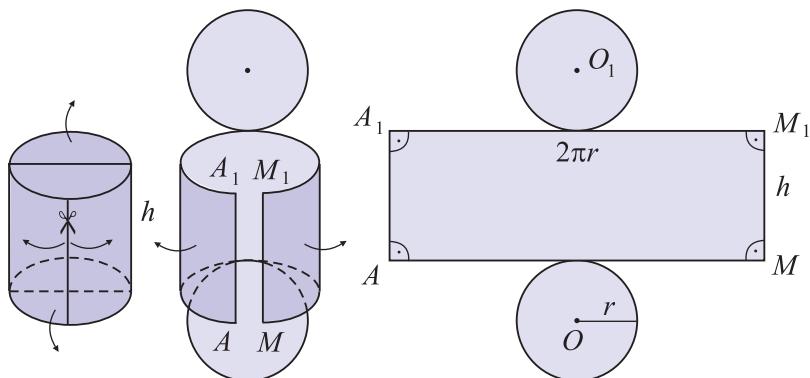
1. Лицето на кръг с диаметър 12 см в квадратни сантиметри е:
A) 6π ;
B) 12π ;
C) 24π ;
D) 36π .
2. Призма има 24 ръба. Броят на върховете на призмата е:
A) 8;
B) 10;
C) 16;
D) 24.
3. Основата на права призма е успоредник с периметър 24 см. Височината на призмата е 1,1 dm. Сборът от всички ръбове на призмата в сантиметри е:
A) 44;
B) 48;
C) 68;
D) 92.
4. Правилна деветоъгълна пирамида има периметър на основата 63 см и лице на околната повърхнина 378 cm^2 . Апотемата k на пирамидата в сантиметри е:
A) 7;
B) 14;
C) 6;
D) 12.
5. Правилна четириъгълна призма има периметър на основата 24 dm и лице на една околна стена 42 dm^2 . Обемът на призмата е:
A) 252 литра;
B) $25,2 \text{ dm}^2$;
C) 540 литра;
D) 504 dm^2 .
6. Колко пъти ще се увеличи обемът на правилна четириъгълна призма, ако основният ръб се увеличи 3 пъти, а височината – 4 пъти?
A) 7;
B) 12;
C) 9;
D) 36.
7. Ако лицето на всяко квадратче е 1 cm^2 , лицето на оцветената фигура в квадратни сантиметри е:
A) 20;
B) $20 - 4\pi$;
C) $20 + 2\pi$;
D) 4π .
8. Правилна шестоъгълна призма има основен ръб $b = 4 \text{ см}$ и апотема на основата $a = 3,5 \text{ см}$. Обемът на призмата е 420 cm^3 . Намерете в квадратни сантиметри:
a) околната повърхнина на призмата;
b) повърхнината на призмата.
9. Права призма има обем $V = 240 \text{ cm}^3$ и основа правоъгълен триъгълник с хипотенуза 13 см и катет 5 см. Ако височината на призмата е 8 см, намерете:
a) дължината на другия катет на основата (в см);
b) околната повърхнина на призмата ($\text{в } \text{cm}^2$);
c) повърхнината на призмата (в cm^2).
10. Права призма има обем 120 cm^3 . Основата ѝ е ромб със страна 5 см и височина 4 см. Намерете повърхнината на призмата в квадратни сантиметри.



Нарисуваните чаша, барабан, консервни кутии са предмети, които имат форма на геометрично тяло, наречено **прав кръгов цилиндър**.

Опит

Да разгледаме модел на прав кръгов цилиндър, направен от картон. Ако разрежем и разгънем този модел така, както е показано на чертежа, ще получим **развивката на правия кръгов цилиндър**.



Изводи:

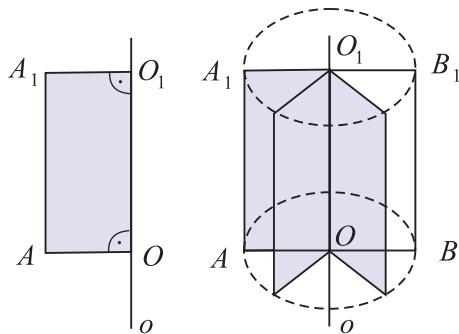
В правия кръгов цилиндър:

- двета еднакви кръга (които при налагане съвпадат) се наричат **основи** на правия кръгов цилиндър;
 - правоъгълникът AMM_1A_1 се нарича **цилиндрична повърхнина**, като $AM = A_1M_1 = 2\pi r$ – **дължина на окръжността**, заграждаща всяка от основите на цилиндъра;
- $AA_1 = MM_1 = h$ – **височина на цилиндъра**.



Цилиндърът е тяло, повърхнината на което е съставена от два кръга и цилиндрична повърхнина.

Прав кръгов цилиндър може да се получи при пълно завъртане на правоъгълник AOO_1A_1 около една от страните му, например около O_1O . При това въртене:



- отсечката AA_1 описва цилиндрична повърхнина и се нарича **образуваща** l на правия кръгов цилиндър;
- отсечките OA и O_1A_1 описват двета еднакви кръга и са радиусите на двете основи ($OA = O_1A_1 = r$); r се нарича **радиус на цилиндъра**;
- отсечката OO_1 остава върху правата o , която се нарича **ос на въртене**;
- правоъгълникът ABB_1A_1 се нарича **осно сечение** на правия кръгов цилиндър;

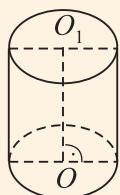
- отсечката OO_1 съединява центровете на двете основи и е перпендикулярна на двата радиуса OA и O_1A_1 . Тя се нарича **височина h на правия цилиндър**,

$$h = OO_1 = AA_1 = l.$$

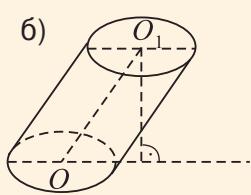


Освен прави кръгови цилинди има и тела, които се наричат

а)



б)



наклонени цилинди.

На фиг. а) е изображен прав кръгов цилиндър.

На фиг. б) е изображен наклонен цилиндър.

Ще изучаваме само прав кръгов цилиндър и за по-кратко ще го наричаме цилиндър.

ЗАДАЧА

Върху квадратна мрежа начертайте цилиндър с радиус $r = 3$ м. ед. и височина $h = 8$ м. ед. За начертания цилиндър:

- Отбележете центровете на основите с O и O_1 .
- Именувайте едно осно сечение с ABB_1A_1 .
- Начертайте оста на въртене.
- Посочете начертаните височини.
- Посочете начертаните образуващи.
- Именувайте начертаните радиуси на основите.

Решение:

Чертежът на цилиндър се състои от правоъгълник с измерения $| h = 8 \text{ м. ед.}, d = 2 \cdot r = 6 \text{ м. ед.}$

- отбелязани са на чертежа;
- оста на цилиндъра е правата OO_1 ;
- начертаните височини са $AA_1 = OO_1 = BB_1 = h$;
- начертаните образуващи са $AA_1 = BB_1 = l$;
- $OA = OB = O_1B_1 = O_1A_1 = r$.



Обикновено гледаме цилиндъра отпред и отгоре. Тогава виждаме основите, които са кръгове, леко “сплескани” и ги чертаем като геометрични фигури, наричани елипси. Например движението на Земята около Слънцето става по елипса.

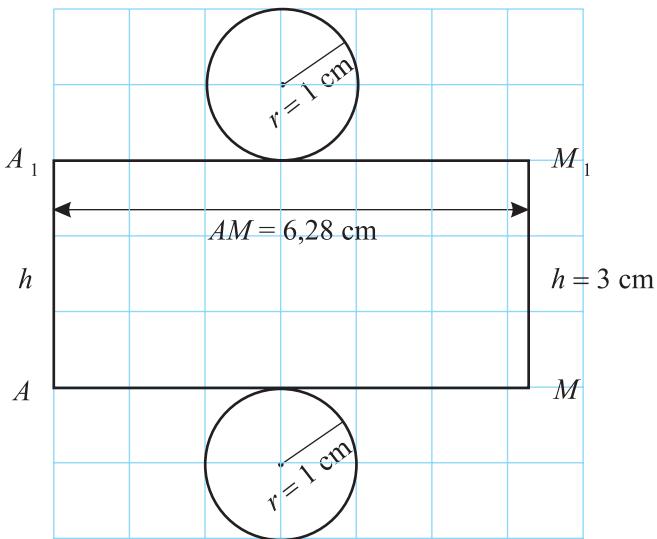
ЗАДАЧИ

- 1 Даден е правоъгълник със страни $a = 7 \text{ см}$ и $b = 5 \text{ см}$. Намерете r и h на цилиндъра, който се получава при за-въртането на правоъгълника около:
- страница $a = 7 \text{ см}$;
 - страница $b = 5 \text{ см}$.

- 2 Върху квадратна мрежа (1 деление = $= 1 \text{ см}$) начертайте прав кръгов цилиндър с радиус r и височина h , ако:
- $r = 1 \text{ см}$, $h = 3 \text{ см}$;
 - $r = 2 \text{ см}$, $h = 5 \text{ см}$;
 - $r = 3 \text{ см}$, $h = 2 \text{ см}$.

ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА ПРАВ КРЪГОВ ЦИЛИНДЪР

ЗАДАЧА 1 На квадратна мрежа (1 деление = 1 см) начертайте развивката на цилиндър с радиус $r = 1$ см и височина $h = 3$ см.



Решение:

На квадратна мрежа (1 деление = 1 см) начертаваме:

1. правоъгълник AMM_1A_1 с измерения:

$$AA_1 = 3 \text{ см},$$

$$AM = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 6,28 \text{ см};$$

2. два кръга с $r = 1$ см, като:

- единият има една обща точка с AM ,
- другият има една обща точка с A_1M_1 така, както е показано на чертежа.

Правоъгълникът AMM_1A_1 е цилиндричната повърхнина на цилиндъра с дадените размери. Лицето на правоъгълника AMM_1A_1 е лицето S на околната повърхнина на този цилиндър:

$$S = AM \cdot AA_1 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = P \cdot h.$$

Цилиндричната повърхнина и двете основи на цилиндъра образуват повърхнината (пълната повърхнина) на цилиндъра. Ако към лицето на околната повърхнина S прибавим лицата на двета кръга (всеки с лице B), получаваме лицето на повърхнината S_1 на цилиндъра:

$$S_1 = S + 2B.$$



Лицето на околната повърхнина на прав кръгов цилиндър се намира по формулата

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \text{ или } S = P \cdot h,$$

а r е радиусът на основата, h е височината на цилиндъра.

Лицето на повърхнината на прав кръгов цилиндър се намира по формулата

$$S_1 = S + 2 \cdot B, \text{ където } B = \pi \cdot r^2.$$



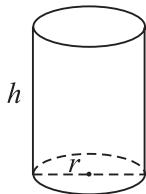
Формулите

$$S = P \cdot h \text{ и } S_1 = S + 2 \cdot B$$

са едни и същи за права призма и за прав кръгов цилиндър.

ЗАДАЧА 2

Намерете околната повърхнина и повърхнината на прав кръгов цилиндър с радиус $r = 2$ см и височина $h = 5$ см.

**Решение:**

$$\begin{aligned}1. \quad S &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\S &= 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 \\S &= 62,8 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad B &= \pi \cdot r^2 \\B &= 3,14 \cdot 2 \cdot 2 \\B &= 12,56 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

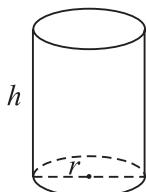
$$\begin{aligned}3. \quad S_1 &= S + 2 \cdot B \\S_1 &= 62,8 + 2 \cdot 12,56 \\S_1 &= 87,92 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



Решението на Задача 2 ще е вярно, ако в отговора остане π , без да се замести с 3,14. Тогава $S = 20 \pi \text{ cm}^2$, $S_1 = 28 \pi \text{ cm}^2$.

ЗАДАЧА 3

Намерете височината на цилиндър с $r = 5 \text{ cm}$, ако повърхнината му е $160\pi \text{ cm}^2$.

**Решение:**

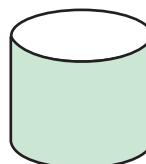
$$\begin{aligned}1. \quad B &= \pi \cdot r^2 \\B &= \pi \cdot 5 \cdot 5 \\B &= 25\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad S_1 &= S + 2 \cdot B \\160\pi &= S + 2 \cdot 25\pi \\160\pi &= S + 50\pi \\S &= 160\pi - 50\pi \\S &= (160 - 50)\pi \\S &= 110\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad S &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\110\pi &= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot h \\10\pi \cdot h &= 110\pi \\h &= 11 \text{ cm}\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4

Кутия без капак с форма на прав кръгов цилиндър има диаметър на основата 14 см и височина 20 см. Колко материал е необходим за направата на 1000 такива кутии?

**Решение:**

От $d = 2 \cdot r = 14 \text{ cm} \rightarrow r = 7 \text{ cm}$.

Кутия във форма на цилиндър без капак има повърхнина $S + B$.

$$\begin{aligned}S + B &= 2\pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2 = 14\pi \cdot 20 + \pi \cdot 7^2 = 280\pi + 49\pi = \\&= (280 + 49)\pi = 329\pi = 329 \cdot 3,14 = 1033,06 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$1000 \cdot (S + B) = 1000 \cdot 1033,06 = 1033060$$

$$1000 \cdot (S + B) = 103,306 \text{ m}^2$$



По-рационално е първо да изразим търсената величина $(S + B)$ чрез π и да заместим π с 3,14 в крайния израз $(S + B = 329\pi)$, ако това е необходимо (както в практическата Задача 4).

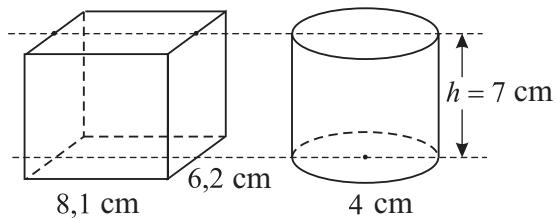
ЗАДАЧИ

- 1** Върху квадратна мрежа (1 м. ед. = $= 0,5 \text{ cm}$) начертайте развивката на прав кръгов цилиндър с диаметър на основата 3 см и височина 3,5 см.
- 2** Радиусът на основата на цилиндър е 3 см, а височината му е 6 см. Намерете:
 - a) лицето на околната повърхнина;
 - b) лицето на повърхнината на цилиндъра.
- 3** Диаметърът на основата на цилиндър е 6 см, а образуващата му е 80 mm. Намерете околната повърхнина и повърхнината на цилиндъра.
- 4** Намерете повърхнината на цилиндър, ако околната му повърхнина е $168\pi \text{ cm}^2$, а височината му е 12 см.

Опит

Разполагаме с два съда с равни височини $h = 7$ см, които нямат горна основа.

- Първият съд има форма на правоъгълен паралелепипед с измерения на основата 8,1 см и 6,2 см. Тогава лицето на основата е $B = 8,1 \cdot 6,2 = 50,22 \text{ cm}^2$, а обемът $V = B \cdot h$ е $V = 50,22 \cdot 7 = 351,54 \text{ cm}^3$.
- Вторият съд има форма на цилиндър с $r = 4$ см. Тогава лицето на основата е $B = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 16 = 50,24 \text{ cm}^2$.



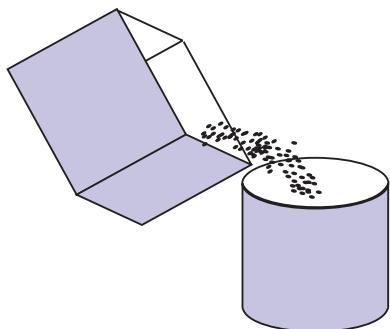
$$V_{\text{цилиндъра}} = ?$$

Лицата на основите на двета съда (с точност до 0,1) са $50,2 \text{ cm}^2$, т.e. можем да приемем, че са равни.

За да намерим обема на цилиндъра, сравняваме обемите на двета съда:

Напълваме първия съд например с ориз (захар, течност, ...) и го пресипваме във втория. Установяваме опитно, че съдържанието на първия съд напълва точно втория съд, т.e. обемът на цилиндъра е също $351,54 \text{ cm}^3$ и може да се получи по формулата

$$V = B \cdot h \text{ или } V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$



Този опит може да се направи и с други два съда – паралелепипед и цилиндър, които имат равни височини h и равнолицеви основи с лице B . Отново се получава, че обемът на цилиндъра е $V = B \cdot h$.



Обемът на всеки цилиндър се намира по формулата

$$V = B \cdot h \text{ или } V = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

където $B = \pi \cdot r^2$ е лицето на основата, а h е височината на цилиндъра.



Формулата за обем на цилиндър $V = B \cdot h$ е същата като формулата за обем на права призма.

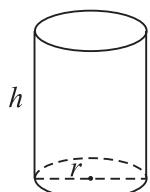
ЗАДАЧА 1 Намерете обема V на цилиндър с радиус $r = 8$ см и височина $h = 20$ см.

Решение:

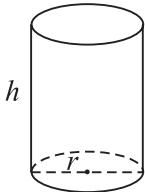
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 64 \cdot 20 \pi = 1280 \pi$$

$$V = 1280 \pi \text{ cm}^3$$



ЗАДАЧА 2 Намерете обема на цилиндър с диаметър на основата 12 см и височина 140 mm.



Решение:

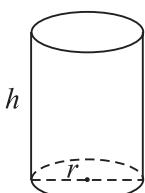
$$d = 12 \text{ cm}, \quad 2r = 12 \text{ cm}, \quad r = 6 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 14 = 36 \cdot 14 \cdot \pi = 504 \pi$$

$$V = 504 \pi \text{ cm}^3$$

ЗАДАЧА 3 Намерете колко литра е вместимостта на затворен варел с форма на цилиндър с диаметър 80 см и височина 1 m.



Решение:

$$d = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}, \quad 2r = 8, \quad r = 4 \text{ dm}$$

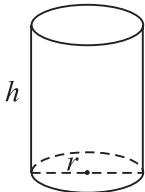
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160 \pi, \quad V = 160 \cdot 3,14 = 502,4$$

$$V = 502,4 \text{ dm}^3$$

$$\text{От } 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \rightarrow V = 502,4 \text{ L.}$$

ЗАДАЧА 4 Намерете височината на цилиндър с радиус $r = 5$ см и обем $V = 175\pi \text{ cm}^3$.



Решение:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$175\pi = \pi \cdot 5^2 \cdot h, \quad 25\pi \cdot h = 175\pi$$

$$h = \frac{175\pi}{25\pi}, \quad h = 7 \text{ cm}$$

ЗАДАЧА 5 Колко тежи арматурно желязо с форма на цилиндър, което е дълго 4 m и има напречно сечение кръг с диаметър 8 mm (специфичното тегло на желязото е $7,8 \text{ g/cm}^3$)?

Решение:

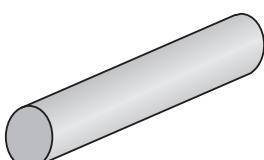
теглото = $V \cdot$ специфичното тегло

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h, \quad r = 0,4 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot 0,4^2 \cdot 400 = 0,16 \cdot 400\pi = 64\pi$$

$$V = 64 \cdot 3,14 = 200,96, \quad V = 200,96 \text{ cm}^3$$

Теглото е $200,96 \cdot 7,8 = 1567,488 \text{ g}$, т.e. $1,567 \text{ kg}$.



ЗАДАЧИ

Ако r, d, h, B, S, S_1, V са приетите означения за цилиндър, решете задачите:

1 $r = 7 \text{ cm}, h = 10 \text{ cm}, V = ?$

2 $d = 10 \text{ cm}, h = 8 \text{ cm}, V = ?$

3 $r = 3 \text{ cm}, h = 5 \text{ cm}, V = ?, S = ?, S_1 = ?$

4 $r = 4 \text{ cm}, S = 48\pi \text{ cm}^2, S_1 = ?, V = ?$

5 $r = 5 \text{ cm}, S_1 = 150\pi \text{ cm}^2, S = ?, V = ?$

6 Цилиндричен съд с диаметър 20 см има вместимост 4 литра. Намерете височината на съда.

7 Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете.

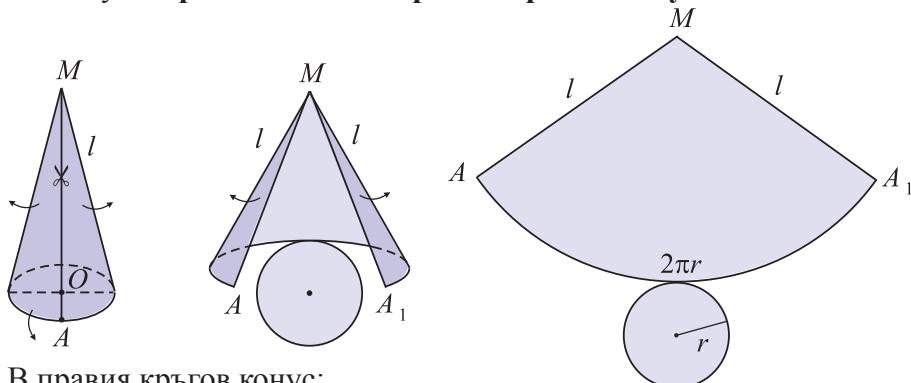
$r (\text{cm})$	$B (\text{cm}^2)$	$h (\text{cm})$	$V (\text{cm}^3)$
3	?	2	?
4	?	?	80π
?	25π	?	100π
?	36π	5	?

8 Цилиндрична чугунена тръба с дължина 3 m има външен диаметър 12 см и вътрешен диаметър 10 см. Колко тежи тръбата (специфичното тегло на чугуна е $7,3 \text{ g/cm}^3$)?



Нарисуваните отвес и шапка са предмети, които имат форма на геометрично тяло, наречено **прав кръгов конус**.

Да разгледаме модел на прав кръгов конус, направен от картон. Ако разрежем и разгънем този модел така, както е показано на чертежа, ще получим **развивката на правия кръгов конус**.



В правия кръгов конус:

- точката M се нарича **връх** на конуса;
- кръгът се нарича **основа** на конуса;
- фигурата AA_1M се нарича **околна повърхнина** на конуса или **конична повърхнина**, а $AM = A_1M = l$ – **образуваща на конуса**.

Коничната повърхнина е част от друг кръг, ограничена от дъга $\widehat{AA_1}$ и два радиуса, равни на l , т.е. е **кръгов сектор**, на който отговаря централен $\angle AMA_1$.

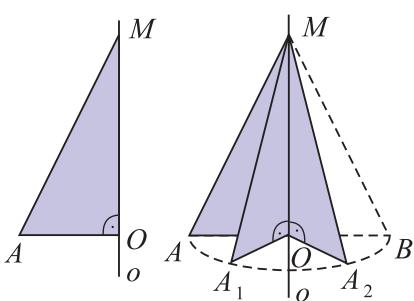
Дължината на дъгата $\widehat{AA_1}$ е равна на дължината на окръжността на основата, т.е. $\widehat{AA_1} = 2\pi \cdot r$.



Конусът е тяло, повърхнината на което е съставена от един кръг и конична повърхнина.

Прав кръгов конус може да се получи при пълно завъртане на правоъгълен $\triangle AOM$ ($\angle AOM = 90^\circ$) около един от катетите му, например OM .

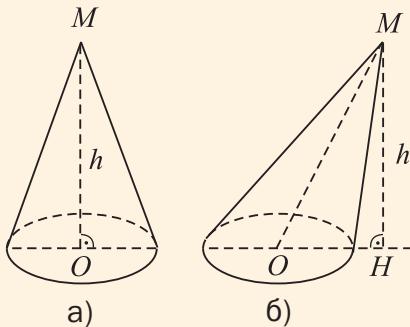
При това въртене:



- отсечката MA описва коничната повърхнина и затова се нарича **образуваща l на правия кръгов конус**;
- отсечката OA описва кръга на основата ($OA = OA_1 = OA_2 = r$); r се нарича **радиус на конуса**;
- отсечката OM остава върху правата o – **оста на въртене**;
- равнобедреният $\triangle ABM$ се нарича **осно сечение** на правия кръгов конус;
- отсечката OM съединява върха на правия кръгов конус с центъра на основата O и се нарича **височина h на правия кръгов конус**, т.е. $OM = h$.



Освен прави кръгови конуси има и тела, които се наричат наклонени конуси.



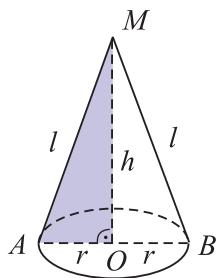
На фиг. а) е изобразен прав кръгов конус, $OM = h$.

На фиг. б) е изобразен наклонен конус, OM не съвпада с h , а $MH = h$.

Ще изучаваме само прав кръгов конус и за по-кратко ще го наричаме **конус**.

ЗАДАЧА

Върху квадратна мрежа (2 деления = 1 см) начертайте конус с радиус $r = 1,5$ см и височина $h = 4$ см.



Решение:

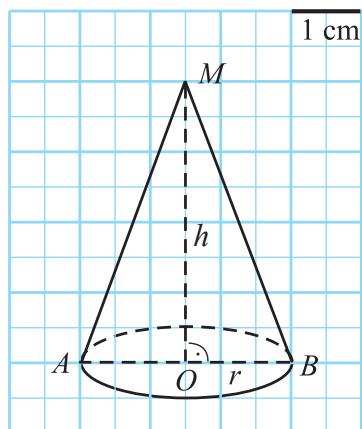
Чертежът на конуса се състои от:

- равнобедрен $\triangle ABM$
с бедра $MA = MB = l$ и
основа диаметърът на окръжността;
- елипса, която минава през точките A и B ,
 $AB = 2r$, като частта откъм нас е видима.

При чертане на равнобедренния $\triangle ABM$ е по-удобно първо да начертаем правоъгълния $\triangle AOM$ ($\angle O = 90^\circ$) с катети $AO = r$ ($= 1,5$ см) и $OM = h$ ($= 4$ см).

Начертаваме:

- $AB = 2r = 3$ см \rightarrow точките A и B ;
- O – средата на AB , $OA = OB = r = 1,5$ см;
- $\angle AOM = 90^\circ$;
- $OM = h = 4$ см \rightarrow точката M ;
- $\triangle ABM$;
- елипса през точките A и B .



ЗАДАЧИ

- 1** Даден е правоъгълен триъгълник с катети $a = 3$ см, $b = 4$ см и хипотенуза $c = 5$ см. Намерете r , l и h на конус, който се получава при завъртане на триъгълника около:
- катета a ;
 - катета b .

- 2** Даден е правоъгълен триъгълник с катети $a = 5$ см, $b = 12$ см и хипотенуза $c = 13$ см. Намерете r , l и

h на конус, който се получава при завъртане на триъгълника около:

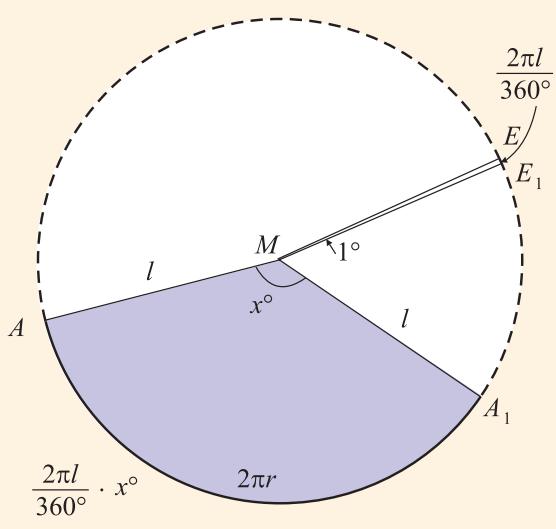
- катета a ;
- катета b .

- 3** Върху квадратна мрежа (1 деление = 1 см) начертайте прав кръгов конус с радиус r и височина h , ако:
- $r = 1$ см, $h = 3$ см;
 - $r = 2$ см, $h = 5$ см;
 - $r = 3$ см, $h = 2$ см.

ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА ПРАВ КРЪГОВ КОНУС

ЗАДАЧА

Начертайте развивката на конус с радиус $r = 2$ см и образуваща $l = 5$ см.



Допълваме коничната повърхнина (сектора AMA_1) до цял кръг така, както е показано на чертежа. Този кръг има обиколка $2\pi \cdot l$.

Знаем, че ъгълът при центъра M на кръга е 360° .

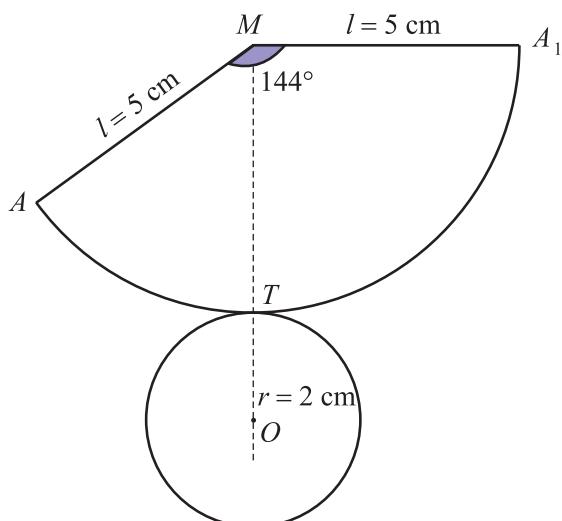
На всеки кръгов сектор с ъгъл 1° отговаря дъга EE_1 с дължина $\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{360}$, т.e. $EE_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{360}$.

На всеки кръгов сектор с ъгъл x° отговаря дъга AA_1 с дължина $\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{360} \cdot x$, т.e. $AA_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{360} \cdot x$.

От друга страна, $AA_1 = 2 \cdot \pi \cdot r$ (обиколката на кръга – основа на конуса).

Получаваме $\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{360} \cdot x = 2 \cdot \pi \cdot r$, $x = \frac{r}{l} \cdot 360$.

Тогава $x^\circ = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$ е централният ъгъл, на който съответства дъга $\widehat{AA_1}$. Получихме, че централният ъгъл на сектора, представляващ околната повърхнина на конус, се намира по формулата $x^\circ = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$.



Решение:

С формулата

$$(1) \quad x^\circ = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$$

пресмятаме ъгъла, който образуват двете образуващи, и след това можем да начертаем коничната повърхнина на конус по дадени r и l .

Първо по формула (1) пресмятаме

$$\angle AMA_1 = x^\circ.$$

$$x^\circ = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$$

$$x^\circ = \frac{2}{5} \cdot 360^\circ = 144^\circ$$

Начертаваме:

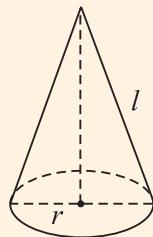
1. кръгов сектор AMA_1 с $l = 5$ см и $\angle AMA_1 = 144^\circ$ (освен линийка с деления използваме пергел и транспортир);
2. произволна права през M , която пресича $\widehat{AA_1}$ в точка T ;
3. точка O върху правата MT , такава, че $OT = 2$ см;
4. окръжност с център O и $r = 2$ см.

Кръговият сектор AA_1M е коничната повърхнина на конус с радиус r и образуваща l .

Лицето на кръговия сектор AA_1M съвпада с лицето S на околната повърхнина на дадения конус.



Как ще намерим лицето на повърхнината S на конус с дадени r и l ?



$$S_{\text{конуса}} = S_{\text{кр. сектор}}$$

На всеки кръгов сектор с ъгъл 1° отговаря лице $\frac{\pi \cdot l^2}{360}$.

На всеки кръгов сектор с ъгъл x° отговаря лице $\frac{\pi \cdot l^2}{360} \cdot x$.

За да намерим лицето на този кръгов сектор, който е околната повърхнина на конус с образуваща l и радиус r , заместваме x с израза $x = \frac{r}{l} \cdot 360$:

$$\frac{\pi \cdot l^2}{360} \cdot x = \frac{\pi \cdot l \cdot l}{360} \cdot \frac{r}{l} \cdot 360 = \pi \cdot r \cdot l.$$

За лицето на околната повърхнина S на прав кръгов конус получихме формулата $S = \pi \cdot r \cdot l$.



Лицето на околната повърхнина на прав кръгов конус се намира по формулата

$$S = \pi \cdot r \cdot l,$$

където r е радиусът на конуса, а l е образуващата на конуса.

Ако към лицето на околната повърхнина S прибавим лицето на основата B , получаваме лицето на повърхнината (пълната повърхнина) на конуса $S_1 = S + B$.



Лицето на повърхнината на прав кръгов конус се намира по формулата

$$S_1 = S + B,$$

където $S = \pi \cdot r \cdot l$, а $B = \pi \cdot r^2$ е лицето на основата.

Формулата $S = \pi \cdot r \cdot l$ може да се запише $S = \frac{2\pi \cdot r \cdot l}{2}$ или $S = \frac{P \cdot l}{2}$, където периметърът P на основата е дължината $2\pi \cdot r$ на окръжността. Получаваме, че чрез формулите

$$S = \frac{P \cdot l}{2} \quad \text{и} \quad S_1 = S + B$$

могат да се намерят повърхнините на правилна пирамида и на прав кръгов конус при $l = k$.

ЗАДАЧИ

1 Намерете в градуси ъгъла x° между двете образуващи на коничната

повърхнина, ако:

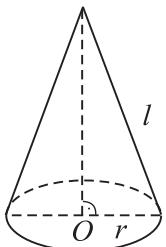
- а) $r = 3 \text{ cm}$, $l = 10 \text{ cm}$;
- б) $r = 4 \text{ cm}$, $l = 9 \text{ cm}$;
- в) $r = 1 \text{ cm}$, $l = 6 \text{ cm}$.

2 Начертайте развивката на прав кръгов конус, ако:

- а) $r = 3 \text{ cm}$, $l = 6 \text{ cm}$;
- б) $r = 2 \text{ cm}$, $l = 6 \text{ cm}$;
- в) $r = 1 \text{ cm}$, $l = 6 \text{ cm}$;
- г) $r = 3 \text{ cm}$, $l = 10 \text{ cm}$.

ЛИЦЕ НА ПОВЪРХНИНА НА ПРАВ КРЪГОВ КОНУС. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Намерете лицето на околната повърхнина и лицето на повърхнината на конус* с радиус $r = 7$ см и образуваща $l = 11$ см.



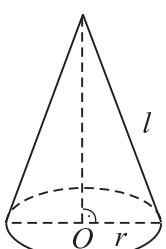
Решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad S &= \pi \cdot r \cdot l \\ &= \pi \cdot 7 \cdot 11 \\ &= 77\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad S_1 &= S + B \\ S_1 &= 77\pi + 49\pi \\ S_1 &= (77 + 49)\pi \\ S_1 &= 126\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad B &= \pi \cdot r^2 \\ B &= \pi \cdot 7 \cdot 7 \\ B &= 49\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 Намерете лицето на повърхнината на конус с образуваща 12 см, ако дължината на основата му е 14π см.



Решение:

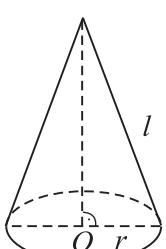
$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad c &= 2\pi \cdot r \\ 14\pi &= 2\pi \cdot r \\ r &= \frac{14\pi}{2\pi} \\ r &= 7 \text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad B &= \pi \cdot r^2 \\ B &= \pi \cdot 7 \cdot 7 \\ B &= 49\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad S &= \pi \cdot r \cdot l \\ S &= \pi \cdot 7 \cdot 12 \\ S &= 84\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4.} \quad S_1 &= S + B \\ S_1 &= 84\pi + 49\pi \\ S_1 &= (84 + 49)\pi \\ S_1 &= 133\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3 Намерете образуващата на конус с диаметър 12 см и лице на повърхнината 96π см².



Решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad d &= 2 \cdot r \\ 12 &= 2 \cdot r \\ r &= 6 \text{ см} \end{aligned}$$

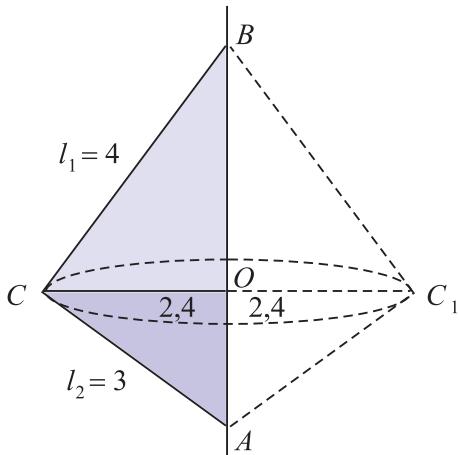
$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad S_1 &= S + B \\ 96\pi &= S + 36\pi \\ S &= 96\pi - 36\pi \\ S &= (96 - 36)\pi \\ S &= 60\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad B &= \pi \cdot r^2 \\ B &= \pi \cdot 6 \cdot 6 \\ B &= 36\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4.} \quad S &= \pi \cdot r \cdot l \\ 60\pi &= \pi \cdot 6 \cdot l \\ l &= \frac{60\pi}{6\pi} \\ l &= 10 \text{ см} \end{aligned}$$

* Под “конус” ще разбираме “прав кръгов конус”.

ЗАДАЧА 4 Правоъгълен $\triangle ABC$ с катети $AC = 3$ см и $BC = 4$ см има височина към хипотенузата $CO = 2,4$ см. Ако този триъгълник е завъртан около хипотенузата AB , намерете повърхнината на полученото тяло.



Решение:

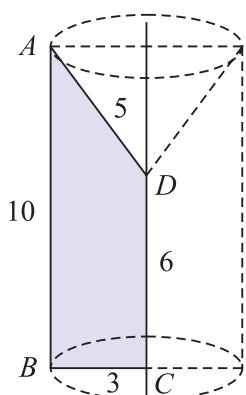
Полученото тяло е съставено от два конуса с обща основа, която е кръг с радиус $r = CO = 2,4$ см.

Търсената повърхнина S_t е сбор от околните повърхнини на двета конуса:

$$\begin{aligned} S_t &= \pi \cdot r \cdot l_1 + \pi \cdot r \cdot l_2 = \\ &= \pi \cdot 2,4 \cdot 4 + \pi \cdot 2,4 \cdot 3 = \\ &= \pi \cdot 2,4 \cdot (4 + 3) = \\ &= \pi \cdot 2,4 \cdot 7 = 16,8\pi \\ S_t &= 16,8\pi \text{ см}^2. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5 Правоъгълният трапец $ABCD$ е завъртан около малката си основа CD .

По данните на чертежа (в см) намерете повърхнината на полученото тяло.



Решение:

Полученото тяло е съставено от цилиндър с издълбан в него конус.

цилиндър	конус
$r = 3$ см	$r = 3$ см
$h = AB = 10$ см	$l = 5$ см

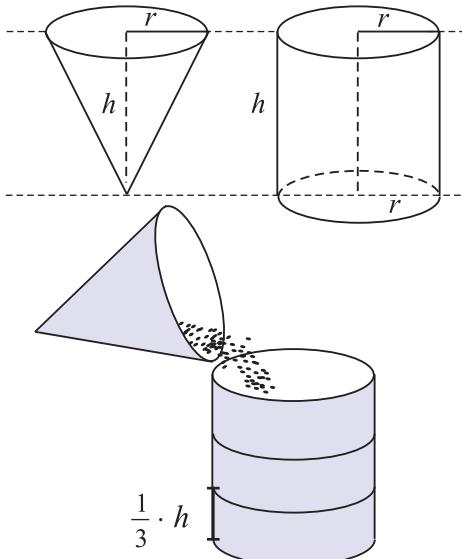
$$\begin{aligned} S_t &= S_{\text{цилиндър}} + S_{\text{конус}} + B \\ S_t &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r^2 \\ S_t &= 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10 + \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3 \cdot 3 \\ S_t &= (60 + 15 + 9)\pi \\ S_t &= 84\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- 1** Прав кръгов конус с радиус 8 см има образуваща 10 см. Намерете повърхнината на конуса.
- 2** Прав кръгов конус с диаметър 12 см има образуваща 8 см. Намерете повърхнината на конуса.
- 3** Околната повърхнина на прав кръгов конус е $77\pi \text{ см}^2$, а образуващата му е 11 см. Намерете повърхнината на конуса.
- 4** Правоъгълен триъгълник с катети $a = 10$ см и b и хипотенуза $c = 26$ см е завъртан около катета b . Намерете околната и пълната повърхнина на полученото тяло.
- 5** Правоъгълен трапец с основи 13 см и 7 см и бедра 8 см и 10 см е завъртан около голямата си основа. Намерете повърхнината на полученото тяло.
- 6** Правоъгълен трапец с основи 14 см и 10 см и бедра 3 см и 5 см е завъртан около малката си основа. Намерете повърхнината на полученото тяло.

Опит

Разполагаме с два съда с форма на прав кръгов конус без основа и прав кръгов цилиндър без горна основа.



- Двета съда имат равни височини h .
- Двета съда имат равни радиуси r на основите, т.e. основите им са кръгове с равни лица $B = \pi \cdot r^2$.

Напълваме тялото с форма на конус с ориз (захар, течност, ...) и пресипваме в тялото с форма на цилиндър. Установяваме, че цилиндърът се напълва след третото пресипване, т.e.

$$V_{цил.} = 3 \cdot V_{конуса} \text{ или } V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot V_{цил.}$$

За обема на конуса получихме

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \text{ или } V_k = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Опитно намерихме, че



Обемът на всеки конус се намира по формулата

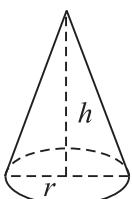
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \text{ или } V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

където $B = \pi \cdot r^2$ е лицето на основата, а h е височината на конуса.



Формулата за обем на конус $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ е същата като формулата за обем на пирамида.

ЗАДАЧА 1 Намерете обема на прав кръгов конус с радиус $r = 5$ см и височина $h = 9$ см.

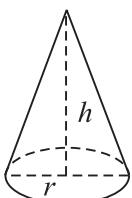


Решение:

$$\begin{aligned} 1. \quad B &= \pi \cdot r^2 \\ &= \pi \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 25\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad V &= \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 9 \\ &= 75\pi \text{ см}^3 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 Намерете височината на конус с радиус 9 см, ако обемът на конуса е $540\pi \text{ см}^3$.

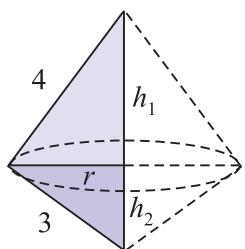
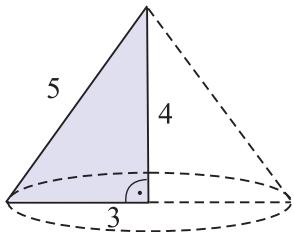


Решение:

$$\begin{aligned} 1. \quad B &= \pi \cdot r^2 \\ &= \pi \cdot 9 \cdot 9 \\ &= 81\pi \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad V &= \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \\ 540\pi &= \frac{1}{3} \cdot 81\pi \cdot h \\ h &= \frac{540\pi}{27\pi} \\ h &= 20 \text{ см} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3 Правоъгълен триъгълник с катети 3 см и 4 см има хипотенуза 5 см. Намерете обема и повърхнината на тялото, получено при завъртане на триъгълника около: а) по-големия катет; б) хипотенузата.



Решение:

- а) Полученото тяло е конус с $r = 3 \text{ см}$, $h = 4 \text{ см}$, $l = 5 \text{ см}$.

$$\begin{aligned} 1. \quad S_t &= \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r^2 & 2. \quad V_t &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \\ S_t &= \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3^2 & V_t &= \frac{\pi \cdot 9 \cdot 4}{3} \\ S_t &= 24\pi \text{ см}^2 & V_t &= 12\pi \text{ см}^3 \end{aligned}$$

- б) Полученото тяло е съставено от два конуса с обща основа:
конус 1 има $l_1 = 4$, h_1 , r ;
конус 2 има $l_2 = 3$, h_2 , r , като
 $h_1 + h_2 = 5$, а r е височината към хипотенузата в правоъгълния триъгълник.

Използваме формулите за лице на правоъгълен триъгълник.

От $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ получаваме $\frac{5 \cdot r}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}$ или $r = 2,4 \text{ см}$.

1. Повърхнината на тялото е сбор от околните повърхнини на двета конуса:

$$\begin{aligned} S_t &= \pi \cdot r \cdot l_1 + \pi \cdot r \cdot l_2 \\ S_t &= \pi \cdot r \cdot (l_1 + l_2) \\ S_t &= \pi \cdot 2,4 \cdot 7 \\ S_t &= 16,8\pi \text{ см}^2. \end{aligned}$$

2. Обемът на тялото е сбор от обемите на двета конуса:

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_1}{3} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_2}{3} \\ V_t &= \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot (h_1 + h_2) \\ V_t &= \frac{\pi \cdot 2,4 \cdot 2,4}{3} \cdot 5 \\ V_t &= 9,6\pi \text{ см}^3. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- 1 Намерете обема на конус с диаметър на основата 12 см и височина 100 mm.

- 2 Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете за конус с радиус r , лице на основата B , височина h и обем V .

r (cm)	B (cm^2)	h (cm)	V (cm^3)
3	?	5	?
5	?	?	75π
?	36π	?	96π
?	49π	12	?

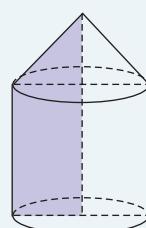
- 3 Вместимостта на съд с форма на конус е 4710 L. Намерете височината

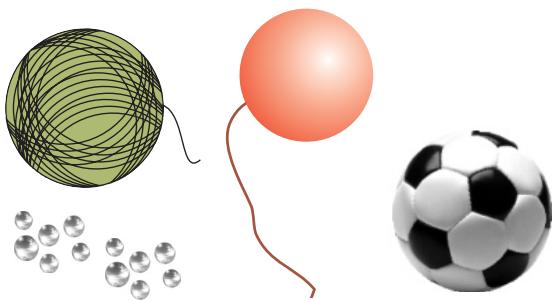
на съда, ако радиусът на конуса е 1,5 m.

- 4 Даден е правоъгълен триъгълник с катети $a = 6 \text{ см}$, $b = 8 \text{ см}$ и хипотенуза $c = 10 \text{ см}$. Намерете S , S_1 и V на конус, който се получава при завъртане на триъгълника около:

- а) катета a ; б) катета b .

- 5 Правоъгълен трапец с основи 10 см и 6 см и бедра 3 см и 5 см е завъртан около голямата си основа. Намерете повърхнината и обема на полученото тяло.





Топката, балонът и другите предмети от фигурата имат формата на геометричното тяло **кулбо**. Кулбото е ограничено от повърхнина, която се нарича **кулбовидна (сферична) повърхнина** или **сфера**.

Сфера може да се получи при пълно завъртане на полукръжност (окръжност) с център O и радиус r около диаметър.

Точката O е **център** и на сферата, защото всички точки от нея са на равни разстояния r от точката O .

Отсечката, която съединява точка от сферата с центъра O , се нарича **радиус** на сферата.

$$OA = OA_1 = OA_2 = OM = OM_1 = \dots = r$$

Отсечката, която съединява две точки от сферата и минава през центъра O , се нарича **диаметър** на сферата.

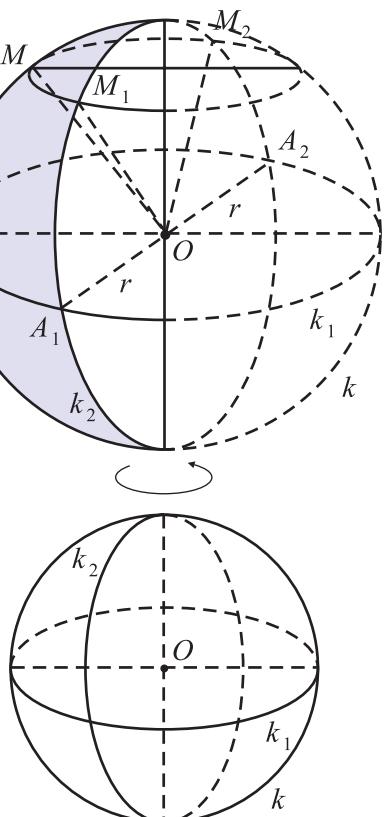
$$AA_3 = A_1A_2 = 2r = d$$

Окръжност с център O и диаметър $2r$ се нарича **голяма окръжност** на сферата. Тя разделя сферата на **две полусфери**.

Сферата има: **центрър** O ,
радиус r ,
диаметър $d = 2r$,
голяма окръжност $k, k_1, k_2 \dots$

Модел на сфера получаваме чрез три големи окръжности k, k_1 и k_2 , като чертаем:

- едната – $k(O; r)$, в истинската ѝ големина;
- другите две – окръжностите k_1 и k_2 , като елипси, които минават през краищата на два взаимноперпендикулярни диаметъра.



Както и да разрежем сферата, не можем да я разгънем така, че да се получи равнинна фигура, т.е. сферата няма развивка. Формулата*, по която се намира лицето на сфера, е $S = 4\pi \cdot r^2$.



Лицето на сфера се намира по формулата

$$S = 4\pi \cdot r^2,$$

където r е радиусът на сферата.

* Формулата се извежда в следващите класове.

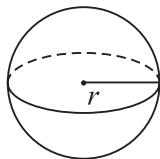
Сферата е повърхнина. Затова под “лице на сфера” разбираме лицето на повърхнината, която е сфера.



Лицето на кръг, заграден от голяма окръжност, е $\pi \cdot r^2$. Тогава лицето на сферата е 4 пъти по-голямо от лицето на този кръг, т.е. $S = 4 \pi \cdot r^2$.

ЗАДАЧА 1 Намерете лицето на сфера с радиус: а) $r = 10$ см; б) $r = 2$ см.

Решение: $S = 4 \pi \cdot r^2$

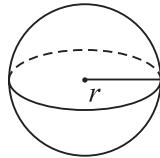


a) $S = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^2$	б) $S = 4 \cdot 3,14 \cdot 2^2$
$S = 4 \cdot 3,14 \cdot 100$	$S = 4 \cdot 3,14 \cdot 4$
$S = 4 \cdot 314$	$S = 16 \cdot 3,14$
$S = 1256 \text{ см}^2$	$S = 50,24 \text{ см}^2$

ЗАДАЧА 2 Намерете радиуса на сфера, ако лицето ѝ е:

а) $S = 324 \pi \text{ см}^2$; б) $S = 452,16 \text{ м}^2$.

Решение: $S = 4 \pi \cdot r^2$

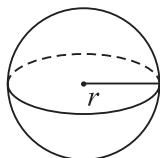


a) $324 \pi = 4 \pi \cdot r^2$	б) $452,16 = 4 \cdot 3,14 \cdot r^2$
$4\pi \cdot r^2 = 324 \pi$	$4 \cdot 3,14 \cdot r^2 = 452,16$
$r^2 = \frac{324\pi}{4\pi}$	$r^2 = \frac{452,16}{4 \cdot 3,14}$
$r^2 = 81$	$r^2 = 36$

От $r^2 = 9^2$ съобразяваме, че $r = 9$ см. От $r^2 = 6^2$ съобразяваме, че $r = 6$ см.

ЗАДАЧА 3 Лицето на сфера е $4069,44 \text{ см}^2$. Намерете нейния радиус.

Решение: $S = 4 \pi \cdot r^2$



$$\begin{aligned} 4069,44 &= 4 \cdot 3,14 \cdot r^2 \\ 4 \cdot 3,14 \cdot r^2 &= 4069,44 \\ r^2 &= \frac{4069,44}{4 \cdot 3,14} \\ r^2 &= 324 \end{aligned}$$

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

За да намерим r , разлагаме 324 на прости множители \rightarrow

$$324 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) = 18 \cdot 18 = 18^2.$$

От $r^2 = 18^2$ съобразяваме, че $r = 18$ см.

ЗАДАЧИ

1 Намерете лицето на сфера с радиус:

- а) $r = 3$ см; б) $r = 12$ см;
в) $r = 1,5$ см; г) $r = 2,5$ см.

2 Намерете радиуса на сфера, ако лицето ѝ е:

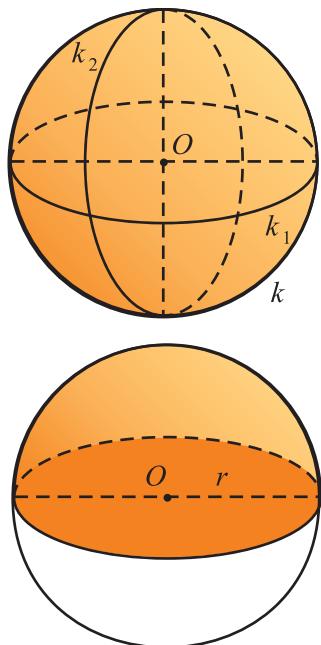
- а) $S = 196\pi \text{ см}^2$; б) $S = 256\pi \text{ м}^2$;
в) $S = 100\pi \text{ дм}^2$; г) $S = 100\pi \text{ м}^2$.

3 Намерете радиуса на сфера, ако лицето ѝ е:

- а) $S = 50,24 \text{ м}^2$; б) $S = 113,04 \text{ см}^2$.

4 Като използвате разлагането на числа на прости множители, намерете радиуса на сфера, ако лицето ѝ е:

- а) $S = 17424\pi \text{ см}^2$; б) $S = 2704\pi \text{ м}^2$;
в) $S = 1764\pi \text{ дм}^2$; г) $S = 1296\pi \text{ м}^2$.



Кълбото е тяло, повърхнината на което е сфера. Кълбото и ограничаващата го сфера имат общ център и един и същ радиус.

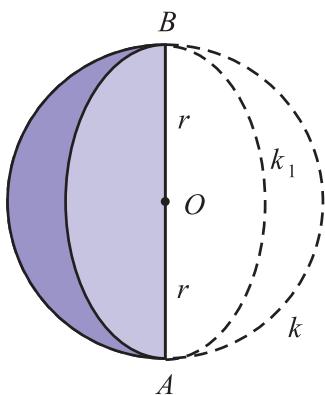
Кълбото има:

център O ,
радиус r ,
диаметър $d = 2r$,
големи кръгове k , k_1 , k_2 .

Модел на кълбо чертаем така, както чертаем модел на сфера.

Една голяма окръжност загражда кръг, който се нарича **голям кръг на кълбото** (сечение на кълбото, което минава през центъра O).

Всеки голям кръг разделя кълбото на **две полукълба**.



Кълбото може да се получи при пълно завъртане на полукръг (кръг) с център O и радиус r около диаметър. При това завъртане съответната полуокръжност (окръжност) описва кълбовидна повърхнина (сфера) със същия център и същия радиус.

Повърхнината на кълбо с радиус r се намира по формулата $S = 4 \pi \cdot r^2$.



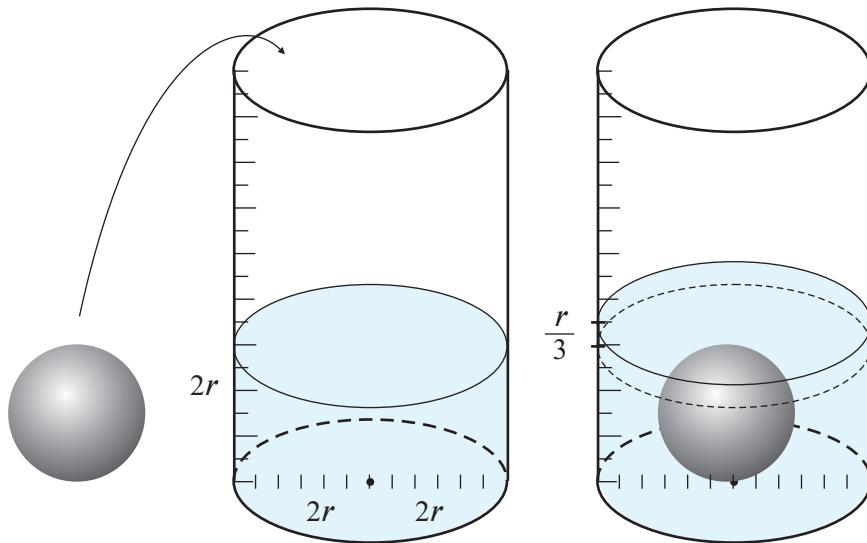
Лицето на повърхнината на кълбото е лицето на сферата, която загражда кълбото, т.e.

$$S = S_{\text{кълбо}} = S_{\text{сфера}} = 4\pi \cdot r^2.$$

За да намерим **обема на кълбото**, правим следния опит:

Опит

Разполагаме с метално кълбо с радиус r . За да намерим обема на това кълбо, ще го потопим в съд с вода. За удобство избираме съд с цилиндрична форма (мензура с деления) с **радиус на основата $2 \cdot r$** и **височина** например $6 \cdot r$.



В съда наливаме вода до делението, което отговаря на $2 \cdot r$. Потапяме кълбото и отчитаме по деленията, че нивото на водата в цилиндъра се покачва с $\frac{r}{3}$. Тогава обемът на кълбото е равен на обема на изместената течност, т.е. на цилиндър с радиус $2 \cdot r$ и височина $\frac{r}{3}$:

$$V_{\text{кулбо}} = V_{\text{цилиндър}}, \text{ където}$$

$$V_{\text{цилиндър}} = B \cdot h = \pi \cdot (2 \cdot r)^2 \cdot \frac{r}{3} = \pi \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3.$$

Този опит ни дава основание да приемем, че $V_{\text{кулбо}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$.



Обемът на кълбо се намира по формулата $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$, където r е радиусът на кълбото.

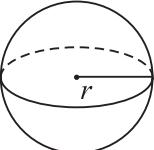
ЗАДАЧА 1

Намерете обема на кълбо, ако:

$$\text{а)} \ r = 3 \text{ см}; \quad \text{б)} \ d = 8 \text{ см}.$$

Решение:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$



 $a) \ V = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3$
 $V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^3$
 $V = 36 \cdot 3,14$
 $V = 113,04 \text{ см}^3$

$$\text{б)} \ d = 2 \cdot r = 8, \ r = 4 \text{ см}$$

$V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3$
 $V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 64}{3}$
 $V = \frac{803,84}{3}$
 $V \approx 268 \text{ см}^3$

ЗАДАЧА 2

Намерете обема на кълбо, което има повърхнина $36\pi \text{ см}^2$.

Решение:

$$1. \ S = 4\pi \cdot r^2$$

$$36\pi = 4\pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{36\pi}{4\pi}$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3 \text{ см}$$

$$2. \ V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 27$$

$$V = 36\pi \text{ см}^3$$

ЗАДАЧИ

1 Намерете обема на кълбо със:

$$\text{а)} \ r = 6 \text{ см}; \quad \text{б)} \ d = 10 \text{ см}.$$

2 Намерете обема на кълбо с повърхнина:

$$\text{а)} \ 324\pi \text{ см}^2; \quad \text{б)} \ 576\pi \text{ см}^2.$$

3 Полукръг с диаметър d се върти около диаметъра си. Намерете повърхнината и обема на полученото тяло, ако:

$$\text{а)} \ d = 12 \text{ см}; \quad \text{б)} \ d = 18 \text{ см}.$$

ПОВЪРХНИНА И ОБЕМ НА КЪЛБО.

УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Намерете радиуса на кълбото, ако обемът му е:

a) $V = \frac{32}{3}\pi \text{ см}^3$;

b) $V = 288\pi \text{ см}^3$.

Решение:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

a) $\frac{32}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

b) $288\pi = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

$$r^3 = \frac{288\pi}{\frac{4}{3}\pi}$$

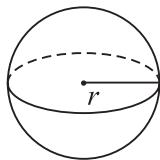
$$r^3 = 216$$

Като разложим 216 на прости множители, получаваме

$$\begin{aligned} 216 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \\ &= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \end{aligned}$$

$$216 = 6^3$$

От $r^3 = 6^3$ намираме, че $r = 6 \text{ см}$.



$$r^3 = \frac{\frac{32}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi}$$

$$r^3 = \frac{32}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$r^3 = 8$$

$$r^3 = 2^3$$

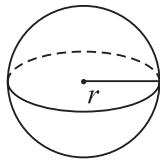
От $r^3 = 2^3$

намираме, че

$$r = 2 \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 2 Повърхнината на кълбо е $1764\pi \text{ см}^2$. Намерете обема му.

Решение:



1. $S = 4\pi \cdot r^2$

$$4\pi \cdot r^2 = 1764\pi$$

$$r^2 = \frac{1764\pi}{4\pi}$$

$$r^2 = 441$$

$$441 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$441 = (3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 7)$$

$$441 = 21 \cdot 21 = 21^2$$

От $r^2 = 21^2$ намираме, че

$$r = 21 \text{ см.}$$

2. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

$$\begin{array}{r|l} 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ \hline 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 21^3$$

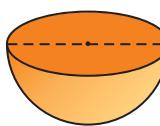
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{7}{21} \cdot 21^2$$

$$V = 28\pi \cdot 441$$

$$V = 12348\pi \text{ см}^3$$

ЗАДАЧА 3 Обемът на полукълбо е $18\pi \text{ см}^3$. Намерете повърхнината на полукълбото.

Решение:



1. $V_{\text{полукълбо}} = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$

$$\frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = 18\pi$$

$$r^3 = 18\pi : \frac{2}{3}\pi$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3 \text{ см}$$

2. $S_{\text{полукълбо}} = 2\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2$

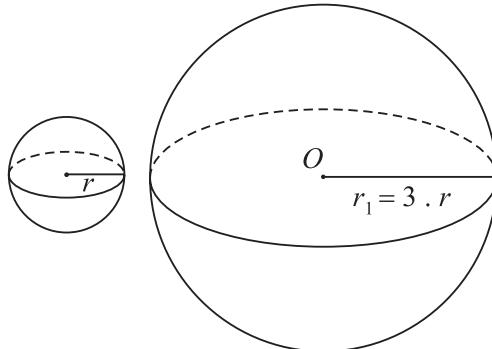
$$S_{\text{полукълбо}} = 3\pi \cdot r^2$$

$$S_{\text{полукълбо}} = 3\pi \cdot 3^2$$

$$S_{\text{полукълбо}} = 27\pi \text{ см}^2$$

ЗАДАЧА 4 Повърхнината на сфера с радиус r е 15 cm^2 . Намерете повърхнината на сфера с радиус $r_1 = 3r$.

Решение:

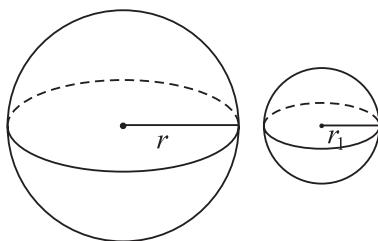


$$S = 4\pi \cdot r^2 = 15 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 4\pi \cdot r_1^2 = \\ &= 4\pi \cdot (3 \cdot r)^2 = \\ &= 4\pi \cdot 9 \cdot r^2 = \\ &= 9 \cdot 4\pi \cdot r^2 \\ S_1 &= 9 \cdot S = \\ &= 9 \cdot 15 = \\ &= 135 \\ S_1 &= 135 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5 Обемът на кълбо с радиус r е 32 cm^3 . Намерете обема на кълбо с радиус $r_1 = \frac{r}{2}$.

Решение:



$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 32 \text{ cm}^3 \\ V_1 &= \frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 = \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r^3}{8} = \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1}{8} \\ V_1 &= V \cdot \frac{1}{8} = \\ &= 32 \cdot \frac{1}{8} \\ V_1 &= 4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



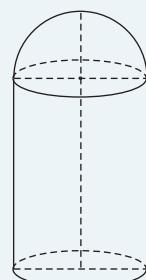
Ако увеличим радиуса на сфера 3 пъти, повърхнината ѝ се увеличава 9 пъти ($= 3^2$) (Задача 4). Ако намалим радиуса на кълбо 2 пъти, обемът му се намалява 8 пъти (2^3) (Задача 5).

ЗАДАЧИ

- 1 Намерете радиуса на кълбо, ако обемът му е $113,04 \text{ cm}^3$.
- 2 Намерете колко тежи кълбо с радиус 30 cm , ако специфичното тегло на материала, от който е направено кълбото, е $2,3 \text{ g/cm}^3$.
- 3 Как ще се измени обемът на кълбо, ако радиусът му:
 - а) се увеличи 3 пъти;
 - б) се намали 2 пъти?
- 4 Намерете лицето на повърхнината на кълбо, ако обемът му е $4500\pi \text{ cm}^3$.

- 5 Радиусът на кълбо е 6 cm . Намерете с колко ще се увеличи S и V на кълбото, ако радиусът му се увеличи с 3 cm .

- 6 Тяло е образувано от цилиндър и полукулбо с обща основа. Ако радиусът на полукълбото е 3 cm , а височината на цилиндъра е 10 cm , намерете повърхнината и обема на тялото.



ЗАДАЧА 1 От 4 метални кълба с радиус 3 см е направен чрез претопяване цилиндър с радиус 4 см. Намерете височината на цилиндъра.

Решение:



$$4 \cdot V_{\text{кулбо}} = V_{\text{цилиндър}}$$

$$4 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = \pi \cdot 4^2 \cdot h$$

$$4^2 \cdot 9 \pi = \pi \cdot 4^2 \cdot h$$

$$h = \frac{4^2 \cdot 9 \pi}{\pi \cdot 4^2}$$

$$h = 9 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 2 Чаша за вода има форма на прав кръгов цилиндър с диаметър на основата 7 см и височина 87 mm. Колко пълни чаши вода са необходими за отмерването на един литър?



Решение: $d = 2 \cdot r, \quad r = 3,5 \text{ см}, \quad h = 87 \text{ mm} = 8,7 \text{ см}$

1. $B = \pi \cdot r^2$

$$B = \pi \cdot 3,5^2$$

$$B = 3,14 \cdot 12,25$$

$$B = 38,465 \text{ см}^2$$

2. $V = B \cdot h$

$$V = 38,465 \cdot 8,7$$

$$V = 334,6455$$

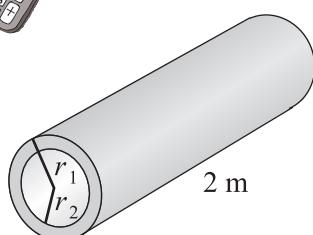
$$V \approx 334,6 \text{ см}^3$$

3. Превръщаме 1 L вода в $\text{cm}^3 \rightarrow 1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

Тогава $1000 : 334,6 \approx 2,9886 \approx 3$.

1 литър се отмерва с 3 чаши.

ЗАДАЧА 3 Цилиндрична чугунена тръба има дължина 2 m, вътрешен диаметър 10 см и външен диаметър 14 см. Определете масата (теглото) на тръбата, ако знаете, че плътността на чугуна е $7,3 \text{ g/cm}^3$.



Решение:

За да намерим обема на тръбата, от обема на външния цилиндър изваждаме обема на вътрешния цилиндър.

$$r_1 = \frac{14}{2} = 7 \text{ см}, \quad r_2 = \frac{10}{2} = 5 \text{ см}, \quad h = 2 \text{ m} = 200 \text{ см}$$

1. $V_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot h$

$$V_1 = \pi \cdot 7^2 \cdot 200$$

$$V_1 = 200 \cdot 49 \pi \text{ см}^3$$

2. $V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h$

$$V_2 = \pi \cdot 5^2 \cdot 200$$

$$V_2 = 200 \cdot 25 \pi \text{ см}^3$$

3. $V_1 - V_2 = 200 \cdot 49 \pi - 200 \cdot 25 \pi$

$$V_1 - V_2 = 200 \pi \cdot (49 - 25)$$

$$V_1 - V_2 = 4800 \pi$$

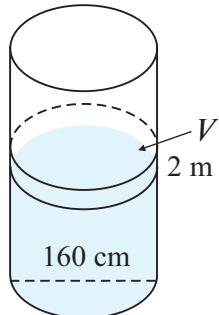
$$V_1 - V_2 = 15072 \text{ см}^3$$

4. $15072 \cdot 7,3 = 110025,6 \text{ г} \approx 110 \text{ kg}$

Тръбата тежи 110 kg.

ЗАДАЧА 4 Колко литра вода се изпомпват от кладенец с диаметър 160 см, ако нивото на водата се понижава с 2 м?

Решение: $r = \frac{160}{2} = 80 \text{ см} = 8 \text{ dm}$, $h = 2 \text{ м} = 20 \text{ dm}$



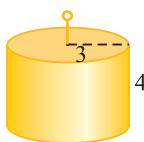
1. $B = \pi \cdot r^2$
 $B = \pi \cdot 8^2$
 $B = 64\pi \text{ dm}^2$

2. $V = B \cdot h$
 $V = 64\pi \cdot 20$
 $V = 1280\pi$
 $V = 4019,2 \text{ dm}^3$
 $V = 4019,2 \text{ литра}$

От кладенеца се изпомпват 4019,2 литра вода.

ЗАДАЧА 5 Баща подарил на трите си деца златни бижута с форма на цилиндър, кълбо и конус (размерите в милиметри са дадени на чертежа). Сравнете подаръците по обем.

Решение:



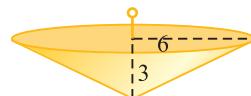
$$V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 4$$

$$V_1 = 36\pi \text{ mm}^3$$



$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3$$

$$V_2 = 36\pi \text{ mm}^3$$



$$V_3 = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 3}{3}$$

$$V_3 = 36\pi \text{ mm}^3$$

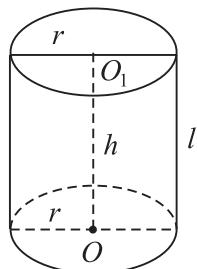
Подаръците и на трите деца са с равни обеми.

ЗАДАЧИ

- 1** Намерете колко тежи кълбо, ако диаметърът му е 20 см, а 1 cm^3 от материала, от който е направено кълбото, тежи 2,4 г.
- 2** Кутия за кафе има форма на прав кръгов цилиндър с диаметър на основата 10 см и височина 13 см. Намерете:
 - а) вместимостта на една такава кутия;
 - б) колко квадратни метра материал са необходими за направата на 1000 такива кутии, като се знае, че капакът се изработва от друг материал.
- 3** Колко литра вода има в кладенец с диаметър 140 см и дълбочина 6 м, ако водата заема $\frac{2}{3}$ от кладенеца?
- 4** Цилиндрична чугунена тръба с дължина 3 м има външен диаметър 16 см и вътрешен – 12 см. Определете масата на тръбата, ако плътността ѝ е $7,3 \text{ g/cm}^3$.
- 5** Бойлер има цилиндрична форма с диаметър на основата 32 см и вместимост 80 литра. Намерете дължината на бойлера.
- 6** От медно парче с форма на цилиндър е изтеглен проводник. Медното парче има дължина 2,5 м и диаметър 2,5 см, а изтегленият проводник е с диаметър 2,5 mm. Намерете дължината на проводника.

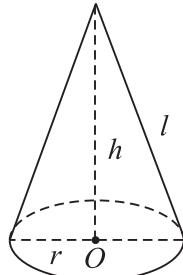
ЗАПОМНЕТЕ!

Прав кръгов цилиндър



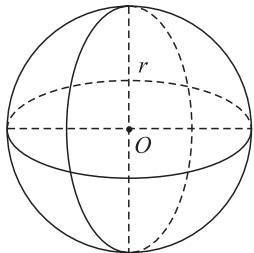
l – образуваща
 $l = h$
 $S = P \cdot h = 2\pi \cdot r \cdot h$
 $S_1 = S + 2 \cdot B, \quad B = \pi \cdot r^2$
 $V = B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Прав кръгов конус



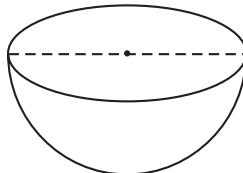
l – образуваща
 $l > h$
 $S = \frac{P \cdot l}{2} = \pi \cdot r \cdot l$
 $S_1 = S + B, \quad B = \pi \cdot r^2$
 $V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

Кълбо, сфера



$S = 4 \pi \cdot r^2$
 $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

Полукълбо



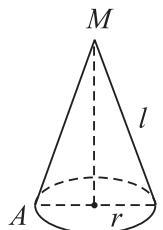
$S = \frac{1}{2} S_{\text{кулбо}} + \pi \cdot r^2$
 $V = \frac{1}{2} V_{\text{кулбо}}$



Формулите за околната повърхнина на конус и цилиндър са открити от Архимед (287 – 212 г. пр.н.е.). Формулите за лице на сфера и обем на кълбо са изведени от Архимед в неговото произведение “За кълбото и цилиндъра”.

ЗАДАЧА 1 За прав кръгов конус знаем, че $r = 60\%$ от l и периметърът на осното му сечение е 64 см. Намерете S и S_1 на конуса.

Решение:



1. $r = 60\% \cdot l$
 $r = 0,6 \cdot l$

2. $P_{\triangle ABM} = 2 \cdot r + 2 \cdot l$
 $64 = 2 \cdot 0,6 \cdot l + 2 \cdot l$
 $3,2 \cdot l = 64$
 $l = 20 \text{ cm}$

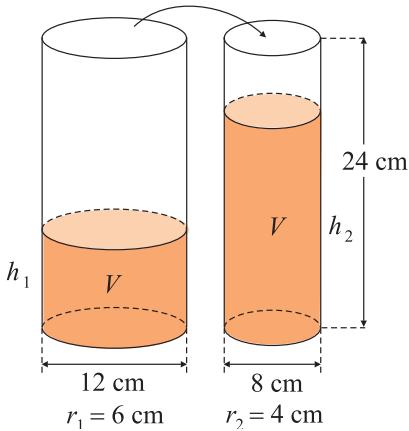
3. $r = 0,6 \cdot 20$
 $r = 12 \text{ cm}$

4. $S = \pi \cdot r \cdot l$
 $S = \pi \cdot 12 \cdot 20$
 $S = 240 \pi \text{ cm}^2$

5. $B = \pi \cdot r^2$
 $B = \pi \cdot 12^2$
 $B = 144 \pi \text{ cm}^2$

6. $S_1 = S + B$
 $S_1 = 240 \pi + 144 \pi$
 $S_1 = 384 \pi \text{ cm}^2$

ЗАДАЧА 2 Разполагаме с два цилиндрични съда с равни височини $h = 24$ см и различни диаметри на основите $d_1 = 12$ см и $d_2 = 8$ см. В първия съд има сироп, който заема $\frac{1}{3}$ част от вместимостта му. Ако прелеем сиропа от първия съд във втория, до каква височина на съда ще достигне той?



Решение:

Обемът на сиропа в I съд е:

$$V = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 \rightarrow h_1 = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8 \text{ см}$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 36 \cdot 8\pi$$

$$V = 36 \cdot 8\pi \text{ см}^3.$$

Обемът на сиропа във втория съд също е

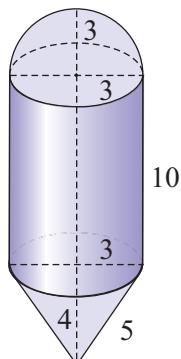
$$V(h_2 = ?): V = \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2 = \pi \cdot 4^2 \cdot h_2$$

$$V = 16\pi \cdot h_2 \text{ см}^3.$$

Тогава $36 \cdot 8\pi = 16\pi \cdot h_2$

$$h_2 = \frac{36 \cdot 8\pi}{16\pi} = 18, \quad h_2 = 18 \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 3 Намерете S и V на тялото, показано на чертежа, състоящо се от цилиндър, конус и полукулбо (измеренията са в сантиметри).



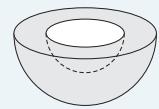
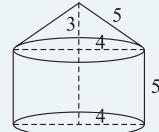
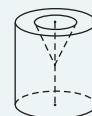
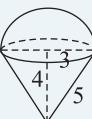
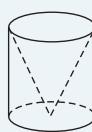
Решение:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r \cdot l = \\ &= 2\pi \cdot 9 + 2\pi \cdot 3 \cdot 10 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = \\ &= 18\pi + 60\pi + 15\pi = 93\pi, \quad S = 93\pi \text{ см}^2 \\ V &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_1}{3} = \\ &= \frac{2}{3}\pi \cdot 27 + \pi \cdot 9 \cdot 10 + \frac{\pi \cdot 9 \cdot 4}{3} = \\ &= 18\pi + 90\pi + 12\pi = 120\pi, \quad V = 120\pi \text{ см}^3 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- 1 От цилиндър с обем 45 dm^3 е изрязан конус, както е показано на чертежа. Намерете обема на изрязаната част.
- 2 Тяло е образувано от конус и полукулбо с обща основа. По данните на чертежа (в см) намерете повърхнината и обема на тялото.
- 3 От цилиндър с обем 72 cm^3 е изрязан конус, както е показано на чертежа. Ако радиусът и височината на конуса са съответно $\frac{1}{2}$ от радиуса и от височината на цилиндъра, намерете обема на конуса.

- 4 Намерете S и V на тялото, показано на чертежа, състоящо се от цилиндър и конус (измеренията са в сантиметри).
- 5 Намерете повърхнината на тялото, показано на чертежа – полукулбо с радиус 12 см , в което е издълбано полукулбо с радиус 6 см .
- 6 Кълбо има радиус 3 см . С колко ще се увеличат повърхнината и обемът на кълбото, ако радиусът му се увеличи с 6 см ?



ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА”

1. Околната повърхнина S на прав кръгов цилиндър с диаметър $d = 4$ см и $h = 5$ см в квадратни сантиметри е:
 - A) 10π ;
 - Б) 20π ;
 - В) 40π ;
 - Г) 52π .
2. Повърхнината на конус с диаметър $d = 8$ см и образуваща $0,5$ dm в квадратни сантиметри е:
 - A) 20π ;
 - Б) 36π ;
 - В) 40π ;
 - Г) 52π .
3. Лицето на сфера с диаметър 6 см в квадратни сантиметри е:
 - A) 36π ;
 - Б) 56π ;
 - В) 72π ;
 - Г) 144π .
4. Околната повърхнина на конус с образуваща 13 см и височина 12 см е 65π см². Обемът V на конуса в кубически сантиметри е:
 - A) 60π ;
 - Б) 100π ;
 - В) 120π ;
 - Г) 300π .
5. Ако увеличим радиуса на сфера 2 пъти, повърхнината ѝ се увеличава:
 - А) 2 пъти;
 - Б) 3 пъти;
 - В) 4 пъти;
 - Г) 8 пъти.
6. Обемът V на цилиндър с $h = 5$ см и $S = 30\pi$ см² в кубически сантиметри е:
 - А) 15π ;
 - Б) 30π ;
 - В) 39π ;
 - Г) 45π .
7. Прав кръгов конус с височина 24 см и образуваща 26 см има обем 800π см³. Околната повърхнина на конуса в квадратни сантиметри е:
 - А) 130π ;
 - Б) 160π ;
 - В) 234π ;
 - Г) 260π .
8. Правоъгълник с по-малка страна 4 см е завъртян около по-голямата си страна. Ако повърхнината на полученото тяло е 80π см², намерете:
 - а) периметъра на правоъгълника в сантиметри;
 - б) обема на полученото тяло в кубически сантиметри.
9. Обемът на тялото, показано на чертежа, е 250π см³. По данните на чертежа намерете:

The diagram shows a cylinder standing vertically. A cone is cut out of the top part of the cylinder. The cylinder's height is labeled as 12 cm. The diameter of the cylinder's base is labeled as 6 cm. The cone has the same base diameter and height as the cylinder.

 - а) диаметъра на цилиндъра в сантиметри;
 - б) обема на цилиндъра в кубически сантиметри;
 - в) обема на конуса в кубически сантиметри.
10. Тяло е образувано от конус и полукълбо с обща основа. По данните на чертежа (в см) намерете повърхността и обема на тялото.

The diagram shows a composite solid. At the bottom is a cone with a radius of 5 cm and a height of 12 cm. Above the cone is a hemisphere with a radius of 5 cm, sharing the same circular base. The total height of the solid is 13 cm.

* Разбираме прав кръгов цилиндър, прав кръгов конус.

ТЕМА 2

РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

(Урок № 41 – Урок № 67)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

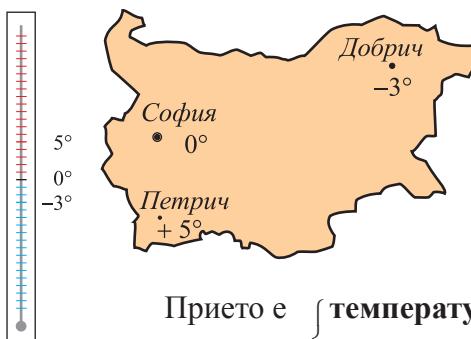
- рационални числа;
- абсолютна стойност;
- действия с рационални числа;
- декартова координатна система.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да сравняват и изобразяват рационални числа върху числова ос;
- да събират, изваждат, умножават и делят рационални числа;
- да пресмятат числови изрази в множеството на рационалните числа;
- да построяват симетрични точки на дадена точка спрямо началото и осите на координатната система;
- да разчитат и интерпретират реални модели на декартова координатна система.

ПОЛОЖИТЕЛНИ И ОТРИЦАТЕЛНИ ЧИСЛА. МНОЖЕСТВО НА РАЦИОНАЛНИТЕ ЧИСЛА

ПРИМЕР 1

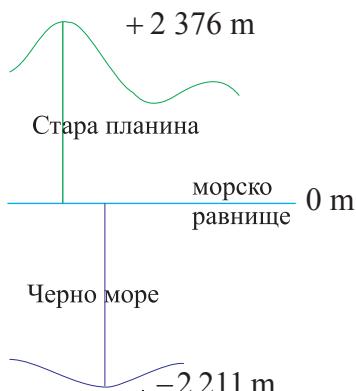


Прието е $\begin{cases} \text{температурата над } 0^\circ (5^\circ) \text{ да се означава с } +5^\circ; \\ \text{температурата под } 0^\circ (-3^\circ) \text{ да се означава с } -3^\circ. \end{cases}$

На картата са означени измерените температури на втори януари в 8 часа:

- 0° в София,
- $+5^\circ$ в Петрич,
- -3° в Добрич.

ПРИМЕР 2



Височината на точка от земната повърхност и дълбочината на точка от морското дъно се измерват спрямо морското равнище, т.е. приема се, че височината на морското равнище е 0 m .

Знае се, че връх Ботев има надморска височина $2\ 376\text{ m}$, а най-голямата дълбочина на Черно море е $2\ 211\text{ m}$.

Прието е $\begin{cases} \text{надморската височина} \\ \quad \text{да се означава с } +2\ 376\text{ m}; \\ \text{дълбочината} \quad \text{да се означава с } -2\ 211\text{ m}. \end{cases}$

ПРИМЕР 3

- Иван имал 10 лв. . Купил си сборник по математика за 8 лв. . Останали му 2 лв.

$$10\text{ лв.} - 8\text{ лв.} = 2\text{ лв.}$$

- Ангел има 6 лв. . Иска да си купи сборник по математика за 8 лв. . Какво може да направи Ангел, за да си купи сборника?

$$6\text{ лв.} - 8\text{ лв.} = ?\text{ лв.}$$

Ангел трябва да вземе заем от 2 лв. .

Извод: На Иван $\begin{cases} \text{му останали } 2\text{ лв., т.е.} \\ \text{има наличност от } 2\text{ лв.} \end{cases}$

Ангел $\begin{cases} \text{има недостиг от } 2\text{ лв. и трябва} \\ \text{да направи дълг от } 2\text{ лв.} \end{cases}$

Прието е $\begin{cases} \text{наличност от } 2\text{ лв. да се означава } +2\text{ лв.}; \\ \text{недостиг от } 2\text{ лв. да се означава } -2\text{ лв.} \end{cases}$

ПРИМЕР 4

Ако цената на една стока се повиши с 50 ст., обикновено след тази цена се пише $(+0,50)$ лв., а ако се намали с 50 ст., се пише $(-0,50)$ лв.

Пример 4. показва, че и пред дробните числа можем да поставяме знак “ $-$ ” и тогава получаваме дробни отрицателни числа.

В Примерите 1, 2, 3 и 4 записахме:

- числа, пред които поставихме знак “+”.

Наричаме ги **положителни числа**. Те могат да се записват и без знака “+”, т.е. това са числата, които сме изучавали досега.

Примери: $+2 = 2$; $+5 = 5$; $+2376 = 2376$; $+0,50 = 0,50$.

- числа, пред които поставихме знак “-”.

Наричаме ги **отрицателни числа**.

Примери: -2 ; -3 ; -2211 ; $-0,50$.

- числото 0, което нито е положително, нито е отрицателно число.**



Всички положителни числа (цели и дробни), отрицателни числа (цели и дробни) и числото нула образуват **множеството на рационалните числа**.
Прието е **множеството на рационалните числа да се означава с Q**.

РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

Отрицателни числа (цели и дробни)	Числото 0	Положителни числа (цели и дробни)
	<ul style="list-style-type: none">не е положителноне е отрицателно	



За пръв път отрицателните числа били въведени в Китай от финансия чиновник Чжан Цан. Китайците наречали положителните числа “чжен”, а отрицателните – “фу”. Те използвали тези числа при обучаването на държавни служители за решаване на практически финансови задачи.

Независимо от китайците до правилата за смятане с отрицателни числа е стигнал и великият древногръцки математик Диофант (III в.). Той приемал, че наличност е положително число, а недостиг – отрицателно число.

Древноиндийските математици (VII в.) тълкували отрицателните числа като дълг. В Европа интересът към отрицателните числа възникнал през епохата на Ренесанса. През XVII в. те били признати окончателно от математиците, като за това допринесъл великият математик Леонард Ойлер (1707 – 1783).

ЗАДАЧИ

1 Запишете с рационални числа:

- наличност от 20 лв.,
недостиг от 3 лв.;
- печалба от 100 лв.,
загуба от 50 лв.;
- повишаване на цената с 2,5 лв.,
намаляване на цената с 5,5 лв.;
- 30° над нулата,
 10° под нулата;
- 2 120 m над морското равнище,
1 752 m под морското равнище.

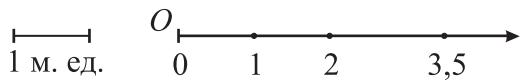
2 Запишете с рационални числа температурата на топене в градуси (по Целзий) на:

- леда $\rightarrow 0^\circ$;
- живака $\rightarrow 39^\circ$ под нулата;
- желязото $\rightarrow 1\,535^\circ$ над нулата.

3 Измерете със стаен термометър и запишете температурата:

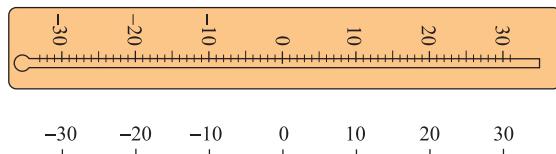
- вън от дома;
- в стаята;
- в хладилника.

ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА РАЦИОНАЛНИТЕ ЧИСЛА ВЪРХУ ЧИСЛОВАТА ОС



На числовия лъч с начало точката O и дадена мерна единица са изобразени числата 0; 1; 2; 3,5.

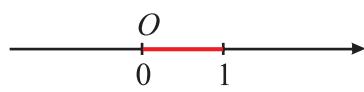
Всяко положително число и числото 0 могат да се изобразят с точка върху числовия лъч.



Идея за изобразяване на отрицателните числа чрез точки върху числов лъчи ни дава стаен термометър, поставен в хоризонтално положение.



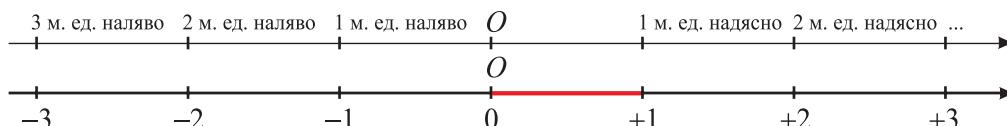
Ако върху права изберем точка O , която да е образ на числото 0, то тя разделя правата на два лъча с начало точката O . Такива два лъча (OM и ON) се наричат **противоположни**.



При избрана мерна единица върху лъча OM знаем да изобразяваме положителните числа. Тогава върху лъча ON е естествено да се изобразяват отрицателните числа. За тази цел се въвежда **понятието числовая ос**.

Върху дадена права избираме числовая ос, като:

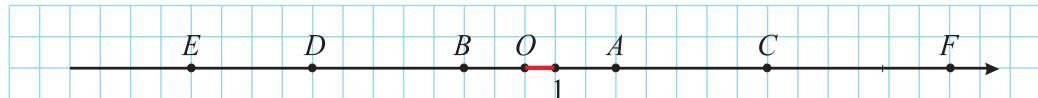
- изберем начална точка O за образ на числото нула (**начало на оста**);
- изберем посоката на единия от двата възможни лъча за **положителна посока**, което отбеляваме със стрелка. Тогава за другия (противоположния) лъч казваме, че има **отрицателна посока**;
- изберем единична отсечка за мерна единица.



На числовата ос са изобразени числата $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.

ЗАДАЧА 1

Върху квадратна мрежа е начертана числовая ос с $1 \text{ м. ед.} = 1 \text{ деление}$ и са изобразени точките:



На кои числа са образи точките A, B, C, D, E, F ?

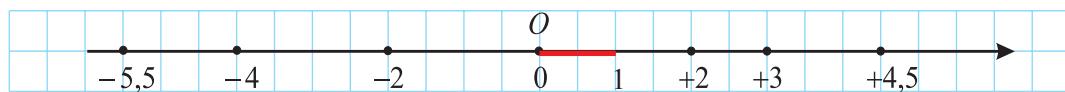
Решение:

Точките A, C, F са върху лъча с положителна посока ("надясно" от точката O). Те са образи на положителните числа: A на $+3$, C на $+8$, F на $+14$.

Точките B, D, E са "наляво" от точката O . Те са образи на отрицателните числа: B на -2 , D на -7 , E на -11 .

ЗАДАЧА 2 Върху квадратна мрежа начертайте числови оси. Изобразете числата $+3; -4; +2; 0; -2; +4,5; -5,5$.

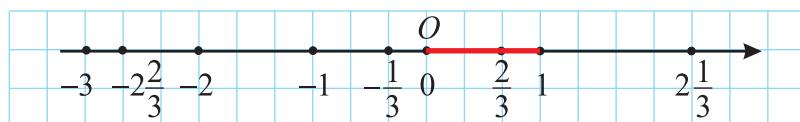
Решение: Избираме 1 м. ед. = 2 деления.



- Образът на числата -2 е на 2 м. ед. "наляво" от точката O .
- Образът на числата -4 е на 4 м. ед. "наляво" от точката O .
- Образът на числата $-5,5$ е на 5,5 м. ед. "наляво" от точката O .

ЗАДАЧА 3 Върху квадратна мрежа начертайте числови оси. При подходящо избрана мерна единица изобразете числата $-2; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}; 1; -1; -3$.

Решение: Избираме 1 м. ед. = 3 деления.



Всяко число можем да изобразим с точка от числовата ос. Мястото на точката се определя от избраното число. Това число се нарича **координата** (определител) на съответната точка, а числовата ос – координатна ос (Ox). Всяко число има образ върху координатната ос Ox .



Пишем $M(3)$.

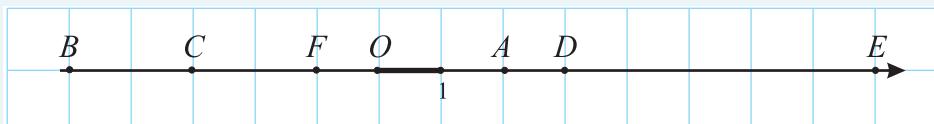
Четем: "Точката M има координата 3".

Пишем $N(-1)$.

Четем: "Точката N има координата -1".

ЗАДАЧИ

1 Върху квадратна мрежа е начертана числови оси с 1 м. ед. = 1 деление и са изобразени точките A, B, C, D, E и F .



На кои числа са образи тези точки?

2 Върху квадратна мрежа начертайте числови оси с 1 м. ед. = 1 деление и изобразете числата $-6; +4; -3; +1; +6$.

3 Върху квадратна мрежа начертайте числови оси с 1 м. ед. = 2 деления. Изобразете числата $-1; 0,5; -5; 3,5; -2,5; 5$.

4 Върху квадратна мрежа начертайте координатна ос Ox (1 м. ед. = 1 деление). Изобразете целите отрицателни числа, които са разположени "надясно" от числото -5 .

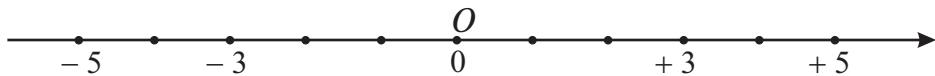
5 Върху квадратна мрежа начертайте координатна ос Ox (1 м. ед. = 1 деление). Изобразете целите едноцифренни числа, които са разположени "наляво" от числото -3 .

43.

ПРОТИВОПОЛОЖНИ ЧИСЛА. АБСОЛЮТНА СТОЙНОСТ (МОДУЛ) НА РАЦИОНАЛНО ЧИСЛО

ЗАДАЧА 1 Върху квадратна мрежа начертайте числова ос с 1 м. ед. = 1 деление.
Изобразете числата $+3$ и -3 ; -5 и $+5$.

Решение:



Забелязваме, че:

- образите на числата $+3$ и -3 се намират **на равни разстояния** (3 м. ед.) от точката O , като числото $+3$ е “надясно” от точката O , -3 е “наляво” от точката O ;
- образите на числата -5 и $+5$ се намират **на равни разстояния** (5 м. ед.) от точката O , като числото -5 е “наляво” от точката O , $+5$ е “надясно” от точката O .



Противоположни числа

Две рационални числа, които се различават само по знаците си, се наричат **противоположни числа**.

Примери: $+3$ и -3 ;

Четем: “На плюс три противоположното
му число е минус три”.

-5 и $+5$.

“На минус пет противоположното
му число е плюс пет”.

На произволно число a противоположното му число е прието да се записва $-a$. От изобразяването на противоположните числа върху числовата ос е ясно, че

$$-(+a) = -a \quad \text{и} \quad -(-a) = +a.$$

Прието е противоположното число на числото 0 да е 0. $-0 = 0$



Цели числа

Естествените числа, техните противоположни числа и нулата се наричат **цели числа**.

Целите числа се означават със \mathbb{Z} .

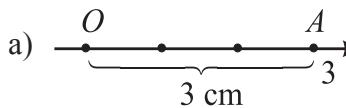
ЗАДАЧА 2 Напишете противоположните числа на всяко от числата $+7$; -9 ; $+0,3$; $-5,1$.

Решение: Противоположното число на:

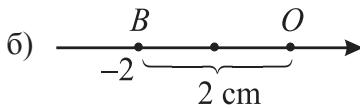
$$(+7) \text{ е } (-7); \quad (+0,3) \text{ е } (-0,3); \quad (-9) \text{ е } (+9); \quad (-5,1) \text{ е } (+5,1).$$

ЗАДАЧА 3 Изобразете върху числовата ос (1 м. ед. = 1 см) всяко от числата:

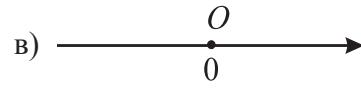
$$\text{а) } 3; \quad \text{б) } -2; \quad \text{в) } 0.$$

Решение:

Точката A е образ на числото 3.



Точката B е образ на числото -2 .



Точката O е образ на числото 0.



Ще припомним, че под “разстояние между две точки” разбираме положително число, което е дължината на отсечката, определена от тези точки.

Забелязваме, че:

- **Разстоянието** от образа A на числото 3 до началото O е 3 см,
т.e. **дължината на отсечката $OA = 3$ см.**
- **Разстоянието** от образа B на числото -2 до точката O е 2 см,
т.e. **дължината на отсечката $OB = 2$ см.**
- **Разстоянието** от образа O на числото 0 до началото O е 0 см,
т.e. **дължината на отсечката $OO = 0$ см.**

За всяко число може да се намери разстоянието от образа му до началото O на избрана числовая ос. Това разстояние е прието да се нарича **абсолютна стойност (модул)** на числото и е **винаги положително число или нула**.

**Абсолютна стойност (модул)**

Абсолютна стойност (модул) на едно число a се нарича разстоянието от началото O на числовата ос до образа на числото a върху същата ос.

Модулът на едно число е винаги положително число или нула.

Пишем $|a|$. Четем “абсолютната стойност на a ” или “модул a ”.

Примери: $|3| = 3$, защото разстоянието $OA = 3$ см (Задача 3-а));
 $|-2| = 2$, защото разстоянието $OB = 2$ см (Задача 3-б));
 $|0| = 0$, защото разстоянието $OO = 0$ см (Задача 3-в)).

ЗАДАЧА 4

Намерете: а) $|5|$ и $|-5|$; б) $|-11|$ и $|11|$; в) $|3,5|$ и $|-3,5|$.

Решение: а) $|5| = 5$ б) $|-11| = 11$ в) $|3,5| = 3,5$
 $|-5| = 5$ $|11| = 11$ $|-3,5| = 3,5$

ЗАДАЧИ

1 Върху квадратна мрежа начертайте числовая ос с 1 м. ед. = 1 деление. Изобразете върху числовата ос числата $-5; 3$ и -7 и противоположните им числа.

2 Намерете:

$$\begin{aligned} \text{а)} & -(-7); -(-10); -(-0,5); \\ & -(-3,7); -\left(-\frac{1}{10}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} & -(+8); -(+100); -(+0,5); \\ & -(+7,3); -\left(+\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

3 Намерете:

$$\begin{aligned} \text{а)} & |7|; |2,9|; \left|\frac{3}{7}\right|; \left|5\frac{2}{9}\right|; \\ \text{б)} & |-8|; |-3,6|; \left|-\frac{2}{9}\right|; \left|-5\frac{1}{3}\right|. \end{aligned}$$

4 Намерете $|x|$, ако $x = -4; -2,5; 0; \frac{2}{3}; 7\frac{1}{7}$.

МОДУЛ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА.

УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Върху числовата ос намерете образите на числата a , за които $|a| = 5$.

Решение: Образите на числата, чийто модул е 5, са две точки A и B от числовата ос, които са на разстояние 5 см от началото O .



Числото a приема стойности -5 и 5 , т.е. има две числа, модулът на които е $5 \rightarrow |-5| = 5$ и $|5| = 5$.

Числата -3 и 3 са противоположни числа, $|-3| = |3| = 3$;
 -5 и 5 са противоположни числа, $|-5| = |5| = 5$.



Свойства на противоположните числа:

- Противоположните числа имат равни модули $|-a| = |+a|$.
- Образите на противоположните числа са на равни разстояния от началото O на числовата ос.
- Противоположното число на числото 0 е 0 .

ЗАДАЧА 2 Изобразете върху числовата ос числата a , за които:

- $|a| = 4$;
- $|a| < 4$ и a са цели положителни числа;
- $|a| < 4$ и a са цели отрицателни числа;
- $|a| < 4$ и a са цели числа.

Решение: Избираме 1 м. ед. = 1 см.



ЗАДАЧА 3 Намерете: а) $|5|$; $|12,3|$; б) $|-5|$; $|-10,7|$; в) $|0|$.

Решение: а) $|5| = 5$ б) $|-5| = 5$ в) $|0| = 0$
 $|12,3| = 12,3$ $|-10,7| = 10,7$

Модулът на

положително число е самото число, $|5| = 5$;

отрицателно число е противоположното му число, $|-5| = 5$;

числото 0 е 0 , $|0| = 0$.

Ако a е положително число, $|a| = a$.

Ако a е отрицателно число, $|a| = -a$.

Ако a е числото нула, $|0| = 0$.

ЗАДАЧА 4 Намерете $-a$, $|a|$ и $|-a|$, ако: а) $a = 15$; б) $a = -19$.

Решение: а) $a = 15 \quad -a = -15 \quad |a| = |15| = 15 \quad |-a| = |-15| = 15$
б) $a = -19 \quad -a = -(-19) = 19 \quad |a| = |-19| = 19 \quad |-a| = |19| = 19$

ЗАДАЧА 5 Пресметнете: а) $|-3| \cdot |-2| - |-5|$; б) $|-4| + |-8| : |2|$.

Решение: а) $|-3| \cdot |-2| - |-5| = 3 \cdot 2 - 5 = 1$
б) $|-4| + |-8| : |2| = 4 + 8 : 2 = 8$

ЗАДАЧА 6 Пресметнете стойността на израза $A = 2 \cdot |x| - |-1|$, ако $x = -1\frac{1}{2}$

Решение: $A = 2 \cdot |x| - |-1|$
За $x = -1\frac{1}{2} \quad A = 2 \cdot \left|-1\frac{1}{2}\right| - |-1| = 2 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$.

ЗАДАЧА 7 За кои числа x е изпълнено: а) $|x| = 7$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -2$.

Решение: а) $x = -7$ и $x = 7$ б) $x = 0$ в) няма такова число



- Има две числа, на които модулът е равен на 7: $|7| = 7$ и $|-7| = 7$.
- Само числото 0 има модул, равен на 0: $|0| = 0$.
- Няма число, на което модулът да е отрицателен.

ЗАДАЧИ

1 Изобразете върху числовата ос числата, чийто модул е 2.

2 Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете.

a	-7	-0,6	0	2,9	$3\frac{1}{9}$	1 002
$-a$?	?	?	?	?	?
$ a $?	?	?	?	?	?
$ -a $?	?	?	?	?	?

3 Пресметнете:

а) $|-7| : \left|-\frac{1}{3}\right| - |-5|$;

б) $|-8| \cdot |-3| - |-4| \cdot |0,2|$;

в) $\left(5 : \left|-\frac{1}{3}\right| + |7|\right) : |-11|$;

г) $\frac{|-7| \cdot |2| - 5}{|-2| + |-1|}$.

4 Ако $x = -3; -5; -2,5; 2\frac{1}{3}$, пресметнете стойността на израза:

а) $A = |x| + 5$; б) $B = 2 \cdot |x| - 3$.

5 Пресметнете стойността на всеки от изразите $A = |x| + |y| - 2$ и $B = |x| \cdot |y| + 3$, ако:

а) $x = 2$, $y = -3$;

б) $x = -4$, $y = -\frac{1}{2}$.

6 Изобразете върху числовата ос числата a , за които:

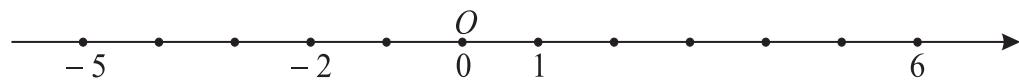
а) $|a| = 3$;

б) $|a| < 3$ и a са цели положителни числа;

в) $|a| < 3$ и a са цели отрицателни числа;

г) $|a| < 3$ и a са цели числа.

На числовата ос са изобразени числата $-5; -2; 0; 1; 6$.



Сравняваме числата:

1 и 6. Казваме, че $1 < 6$,
защото образът на 6 е надясно от образа на 1.

0 и 1. Казваме, че $0 < 1$,
защото образът на 1 е надясно от образа на 0.

-2 и 0 . Казваме, че $-2 < 0$,
защото образът на 0 е надясно от образа на -2 .

-5 и -2 . Казваме, че $-5 < -2$,
защото образът на -2 е надясно от образа на -5 .

-5 и 1 . Казваме, че $-5 < 1$,
защото образът на 1 е надясно от образа на -5 .

$-2 < 0$ означава, че $| 0$ е по-голямо от -2 , т.e. $0 > -2$;
 -2 е по-малко от 0 , т.e. $-2 < 0$.

$-5 < -2$ означава, че $| -2$ е по-голямо от -5 , т.e. $-2 > -5$;
 -5 е по-малко от -2 , т.e. $-5 < -2$.

$-5 < 1$ означава, че $| 1$ е по-голямо от -5 , т.e. $1 > -5$;
 -5 е по-малко от 1 , т.e. $-5 < 1$.



От две различни рационални числа по-голямо е това, чийто образ върху числовата ос се намира “**надясно**” от образа на другото число върху същата числовая ос.



От две различни рационални числа по-малко е това, чийто образ върху числовата ос се намира “**наляво**” от образа на другото число върху същата числовая ос.

По такъв начин получаваме, че:

- **Всички положителни числа** са “**надясно**” от числото 0.
Ако a е **положително число**, записваме $a > 0$.
- **Всички отрицателни числа** са “**наляво**” от числото 0.
Ако a е **отрицателно число**, записваме $a < 0$.
- Всяко **положително** число е **по-голямо** от всяко **отрицателно** число.
 $3 > -9; 2 > -100; 1 > -1000$
- Всяко **отрицателно** число е **по-малко** от всяко **положително** число.
 $-10 < 3; -8 < 5; -100 < 3$

- От две положителни числа по-голямо е това, което има по-голям модул.
- От две отрицателни числа по-голямо е това, което има по-малък модул.
 $-2 > -8$, защото $|-2| < |-8|$, т.e. $2 < 8$.

ЗАДАЧА 1 Сравнете числата:

- а) -100 и 5 ; б) -7 и -2 ; в) 13 и -1 ; г) -5 и 0 .

Решение:

- а) $-100 < 5$ б) $-7 < -2$ в) $13 > -1$ г) $-5 < 0$



За да сравним две числа (Задача 1), е достатъчно да си представим образите им върху числовата ос.

ЗАДАЧА 2

Ако $x \in \{-5; -2; -7; 1,5; 3\frac{1}{3}; -8\}$, намерете за кои стойности на x е вярно:

- а) $x < 2$; б) $x > -4$; в) $-4 < x < 2$.

Решение:

- а) $-5 < 2$ $-2 < 2$ $-7 < 2$ $1,5 < 2$ $-8 < 2$
 $x < 2$ е вярно за $x = -5; -2; -7; 1,5; -8$.
б) $-2 > -4$ $1,5 > -4$ $3\frac{1}{3} > -4$
 $x > -4$ е вярно за $x = -2; 1,5; 3\frac{1}{3}$.
в) $-4 < -2 < 2$ $-4 < 1,5 < 2$
 $-4 < x < 2$ е вярно за $x = -2; 1,5$.



Записът $-4 < x < 2$ показва, че числото x е между числата -4 и 2 .

ЗАДАЧИ

- 1** Върху числова ос изобразете числата $-6; -3; -1; 0; 2; 5$. Кое от числата:
 а) -6 и 2 ; б) -3 и 5 ;
 в) -1 и 0 ; г) -3 и 2 ;
 д) -3 и -1 ; е) -6 и -3
 е по-голямо? Запишете между тях съответния знак.

- 2** На числова ос изобразете числата $-7; 5; -2; 1; 4; -4$. Заменете квадратчетата с верния знак “ $>$ ” или “ $<$ ”:
 а) $-7 \blacksquare 5$; б) $-4 \blacksquare 5$;
 в) $1 \blacksquare -2$; г) $5 \blacksquare -4$;
 д) $1 \blacksquare -7$; е) $-7 \blacksquare -2$.

- 3** Сравнете числата:
 а) -102 и 13 ; б) -21 и 0 ;
 в) $-27,5$ и $-33,3$; г) $-\frac{1}{3}$ и -7 ;
 д) 0 и $-10,5$; е) 18 и -18 .

- 4** Напишете всички цели числа, които са:
 а) положителни и по-малки от $9,2$;
 б) отрицателни и по-големи от $-8,3$;
 в) по-големи от -7 и по-малки от $-3,4$;
 г) по-големи от $-9,1$ и по-малки от $2,3$.

- 5** Ако $x \in \{-6; 3; 1,7; -9; 11\}$, намерете за кои стойности на x е вярно:
 а) $x < 4$; б) $x > -7$; в) $-7 < x < 4$.

- 6** Изобразете на числова ос с подходящо избрана мерна единица числата:

- а) $-\frac{2}{9}; \frac{5}{9}; -\frac{7}{9}; \frac{1}{9}; \frac{8}{9}; -\frac{5}{9}; 1$;
 б) $-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{5}{8}; -\frac{7}{8}; 0; 1$.

Подредете числата по големина, като започнете от най-малкото.

СЪБИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА С ЕДНАКВИ ЗНАЦИ

ЗАДАЧА 1 За празника Иво получил от баба си 5 лв. и от дядо си 10 лв.

Колко лева е получил Иво?

Решение: $5 + 10 = 15$ Иво е получил 15 лв.

$$5 \text{ лв. приход} + 10 \text{ лв. приход} = 15 \text{ лв. приход}$$

или

$$(+5) + (+10) = (+15)$$

Извод: **Сборът на две положителни рационални числа е положително число.**

ЗАДАЧА 2 Иво взел назаем от един приятел 3 лв., а от друг взел 2 лв.

Колко лева дължи Иво?

Решение: $3 + 2 = 5$ Иво дължи 5 лв.

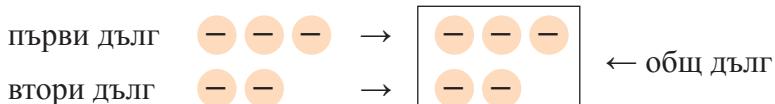
$$3 \text{ лв. дълг} + 2 \text{ лв. дълг} = 5 \text{ лв. дълг}$$

или

$$(-3) + (-2) = (-5)$$

Извод: **Сборът на две отрицателни числа е отрицателно число.**

Ако 1 лв. дълг означим със знака $-$, можем да направим следната схема (модел):

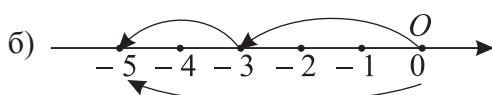
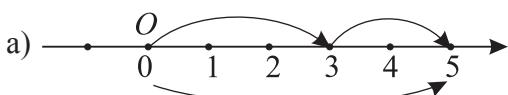


ЗАДАЧА 3 Изобразете върху числова ос действието:

a) $(+3) + (+2) = (+5);$

б) $(-3) + (-2) = (-5).$

Решение:



Забелязваме, че:

$$(+3) + (+2) = (+5) \text{ може да се запише и така:}$$

$$(+3) + (+2) = +(|+3| + |+2|) = + (3 + 2) = +5;$$

$$(-3) + (-2) = (-5) \text{ може да се запише и така:}$$

$$(-3) + (-2) = -(|-3| + |-2|) = - (3 + 2) = -5.$$

По този начин се обосновава следното



Правило:

Две рационални числа с еднакви знаци събираме, като:

- съберем модулите на числата и
- пред получения сбор напишем знака на събирамите.

Запомнете!

приход	+	приход	=	приход	дълг	+	дълг	=	дълг
+ +		+ +	=	+ +	- -		- -	=	- -

ЗАДАЧА 4

(Устно) Пресметнете:

a) $(+2) + (+8)$,
 $(+4) + (+21)$;

б) $(-3) + (-10)$,
 $(-17) + (-4)$.

Отг.: а) $+10, +25$; б) $-13, -21$



В Задача 4-а) $(+2) + (+8) = +10$ е познатият сбор $2 + 8 = 10$.

ЗАДАЧА 5

Съберете числата:

а) $(-7) + (-8)$;
 в) $\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$;

б) $(-4,3) + (-5,2)$;
 г) $\left(-3\frac{1}{7}\right) + \left(-2\frac{6}{7}\right)$.

Решение:

а) $(-7) + (-8) = [-(|-7| + |-8|)] = -(7 + 8) = -15$

б) $(-4,3) + (-5,2) = -(4,3 + 5,2) = -9,5$

в) $\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

г) $\left(-3\frac{1}{7}\right) + \left(-2\frac{6}{7}\right) = -\left(3\frac{1}{7} + 2\frac{6}{7}\right) = -5\frac{7}{7} = -6$



При събиране на отрицателни числа (Задача 5-а)) изразът в карето обикновено се изпуска.

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете:

а) $|+17| + |+13|$;
 б) $|-12| + |+10|$;
 в) $|-8| + |-11|$;
 г) $|+6| + |-6|$.

2 Извършете събирането:

а) $(+15) + (+17)$;
 $(+10) + (+13)$;
 б) $(-20) + (-5)$;
 $(-31) + (-19)$;
 в) $(+18) + (+5,7)$;
 $(+0,7) + (+0,8)$;

г) $(-18,7) + (-19,1)$;

$(-17,6) + (-21,9)$.

3 Пресметнете:

а) $\left(+\frac{2}{7}\right) + \left(+\frac{3}{7}\right)$;
 б) $\left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right)$;
 в) $\left(+\frac{1}{6}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right)$;
 г) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right)$.

4 Пресметнете стойността на израза

$A = x + (-2)$, ако:

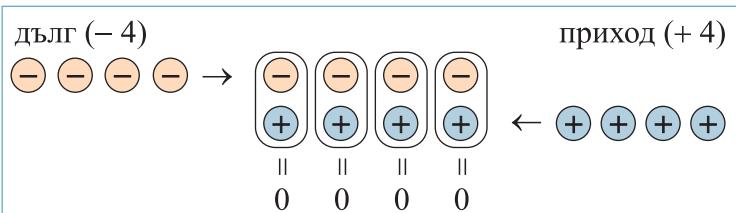
а) $x = -4$;
 б) $x = -3,2$;
 в) $x = -7\frac{1}{3}$;
 г) $x = -11\frac{3}{8}$
 д) $x = -4,7$;
 е) $x = -0,16$.

СЪБИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА С РАЗЛИЧНИ ЗНАЦИ

ПРИМЕР 1 Иво имал дълг 4 лв. Получил от баща си 4 лв. Може ли Иво да върне дълга си и колко лева му остават?

$$\begin{array}{rcl} 4 \text{ лв. дълг} & + & 4 \text{ лв. приход} = ? \\ (-4) & + & (+4) = ? \end{array}$$

Да разгледаме следната схема:

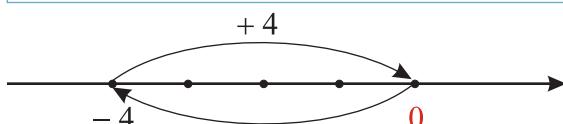


Приход от 4 лв. връща дълг от 4 лв.

Иво връща дълга си. Остават му 0 лв.

$$4 \text{ лв. дълг} + 4 \text{ лв. приход} = 0 \text{ лв.}$$

$$(-4) + (+4) = 0$$



Забелязваме, че когато приходът е равен на дълга, тогава те се записват с две противоположни числа, чийто сбор е 0.

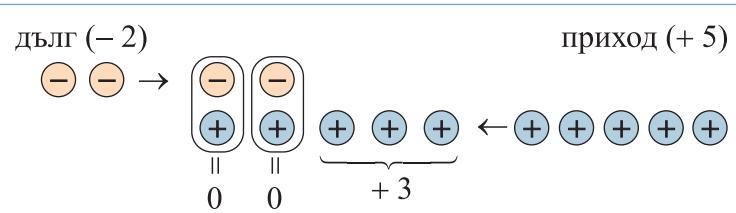


Сборът на две противоположни числа е 0.

ПРИМЕР 2 Иво имал дълг 2 лв. Получил от баща си 5 лв. Може ли Иво да върне дълга си и колко лева му остават?

$$\begin{array}{rcl} 2 \text{ лв. дълг} & + & 5 \text{ лв. приход} = ? \\ (-2) & + & (+5) = ? \end{array}$$

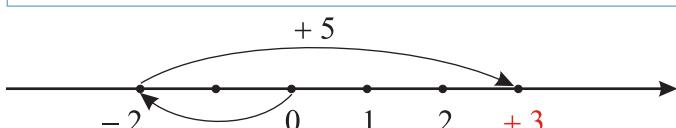
Да разгледаме следната схема:



Иво може да върне дълга си. Остават му 3 лв.

$$2 \text{ лв. дълг (разход)} + 5 \text{ лв. приход} = 3 \text{ лв. приход}$$

$$(-2) + (+5) = (+3)$$

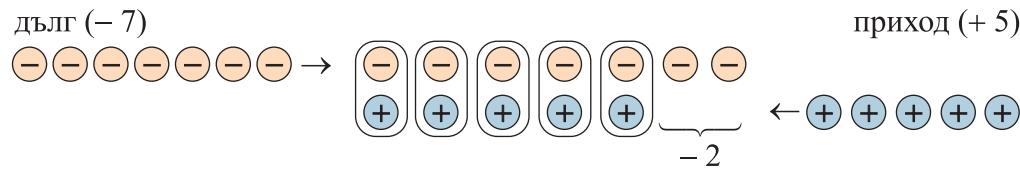


В Пример 2 приходът е по-голям от дълга, т.e. $|+5| > |-2|$. Тогава резултатът е положително число с модул, равен на $|+5| - |-2|$.

ПРИМЕР 3

Иво имал дълг 7 лв. Получил от баща си 5 лв. Може ли Иво да върне дълга си?

$$\begin{array}{rcl} 7 \text{ лв. дълг} & + & 5 \text{ лв. приход} = ? \\ (-7) & + & (+5) = ? \end{array}$$

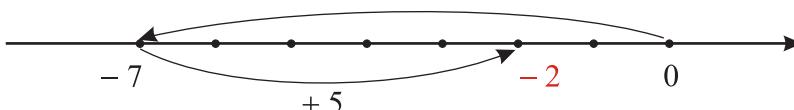


Иво не може да върне дълга си.

След като върне 5 лв., трябва да върне още 2 лв., т.e. остава му дълг 2 лв.

$$7 \text{ лв. дълг} + 5 \text{ лв. приход} = 2 \text{ лв. дълг}$$

$$(-7) + (+5) = (-2)$$



В Пример 3 дългът е по-голям от прихода, т.e. $| -7 | > | +5 |$. Тогава резултатът е отрицателно число с модул, равен на $| -7 | - | +5 |$.

По аналогичен начин се обосновава и следното



Правило:

Две рационални числа с различни знаци събираме по следния начин:

- ако са противоположни, сборът им е нула, т.e. $a + (-a) = 0$;
- ако не са противоположни:
 1. сравняваме модулите на събирамеите,
 2. изваждаме от по-големия модул по-малкия,
 3. пред сбора пишем знака на числото с по-голям модул.

ЗАДАЧА

Пресметнете:

a) $(-15) + (+7)$;

б) $(-23) + (+30)$;

в) $(-8) + (+20)$;

г) $(-17) + (+17)$.

Решение:

а) $(-15) + (+7) = -8$, защото $| -15 | > | +7 |$

$| -15 | - | +7 | = 15 - 7 = 8 \xrightarrow{-8} \text{б) } (-23) + (+30) = +7$

в) $(-8) + (+20) = +12$

г) $(-17) + (+17) = 0$

ЗАДАЧИ

- 1 Пресметнете:

а) $(-8) + (+8)$; б) $(-2,7) + (+2,7)$.

- 2 Извършете събирането:

а) $(-8) + (+2)$; $(-7) + (+11)$;

б) $(+13) + (-6)$; $(+5) + (-19)$;

в) $(-15,6) + (+2,6)$; $(+13,2) + (-18,4)$;

г) $(-17,6) + (+12)$; $(+15,3) + (-20)$.

- 3 Пресметнете стойността на израза

$A = x + y$, ако:

а) $x = -7, y = +7$;

б) $x = +\frac{1}{2}, y = -1\frac{1}{2}$;

в) $x = -\frac{1}{4}, y = +\frac{3}{4}$;

г) $x = +7, y = -1$.

- 4 Пресметнете стойността на израза

$A = x + (-7)$, ако:

а) $x = +13,5$;

б) $x = -8,6$;

в) $x = -5\frac{1}{3}$;

г) $x = +2\frac{1}{7}$.

ЗАДАЧА 1

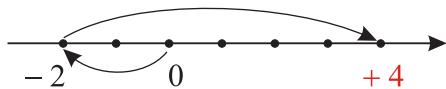
Пресметнете и онагледете решението върху числова ос:

а) $(-2) + (+6) = +4$ и $(+6) + (-2) = +4$;

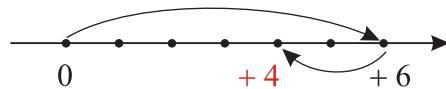
б) $(-5) + (+3) = -2$ и $(+3) + (-5) = -2$.

Решение:

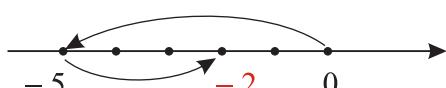
а) $(-2) + (+6) = +4$



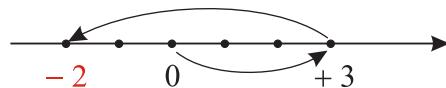
$(+6) + (-2) = +4$



б) $(-5) + (+3) = -2$



$(+3) + (-5) = -2$



От Задача 1 следва, че: $(-2) + (+6) = (+6) + (-2)$,
 $(-5) + (+3) = (+3) + (-5)$.

Задача 1 ни дава основание да приемем, че и за рационалните числа е в сила разместителното (комутативното) свойство $a + b = b + a$.

ЗАДАЧА 2

Проверете вярно ли е разместителното свойство $a + b = b + a$, ако:

а) $a = +8$, $b = -8$;

б) $a = -7$, $b = -2$;

в) $a = -11$, $b = +3$;

г) $a = -2$, $b = 0$.

Решение:

а) $\left. \begin{array}{l} (+8) + (-8) = 0 \\ (-8) + (+8) = 0 \end{array} \right\}$ да

б) $\left. \begin{array}{l} (-7) + (-2) = -9 \\ (-2) + (-7) = -9 \end{array} \right\}$ да

в) $\left. \begin{array}{l} (-11) + (+3) = -8 \\ (+3) + (-11) = -8 \end{array} \right\}$ да

г) $\left. \begin{array}{l} (-2) + 0 = -2 \\ 0 + (-2) = -2 \end{array} \right\}$ да

ЗАДАЧА 3

Проверете вярно ли е съдружителното свойство $(a + b) + c = a + (b + c)$, ако:

а) $a = -4$, $b = -2$, $c = -3$; б) $a = -5$, $b = +3$, $c = -8$.

Решение:

а) $\left. \begin{array}{l} (a + b) + c = ((-4) + (-2)) + (-3) = (-6) + (-3) = -9 \\ a + (b + c) = (-4) + ((-2) + (-3)) = (-4) + (-5) = -9 \end{array} \right\}$ да

б) $\left. \begin{array}{l} (a + b) + c = ((-5) + (+3)) + (-8) = (-2) + (-8) = -10 \\ a + (b + c) = (-5) + ((+3) + (-8)) = (-5) + (-5) = -10 \end{array} \right\}$ да

Задача 3 ни дава основание да приемем, че и за рационалните числа е изпълнено съдружителното (асоциативното) свойство

$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.



При рационалните числа са в сила следните свойства на събирането:
 разместително (комутативно) свойство: $a + b = b + a$; $(a + 0 = 0 + a = a)$
 съдружително (асоциативно) свойство: $(a + b) + c = a + (b + c)$
 за произволни числа a, b, c от Q .

Комутативното и асоциативното свойства на събирането ни позволяват да поставяме и премахваме скоби по различни начини, т.е. да разместим местата на събирамите.

Например:

$$\begin{aligned}(-2) + (-3) + (+1) &= ((-2) + (-3)) + (+1) = (+1) + ((-2) + (-3)) = (+1) + (-2) + (-3), \\(-2) + (-3) + (+1) &= (-2) + ((-3) + (+1)) = ((-3) + (+1)) + (-2) = (-3) + (+1) + (-2)\end{aligned}$$

и т.н.

ЗАДАЧА 4 Извършете събирането:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} (-6) + (-5) + (+1); & \text{б)} (-0,5) + (+2,5) + (-1,5); \\ \text{в)} (-4) + (-5) + (+1) + (+2); & \text{г)} (+3) + (-3) + (-8) + \left(+10\frac{2}{3}\right) + \left(+7\frac{1}{3}\right). \end{array}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} (-6) + (-5) + (+1) &= (-11) + (+1) = -10 \\ \text{б)} (-0,5) + (+2,5) + (-1,5) &= (-0,5) + (-1,5) + (+2,5) = (-2) + (+2,5) = +0,5 \\ \text{в)} (-4) + (-5) + (+1) + (+2) &= (-9) + (+3) = -6 \\ \text{г)} \underbrace{(+3) + (-3) + (-8)}_0 + \left(+10\frac{2}{3}\right) + \left(+7\frac{1}{3}\right) &= (-8) + (+18) = +10 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \left(+2\frac{1}{2}\right) + \left(-2\frac{1}{2}\right) + (+4); \\ \text{б)} (-1,8) + (+1,8) + (-5); \\ \text{в)} \left(+3\frac{3}{11}\right) + \left(-\frac{1}{7}\right) + \left(+\frac{1}{7}\right); \\ \text{г)} \left(-1\frac{1}{2}\right) + (+102) + (-102). \end{array}$$

2 Извършете събирането:

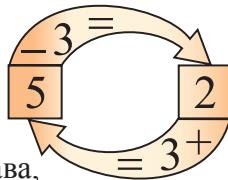
$$\begin{array}{l} \text{а)} (+15) + (-27) + (+25); \\ \quad (-18) + (+27) + (-22); \\ \quad (-18) + (-36) + (-12); \\ \quad (-17) + (+5) + (+17); \\ \text{б)} (-18) + (+13) + (+27); \\ \quad (-22) + (-17) + (+31); \\ \quad (-32) + (+7) + (-45); \\ \quad (-6) + (-17) + (-34). \end{array}$$

3 Извършете събирането:

$$\begin{array}{l} \text{а)} (-7) + (-2) + (-3,2); \\ \quad (-8) + (-3) + (+1,6); \\ \quad (+5,6) + (-2) + (-3); \\ \quad (-7,8) + (-2,9) + (+6); \\ \text{б)} (-9) + (-3,7) + (+2,3); \\ \quad (-11) + (-5,6) + (-3,9); \\ \quad (+13) + (-2,5) + (-4,9); \\ \quad (-5,6) + (-7,8) + (+3,2); \\ \text{в)} \left(-7\frac{1}{3}\right) + (-5) + (-11); \\ \quad (-2) + \left(-8\frac{1}{7}\right) + \left(-2\frac{3}{7}\right); \\ \quad (+9) + \left(-2\frac{2}{3}\right) + \left(-1\frac{2}{3}\right); \\ \quad (+11) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Знаем, че за положителните числа изваждането е обратно действие на действието събиране:

от $5 - 3 = 2$ следва, че $2 + 3 = 5$;
от $2 + 3 = 5$ следва, че $5 - 3 = 2$.



Положителни числа и числото нула знаем да изваждаме само тогава, когато умаляемото е по-голямо от умалителя ($5 > 3$), т.е. вярно е, че при $a > b$ от $a - b = c$ следва, че $c + b = a$.

3 < 5

Можем ли да намерим разликата 3 – 5?

За да намерим правило за изваждане на рационални числа, искаме и при $a < b$ да бъде изпълнено: от $a - b = c$ следва, че $c + b = a$.

- | | |
|-------------------------------|--|
| $a > 0, b > 0$ | Например, ако $a = +3, b = +5$,
$(+3) - (+5) = -2$, защото $(-2) + (+5) = +3$. |
| $a > 0, b < 0$ | Например, ако $a = +5, b = -3$,
$(+5) - (-3) = +8$, защото $(+8) + (-3) = +5$. |
| $a < 0, b > 0$ | Например, ако $a = -5, b = +3$,
$(-5) - (+3) = -8$, защото $(-8) + (+3) = -5$. |
| $a < 0, b < 0$
при $a < b$ | Например, ако $a = -5, b = -3$,
$(-5) - (-3) = -2$, защото $(-2) + (-3) = -5$. |
| при $a > b$ | Например, ако $a = -3, b = -5$,
$(-3) - (-5) = +2$, защото $(+2) + (-5) = -3$. |

Забелязваме, че

разликата	$(+3) - (+5)$ е -2	$(+3) + (-5)$ също е -2 ;
	$(+5) - (-3)$ е $+8$ и сборът	$(+5) + (+3)$ също е $+8$;
	$(-5) - (+3)$ е -8	$(-5) + (-3)$ също е -8

и т.н., т.е. разликата на две рационални числа може да се пресмята като сбор.

Например | разликата $(-5) - (+3)$
| е сборът $(-5) + (-3)$,
където $(+3)$ и (-3) са противоположни числа.



Правило:

Две рационални числа изваждаме, като към умаляемото прибавим противоположното число на умалителя.

Правилото дава възможност изваждането на две рационални числа да се запише като сбор. Така получаваме, че



Действието изваждане е винаги възможно в множеството на рационалните числа.

Примери: $(+10) - (-17) = (+10) + (+17) = +27$,
 $(-8) - (+6) = (-8) + (-6) = -14$.

ЗАДАЧА 1

Запишете като сбор и пресметнете:

a) $(+7) - (+2)$;	б) $(+20) - (-5)$;	в) $(-4) - (+5)$;	г) $(-12) - (-4)$;
$(+2) - (+7)$;	$(+10) - (-16)$;	$(-8) - (+3)$;	$(-4) - (-12)$.

Решение:

a) $(+7) - (+2) = (+7) + (-2) = +5$	$(+2) - (+7) = (+2) + (-7) = -5$
б) $(+20) - (-5) = (+20) + (+5) = +25$	$(+10) - (-16) = (+10) + (+16) = +26$
в) $(-4) - (+5) = (-4) + (-5) = -9$	$(-8) - (+3) = (-8) + (-3) = -11$
г) $(-12) - (-4) = (-12) + (+4) = -8$	$(-4) - (-12) = (-4) + (+12) = +8$

ЗАДАЧА 2

Запишете като сбор и пресметнете:

a) $(+2,5) - (-0,5)$;	б) $\left(+12\frac{1}{3}\right) - \left(+2\frac{1}{3}\right)$;
в) $(-17,8) - (+6,2)$;	г) $\left(-3\frac{2}{3}\right) - \left(-1\frac{2}{3}\right)$.

Решение:

a) $(+2,5) - (-0,5) = (+2,5) + (+0,5) = +3$	б) $\left(+12\frac{1}{3}\right) - \left(+2\frac{1}{3}\right) = \left(+12\frac{1}{3}\right) + \left(-2\frac{1}{3}\right) = +10$
в) $(-17,8) - (+6,2) = (-17,8) + (-6,2) = -24$	г) $\left(-3\frac{2}{3}\right) - \left(-1\frac{2}{3}\right) = \left(-3\frac{2}{3}\right) + \left(+1\frac{2}{3}\right) = -2$

ЗАДАЧИ

1 Запишете като сбор и пресметнете:

a) $(+11) - (+4)$;	$(-11) - (+4)$;
$(+11) - (-4)$;	$(-11) - (-4)$;
б) $(-8,3) - (+2)$;	$(+8,3) - (+2)$;
$(-8,3) - (-2)$;	$(+8,3) - (-2)$;
в) $(+7) - (+8,2)$;	$(-7) - (+8,2)$;
$(+7) - (-8,2)$;	$(-7) - (-8,2)$;
г) $(-13) - (+2)$;	$(-12) - (+18)$;
$(+15) - (-8)$;	$(+13) - (-25)$.

2 Пресметнете:

a) $(-15) - (-2,5)$;	$(-3,5) - (-17)$;
б) $(6,2) - (-8)$;	$(+8,4) - (-0,6)$;

в) $(+4) - (+8)$;	$(+20) - (+5)$;
--------------------	------------------

г) $\left(-7\frac{1}{2}\right) - \left(-3\frac{1}{2}\right)$;	$\left(-8\frac{2}{3}\right) - \left(+5\frac{1}{3}\right)$.
--	---

3 Запишете и пресметнете разликата, ако:

- а) умаляемото е $-2,3$, умалителят е $+8$;
- б) умаляемото е $+35,2$, умалителят е $-5,3$;
- в) умаляемото е $-15\frac{1}{3}$, умалителят е $+8\frac{2}{3}$;
- г) умаляемото е $-17\frac{1}{2}$, умалителят е $-20\frac{1}{3}$.

СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА. РАЗКРИВАНЕ НА СКОБИ

Разкриване на скоби, когато пред числото има знак “+”

$$+ (+a); + (-a)$$

При събиране или изваждане на две рационални числа първото събирамо (или умаляемото) може да не се загражда в скоби и ако е положително число, знакът “+” не се пише.

Например: $(-3) + (-5) = -3 + (-5); \quad (+4) + (-5) = 4 + (-5);$
 $(-8) - (+3) = -8 - (+3); \quad (+5) - (-3) = 5 - (-3).$

Как да записваме без скоби сума на две рационални числа?

При записа на **сбор от две рационални числа** е прието

да се изпусне знакът за събиране “+” и
да се изпуснат скобите на второто събирамо.

$$\begin{aligned} a + (+b) &= a + b \\ a + (-b) &= a - b \end{aligned}$$

Например: $3 + (-5) = 3 - 5; \quad 3 + (+5) = 3 + 5;$
 $-3 + (-5) = -3 - 5; \quad -3 + (+5) = -3 + 5.$

Записът **3 – 5** означава **сбор** на числата **3** и **–5**.

Записът **–3 – 5** означава **сбор** на числата **–3** и **–5**.

ЗАДАЧА 1

Разкрийте скобите и пресметнете:

a) $13 + (+8); \quad$ б) $-4 + (-2); \quad$ в) $7 + (-3); \quad$ г) $-6 + (+4).$

Решение:

a) $13 + (+8) =$	б) $-4 + (-2) =$	в) $7 + (-3) =$	г) $-6 + (+4) =$
$= 13 + 8 =$	$= -4 - 2 =$	$= 7 - 3 =$	$= -6 + 4 =$
$= 21$	$= -6$	$= 4$	$= -2$

Разкриване на скоби, когато пред числото има знак “–”

$$- (+a); - (-a)$$

Как да записваме без скоби разликата на две рационални числа?

$$-3 - (+5) = ? \quad -3 - (-5) = ?$$

Знаем, че разликата на две рационални числа получаваме, като към умаляемото прибавим противоположното число на умалителя.

$$-3 - (+5) = -3 + (-5), \text{ а } -3 - (-5) = -3 + 5. \text{ Тогава } \underbrace{-3 - (+5)}_{-3 - 5} = -3 - 5.$$

$$-3 - (-5) = -3 + (+5), \text{ а } -3 + (+5) = -3 + 5. \text{ Тогава } \underbrace{-3 - (-5)}_{-3 + 5} = -3 + 5.$$

При записа на **разлика на две рационални числа** е прието

| да се изпусне знакът за изваждане “–”,
| да се изпуснат скобите на умалителя и
| да се промени знакът на умалителя.

$$\begin{aligned} a - (+b) &= a - b \\ a - (-b) &= a + b \end{aligned}$$



Запомнете!

$$+ (+a) = + a$$

$$+ (-a) = - a$$

$$- (+a) = - a$$

$$- (-a) = + a$$

ЗАДАЧА 2

Разкрийте скобите и пресметнете:

а) $15 - (+4)$; б) $13 - (-2)$; в) $-14 - (+3)$; г) $-16 - (-4)$.

Решение:

а) $15 - (+4) =$	б) $13 - (-2) =$	в) $-14 - (+3) =$	г) $-16 - (-4) =$
$= 15 - 4 =$	$= 13 + 2 =$	$= -14 - 3 =$	$= -16 + 4 =$
$= 11$	$= 15$	$= -17$	$= -12$

ЗАДАЧА 3

Разкрийте скобите и пресметнете:

а) $3,6 + (-8,8)$; б) $-8,6 - (-2,3)$; в) $-4,8 + (-2,5)$; г) $-8,9 - (+3,5)$.

Решение:

а) $3,6 + (-8,8) =$	б) $-8,6 - (-2,3) =$	в) $-4,8 + (-2,5) =$	г) $-8,9 - (+3,5) =$
$= 3,6 - 8,8 =$	$= -8,6 + 2,3 =$	$= -4,8 - 2,5 =$	$= -8,9 - 3,5 =$
$= -5,2$	$= -6,3$	$= -7,3$	$= -12,4$

ЗАДАЧА 4

Разкрийте скобите и пресметнете:

а) $-\frac{2}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right)$; б) $-3\frac{1}{3} - \left(-5\frac{2}{3}\right)$; в) $\frac{3}{4} - \left(+\frac{1}{3}\right)$; г) $2\frac{1}{3} + \left(-3\frac{1}{2}\right)$.

Решение:

а) $-\frac{2}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right) =$	б) $-3\frac{1}{3} - \left(-5\frac{2}{3}\right) =$	в) $\frac{3}{4} - \left(+\frac{1}{3}\right) =$	г) $2\frac{1}{3} + \left(-3\frac{1}{2}\right) =$
$= -\frac{2}{7} - \frac{3}{7} =$	$= -3\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3} =$	$= \frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$	$= 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2} =$
$= -\frac{5}{7}$	$= 2\frac{1}{3}$	$= \frac{9}{12} - \frac{4}{12} =$	$= 2\frac{2}{6} - 3\frac{3}{6} =$
		$= \frac{5}{12}$	$= -1\frac{1}{6}$

ЗАДАЧИ

Разкрийте скобите и пресметнете:

1 а) $(+16) + (+5)$; б) $(+16) + (-5)$;

в) $(-16) + (+5)$; г) $(-16) + (-5)$;

в) $(-4,5) + (-1)$; г) $(-3,8) + (+2)$;

г) $(+7,2) + (-5,3)$; в) $(+10,1) + (+1,9)$.

2 а) $13 - (+18)$; б) $13 - (-18)$;

в) $-13 - (+18)$; г) $-13 - (-18)$;

в) $5\frac{1}{3} - (+3)$; г) $5\frac{1}{3} - (-3)$;

г) $-5\frac{1}{3} - (+3)$; в) $-5\frac{1}{3} - (-3)$.

3 а) $\left(+3\frac{1}{2}\right) + (-4)$; б) $\left(-\frac{5}{6}\right) + \left(+\frac{1}{6}\right)$;

б) $\left(-2\frac{1}{3}\right) + \left(-1\frac{2}{3}\right)$; в) $\left(+7\frac{3}{4}\right) + \left(+1\frac{3}{4}\right)$;

в) $\left(+\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)$; г) $\left(-\frac{2}{15}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$;

г) $\left(-\frac{7}{9}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$.

4 а) $3 - \left(+8\frac{1}{7}\right)$; б) $3 - \left(-8\frac{1}{7}\right)$;

б) $-3 - \left(+8\frac{1}{7}\right)$; в) $-3 - \left(-8\frac{1}{7}\right)$;

в) $11 - (+2,9)$; г) $11 - (-2,9)$;

г) $-11 - (+2,9)$; в) $-11 - (-2,9)$.

ЗАДАЧА 1 Разкрийте скобите и пресметнете:

а) $-5 + (-3,2)$; б) $-7 - \left(-3\frac{1}{3}\right)$.

Решение:

а) $-5 + (-3,2) = -5 - 3,2 = -8,2$

б) $-7 - \left(-3\frac{1}{3}\right) = -7 + 3\frac{1}{3} = -6\frac{3}{3} + 3\frac{1}{3} = -3\frac{2}{3}$

Правилата за разкриване на скоби са в сила и когато в изразите има повече от две рационални числа, свързани със знаците за събиране и изваждане.

Например $7 + (-4) - (+10) - (-3) = 7 - 4 - 10 + 3$.

ЗАДАЧА 2 Запишете без скоби изразите:

а) $-8 + (-3) + (+2)$; б) $-8 - (-3) - (+2)$; в) $-8 + (-3) - (+2)$.

Решение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} -8 \cancel{+ (-3)} \cancel{+ (+2)} = & \text{б)} -8 \cancel{- (-3)} \cancel{- (+2)} = & \text{в)} -8 \cancel{+ (-3)} \cancel{- (+2)} = \\ = -8 \quad \cancel{-} \quad 3 \quad \cancel{+} \quad 2 & = -8 \quad \cancel{+} \quad 3 \quad \cancel{-} \quad 2 & = -8 \quad \cancel{-} \quad 3 \quad \cancel{-} \quad 2 \end{array}$$

**Алгебричен сбор на рационални числа**

Краен брой от рационални числа, свързани помежду си с действията събиране и изваждане, образуват **алгебричен сбор** на тези числа.

Например $-8 + (-3) - (+2)$;
 $-6 - (-5) - (+1) + (+4)$.

Всеки алгебричен сбор може да се запише без скоби:

$$-8 + (-3) - (+2) = -8 - 3 - 2;$$

$$-6 - (-5) - (+1) + (+4) = -6 + 5 - 1 + 4.$$

Всеки алгебричен сбор може да се запише като сбор от рационални числа, поставени в скоби.

Например $\begin{array}{ccccc} -5 & -8 & +1 & -3 & +11 \\ = (-5) & + (-8) & + (+1) & + (-3) & + (+11). \end{array} =$

ЗАДАЧА 3 Представете във вид на сбор изразите:

а) $-5 + 2 - 7$; б) $-5 - 2 + 7$; в) $-5 - 2 - 7$.

Решение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \quad -5 + 2 - 7 = & \text{б)} \quad -5 - 2 + 7 = & \text{в)} \quad -5 - 2 - 7 = \\ = (-5) + (+2) + (-7) & = (-5) + (-2) + (+7) & = (-5) + (-2) + (-7) \end{array}$$

ЗАДАЧА 4 Пресметнете алгебричния сбор $3 - 2 - 4$.

Решение:

$$\begin{array}{lcl} \underbrace{3 - 2 - 4} = & \text{или} & \underbrace{3 - 2 - 4} = \\ = 1 - 4 = & & = 3 - 6 = \\ = -3 & & = -3 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \text{или} & & 3 - 2 - 4 = \\ & & = \underbrace{3 - 4}_{} - 2 = -1 - 2 = \\ & & = -3 \end{array}$$



Изразът $3 - 2 - 4$ е алгебричен сбор на числата $3, -2, -4$. Като прилагаме свойствата на събирането, можем да разместяваме събирамите.

От комутативното и асоциативното свойства на събирането следва, че **алгебричният сбор не се променя, ако се разместят местата на събирамите.**

Например $-2 + 1 - 0,1 + 4 = -2 - 0,1 + 1 + 4 = 1 - 2 + 4 - 0,1 = \dots = 2,9$.

ЗАДАЧА 5 Пресметнете: а) $A = 8 + 3 + 10 - 2 - 17$; б) $B = 7 + 5 - 3 + 2 - 13$; в) $C = 9 - 3,5 + 2 - 2,5 - 7$; г) $D = 5 + 13 - 17 + 4 - 3$.

Решение:

$$\begin{array}{l} \text{а) } A = \underbrace{8 + 3 + 10}_{0} - \underbrace{2 - 17} = 21 - 19 = 2 \\ \text{б) } B = 7 + 5 - 3 + 2 - 13 = \underbrace{7 + 5 + 2}_{0} - \underbrace{3 - 13} = 14 - 16 = -2 \\ \text{в) } C = 9 - 3,5 + 2 - 2,5 - 7 = \underbrace{9 + 2}_{0} - \underbrace{3,5 - 2,5 - 7} = 11 - 13 = -2 \\ \text{г) } D = 5 + 13 - 17 + 4 - 3 = \underbrace{5 + 13 + 4}_{0} - \underbrace{17 - 3} = 22 - 20 = 2 \end{array}$$

ЗАДАЧА 6 Пресметнете: а) $6 - 8 + 8 - 9 + 1 - 3$; б) $-7 + 1 + 6 + 8 - 2 + 9 - 30$.

Решение:

$$\begin{array}{l} \text{а) } 6 \underbrace{- 8 + 8}_{0} - 9 + 1 - 3 = \underline{6} - \underline{9} + \underline{1} - \underline{3} = 7 - 12 = -5 \\ \text{б) } \underbrace{-7 + 1 + 6 + 8 - 2 + 9 - 30}_{0} = \underline{-7} + \underline{2} + \underline{9} - \underline{30} = 17 - 32 = -15 \end{array}$$



При пресмятане на алгебричните сборове в Задачи 5 и 6 за удобство първо събрахме числата с еднакви знаци, а след това събрахме получените два събираеми, които са с различни знаци. Съобразихме, че събираемите от противоположните числа е 0.

ЗАДАЧИ

1 Разкрийте скобите и пресметнете:

- а) $(+8) + (-2) + (-3)$;
 $(+8) - (-17) + (-9)$;
 б) $(+9) - (-18) + (-15)$;
 $(+16) - (-5) - (-7)$;
 в) $(-5) + (+9,3) - (-7)$;
 $(-18) - (+3) - (-7,5)$;
 г) $(-8,6) - (-9) + (+3,6)$;
 $(-9) + (-8,2) + (+7,4)$;
 д) $(-3,4) + (-2,6) - (-1,3)$;
 $(-5,3) - (-2,9) + (-1,7)$.

2 Пресметнете алгебричните сборове:

- а) $-5 + 7 - 8 + 4$;
 $-11 + 3 - 2 - 6$;
 б) $-17 + 2 + 3 - 8$;
 $18 - 2 - 11 + 3$;
 в) $-17 + 31 - 25 + 17$;
 $-103 + 15 - 27 + 31$;
 г) $108 - 15 + 102 - 215$;
 $-86 - 15 - 19 + 100$;
 д) $-2,3 + 3,5 - 1,7 + 5$;
 $8,7 - 2,3 + 0,3 - 5,7$.

ЗАДАЧА 1 Пресметнете алгебричния сбор $A = 5 - 11 + 2 - 8 - 9 + 4$.

Решение: I начин:

$$\begin{aligned} A &= 5 - 11 + 2 - 8 - 9 + 4 = \\ &= \underbrace{-6}_{-4} + 2 - 8 - 9 + 4 = \\ &= \underbrace{-4}_{-12} - 8 - 9 + 4 = \\ &= \underbrace{-12}_{-21} - 9 + 4 = \\ &= \underbrace{-21}_{-17} + 4 = \\ &= -17 \end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned} A &= 5 - 11 + 2 - 8 - 9 + 4 = \\ &= \underbrace{5+2+4}_{11} - \underbrace{11-8-9}_{-28} = \\ &= 11 - 28 = -17 \end{aligned}$$



- Алгебричният сбор $-11 - 8 - 9$ (II начин на Задача 1) може да се пресметне, като:

$$(-11) + (-8) + (-9) = -28$$
 или $-(11 + 8 + 9) = -28$.
- Когато пресмятаме алгебричния сбор по втория начин, можем да подчертаем числата с еднакви знаци:

$$A = \underline{5} - \underline{11} + \underline{2} - \underline{8} - \underline{9} + \underline{4}.$$

Използвахме различни начини за решаване на Задача 1. Забелязваме, че вторият начин е по-рационален.

ЗАДАЧА 2 Пресметнете: а) $1 - 7 + 9 + 2 - 6 - 5$; б) $-4 + 9 - 12 - 3 + 4 + 1 - 5$.

Решение: а) $1 - 7 + 9 + 2 - 6 - 5 = 1 + 9 + 2 - 7 - 6 - 5 = 12 - 18 = -6$

$$\text{б) } \cancel{-4} + \cancel{9} - \cancel{12} - \cancel{3} + \cancel{4} + \cancel{1} - \cancel{5} = 10 - 20 = -10$$



Когато събираме противоположни числа ($-4 + 4$ в Задача 2), ги зачертаваме. Казваме, че ги унищожаваме!



Пресмятане на алгебричен сбор (практическо правило):

1. Ако има противоположни събираме, унищожаваме ги (сборът е 0).
2. Подчертаваме числата с еднакви знаци по един и същ начин.
3. Намираме събира на положителните числа и събира на отрицателните числа.
4. Получените два събира събираме по правилото за събиране на две числа с различни знаци.

ЗАДАЧА 3 Пресметнете: а) $A = 15 + (7 - 3 - 9)$; б) $B = -17 - (-6 + 8 - 5)$.

Решение: Първо пресмятаме израза в скобите.

$$\text{а) } A = 15 + (7 - 3 - 9) = 15 + (7 - 12) = 15 + (-5) = 15 - 5 = 10$$

$$\text{б) } B = -17 - (-6 + 8 - 5) = -17 - (+8 - 11) = -17 - (-3) = -17 + 3 = -14$$



Задача 3 може да се реши и като **първо се разкрият скобите**. Има два случая:

ако пред скобите има знак “+”,

изпуска се този знак

и числата в скобите се преписват;

ако пред скобите има знак “-”,

изпуска се този знак

и числата в скобите се преписват

с противоположен знак.

$$A = 15 + (7 - 3 - 9) =$$

$$\rightarrow = 15 + 7 - 3 - 9 =$$

$$= 22 - 12 = 10;$$

$$B = -17 - (-6 + 8 - 5) =$$

$$\rightarrow = -17 + 6 - 8 + 5 =$$

$$= 11 - 25 = -14.$$

ЗАДАЧА 4

Разкрийте скобите и пресметнете:

a) $5,7 - (3 + 5,7 - 8 + 6,2);$

б) $-3\frac{1}{3} + \left(-7 + 8\frac{1}{3} - 5 + 3 \right).$

Решение:

a) $5,7 - (3 + 5,7 - 8 + 6,2) =$

б) $-3\frac{1}{3} + \left(-7 + 8\frac{1}{3} - 5 + 3 \right) =$

$= 5,7 - 3 - 5,7 + 8 - 6,2 =$

$= -3\frac{1}{3} - 7 + 8\frac{1}{3} - 5 + 3 = 11\frac{1}{3} - 15\frac{1}{3} = -4$

$= 8 - 9,2 = -1,2$

ЗАДАЧА 5

Пресметнете по два начина $A = 17 - (-8,7 - (5,6 - 3,2))$.

Решение: I начин:

$$\begin{aligned} A &= 17 - (-8,7 - (5,6 - 3,2)) = \\ &= 17 - (-8,7 - 2,4) = \\ &= 17 - (-11,1) = \\ &= 17 + 11,1 = \\ &= 28,1 \end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned} A &= 17 - (-8,7 - (5,6 - 3,2)) = \\ &= 17 - (-8,7 - 5,6 + 3,2) = \\ &= 17 + 8,7 + 5,6 - 3,2 = \\ &= 31,3 - 3,2 = \\ &= 28,1 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете:

a) $11 - 2 + 7 - 6 + 2;$

б) $3 - \frac{1}{2} + 1,5 + \frac{1}{2} - 0,5;$

в) $17 - 6 - 80 + 3 + 86 - 20;$

г) $1\frac{1}{3} - 7 + \frac{2}{3} - 3 + 17 - 9.$

2 Пресметнете:

a) $-3,7 + 5,4 - 2,9 + 7,6;$
 $-18,2 - 2,6 - 3,5 + 3,5;$

б) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 5;$

$\frac{2}{7} - \frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{1}{7};$

в) $19,7 - 5,4 + 2,9 - 19,7;$
 $-18,6 + 3,2 - 5,4 - 3,2;$

г) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{2};$

$-2\frac{1}{3} + 7\frac{1}{7} - 3\frac{2}{3} + 2.$

3 Разкрийте скобите и пресметнете:

a) $A = -27 + (-8 + 13 - 7);$

б) $B = 31 - (-5 + 7 - 12);$

в) $C = -18,3 - (-2,5 + 4,6 - 18,3);$

г) $D = -5\frac{1}{3} - \left(-7 + 3\frac{1}{7} - 5\frac{1}{3} \right).$

4 Пресметнете по два начина стойността на изразите:

a) $A = 27 - (-18 - (7 - 13));$

б) $B = -35 - (47 - (19 + 2 - 37));$

в) $C = 5,6 - (-3,7 + (5,6 - 18,3));$

г) $D = -8\frac{1}{3} - \left(-8\frac{1}{3} - \left(-7\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} - 3\frac{5}{6} \right) \right).$

ЗАДАЧА 1 Намерете x , ако:

а) $-x = 5$,	б) $-x = -6$,
$-x = 7$;	$-x = -9,5$.

Решение: x и $-x$ са противоположни числа.

а) От $-x = 5 \rightarrow x = -5$;	б) От $-x = -6 \rightarrow x = -(-6)$, $x = 6$;
$-x = 7 \rightarrow x = -7$.	$-x = -9,5 \rightarrow x = -(-9,5)$, $x = 9,5$.

ЗАДАЧА 2 Намислих число. Увеличих го със 77 и получих 25. Кое число съм намислил?

Решение:

Намисленото число е x . Тогава $x + 77 = 25$

$$\begin{aligned}x &= 25 - 77 \\x &= -52.\end{aligned}$$

Отг.: Намисленото число е -52 .

В Задача 2 x е неизвестно събирамо.



Неизвестно събирамо намираме, като от дадения сбор извадим известното събирамо.



При намиране на неизвестно събирамо (Задача 2), за да не допускаме грешки, можем да използваме опорен пример:

$$x + 77 = 25 \rightarrow \left| \begin{array}{l} \square + 2 = 5 \\ \square = 5 - 2. \end{array} \right.$$

ЗАДАЧА 3 Намерете x , ако:

а) $x + 12 = -8$;	б) $-17 + x = 2$;	в) $-7 + x = -9$.
--------------------	--------------------	--------------------

Решение:

а) $x + 12 = -8$ $x = -8 - 12$ $x = -20$	б) $-17 + x = 2$ $x = 2 - (-17)$ $x = 2 + 17$ $x = 19$	в) $-7 + x = -9$ $x = -9 - (-7)$ $x = -9 + 7$ $x = -2$
--	---	---

ЗАДАЧА 4 Намислих число. Намалих го с 58 и получих -16 . Кое число съм намислил?

Решение:

Намисленото число е x . Тогава $x - 58 = -16$

$$\begin{aligned}x + (-58) &= -16 \\x &= -16 - (-58) \\x &= -16 + 58 \\x &= 42.\end{aligned}$$

Отг.: Намисленото число е 42 .



Разликата $x - 58$ записахме като сбор $x + (-58)$ и намерихме x като неизвестно събирамо.



Задача 4 можем да решим и ако разглеждаме x като неизвестно умаляемо и за удобство използваме опорен пример:

$$\begin{array}{l} x - 58 = -16 \\ x = -16 + 58 \\ x = 42 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \square - 2 = 3 \\ \square = 3 + 2. \end{array} \right.$$

ЗАДАЧА 5 Намерете x по два начина, ако $x - 39 = -100$.

Решение: I начин:

$$\begin{array}{l} x - 39 = -100 \\ x + (-39) = -100 \\ x = -100 - (-39) \\ x = -100 + 39 \\ x = -61 \end{array}$$

II начин:

$$\begin{array}{l} x - 39 = -100 \\ x = -100 + 39 \\ x = -61 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \square - 2 = 3 \\ \square = 3 + 2 \end{array} \right.$$

ЗАДАЧА 6 Намислих число. От 85 извадих намисленото число и получих -20 .

Кое число съм намислил?

Решение: Намисленото число е x . Тогава

$$\begin{array}{l} 85 - x = -20 \\ 85 + (-x) = -20 \\ -x = -20 - 85 \\ -x = -105 \\ x = 105 \end{array} \quad \text{(виж Зад. 1).}$$

Отг.: Намисленото число е 105.



Задача 6 можем да решим и ако разглеждаме x като неизвестен умалител и за удобство използваме опорен пример:

$$\begin{array}{l} 85 - x = -20 \\ x = 85 - (-20) \\ x = 85 + 20 \\ x = 105. \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{l} 5 - \square = 3 \\ \square = 5 - 3 \end{array} \right.$$

ЗАДАЧА 7 Намерете x по два начина, ако $-9 - x = -19$.

Решение: I начин:

$$\begin{array}{l} -9 - x = -19 \\ -9 + (-x) = -19 \\ -x = -19 - (-9) \\ -x = -19 + 9 \\ -x = -10 \\ x = 10 \end{array}$$

II начин:

$$\begin{array}{l} -9 - x = -19 \\ x = -9 - (-19) \\ x = -9 + 19 \\ x = 10 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{l} 5 - \square = 3 \\ \square = 5 - 3 \end{array} \right.$$

ЗАДАЧИ

Намерете x , ако:

- 1** а) $8 + x = 5$; $-8 + x = 5$;
 б) $x - 11 = 2$; $x - 11 = -2$;
 в) $13 - x = 7$; $13 - x = -7$;
 г) $-15 = x + 9$; $-18 = x - 7$.

- 2** а) $5 + x = 3,6$; $21,1 + x = -7$;
 б) $x - 8 = -5,8$; $x - 11,3 = -2,3$;
 в) $18 - x = -3,6$; $-17,2 - x = 4$;
 г) $-7 = x + 3,6$; $8,4 = x - 5,2$.

Умножение на две числа с различни знаци

ПРИМЕР

Иво взел назаем от трима приятели по 5 лв. За да намерим колко лева дълг е направил Иво, умножаваме 3 с (-5) :

$$3 \cdot (-5) = ?$$

$$\text{3 пъти } . \text{ 5 лв. дълг} = 15 \text{ лв. дълг}$$

$$3 \cdot (-5) = (-15)$$

Иво е направил 15 лв. дълг.



$3 \cdot (-5)$ можем да запишем и така: $(-5) + (-5) + (-5) = -15$, т.е. произведението на положително число с отрицателно число може да се разглежда като сбор на отрицателни числа.

**Правило:**

При **умножение** на две рационални числа с **различни знаци** се получава **отрицателно число**, модулът на което е равен на произведението от модулите на числата.

Примери:

	знак	модул	произведение
1. $5 \cdot (-7) = -35$	-	$ 5 \cdot -7 = 5 \cdot 7$	-35
2. $-7 \cdot 5 = -35$	-	$ -7 \cdot 5 = 7 \cdot 5$	-35
3. $-2,5 \cdot 3 = -7,5$	-	$ -2,5 \cdot 3 = 2,5 \cdot 3$	-7,5

ЗАДАЧА 1

Пресметнете: а) $-12 \cdot 4$; б) $8 \cdot (-7)$; в) $3 \cdot (-2,2)$; г) $-5 \cdot \frac{1}{7}$.

Решение:

$$\text{а)} -12 \cdot 4 = -48$$

$$\text{б)} 8 \cdot (-7) = -56$$

$$\text{в)} 3 \cdot (-2,2) = -6,6$$

$$\text{г)} -5 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{5}{7}$$



Ако вторият множител е отрицателно число, то се загражда със скоби (Задача 1-б), в)).

Умножение на две числа с еднакви знаци

$$(+3) \cdot (+5) = ? \quad \text{Знаем, че } (+3) \cdot (+5) = 3 \cdot 5 = 15.$$

$$(-3) \cdot (-5) = ?$$

Като използваме правилата за разкриване на скоби, можем да запишем:

$$(-3) \cdot (-5) = -(+3) \cdot (-5) = -(-15) = +15 \quad \text{или} \quad -3 \cdot (-5) = 15.$$



Правило:

При **умножение** на две рационални числа с **еднакви знаци** се получава **положително число**, което е равно на произведението от модулите на числата.

Примери:

	знак	модули	произведение
1. $-5 \cdot (-7) = +35$	+	$ -5 \cdot -7 = 5 \cdot 7$	35
2. $-7 \cdot (-5) = +35$	+	$ -7 \cdot -5 = 7 \cdot 5$	35
3. $-2,5 \cdot (-3) = +7,5$	+	$ -2,5 \cdot -3 = 2,5 \cdot 3$	7,5

ЗАДАЧА 2

Пресметнете: а) $-13 \cdot (-3)$; б) $-3 \cdot (-2,2)$; в) $-3,6 \cdot (-0,2)$; г) $-5 \frac{1}{3} \cdot (-3)$.

Решение:

а) $-13 \cdot (-3) = 39$	б) $-3 \cdot (-2,2) = 6,6$
в) $-3,6 \cdot (-0,2) = 0,72$	г) $-5 \frac{1}{3} \cdot (-3) = 16$



Правило на знаците:

$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) \cdot (+) = (-)$

ЗАДАЧА 3

Ако $x = -\frac{1}{2}$, пресметнете: а) $A = 8 \cdot x$; б) $B = -7 \cdot x$.

Решение:

а) $A = 8 \cdot x = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$	б) $B = -7 \cdot x = -7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} = 3,5$
---	--

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

- 1** а) $3 \cdot (-1)$; 0,4 · (-1);
 б) $-3 \cdot (-1)$; $-2,5 \cdot (-1)$;
 в) $-1 \cdot 6$; $-1 \cdot 0,7$;
 г) $-2,5 \cdot (-1)$; $-1 \cdot (-3,4)$.

- 2** а) $5 \cdot (-7)$; $-3 \cdot 8$;
 б) $-12 \cdot 4$; $5 \cdot (-11)$;
 в) $3 \cdot (-0,6)$; $-5 \cdot 0,3$;
 г) $-2 \cdot 1,3$; $4 \cdot (-1,6)$.

- 3** а) $-3 \cdot (-8)$; $-4 \cdot (-11)$;
 б) $-12 \cdot (-5)$; $-7 \cdot (-101)$;
 в) $-2 \cdot (-0,3)$; $-0,4 \cdot (-6)$;
 г) $-7 \cdot (-1,8)$; $-2,9 \cdot (-6)$.

- 4** а) $-5 \cdot \frac{1}{3}$;
 б) $-4 \cdot \frac{2}{7}$;
 $-\frac{1}{3} \cdot 7$;
 $-3 \cdot 2 \frac{1}{3}$;

- в) $6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$;
 г) $3 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$;

$$-5 \cdot \frac{1}{15}$$

$$-6 \cdot \frac{3}{8}$$

5 Пресметнете:

- а) $-0,6 \cdot \frac{1}{3}$;
 б) $-0,3 \cdot 2,1$;
 в) $-5 \frac{1}{3} \cdot 1 \frac{1}{8}$;
 г) $3,6 \cdot \left(-1 \frac{1}{9}\right)$;

$$-0,7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$-0,7 \cdot (-0,3)$$

$$-2 \frac{1}{3} \cdot \left(-1 \frac{2}{7}\right)$$

$$-4,3 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$$

6 Ако $x = -2; 7; -0,6; -2 \frac{1}{3}$, пресметнете:

- а) $A = 3 \cdot x$;
 б) $B = -6 \cdot x$;
 в) $C = -0,6 \cdot x$;
 г) $D = -\frac{5}{7} \cdot x$.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Дистрибутивното свойство може да се прилага и така: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$.

ЗАДАЧА 5 Като приложите свойството $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, пресметнете:

а) $3 \cdot (-2 - 4)$; б) $10 - 2 \cdot (-3 - 8)$.

Решение: а) $3 \cdot (-2 - 4) = [3 \cdot ((-2) + (-4))] = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-4) = -6 - 12 = -18$
 б) $10 - 2 \cdot (-3 - 8) = 10 - 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-8) = 10 + 6 + 16 = 32$

ЗАДАЧА 6 Пресметнете рационално:

а) $(-2) \cdot (-1,8) + (-2) \cdot (-0,2)$; б) $(-8) \cdot (+0,5) + (-8) \cdot (-100,5)$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } & (-2) \cdot (-1,8) + (-2) \cdot (-0,2) = & \text{б) } & (-8) \cdot (+0,5) + (-8) \cdot (-100,5) = \\ & = (-2) \cdot ((-1,8) + (-0,2)) = & = (-8) \cdot ((+0,5) + (-100,5)) = \\ & = -2 \cdot (-2) = & = -8 \cdot (-100) = \\ & = 4 & & = 800 \end{aligned}$$



При рационалните числа са в сила **свойствата на умножението**:

$a \cdot b = b \cdot a$ – **разместително (комутативно)** свойство;

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – **съдружително (асоциативно)** свойство;

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ – **разпределително (дистрибутивно)** свойство.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

ЗАДАЧА 7 Обосновете правилото за разкриване на скоби: $+(-7 + 2 - 1) = -7 + 2 - 1$;
 $-(-7 + 2 - 1) = +7 - 2 + 1$.

Решение:

Като използваме разпределителното (дистрибутивното) свойство, получаваме:

$$+(-7 + 2 - 1) = +1 \cdot (-7 + 2 - 1) = (+1) \cdot (-7) + (+1) \cdot (+2) + (+1) \cdot (-1) = -7 + 2 - 1;$$

$$-(-7 + 2 - 1) = -1 \cdot (-7 + 2 - 1) = (-1) \cdot (-7) + (-1) \cdot (+2) + (-1) \cdot (-1) = 7 - 2 + 1.$$

ЗАДАЧИ

1 Намерете произведенията:

а) $5 \cdot (-2) \cdot 3$; б) $5 \cdot (-3,6) \cdot (-2)$;
 $-7 \cdot (-2) \cdot 2$; $-7 \cdot (-2) \cdot 0,1$;
 $-3 \cdot 4 \cdot (-2)$; $-8 \cdot (-1,1) \cdot 0,1$;
 $-8 \cdot (-2) \cdot (-3)$; $-3 \cdot (-1,2) \cdot (-2)$.

2 Пресметнете рационално:

а) $-5 \cdot 123 \cdot (-2)$; $-25 \cdot 137 \cdot (-4)$;
 б) $-2,5 \cdot 327 \cdot (-4)$; $-0,5 \cdot 435 \cdot (-20)$;
 в) $-7 \cdot 13,6 + (-7) \cdot 6,4$;
 $-10 \cdot 17,4 + (-10) \cdot 2,6$.

3 Пресметнете рационално:

а) $-13 \cdot 5,8 + 3 \cdot 5,8$; $-7 \cdot \frac{5}{9} - 2 \cdot \frac{5}{9}$;
 $27 \cdot 31,3 - 17 \cdot 31,3$;

б) $-2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-1)$;
 $-1,45 \cdot (-25) \cdot 3 \cdot (-4)$;
 $-2\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot (-4)$.

4 Умножете с -1 числата
 -201 ; 49 ; $-\frac{1}{3}$; $-2\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{9}$; 1008 .

5 Без да пресмятате, сравнете с числото 0 произведенията:

а) $A = -12 \cdot 143 \cdot 13,5 \cdot (-72)$;
 б) $B = -2,5 \cdot (-3) \cdot 14,7 \cdot (-8)$;
 в) $C = -3\frac{1}{3} \cdot (-17) \cdot (-81) \cdot (-0,21)$;
 г) $D = -12,7 \cdot \left(-4\frac{1}{7}\right) \cdot 5 \cdot (-31) \cdot 172$.

ЗАДАЧА 1

Ако $a = -3; -1,2; -\frac{1}{12}; -1\frac{1}{6}$, пресметнете $A = 4 \cdot a$ и $B = -3 \cdot a$.

Решение:

$$\text{За } a = -3 \quad A = 4 \cdot (-3) = -12; \quad B = -3 \cdot (-3) = 9.$$

$$\text{За } a = -1,2 \quad A = 4 \cdot (-1,2) = -4,8; \quad B = -3 \cdot (-1,2) = 3,6.$$

$$\text{За } a = -\frac{1}{12} \quad A = 4 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{3}; \quad B = -3 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{За } a = -1\frac{1}{6} = -\frac{7}{6} \quad A = 4 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}; \quad B = -3 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{7}{2} = 3,5.$$

ЗАДАЧА 2

Пресметнете числената стойност на израза $A = -2 \cdot x - 3$, ако:

$$\text{а) } x = 5; \quad \text{б) } x = -6; \quad \text{в) } x = -1,3; \quad \text{г) } x = \frac{1}{6}.$$

Решение:

$$\text{а) } A = -2 \cdot 5 - 3 = -10 - 3 = -13 \quad \text{б) } A = -2 \cdot (-6) - 3 = 12 - 3 = 9$$

$$\text{в) } A = -2 \cdot (-1,3) - 3 = 2,6 - 3 = -0,4 \quad \text{г) } A = -2 \cdot \frac{1}{6} - 3 = -\frac{1}{3} - 3 = -3\frac{1}{3}$$

ЗАДАЧА 3

Пресметнете по два начина израза:

$$\text{а) } A = -5 \cdot (3,4 - 5,6);$$

$$\text{б) } B = (-2,8 - 3,4) \cdot (-2).$$

Решение: I начин:

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= -5 \cdot (3,4 - 5,6) = \\ &= -5 \cdot (-2,2) = \\ &= 11 \end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned} A &= -5 \cdot (3,4 - 5,6) = \\ &= -5 \cdot 3,4 - 5 \cdot (-5,6) = \\ &= -17 + 28 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } B &= (-2,8 - 3,4) \cdot (-2) = \\ &= (-6,2) \cdot (-2) = \\ &= 12,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-2,8 - 3,4) \cdot (-2) = \\ &= -2,8 \cdot (-2) - 3,4 \cdot (-2) = \\ &= 5,6 + 6,8 = 12,4 \end{aligned}$$



При първия начин (Задача 3) първо извършихме действието в скобите, а при втория – разкрихме скобите.

ЗАДАЧА 4

Пресметнете изразите, като разкриете скобите:

$$\text{а) } A = -6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right);$$

$$\text{б) } B = -5 \cdot \left(1,2 - 3 - 4\frac{1}{5}\right).$$

Решение:

$$\text{а) } A = -6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = -6 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -3 + 4 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{б) } B &= -5 \cdot \left(1,2 - 3 - 4\frac{1}{5}\right) = -5 \cdot 1,2 - 5 \cdot (-3) - 5 \cdot \left(-4\frac{1}{5}\right) = \\ &= -6 + 15 + 21 = 30 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5 Пресметнете рационално:

a) $A = 2,3 \cdot \left(-7\frac{1}{3}\right) + 2,3 \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right);$
 б) $B = -3,1 \cdot 2,13 - 3,1 \cdot 0,87;$
 в) $C = -4,8 \cdot 18 + 4,6 \cdot 18.$

Решение:

a) $A = 2,3 \cdot \left(-7\frac{1}{3}\right) + 2,3 \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right) = 2,3 \cdot \left(-7\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}\right) = 2,3 \cdot (-10) = -23$
 б) $B = -3,1 \cdot 2,13 - 3,1 \cdot 0,87 = -3,1 \cdot (2,13 + 0,87) = -3,1 \cdot 3 = -9,3$
 в) $C = -4,8 \cdot 18 + 4,6 \cdot 18 = \begin{cases} 4 \cdot (-8,18) + 4,6 \cdot 18 & = 4 \cdot (-8,18 + 6,18) = \\ & = 4 \cdot (-2) = -8 \\ -4,8 \cdot 18 - (-4) \cdot 6,18 & = -4 \cdot (8,18 - 6,18) = \\ & = -4 \cdot 2 = -8 \end{cases}$

ЗАДАЧА 6 Като използвате разпределителното свойство, опростете изразите:

а) $-3 \cdot x + 7 \cdot x;$ б) $5 \cdot x - 9 \cdot x + x;$ в) $2,3 \cdot x - 7 \cdot x - x + 0,2 \cdot x.$

Решение:

а) $-3 \cdot x + 7 \cdot x = (-3 + 7) \cdot x = 4 \cdot x$
 б) $5 \cdot x - 9 \cdot x + x = (5 - 9 + 1) \cdot x = -3 \cdot x$
 в) $2,3 \cdot x - 7 \cdot x - x + 0,2 \cdot x = (2,3 - 7 - 1 + 0,2) \cdot x = (2,5 - 8) \cdot x = -5,5 \cdot x$

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете числената стойност на израза $A = -3 \cdot x + 4$, ако:

а) $x = -5;$ б) $x = -\frac{1}{3};$
 в) $x = 2;$ г) $x = 3,5.$

2 Пресметнете числената стойност на израза $A = -5 \cdot x - 2 \cdot |x| - 3$, ако:

а) $x = 2;$ б) $x = -3;$
 в) $x = -0,4;$ г) $x = -\frac{1}{3}.$

3 Намерете произведенията:

а) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot 14;$
 $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot (-3);$
 $\left(-5\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-2);$
 б) $-3,2 \cdot \left(-1\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right);$
 $-0,2 \cdot (-1,3) \cdot (-0,3);$
 $2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right).$

4 Пресметнете рационално:

а) $-7 \cdot 2,5 - 3 \cdot 2,5;$
 б) $3,7 \cdot \left(-2\frac{3}{7}\right) + 3,3 \cdot \left(-2\frac{3}{7}\right);$
 в) $-3,9 \cdot 3,12 - 3,9 \cdot 0,88;$
 г) $-5\frac{1}{3} \cdot (-2,3) + 5\frac{1}{3} \cdot (-5,3).$

5 Пресметнете:

а) $-6 \cdot \left(\frac{1}{3} - 2\right) - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} - 3\right);$
 б) $-8 \cdot \left(-3 + \frac{5}{8}\right) + 7 \cdot \left(-5 + \frac{2}{7}\right);$
 в) $-8 \cdot (-13 + 7) - 7,2 \cdot (-1,2 - 8,8);$
 г) $-5,6 \cdot (3,2 - 5,2) - 8,2 \cdot \left(3\frac{2}{3} - 7\frac{2}{3}\right).$

6 Пресметнете числената стойност на израза $A = x \cdot x + 5 \cdot x + 4$, ако:

а) $x = -1;$
 б) $x = -4;$
 в) $x = -3;$
 г) $x = -5.$

Знаем, че за положителните числа делението е обратно действие на действието умножение:

от $6 : 2 = 3$ следва, че $3 \cdot 2 = 6$;

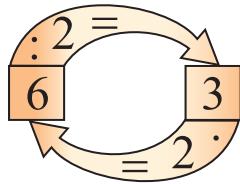
от $3 \cdot 2 = 6$ следва, че $6 : 2 = 3$.

Правилото:

“От $a : b = c$ ($b \neq 0$) следва, че $c \cdot b = a$.”

искаме да е вярно и за рационалните числа.

Нека $a, b \neq 0$ са рационални числа.



1. $a > 0, b > 0$ Например, ако $a = 6, b = 2$,

$6 : 2 = 3$, защото $3 \cdot 2 = 6$.

2. $a < 0, b < 0$ Например, ако $a = -6, b = -2$,

$-6 : (-2) = 3$, защото $3 \cdot (-2) = -6$.

3. $a > 0, b < 0$ Например, ако $a = 6, b = -2$,

$6 : (-2) = -3$, защото $(-3) \cdot (-2) = 6$.

4. $a < 0, b > 0$ Например, ако $a = -6, b = 2$,

$-6 : 2 = -3$, защото $-3 \cdot 2 = -6$.



Правило:

При **деление** на две рационални числа с **еднакви знаци** частното е **положително число**, което е равно на частното от модулите на числата.

Примери: $6 : 2 = 3$, т.e. $6 : 2 = +(|6| : |2|) = +(6 : 2) = +3$;

$-6 : (-2) = 3$, т.e. $(-6) : (-2) = +(|-6| : |-2|) = +(6 : 2) = +3$.



Правило:

При **деление** на две рационални числа с **различни знаци** частното е **отрицателно число**, модулът на което е равен на частното от модулите на числата.

Примери: $-6 : 2 = -3$, т.e. $-6 : 2 = -(|-6| : |2|) = -(6 : 2) = -3$;

$6 : (-2) = -3$, т.e. $6 : (-2) = -(|6| : |-2|) = -(6 : 2) = -3$.



Правило на знаците:

$$\frac{(+)}{(+)} = (+) \quad \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

$$\frac{(-)}{(-)} = (+) \quad \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

ЗАДАЧА 1 Определете знака на частното:

a) $-18 : 4$; б) $108 : (-28)$; в) $-205 : (-73)$; г) $5 : \frac{1}{3}$.

Решение:

а) $-18 : 4 \rightarrow (-)$ б) $108 : (-28) \rightarrow (-)$ в) $-205 : (-73) \rightarrow (+)$ г) $5 : \frac{1}{3} \rightarrow (+)$

ЗАДАЧА 2 (Устно) Като знаете, че $351 : 27 = 13$, пресметнете:

а) $-351 : 27$; б) $-351 : (-27)$; в) $351 : (-27)$.

Отг.:

а) -13 б) 13 в) -13

ЗАДАЧА 3 Пресметнете:

а) $-15 : 3$; б) $18 : (-2)$; в) $-24 : (-6)$; г) $-3 : (-24)$.

Решение:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} & -15 : 3 = -5 & \text{б)} & 18 : (-2) = -9 \\ & & \text{в)} & -24 : (-6) = 4 \\ & & \text{г)} & -3 : (-24) = \\ & & & = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \end{array}$$

ЗАДАЧА 4 Извършете делението: а) $-15 : \frac{3}{7}$; б) $-2\frac{1}{3} : (-0,7)$.**Решение:**

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & -15 : \frac{3}{7} = -\left(15 : \frac{3}{7}\right) = -\frac{15 \cdot 7}{3} = -35 \\ \text{б)} & -2\frac{1}{3} : (-0,7) = 2\frac{1}{3} : 0,7 = \frac{7}{3} : \frac{7}{10} = \frac{7}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \end{array}$$

ЗАДАЧА 5 Иво има заем от 15 лв. Трябва да върне парите на три равни вноски. По колко лева трябва да връща Иво на всяка вноска?**Решение:**

$$\begin{array}{rcl} 15 \text{ лв. дълг} & : & 3 \text{ равни вноски} = 5 \text{ лв. дълг, т.e.} \\ -15 & : & 3 = -5 \end{array}$$

На всяка вноска Иво трябва да връща по 5 лв.

ЗАДАЧИ**1** Пресметнете:

а) $-8 : 2$;	$-15 : 3$;
$-35 : 5$;	$-27 : 27$;
б) $16,2 : (-2)$;	$12,3 : (-3)$;
$5 : (-1)$;	$12 : (-12)$;
в) $-16 : (-2)$;	$-15 : (-5)$;
$-102 : (-3)$;	$-105 : (-5)$;
г) $-10,4 : (-2)$;	$-5,7 : (-3)$;
$-4,5 : (-5)$;	$-14,9 : (-1)$.

2 Като знаете, че $1288 : 23 = 56$, пресметнете:
а) $-1288 : 23$;

б) $1288 : (-23)$;

в) $-1288 : (-23)$.

3 Извършете делението:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \quad -5 : \frac{1}{3}; \quad -\frac{2}{3} : 2; \quad -7 : \frac{1}{3}; \\ \text{б)} \quad -8 : \left(-\frac{2}{3}\right); \quad -15 : \left(-\frac{3}{7}\right); \quad -\frac{2}{3} : (-4); \\ \text{в)} \quad -2\frac{1}{3} : 7; \quad 5 : \left(-1\frac{2}{3}\right); \quad 0,7 : (-1); \\ \text{г)} \quad -1\frac{1}{7} : (-4); \quad -2\frac{1}{3} : \left(-1\frac{2}{7}\right); \\ \qquad \qquad \qquad -3,6 : \left(-1\frac{1}{3}\right). \end{array}$$

ЗАДАЧА 1 Пресметнете:

- а) $(-4 + 1 - 8 - 3) : (-7)$; б) $-60 : (-1 + 13 - 3 + 1)$;
 в) $(11 + 7 - 4 + 6) : (-5)$; г) $-100 : (-3 + 18 + 8 + 2)$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} & (-4 + 1 - 8 - 3) : (-7) = -14 : (-7) = 2 \\ \text{б)} & -60 : (-1 + 13 - 3 + 1) = -60 : 10 = -6 \\ \text{в)} & (11 + 7 - 4 + 6) : (-5) = 20 : (-5) = -4 \\ \text{г)} & -100 : (-3 + 18 + 8 + 2) = -100 : 25 = -4 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 Сравнете частните:

а) $-24 : 8$ и $24 : (-8)$; б) $35 : 7$ и $-35 : (-7)$.

Решение:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а)} \quad -24 : 8 = -3 \\ \qquad\qquad\qquad 24 : (-8) = -3 \end{array} \right\} \text{Следва, че } -24 : 8 = 24 : (-8).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{б)} \quad 35 : 7 = 5 \\ \qquad\qquad\qquad -35 : (-7) = 5 \end{array} \right\} \text{Следва, че } 35 : 7 = -35 : (-7).$$

ЗАДАЧА 3 Ако $a = 8; -6$ пресметнете:

а) $a : a$; б) $-a : a$; в) $a : (-a)$; г) $a : (-1)$.

Решение:

	$a : a$	$-a : a$	$a : (-a)$	$a : (-1)$
$a = 8$	$8 : 8 = 1$	$-8 : 8 = -1$	$8 : (-8) = -1$	$8 : (-1) = -8$
$a = -6$	$-6 : (-6) = 1$	$6 : (-6) = -1$	$-6 : 6 = -1$	$-6 : (-1) = 6$

ЗАДАЧА 4 Проверете верността на равенството $(a + b) : c = a : c + b : c$, ако:

а) $a = -18, b = 12, c = -2$; б) $a = -7, b = -3, c = -2$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} & (a + b) : c = (-18 + 12) : (-2) = -6 : (-2) = 3 \\ & a : c + b : c = -18 : (-2) + 12 : (-2) = 9 + (-6) = 9 - 6 = 3 \\ \text{б)} & (a + b) : c = (-7 + (-3)) : (-2) = -10 : (-2) = 5 \\ & a : c + b : c = -7 : (-2) + (-3) : (-2) = 3,5 + 1,5 = 5 \end{aligned}$$

В случаите а) и б) даденото равенство е вярно.

Задача 4 ни дава основание да приемем, че и за рационалните числа е изпълнено

разпределителното (дистрибутивното) свойство на делението:
$$(a + b) : c = a : c + b : c, c \neq 0.$$

ЗАДАЧА 5

Пресметнете по два начина:

$$\text{а)} (-7,2 + 5,1) : (-3); \quad \text{б)} \left(1\frac{2}{7} - 3\frac{3}{7}\right) : (-3).$$

Решение:

$$\text{а)} (-7,2 + 5,1) : (-3) \quad \begin{cases} = -2,1 : (-3) = 0,7 \\ = -7,2 : (-3) + 5,1 : (-3) = 2,4 - 1,7 = 0,7 \end{cases}$$

$$\text{б)} \left(1\frac{2}{7} - 3\frac{3}{7}\right) : (-3) \quad \begin{cases} = -2\frac{1}{7} : (-3) = \frac{15}{7 \cdot 3} = \frac{5}{7} \\ = \left(\frac{9}{7} + \left(-\frac{24}{7}\right)\right) : (-3) = -\frac{9}{7 \cdot 3} + \frac{24}{7 \cdot 3} = -\frac{3}{7} + \frac{8}{7} = \frac{5}{7} \end{cases}$$

ЗАДАЧА 6

Пресметнете рационално:

$$\text{а)} -17 : 3 + 2 : 3; \quad \text{б)} -25,2 : 7 + 4,2 : 7; \quad \text{в)} -18,3 : (-5) + 3,3 : (-5).$$

Решение:

$$\text{а)} -17 : 3 + 2 : 3 = (-17 + 2) : 3 = -15 : 3 = -5$$

$$\text{б)} -25,2 : 7 + 4,2 : 7 = (-25,2 + 4,2) : 7 = -21 : 7 = -3$$

$$\text{в)} -18,3 : (-5) + 3,3 : (-5) = (-18,3 + 3,3) : (-5) = -15 : (-5) = 3$$

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете:

- а) $(3 + 1 - 8 - 1 + 5) : (-1)$;
- б) $-45 : (-11 - 10 + 15 - 3)$;
- в) $50 : (-3 - 1 + 8 + 1)$;
- г) $(16 + 5 - 9 - 1) : (-11)$.

2 Ако $x = -2; 8; -1,6; -\frac{2}{3}$, пресметнете:

- а) $A = x : (-2)$;
- б) $B = -4 : x$;
- в) $C = x : \frac{1}{3}$;
- г) $D = -x : 0,2$.

3 Пресметнете:

- а) $-36 : 4 + 2$;
- б) $18 : (-9) - 5$;
- в) $-20 + 16 : (-2)$;
- г) $15 - 20 : 5$.

4 Пресметнете по два начина:

- а) $(-35 + 25) : (-5)$;
- б) $(14 - 35) : (-7)$;
- в) $(3,2 - 2,4) : (-8)$;
- г) $\left(-\frac{5}{13} + \frac{10}{13}\right) : (-5)$.

5 Пресметнете рационално:

- а) $-19 : 3 - 2 : 3$;
 $-21 : 5 + 6 : 5$;
- б) $21 : (-2) + 19 : (-2)$;
 $-17 : (-5) - 23 : (-5)$;
- в) $5\frac{1}{3} : (-3) + 3\frac{2}{3} : (-3)$;
 $13,7 : (-3) + 7,3 : (-3)$;
- г) $-13\frac{2}{3} : (-3,1) - 17\frac{1}{3} : (-3,1)$;
 $15\frac{2}{7} : \left(-2\frac{3}{8}\right) - 16\frac{2}{7} : \left(-2\frac{3}{8}\right)$.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ НА РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 За $x = 4; -8; -0,6$ пресметнете изразите $A = -3 \cdot x$ и $B = x : (-2)$.

Решение:

$$\text{За } x = 4 \quad A = -3 \cdot x = -3 \cdot 4 = -12; \quad B = x : (-2) = 4 : (-2) = -2.$$

$$\text{За } x = -8 \quad A = -3 \cdot x = -3 \cdot (-8) = 24; \quad B = x : (-2) = -8 : (-2) = 4.$$

$$\text{За } x = -0,6 \quad A = -3 \cdot x = -3 \cdot (-0,6) = 1,8; \quad B = x : (-2) = -0,6 : (-2) = 0,3.$$

ЗАДАЧА 2 Проверете равенствата:

$$\text{а)} \frac{-7}{5} = \frac{-7 \cdot 2}{5 \cdot 2};$$

$$\text{б)} \frac{2,7}{-3} = \frac{2,7 \cdot (-10)}{-3 \cdot (-10)};$$

$$\text{в)} \frac{-17,5}{-3,5} = \frac{-17,5 : (-5)}{-3,5 : (-5)}.$$

Решение:

$$\text{а)} \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5} = -1,4$$

$$\frac{-7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{-14}{10} = -\frac{14}{10} = -1,4$$

$$\text{б)} \frac{2,7}{-3} = -\frac{2,7}{3} = -0,9$$

$$\frac{2,7 \cdot (-10)}{-3 \cdot (-10)} = \frac{-27}{30} = -\frac{27}{30} = -0,9$$

$$\text{в)} \frac{-17,5}{-3,5} = \frac{17,5}{3,5} = \frac{175}{35} = 5$$

$$\frac{-17,5 : (-5)}{-3,5 : (-5)} = \frac{3,5}{0,7} = \frac{35}{7} = 5$$

Равенствата са верни.



Частното $(-7) : 5$ за по-голяма нагледност записваме, като заменяме знака за деление с дробна черта.

Задача 2 ни дава основание да приемем, че и за рационалните числа е в сила **основното свойство на частното**:



Ако умножим или разделим делимото и делителя с едно и също рационално число, различно от нула, частното не променя стойността си.

ЗАДАЧА 3 Проверете равенството $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$, ако:

$$\text{а)} a = 3, \quad \text{б)} a = -2, \quad \text{в)} a = 5, \quad \text{г)} a = -3, \\ b = 6; \quad b = 6; \quad b = -4; \quad b = -2.$$

Решение:

$$\text{а)} |a| \cdot |b| = |3| \cdot |6| = 3 \cdot 6 = 18 \quad |a \cdot b| = |3 \cdot 6| = |18| = 18$$

$$\text{б)} |a| \cdot |b| = |-2| \cdot |6| = 2 \cdot 6 = 12 \quad |a \cdot b| = |-2 \cdot 6| = |-12| = 12$$

$$\text{в)} |a| \cdot |b| = |5| \cdot |-4| = 5 \cdot 4 = 20 \quad |a \cdot b| = |5 \cdot (-4)| = |-20| = 20$$

$$\text{г)} |a| \cdot |b| = |-3| \cdot |-2| = 3 \cdot 2 = 6 \quad |a \cdot b| = |(-3) \cdot (-2)| = |6| = 6$$

В разгледаните случаи равенството е вярно.

Решението на *Задача 3* ни дава основание да приемем, че за рационалните числа е в сила равенството

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|.$$

ЗАДАЧА 4

Проверете равенството $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$, $b \neq 0$, ако:

а) $a = 8$,	б) $a = -12$,	в) $a = 15$,	г) $a = -20$,
$b = -2$;	$b = 4$;	$b = 3$;	$b = -2$.

Решение:

а) $\frac{ a }{ b } = \frac{ 8 }{ -2 } = \frac{8}{2} = 4$	$\left \frac{a}{b} \right = \left \frac{8}{-2} \right = -4 = 4$
---	---

б) $\frac{ a }{ b } = \frac{ -12 }{ 4 } = \frac{12}{4} = 3$	$\left \frac{a}{b} \right = \left \frac{-12}{4} \right = -3 = 3$
---	--

в) $\frac{ a }{ b } = \frac{ 15 }{ 3 } = \frac{15}{3} = 5$	$\left \frac{a}{b} \right = \left \frac{15}{3} \right = 5 = 5$
--	--

г) $\frac{ a }{ b } = \frac{ -20 }{ -2 } = \frac{20}{2} = 10$	$\left \frac{a}{b} \right = \left \frac{-20}{-2} \right = 10 = 10$
---	--

В разгледаните случаи равенството е вярно.

Решението на Задача 4 ни дава основание да приемем,

че за рационалните числа е в сила равенството

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|, \quad b \neq 0.$$

ЗАДАЧА 5 Пресметнете:

а) $(-2 \cdot (-3)) : (-6)$;	б) $18 : (-3 \cdot 3)$;	в) $\frac{ -9 }{ -4 } : (21 : (-7))$.
-------------------------------	--------------------------	--

Решение:

а) $(-2 \cdot (-3)) : (-6) = 6 : (-6) = -1$

б) $18 : (-3 \cdot 3) = 18 : (-9) = -2$

в) $\frac{|-9|}{|-4|} : (21 : (-7)) = \frac{9}{4} : (-3) = \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{3}{4}$



В Задача 5-а) изразът може да се запише без външните скоби:
 $-2 \cdot (-3) : (-6)$. Удобно е действията да се извършат в тяхната последователност от ляво надясно.

ЗАДАЧИ**1** Извършете действията:

а) $-15 : 3 + 2$;	б) $-18 - 9 : 3$;
в) $-24 : 2 + 16$;	г) $17 - 7 \cdot (-2)$.

2 За $x = -2; 4; -0,6$ пресметнете:

а) $A = -5 \cdot x$;	б) $B = x : (-5)$;
в) $C = -2 \cdot x + 7$;	г) $D = 11 - 30 : x$.

3 За $x = -9$ пресметнете:

а) $A = 2 \cdot x + x : x $;	б) $B = x : -3 - x : -x $.
--------------------------------	--------------------------------

4 Проверете верността на равенството

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|, \text{ ако:}$$

а) $a = -11$, $b = 4$;

б) $a = 0,2$, $b = -5$.

5 Проверете верността на равенството

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|, \text{ ако:}$$

а) $a = 3$, $b = -12$;

б) $a = -2,5$, $b = -0,5$.

6 Пресметнете:

а) $-18 : (-9 : (-3))$;	б) $ -10 \cdot (27 : (-3))$.
----------------------------	--------------------------------

ЗАДАЧА 1 Намислих число. Умножих го с -5 и получих -305 . Кое число съм намислил?

Решение: Намисленото число е x . Тогава $x \cdot (-5) = -305$

$$x = -305 : (-5)$$

$$x = 61.$$

Намисленото число е 61 .

В Задача 1 x е неизвестен множител.



Неизвестен множител намираме, като даденото произведение разделим с известния множител.



При намиране на неизвестен множител (Задача 1) за удобство можем да използваме опорен пример: $x \cdot (-5) = -305 \rightarrow \square \cdot 2 = 6$
 $\square = 6 : 2$.

ЗАДАЧА 2 Намерете x , ако:

a) $x \cdot (-7) = 84$;

б) $-12 \cdot x = 108$;

в) $-8 \cdot x = -2$.

Решение:

a) $x \cdot (-7) = 84$

$$x = 84 : (-7)$$

$$x = -12$$

б) $-12 \cdot x = 108$

$$x = 108 : (-12)$$

$$x = -9$$

в) $-8 \cdot x = -2$

$$x = -2 : (-8)$$

$$x = \frac{1}{4}$$

ЗАДАЧА 3 Намислих число. Разделих го с -15 и получих -7 . Кое число съм намислил?

Решение: Намисленото число е x . Тогава $x : (-15) = -7$

$$x = -7 \cdot (-15)$$

$$x = 105.$$

Намисленото число е 105 .

В Задача 3 x е неизвестно делимо.

Неизвестното делимо x (Задача 3) може да се намери и като неизвестен множител: $x : (-15) = x \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)$, т.е. делимото x умножаваме с реципрочната стойност на делителя.

ЗАДАЧА 4 Намерете x като неизвестен множител, ако:

a) $x : (-12) = -6$;

б) $x : \left(-\frac{2}{3}\right) = 18$;

в) $x : 0,7 = -4$.

Решение:

a) $x : (-12) = -6$

$$x \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -6$$

$$x = -6 : \left(-\frac{1}{12}\right)$$

$$x = 72$$

б) $x : \left(-\frac{2}{3}\right) = 18$

$$x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 18$$

$$x = 18 : \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$x = -12$$

в) $x : 0,7 = -4$

$$x \cdot \frac{10}{7} = -4$$

$$x = -4 : \frac{10}{7}$$

$$x = -2,8$$

ЗАДАЧА 5 Намислих число. Разделих (-3) с намисленото число и получих 6 . Кое число съм намислил?

Решение: Намисленото число е x . Тогава

$$\begin{aligned} -3 : x &= 6 \\ 6 \cdot x &= -3 \\ x &= -3 : 6 \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отг.: Намисленото число е $-\frac{1}{2}$.

В Задача 5 намерихме x , като използвахме, че делението е обратно действие на умножението.

Намирането на неизвестен делител сведохме до намиране на неизвестен множител.

ЗАДАЧА 6

Намерете x по два начина, ако: а) $-96 : x = 16$; б) $x : \frac{1}{3} = -15$.

Решение:

а) I начин:

$$\begin{aligned} -96 : x &= 16 \\ 16 \cdot x &= -96 \\ x &= -96 : 16 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned} -96 : x &= 16 & \rightarrow | \quad 6 : \square = 2 \\ x &= -96 : 16 & \square = 6 : 2 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

б) I начин:

$$\begin{aligned} x : \frac{1}{3} &= -15 \\ x \cdot 3 &= -15 \\ x &= -15 : 3 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned} x : \frac{1}{3} &= -15 & \rightarrow | \quad \square : 2 = 3 \\ x &= -15 \cdot \frac{1}{3} & \square = 3 \cdot 2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

Намерете x , ако:

- 1 а) $3 \cdot x = 12$; б) $-3 \cdot x = 12$;
 $3 \cdot x = -12$; $-3 \cdot x = -12$;
в) $x \cdot 5 = 2$; г) $x \cdot (-5) = 2$;
 $x \cdot 5 = -2$; $x \cdot (-5) = -2$.

- 2 а) $0,2 \cdot x = 8$; б) $-0,2 \cdot x = 8$;
 $x \cdot 0,2 = -8$; $x \cdot (-0,2) = -8$;
в) $\frac{1}{3} \cdot x = \frac{1}{7}$; г) $-\frac{1}{3} \cdot x = \frac{1}{7}$;
 $x \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{7}$; $x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{7}$.

- 3 а) $x : 7 = 3$; б) $x : 7 = -3$;
 $x : (-7) = 3$; $x : (-7) = -3$;
в) $x : 5 = 1,4$; г) $x : (-5) = 1,4$;
 $x : 5 = -1,4$; $x : (-5) = -1,4$.

- 4 а) $x : 0,2 = 7$; б) $x : (-0,2) = 7$;
 $x : 0,2 = -7$; $x : (-0,2) = -7$;
в) $x : \frac{2}{3} = 1,2$; г) $x : \left(-\frac{2}{3}\right) = 1,2$;
 $x : \frac{2}{3} = -1,2$; $x : \left(-\frac{2}{3}\right) = -1,2$.

- 5 а) $3 : x = 5$; б) $-3 : x = 5$;
 $3 : x = -5$; $-3 : x = -5$;
в) $5 : x = 0,4$; г) $-5 : x = 0,4$;
 $5 : x = -0,4$; $-5 : x = -0,4$.

- 6 а) $7 : x = \frac{1}{3}$; б) $-7 : x = \frac{1}{3}$;
 $7 : x = -\frac{1}{3}$; $-7 : x = -\frac{1}{3}$;
в) $2\frac{1}{3} : x = \frac{5}{6}$; г) $-2\frac{1}{3} : x = \frac{5}{6}$;
 $2\frac{1}{3} : x = -\frac{5}{6}$; $-2\frac{1}{3} : x = -\frac{5}{6}$.

ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА.

УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Разкрийте скобите и направете приведение:

$$5 - (-8 + 3 - 2) + (-5 + 11).$$

Решение: $5 - (-8 + 3 - 2) + (-5 + 11) = \underline{5} + \underline{8} - \underline{3} + \underline{2} - \underline{5} + \underline{11} = 26 - 8 = 18$

ЗАДАЧА 2 Пресметнете:

a) $5 \cdot (-2) + 8;$

б) $-7 - 8 : 2;$

в) $-7 + 16 : \frac{1}{3} + 15 : (-3).$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & 5 \cdot (-2) + 8 = \\ & = -10 + 8 = \\ & = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & -7 - 8 : 2 = \\ & = -7 - 4 = \\ & = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & -7 + 16 : \frac{1}{3} + 15 : (-3) = \\ & = -7 + 16 \cdot 3 - 5 = \\ & = -7 + 48 - 5 = \\ & = 48 - 12 = 36 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3 Пресметнете:

а) $-18 : 2 - 3 \cdot 4 + 15$

Решение:

$$\begin{aligned} & -18 : 2 - 3 \cdot 4 + 15 = \\ & = -9 - 12 + 15 = \\ & = -21 + 15 = -6 \end{aligned}$$

б) $-18 : 2 - (3 \cdot 4 + 15)$

$$\begin{aligned} & -18 : 2 - (3 \cdot 4 + 15) = \\ & = -9 - (12 + 15) = \\ & = -9 - 27 = -36 \end{aligned}$$

в) $-18 : (2 - 3 \cdot 4 + 15)$

$$\begin{aligned} & -18 : (2 - 3 \cdot 4 + 15) = \\ & = -18 : (2 - 12 + 15) = \\ & = -18 : (17 - 12) = \\ & = -18 : 5 = -3,6 \end{aligned}$$

г) $(-18 : 2 - 3) \cdot 4 + 15$

$$\begin{aligned} & (-18 : 2 - 3) \cdot 4 + 15 = \\ & = (-9 - 3) \cdot 4 + 15 = \\ & = -12 \cdot 4 + 15 = \\ & = -48 + 15 = -33 \end{aligned}$$

д) $-18 : (2 - 3 \cdot 4) + 15$

$$\begin{aligned} & -18 : (2 - 3 \cdot 4) + 15 = \\ & = -18 : (2 - 12) + 15 = \\ & = -18 : (-10) + 15 = \\ & = 1,8 + 15 = 16,8 \end{aligned}$$

е) $-18 : (2 - (3 \cdot 4 + 15))$

$$\begin{aligned} & -18 : [2 - (3 \cdot 4 + 15)] = \\ & = -18 : [2 - (12 + 15)] = \\ & = -18 : [2 - 27] = \\ & = -18 : (-25) = \frac{18}{25} \end{aligned}$$



В Задача 3 - а) до е) в изразите участват едни и същи числа в един и същи ред. Местата на скобите променят реда на действията и стойността на изразите. Редът на действията се запазва и при рационалните числа.

ЗАДАЧА 4 Пресметнете:

a) $|-5| \cdot |-2| + |-3| \cdot \left| -\frac{2}{3} \right| - |-8|;$

б) $\left| 5 - 3 : \frac{1}{3} \right| - \left| 7 : \frac{1}{2} - 5 \right| - |-6| : |-2|.$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} & |-5| \cdot |-2| + |-3| \cdot \left| -\frac{2}{3} \right| - |-8| = \\ & = 5 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} - 8 = \\ & = 10 + 2 - 8 = \\ & = 12 - 8 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} & \left| 5 - 3 : \frac{1}{3} \right| - \left| 7 : \frac{1}{2} - 5 \right| - |-6| : |-2| = \\ & = |5 - 3 \cdot 3| - |7 \cdot 2 - 5| - 6 : 2 = \\ & = |5 - 9| - |14 - 5| - 3 = \\ & = |-4| - |9| - 3 = \\ & = 4 - 9 - 3 = \\ & = 4 - 12 = -8 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5 Намерете числената стойност на израза $A = -2 \cdot a - b : 3 + 7$, ако:

а) $a = 4, b = -9;$

б) $a = -0,5, b = 1\frac{1}{3};$

в) $a = 3,5, b = -18.$

Решение:

а) За $a = 4, b = -9$

$$A = -2 \cdot 4 - (-9) : 3 + 7 = -8 - (-3) + 7 = -8 + 3 + 7 = 2.$$

б) За $a = -0,5, b = 1\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} A &= -2 \cdot (-0,5) - 1\frac{1}{3} : 3 + 7 = \\ &= 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} + 7 = 1 - \frac{4}{9} + 7 = \frac{5}{9} + 7 = 7\frac{5}{9}. \end{aligned}$$

в) За $a = 3,5, b = -18$

$$A = -2 \cdot 3,5 - (-18) : 3 + 7 = -7 - (-6) + 7 = 6$$

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете стойността на израза по два начина: като пресметнете съборовете в скобите и като разкриете скобите:

$$\begin{aligned} \text{а)} & -27 - (13 - 5 + 8) + 9; \\ \text{б)} & -31 + (-28 + 3 - 9) + 2; \\ \text{в)} & 5,6 - (3,9 - 2,5 + 7) - 11; \end{aligned}$$

$$\text{г)} \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right) - 8.$$

Пресметнете:

2 а) $5 \cdot (-3) + 9;$

$$-18 : 2 - 6;$$

$$-5 \cdot 3 - 16 : 4;$$

$$-20 : 5 - 3 : (-1);$$

б) $-21 : 7 - 5 \cdot 2 + 3;$

$$-21 : 7 - (5 \cdot 2 + 3);$$

$$(-21 : 7 - 5) \cdot 2 + 3;$$

$$-21 : (7 - 5 \cdot 2) + 3.$$

3 а) $27 : (-3) - 6 \cdot \left(-1\frac{1}{3} \right) \cdot \left(-\frac{11}{12} \right);$

б) $-5\frac{1}{3} : 4 - 2\frac{1}{7} \cdot \left(-2\frac{1}{3} \right) \cdot (-0,6);$

в) $7 : \left(-\frac{1}{3} \right) - 5 \cdot \left(-8\frac{1}{3} \cdot 1\frac{4}{5} + 2 \right);$

г) $-3\frac{1}{3} \cdot 0,3 - 5 \cdot \left(-8 : \frac{2}{3} - 2 \cdot (-33 : 2 + 4,5) \right).$

4 а) $|7| \cdot |-3| + |-10| \cdot |-0,5| - |-9|;$

б) $\left| -\frac{1}{2} \right| \cdot |-2| + \left| +\frac{2}{3} \right| \cdot |-2| - \left| -\frac{1}{3} \right| \cdot |-1|.$

5 Пресметнете $A = -2 \cdot |x| - 5$, ако:

а) $x = 6;$ б) $x = -3;$

в) $x = 1,5;$ г) $x = -\frac{1}{2}.$

6 Намерете числената стойност на израза $A = -2 \cdot a - b : 3 + 7$, ако:

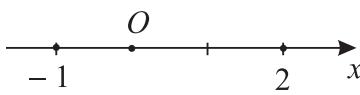
а) $a = 4, b = 9;$

б) $a = -4, b = 9;$

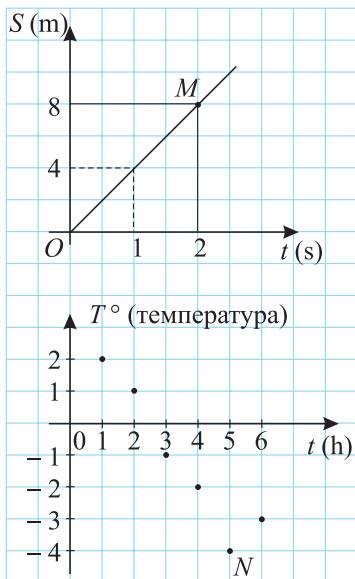
в) $a = -\frac{1}{3}, b = -5.$

ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА СИСТЕМА. КООРДИНАТИ НА ТОЧКА

Знаем, че всяко рационално число може да се изобрази с точка от числовата ос. Мястото на точката се определя от избраното число. Това число се нарича координата (определител) на съответната точка, а числовата ос – координатна ос Ox .



- Записът $A(2)$ показва, че образът на точката A върху координатната ос е на разстояние 2 м. ед. „надясно“ от точка O .
- Записът $B(-1)$ показва, че образът на точката B върху координатната ос е на разстояние 1 м. ед. „наляво“ от точка O .



ПРИМЕР 1 Мястото на посетител в киносалон се определя от две числа: ред 10 и място 6, т.е. с числата 10 и 6.

ПРИМЕР 2 Мястото на точката M върху чертежа, който онагледява праволинейно равномерно движение на едно тяло, показва, че за две секунди тялото е изминало 8 м. Мястото на точката M се определя от числата 2 и 8.

ПРИМЕР 3 На чертежа е показана температурата, измерена в първите шест часа на едно денонощие. Мястото на точката N се определя от числата 5 и -4 и показва, че в 5 часа измерената температура е -4 градуса.

Възникналата необходимост от изобразяване на мястото на една точка върху равнина е решена в математиката чрез въвеждане на декартова (правоъгълна) координатна система.



Идеята за **декартовата координатна система** принадлежи на френския философ и математик Рене Декарт (1596–1650). Той я предлага през 1637 г. в две свои съчинения: “Разсъждение за метода” и “Геометрия”.

Ако са начертани две перпендикулярни числови оси с общо начало – пресечната им точка O , и е избрана една и съща мерна единица върху двете оси, казваме, че е дадена декартова (правоъгълна) координатна система.

Означаваме Oxy (xOy).

Точката O наричаме **начало на правоъгълната координатна система**.

Оста Ox е **абсцисна ос** (хоризонтална ос).

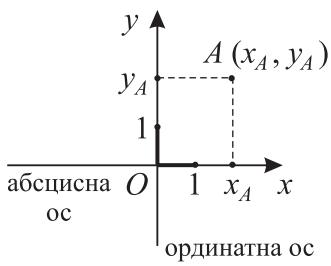
Оста Oy е **ординатна ос** (вертикална ос).

Мястото на произволна точка A се определя от числата x_A и y_A (спрямо начертана правоъгълна координатна система) и записваме:

$A(x_A; y_A)$ $\left\{ \begin{array}{l} x_A \text{ се нарича} \text{ } \text{абсциса} \text{ на точката } A, \\ y_A \text{ се нарича} \text{ } \text{ордината} \text{ на точката } A. \end{array} \right.$

Числата x_A и y_A се наричат **координати** на точката A .

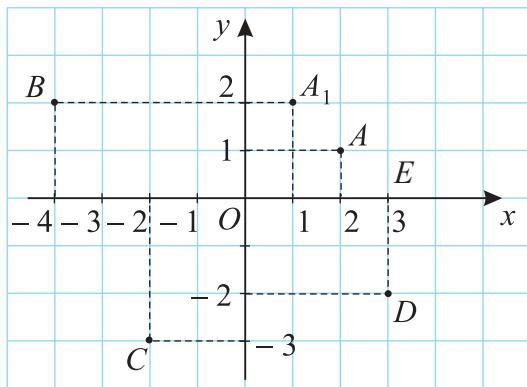
Казваме, че точката $A(x_A; y_A)$ има координати x_A и y_A .



ЗАДАЧА

Начертана е правоъгълна координатна система Oxy . Намерете координатите на отбелязаните точки A, B, C, D и E .

Решение:



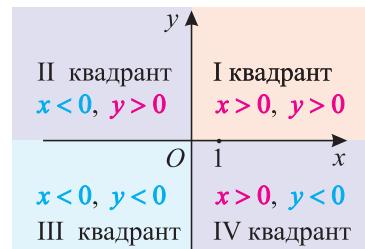
- Точката A има $\begin{cases} \text{абсциса } 2, \\ \text{ордината } 1, \end{cases}$ т.e. $A(2; 1)$.
- Точката B има $\begin{cases} \text{абсциса } -4, \\ \text{ордината } 2, \end{cases}$ т.e. $B(-4; 2)$.
- Точката C има $\begin{cases} \text{абсциса } -2, \\ \text{ордината } -3, \end{cases}$ т.e. $C(-2; -3)$.
- Точката D има $\begin{cases} \text{абсциса } 3, \\ \text{ордината } -2, \end{cases}$ т.e. $D(3; -2)$;
- Точката E има $\begin{cases} \text{абсциса } 3, \\ \text{ордината } 0, \end{cases}$ т.e. $E(3; 0)$;

Казваме, че точката A има координати $x_A = 2$ и $y_A = 1$, т.e. тя се определя с **наредената двойка** числа $(2; 1)$.

Двойките числа $(2; 1)$ и $(1; 2)$ определят различни точки $A(2; 1)$ и $A_1(1; 2)$, т.e. важно е кое число е първо и кое – второ.



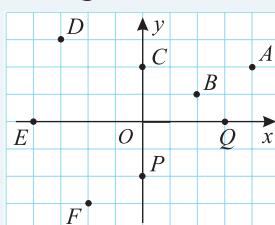
Точка A има (+) абсциса и (+) ордината, точка B има (-) абсциса и (+) ордината, точка C има (-) абсциса и (-) ордината, точка D има (+) абсциса и (-) ордината.



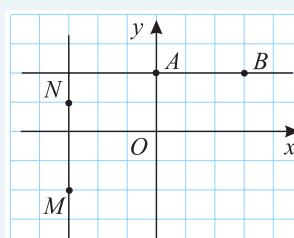
Двете координатни оси разделят равнината на четири части, наречени **квадранти** (както е показано на чертежа).

ЗАДАЧИ

- 1** Начертана е декартова координатна система Oxy . Намерете координатите на дадените точки A, B, C, D, E, F, P, Q .



- 2** Начертана е правоъгълна координатна система Oxy . Намерете координатите на точките A, B, M, N , през които са прекарани правите AB и MN .
- а) Защо правата AB е успоредна на оста Ox ?

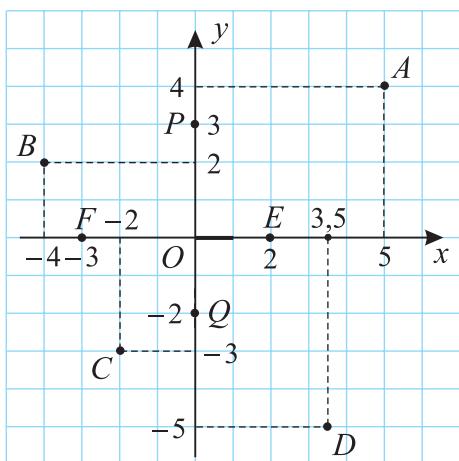


- б) Защо правата MN е успоредна на оста Oy ?
- в) Колко мерни единици е разстоянието между AB и Ox ?
- г) Колко мерни единици е разстоянието между MN и Oy ?
- 3** В кой квадрант се намира всяка от точките $A(-5; 2), B(-3,5; -2,7), C(1,3; 5,8), D(-4,5; 8), E(5,6; -2,9), F(-7,5; -4,8)$?

63.

ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА СИСТЕМА. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Върху квадратна мрежа начертайте декартова координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(5; 4)$, $B(-4; 2)$, $C(-2; -3)$, $D(3,5; -5)$, $E(2; 0)$, $F(-3; 0)$, $P(0; 3)$, $Q(0; -2)$.



Решение:

Точката $A(5; 4)$ определяме като пресечна точка на перпендикуляри:

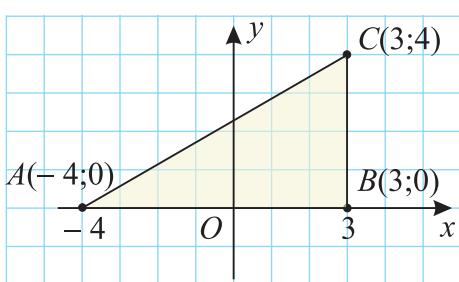
към Ox – през точката, образ на числото 5 от оста Ox ,
към Oy – през точката, образ на числото 4 от оста Oy .

По същия начин намираме местата на точките B , C и D .

Точката $E(2; 0)$ има ордината 0, т.e. тя е върху абсцисната ос Ox и съвпада с образа на числото 2 върху Ox . По същия начин намираме мястото на точката F .

Точката $P(0; 3)$ има абсциса 0, т.e. тя е върху ординатната ос Oy и съвпада с образа на числото 3 върху Oy . По същия начин намираме мястото на точката Q .

ЗАДАЧА 2 Върху квадратна мрежа начертайте декартова координатна система. Означете точките $A(-4; 0)$, $B(3; 0)$, $C(3; 4)$. Намерете лицето на $\triangle ABC$.



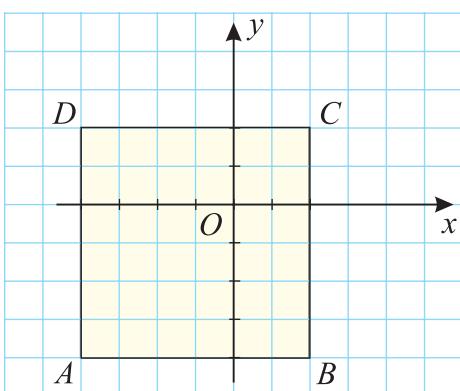
Решение: $\triangle ABC$ има прав ъгъл при върха B .

1. Катетът $AB = OA + OB =$
 $= |-4| + |3| =$
 $= 4 + 3 = 7$ м. ед.

2. Катетът $BC = 4$ м. ед.

3. Тогава $S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$
 $S = 14$ кв. м. ед.

ЗАДАЧА 3 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(-4; -4)$, $B(2; -4)$, $C(2; 2)$, $D(-4; 2)$. Намерете обиколката и лицето на фигурата $ABCD$.



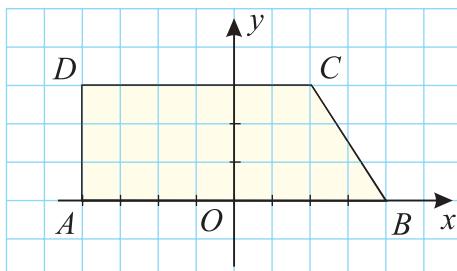
Решение:

1. $ABCD$ е квадрат.
 $AB = a = 6$ м. ед.

2. $P = 4 \cdot a$
 $P = 4 \cdot 6$
 $P = 24$ м. ед.

3. $S = a^2$
 $S = 6^2$
 $S = 36$ кв. м. ед.

- ЗАДАЧА 4** Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 3)$, $D(-4; 3)$. Намерете лицето на фигурата $ABCD$.

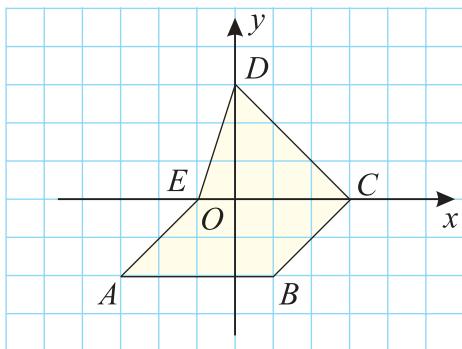


Решение:

$ABCD$ е правоъгълен трапец.

$$\begin{aligned} \text{1. } AB &= a = 8 \text{ м. ед.} & \text{2. } S &= \frac{a+b}{2} \cdot h \\ CD &= b = 6 \text{ м. ед.} & S &= \frac{8+6}{2} \cdot 3 \\ AD = h &= 3 \text{ м. ед.} & S &= 21 \text{ кв. м. ед.} \end{aligned}$$

- ЗАДАЧА 5** Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(-3; -2)$, $B(1; -2)$, $C(3; 0)$, $D(0; 3)$, $E(-1; 0)$. Намерете лицето на фигурата $ABCDE$.



Решение:

$ABCDE$ е фигура, съставена от успоредника $ABCE$ и $\triangle ECD$.

$$\begin{aligned} \text{1. } S_{\text{усп.}} &= 4 \cdot 2 \\ S_{\text{усп.}} &= 8 \text{ кв. м. ед.} \\ \text{2. } S_{\triangle} &= \frac{4 \cdot 3}{2} \\ S_{\triangle} &= 6 \text{ кв. м. ед.} \\ \text{3. } S_{\text{фиг.}} &= S_{\text{усп.}} + S_{\triangle} \\ S_{\text{фиг.}} &= 8 + 6 = 14 \\ S_{\text{фиг.}} &= 14 \text{ кв. м. ед.} \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- 1 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система. Означете точките $A(4; 2)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -3)$, $D(4; -3)$, $E(2,5; 0)$, $F(0; -2)$, $P(-3; 0)$, $Q(0; 1)$.
- 2 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(-3; -1)$, $B(4; -1)$, $C(4; 2)$, $D(-3; 2)$. Намерете обиколката и лицето на фигурата $ABCD$.
- 3 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(-2; -3)$, $B(3; -3)$, $C(2; 3)$, $D(0; 3)$. Намерете лицето на фигурата $ABCD$.
- 4 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(-1; -2)$, $B(3; -2)$, $C(3; 1)$, $D(1; 1)$, $E(1; 3)$, $F(-1; 3)$. Намерете обиколката и лицето на фигурата $ABCDEF$.
- 5 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Означете точките $A(-5; -1)$, $B(5; -1)$, $C(5; 4)$, $D(2; 4)$, $E(2; 2)$, $F(-2; 2)$, $Q(-2; 4)$, $L(-5; 4)$. Намерете обиколката и лицето на фигурата $ABCDEFQL$.

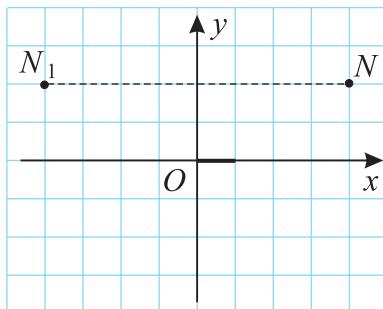
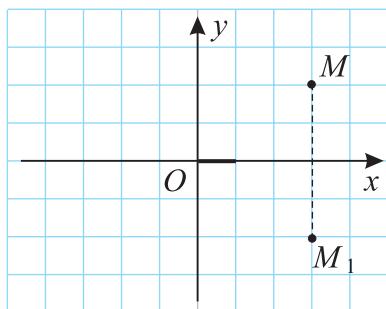
64.

ПОСТРОЯВАНЕ НА СИМЕТРИЧНИ ТОЧКИ НА ДАДЕНА ТОЧКА СПРЯМО НАЧАЛОТО И ОСИТЕ НА КООРДИНАТНАТА СИСТЕМА

ЗАДАЧА 1 Дадена е декартова координатна система Oxy и точките:

- а) M и M_1 ; б) N и N_1 .

Определете координатите на тези точки.



Решение: а) $M (3; 2)$
 $M_1 (-3; -2)$

б) $N (-4; 2)$
 $N_1 (4; -2)$



Точките M и M_1 са на равни разстояния (2 м. ед.) от оста Ox и правата MM_1 е перпендикулярна на Ox . Казваме, че точките M и M_1 са **симетрични спрямо координатната ос Ox** .

Точките N и N_1 са на равни разстояния (4 м. ед.) от оста Oy и правата NN_1 е перпендикулярна на Oy . Казваме, че точките N и N_1 са **симетрични спрямо координатната ос Oy** .

Забелязваме, че:

- **симетричните точки спрямо Ox**
имат една и съща абсциса (3 м. ед.) и
ординатите им са противоположни
числа (2 и -2);
- **симетричните точки спрямо Oy**
имат една и съща ордината (2 м. ед.)
и абсцисите им са противоположни
числа (4 и -4).

ЗАДАЧА 2 Дадена е правоъгълна координатна система Oxy . Означете точката

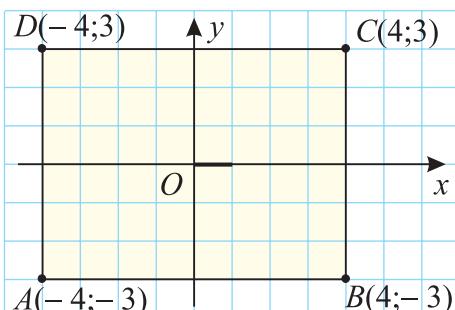
$A(-4; -3)$.

а) Намерете точките B , симетрична на A спрямо Oy ,

C , симетрична на B спрямо Ox ,

D , симетрична на A спрямо Ox .

б) Намерете обиколката P и лицето S на фигуранта $ABCD$.



Решение:

а) $A (-4; -3)$, $B (4; -3)$, $C (4; 3)$, $D (-4; 3)$

б) Точките C и D са симетрични спрямо Oy .

Фигурата $ABCD$ е правоъгълник (има 4 прави ъгъла).

1. $AB = 8$ м. ед., $AD = 6$ м. ед.

2. $P = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6$

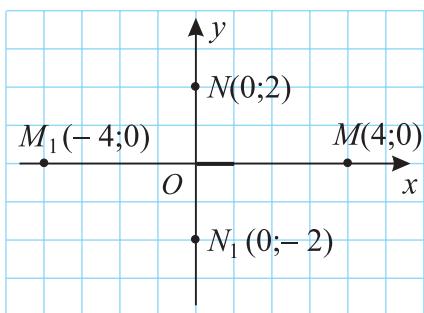
$$P = 28 \text{ м. ед.}$$

3. $S = 8 \cdot 6$

$$S = 48 \text{ кв. м. ед.}$$

ЗАДАЧА 3 Дадена е правоъгълна координатна система Oxy . Означете точките $M(4; 0)$, $M_1(-4; 0)$, $N(0; 2)$, $N_1(0; -2)$.

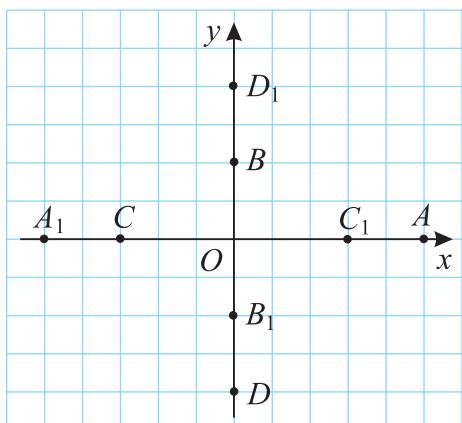
Решение:



Точките M и M_1 от оста Ox са на равни разстояния (4 м. ед.) от началото O на координатната система. Казваме, че точките M и M_1 са **симетрични спрямо точката O** .

Точките N и N_1 от оста Oy са на равни разстояния (2 м. ед.) от началото O на координатната система. Казваме, че точките N и N_1 са **симетрични спрямо точката O** .

ЗАДАЧА 4 Дадена е правоъгълна координатна система Oxy . Означете точките $A(5; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-3; 0)$, $D(0; -4)$. Намерете точките A_1 , B_1 , C_1 и D_1 , които са симетрични съответно на точките A , B , C и D спрямо точката O .



Решение:

Точката $A(5; 0)$ е от оста Ox на разстояние 5 м. ед. от точката O (надясно). Симетричната ѝ точка спрямо O е A_1 от оста Ox на разстояние 5 м. ед. от точката O (наляво) $\rightarrow A_1(-5; 0)$.

Аналогично намираме симетричните точки $C_1(3; 0)$ и $B_1(0; -2)$ спрямо началото O .

Точката $B(0; 2)$ е от оста Oy на разстояние 2 м. ед. от точката O (нагоре). Симетричната ѝ точка спрямо O е B_1 от оста Oy на разстояние 2 м. ед. от точката O (надолу) $\rightarrow B_1(0; -2)$.

Аналогично намираме симетричните точки $D_1(0; -4)$ и $A_1(-5; 0)$ спрямо началото O .



Координатите (които не са 0) на симетричните точки спрямо началото O на правоъгълната координатна система са противоположни числа.

ЗАДАЧИ

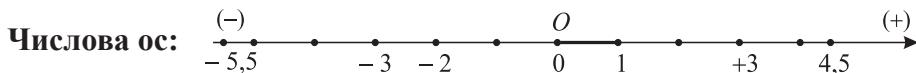
- 1** Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система.
 - а) Намерете точките $A(4; 3)$, $B(-4; 3)$, $C(-4; -3)$ и $D(4; -3)$. Кои двойки точки са симетрични спрямо координатна ос?
 - б) Намерете точките $A(4; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 0)$, $D(0; -2)$. Кои двойки точки са симетрични спрямо началото O на координатната система?
- 2** Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy . Означете точката $A(5; 2)$.
 - а) Означете точките:
 B – симетрична на A спрямо Oy ,
 C – симетрична на B спрямо Ox ,
 D – симетрична на A спрямо Ox .
 - б) Намерете обиколката P и лицето S на фигураната $ABCD$.

ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА “РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА”

ЗАПОМНЕТЕ!

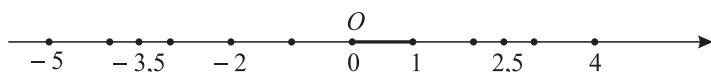
Положителни числа: $(a > 0) \rightarrow$ наличност $(+10 = 10)$

Отрицателни числа: $(a < 0) \rightarrow$ дълг (разход) (-10)



Противоположни числа: $+3$ и -3 ; a и $-a$

Наредба на числата върху числовата ос: $-5 < -3,5 < -2 < 0 < 1 < 2,5 < 4$

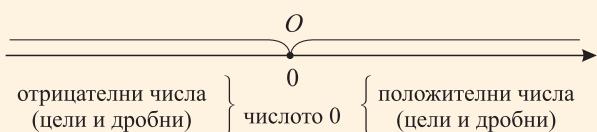


Модул (абсолютна стойност): $|a| \geq 0$; $| -5 | = 5$; $| 0 | = 0$; $| 5 | = 5$



Рационални числа:

Q



Събиране и изваждане на рационални числа:

$$2 + (-5) = 2 - 5 = -3 \quad 2 - (-5) = 2 + 5 = 7$$

$$-2 + (-5) = -2 - 5 = -7 \quad -2 - (-5) = -2 + 5 = 3$$

Алгебричен сбор: Изразът $A = 2 - 5 + 7 - 8 + 1 - 2$ е алгебричен сбор на рационалните числа $2, -5, 7, -8, 1, -2$.

$$A = \cancel{2} - \underline{5} + \cancel{7} - \underline{8} + \cancel{1} - \cancel{2} = 8 - 13 = -5$$

Свойства: $a + b = b + a$ (комутативно свойство)

$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ (асоциативно свойство)

Умножение и деление на рационални числа:

Умножение: $6 \cdot 3 = 18 \quad (-6) \cdot (-3) = 18 \quad 6 \cdot (-3) = -18 \quad (-6) \cdot 3 = -18$

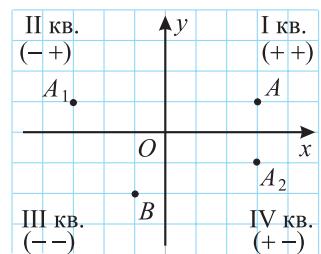
Деление: $\frac{6}{3} = 2 \quad \frac{-6}{-3} = 2 \quad \frac{6}{-3} = -2 \quad \frac{-6}{3} = -2$

Свойства: $a \cdot b = b \cdot a$ (комутативно свойство)

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ (асоциативно свойство)

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c; \quad (a + b) : c = a : c + b : c$ (дистрибутивно свойство)
($c \neq 0$)

Декартова координатна система xOy :



Ox, Oy – координатни оси:

Ox – абсцисна ос,

Oy – ординатна ос

$A(x_A; y_A)$ – координати на точка A :

x_A – абсциса на точката A ,

y_A – ордината на точката A .

$A(3; 1), \quad A_1(-3; 1), \quad B(-1; -2), \quad A_2(3; -1)$

ЗАДАЧА 1 Пресметнете стойността на израза $A = |x| - x : 3$, ако: а) $x = 21$; б) $x = -36$.

Решение: $A = |x| - x : 3$

а) За $x = 21$ $A = |21| - 21 : 3 = 21 - 7 = 14$.

б) За $x = -36$ $A = |-36| - (-36) : 3 = 36 - (-12) = 36 + 12 = 48$.

ЗАДАЧА 2 Дадени са числата $-7,5; -4\frac{1}{3}; 8; 0; -2; 5; 13\frac{1}{2}$.

Напишете числата, които: а) са положителни; б) са отрицателни;
в) не са положителни; г) не са отрицателни.

Решение:

а) $5; 8; 13\frac{1}{2}$ б) $-2; -4\frac{1}{3}; -7,5$ в) $0; -2; -4\frac{1}{3}; -7,5$ г) $0; 5; 8; 13\frac{1}{2}$



За всяко число a има три възможности:

или $a > 0$, или $a = 0$, или $a < 0$.

Ако твърдим, че $a > 0$, отрицанието на това твърдение е, че $a = 0$ или $a < 0$, т.е.

$a \leq 0$ (a е неположително число).

Ако твърдим, че $a = 0$, отрицанието на това твърдение е, че $a \neq 0$, което означава

$a > 0$ или $a < 0$.

Ако твърдим, че $a < 0$, отрицанието на това твърдение е, че $a = 0$ или $a > 0$, т.е.

$a \geq 0$ (a е неотрицателно число) и т.н.

За всеки две числа a и b има две възможности: $a = b$ и $a \neq b$.

Отрицанието на твърдението $a = b$ е $a \neq b$ и обратно.

ЗАДАЧИ

1 Изобразете върху числова ос проспите едноцифрени числа и противоположните им числа. Наредете тези числа по големина, като започнете от най-малкото.

2 Дадени са числата $-7; -5\frac{1}{3}; 7; 3,8; 0; \frac{1}{9}; -2; -4,3; -\frac{1}{6}$. Кои от тези числа са:

- а) положителни;
- б) отрицателни;
- в) неположителни;
- г) неотрицателни;
- д) по-малки от -1 ;
- е) по-големи от -5 ?

3 Пресметнете:

а) $-24 : 3 + 3; \quad 5 - 18 : 2;$
 $-7 \cdot 2 - 8 \cdot (-3); \quad -21 : 3 - 6 \cdot 4;$

б) $-5 \cdot 3 - (18 - 13 - 11);$
 $-7,6 : 2 - (8,3 - 4 - 2,9);$
 $-21 - (5 - 3 \cdot 7 - 4);$
 $-31 - (-5 \cdot 2 - 4 : 2 - 8);$

в) $-3 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right);$
 $4 : \frac{1}{3} - \left(9 \cdot \frac{1}{3} - 6 : \frac{1}{4}\right);$
 $7 \cdot \frac{2}{7} - 3 : \left(4 \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{3}{4}\right);$
 $8 : \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) - 2 \frac{1}{3}.$

4 Пресметнете $A = x : 2 - 8,3$, ако:
а) $x = -13$;

б) $x = -5,8$;

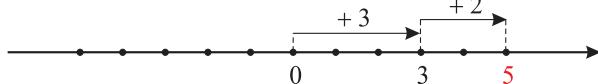
в) $x = -\frac{2}{3}$;

г) $x = -1 \frac{1}{7}$.

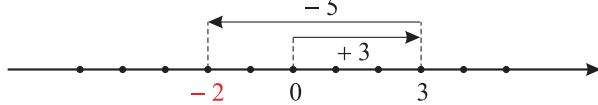
ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА “РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА”. ПРОДЪЛЖЕНИЕ

На числовата ос е показан сборът на две рационални числа:

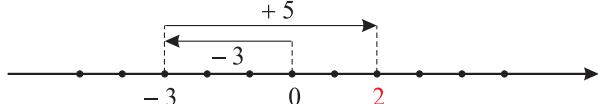
$$3 + 2 = \textcolor{red}{5}$$



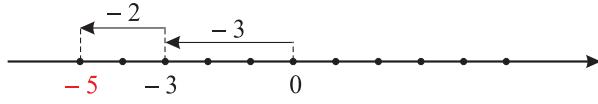
$$3 - 5 = \textcolor{red}{-2}$$



$$-3 + 5 = \textcolor{red}{+2}$$



$$-3 - 2 = \textcolor{red}{-5}$$



ЗАДАЧА 1 Напишете 4 числа, първото от които е -9 , а всяко следващо се получава, като предходното му се умножи с $\left(-\frac{1}{3}\right)$. Намерете:

- а) събира на първото и третото число;
- б) разликата на второто и третото число;
- в) произведението на първото и четвъртото число;
- г) частното на първото и третото число.

Решение: Числата са -9 ; $-9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$; $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$; $-1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

$$\text{а)} -9 + (-1) = -10 \quad \text{б)} 3 - (-1) = 4 \quad \text{в)} -9 \cdot \frac{1}{3} = -3 \quad \text{г)} \frac{-9}{-1} = 9$$



В началната образователна степен се изучават **естествените числа (N)**:

$$1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12, \dots, 100, 101, 102, \dots$$

В множеството на естествените числа действието деление невинаги е възможно: $1 : 3 = ?$ $3 : 5 = ?$ $17 : 10 = ?$

В V клас се въвеждат **дробните числа**. Те разширяват знанията за числата, като правят винаги възможно действието деление с число, различно от нула:

$$1 : 3 = \frac{1}{3}; \quad 3 : 5 = \frac{3}{5}; \quad 17 : 10 = \frac{17}{10} = 1,7.$$

Естествените и дробните числа образуват множеството на положителните числа: $\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; 1; 1,7; 2; 3; 10; 10,8; \dots$

В множеството на положителните числа действието изваждане невинаги е възможно: $3 - 5 = ?$ $1 - 2,5 = ?$ $10 - 11 = ?$

В VI клас се въвеждат **отрицателните числа**. Те разширяват знанията за числата, като правят винаги възможно действието изваждане:

$$3 - 5 = -2; \quad 1 - 2,5 = -1,5; \quad 10 - 11 = -1.$$

Всички изучени досега числа се наричат **рационални числа (Q)**.

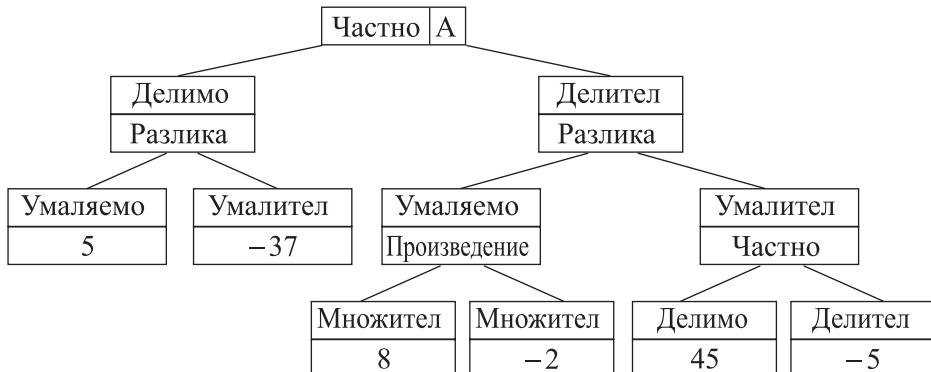
ЗАДАЧА 2 Намислих число. Умножих го с 5 пъти. Полученото число намалих със 70 и получих -35 . Кое число съм намислил?

Решение: x е намисленото число.

$$\begin{array}{l} 5 \cdot x - 70 = -35 \\ 5 \cdot x = -35 + 70 \\ 5 \cdot x = 35 \\ x = 35 : 5 \\ x = 7 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \square - 2 = 3 \\ \square = 3 + 2 \\ 2 \cdot \square = 6 \\ \square = 6 : 2 \end{array} \right.$$

Намислил съм числото 7.

ЗАДАЧА 3 По дадената схема напишете числов израз и пресметнете стойността му.



$$\begin{aligned} \text{Решение: } A &= (5 - (-37)) : (8 \cdot (-2) - 45 : (-5)) = \\ &= (5 + 37) : (-16 + 9) = \\ &= 42 : (-7) = -6 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1 Напишете 5 числа, първото от които е 5, а всяко следващо се получава, като към предходното му прибавим -4 . Намерете:

- а) сбора на първото и петото число;
- б) разликата на второто и четвъртото число;
- в) произведението на първото и третото число;
- г) частното на второто и третото число.

2 Пресметнете:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad &5,7 - (2,8 - 3,9 + 5,7); \\ &-3 \frac{1}{3} + \left(5,7 + 3 \frac{1}{3} - 8,9 \right); \\ \text{б)} \quad &\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \right); \\ &\frac{1}{3} : 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad &-18 : \frac{1}{2} - 5 : \frac{1}{3}; \\ &-3,6 : 2 - 18,3 : (-3) + 5; \\ \text{г)} \quad &\frac{-15 - 18 : 3}{-7 + 4}; \\ &-22 : 2 + 8 \cdot (-3) \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{}{4 \cdot (-2) + 5}. \end{aligned}$$

3 Пресметнете $A = -3 \cdot |x| - 5$, ако:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad &x = -7; \quad \text{б)} \quad x = 2,3; \\ \text{в)} \quad &x = -\frac{1}{3}; \quad \text{г)} \quad x = -2 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4 Начертайте в тетрадките си квадрата и го попълнете така, че да стане магически.

?	?	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1
?	?	?

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА”

1. Вярно е неравенството:
 А) $-15 > -11$;
 Б) $-17 > 2$;
 В) $3 < -18$;
 Г) $-21 < -19$.
 2. Не е вярно неравенството:
 А) $-11 > -12,3$;
 Б) $-15 > -3,2$;
 В) $| -5 | > 3$;
 Г) $-18 < | 1,3 |$.
 3. Стойността на израза
 $-| -5,2 | - 18 : (-2)$ е:
 А) $-14,2$;
 Б) $14,2$;
 В) $3,8$;
 Г) $-3,8$.
 4. Стойността на израза

$$-12 - \left(3,4 + 2\frac{1}{3} - 7 \right) + \left(5\frac{1}{3} - 2,6 + 8 \right)$$

 е:
 А) $-0,8$;
 Б) -14 ;
 В) 6 ;
 Г) 0 .
 5. Ако $x : (-2) = -8$, то $5 - x$ е:
 А) 16 ;
 Б) 11 ;
 В) -5 ;
 Г) -11 .
 6. Стойността на израза

$$\frac{-9,6 : 2 - 5,2}{\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}$$

 е:
 А) 200 ;
 Б) -200 ;
 В) $-\frac{1}{2}$;
 Г) $\frac{1}{2}$.
 7. Стойността на израза
 $A = -17 + 16 : \frac{1}{3} - 15 : (-3)$ е:
 А) $-6\frac{2}{3}$;
 Б) 46 ;
 В) 36 ;
 Г) 60 .
 8. Намерете числената стойност на израза $A = 5 \cdot x - 3 : x - 7$, ако:
 а) $x = -3$;
 б) $x = -\frac{1}{5}$.
 9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на числовия израз. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на израза със същата стойност.
- | | |
|-------------------------|---|
| (A) $-18 - 8 : 4$ | (1) $5 \cdot (-6) + -3 $ |
| | (2) $-13 - 7 \cdot (-2)$ |
| (Б) $5 \cdot (-3) - 12$ | (3) $-5 \cdot \left(-\frac{4}{15} \right) \cdot (-9) - (-3)$ |
| | (4) $8 \cdot (-3) - 2 : \left(-\frac{1}{2} \right)$ |
10. Дадена е правоъгълна координатна система Oxy и точките $A(-4; -2)$, $B(3; -2)$, $C(3; 4)$ и $D(-4; 4)$. Намерете:
 а) обиколката на $ABCD$ в мерни единици;
 б) лицето на $ABCD$ в квадратни мерни единици.

ТЕМА 3

СТЕПЕНУВАНЕ

(Урок № 68 – Урок № 85)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- действие степенуване с естествен степенен показател;
- действие степенуване с нулев и отрицателен показател;
- свойства на степените;
- стандартен запис на число;
- питагорова теорема.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да представят произведение от равни множители като степени и обратно;
- да умножават и делят степени с равни основи;
- да степенуват произведение, частно и степен;
- да пресмятат числена стойност на изрази, съдържащи степен;
- да намират неизвестна страна на правоъгълен триъгълник при дължини на страните питагорови тройки.

ДЕЙСТВИЕ СТЕПЕНУВАНЕ С ЕСТЕСТВЕН СТЕПЕНЕН ПОКАЗАТЕЛ

Сборът от равни събираме се записва по-кратко като произведение от даденото събираме и числото, което показва техния брой:

$$\underbrace{2+2+2+2+2}_{5 \text{ събирами}} = 2 \cdot 5.$$

Произведенietо от равни множители също се записва по-кратко. Приет е записът

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ множителя}} = 2^5,$$

където | 2 е числото, което умножаваме, а | 5 е числото, което показва броя на равните множители и е естествено число.

2⁵

Четем „две на степен пета“ или „две на пета степен (две на пета)“.



Произведенietо от n равни множители a , където n е естествено число, се записва a^n и се нарича **степен с основа a и естествен степенен показател n** .

Записваме $\underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ множителя}} = a^n$.

- **Числото a се нарича основа на степента.**

Основата a може да бъде естествено число, нула или дробно число.

- **Числото n се нарича степенен показател.**

Понятието “степен” въвеждаме при степенен показател, който е естествено число.

степен → a степенен показател (показател)
основа на степента (основа)

Примери: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$; $2,7 \cdot 2,7 \cdot 2,7 \cdot 2,7 = 2,7^3$; $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$.



- Степенният показател се записва с по-малки цифри, поставени вдясно и по-нагоре от основата.
- Ако основата на степента е обикновена дроб или израз, то тя се поставя в скоби.

$$a^1 = a$$

При един множител a е прието да се записва a^1 .

Примери: $5 = 5^1$; $10 = 10^1$; $0,2 = 0,2^1$.

ЗАДАЧА 1

Запишете като степен произведенietо:

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; б) $3,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5$.

Решение: а) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{7 \text{ множителя}} = 5^7$

б) $\underbrace{3,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5}_{3 \text{ множителя}} = 3,5^3$

ЗАДАЧА 2

Запишете във вид на произведение степените: а) 10^5 ; б) $0,2^3$; в)* $\left(\frac{2}{7}\right)^6$.

Решение:

а) $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

б) $0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2$

в) $\left(\frac{2}{7}\right)^6 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

ЗАДАЧА 3

Запишете, прочетете и пресметнете степента:

а) с основа $\frac{1}{2}$ и показател 4;

б) с основа 1,2 и показател 2.

Решение: а) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, една втора, цялото на четвърта степен, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

б) $1,2^2$, едно цяло и две десети на втора степен, $1,2 \cdot 1,2 = 1,44$ **Действие степенуване с естествен степенен показател**

Действието, при което се пресмята стойността на дадена степен, се нарича **степенуване**.

Да извършим действие степенуване означава да намерим произведението на n множители, равни на a .

При $n = 3$, $a = 2 \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

$0^n = 0$

Ако основата на степента е 0, степента 0^n е равна на 0.

$1^n = 1$

Ако основата на степента е 1, степента 1^n е равна на 1.Степента a^2 (a на втора) се чете и **a на квадрат**; a^3 (a на трета) се чете и **a на куб**.**ЗАДАЧА 4**

Пресметнете: а) лицето на квадрат със страна $a = 10$ см;

б) обема на куб с ръб $a = 10$ см.**Решение:**

а)



a

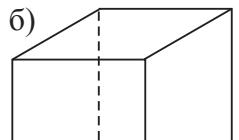
$S = a \cdot a$

$S = a^2$

$S = 10^2$

$S = 100 \text{ cm}^2$

б)



$V = a \cdot a \cdot a$

$V = a^3$

$V = 10^3$

$V = 1000 \text{ cm}^3$

$a = 10 \text{ cm}$

a

ЗАДАЧИ

1 Запишете като степен произведените ята:

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$;

б) $\underbrace{3 \cdot 3 \dots 3}_{20 \text{ множителя}}$;

в) $\underbrace{5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \dots 5 \cdot 3}_{12 \text{ множителя}}$;

г) $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7}$.

3 Извършете степенуването:

а) 8^3 ; б) 4^4 ; в) $0,2^3$;

г) $0,8^2$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; е) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$.

4 Напишете следващото число x , ако:

а) $1, 4, 9, 16, x$; б) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, x$.

5 Дадени са числата:

а) 48; б) 64; в) 252; г) 360; д) 4410.

Всяко от тези числа представете като произведение от степени с основи простите множители на числото.

2 Запишете като произведение от равни множители и пресметнете степените:

а) 5^5 ; б) 6^4 ; в) 2^9 ;

г) $3,2^3$; д) $\left(\frac{1}{5}\right)^5$; е) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$.

* Четем **две седми**, цялото на шеста.

Пресмятане на числови изрази

Когато степенният показател е числов израз,

- първо се намира числената стойност на показателя и
- след това се извършва действие степенуване.

ЗАДАЧА 1

Пресметнете степените:

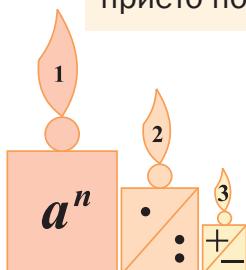
а) 5^3 ; б) $5^{2 \cdot 3 - 4}$; в) 5^{2^2} ; г) $5^{3^2 - 8}$.

Решение:

а) $5^3 = 125$ б) $5^{2 \cdot 3 - 4} = 5^{6 - 4} = 5^2 = 25$ в) $5^{2^2} = 5^4 = 625$ г) $5^{3^2 - 8} = 5^{9 - 8} = 5$



Когато степенният показател е числов израз (Задача 1-б), в), г)), не е прието показателят да се поставя в скоби.



Когато един израз съдържа степени,
първо се извършва действието степенуване.

Ако в израза има скоби, то
първо се извършват действията в скобите.

ЗАДАЧА 2

Пресметнете числената стойност на израза:

а) $30 - 4^2$; б) $\frac{1}{4} \cdot 20^2$; в) $2^2 + 5 \cdot 3^2$; г) $15 : 5^2 + 1$.

Решение:

а) $30 - 4^2 = 30 - 16 = 14$	б) $\frac{1}{4} \cdot 20^2 = \frac{1}{4} \cdot 400 = 100$
в) $2^2 + 5 \cdot 3^2 = 4 + 5 \cdot 9 = 4 + 45 = 49$	г) $15 : 5^2 + 1 = 15 : 25 + 1 = \frac{15}{25} + 1 = 1\frac{3}{5}$

ЗАДАЧА 3

Пресметнете числената стойност на израза:

а) $(6 - 2^2)^4 : 8 - 2$; б) $(208 - 3^3 \cdot (3^2 - 5)) : 10^2$.

Решение: а) $(6 - 2^2)^4 : 8 - 2 = (6 - 4)^4 : 8 - 2 = 2^4 : 8 - 2 = 16 : 8 - 2 = 2 - 2 = 0$
б) $(208 - 3^3 \cdot (3^2 - 5)) : 10^2 = (208 - 27 \cdot (9 - 5)) : 100 = (208 - 27 \cdot 4) : 100 = (208 - 108) : 100 = 100 : 100 = 1$

ЗАДАЧА 4

Пресметнете рационално:

а) $7^2 \cdot 88 + 7^2 \cdot 12$; б) $11^3 \cdot 109 - 11^3 \cdot 9$.

Решение: а) $7^2 \cdot 88 + 7^2 \cdot 12 = 7^2 \cdot (88 + 12) = 49 \cdot 100 = 4900$

б) $11^3 \cdot 109 - 11^3 \cdot 9 = 11^3 \cdot (109 - 9) = 1331 \cdot 100 = 133100$



За рационално решение на Задача 4 използваме разпределителното (дистрибутивното) свойство:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c); \quad a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c); \quad b > c.$$

Сравняване на степени с равни основи

ЗАДАЧА 5 Дадени са две степени с равни основи. Поставете верния знак: $>$, $<$, $=$.

а) 2^2 и 2^3 ; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Решение:

а) $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ От $4 < 8$ следва, че $2^2 < 2^3$.
б) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ От $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ следва, че $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Правило за сравняване на степени с равни основи:

1. Ако основата $a > 1$, то $a^1 < a^2 < a^3 < \dots$

Примери: $a = 2$ ($2 > 1$), $2^2 < 2^3 \rightarrow$ Задача 5-а) ($4 < 8$);
 $a = 5$ ($5 > 1$), $5^1 < 5^2 < 5^3 < \dots$

2. Ако основата $0 < a < 1$, то $a^1 > a^2 > a^3 > \dots$

Примери: $a = \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} < 1$), $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow$ Задача 5-б) ($\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$);
 $a = \frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3} < 1$), $\left(\frac{2}{3}\right)^1 > \left(\frac{2}{3}\right)^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^3 > \dots$

3. Ако две степени имат равни основи, различни от нула, и равни степенни показатели, то степените са равни.

Примери: $2^3 = 2^3$, защото $8 = 8$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.$$

ЗАДАЧА 6 Сравнете степените:

а) 5^{12} и 5^{13} ; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^9$ и $\left(\frac{1}{4}\right)^{16}$; в) $0,01^8$ и $0,01^8$.

Решение: а) $5^{12} < 5^{13}$ б) $\left(\frac{1}{4}\right)^9 > \left(\frac{1}{4}\right)^{16}$ в) $0,01^8 = 0,01^8$

ЗАДАЧИ

1 Пресметнете степените:

а) 2^{3+2} ; б) $7^{4 \cdot 2 - 7}$;
в) 8^{2^3-6} ; г) 10^{10-2^3} .

2 Пресметнете числовите изрази:

а) $2^3 + 2 \cdot 7^2$; б) $3^3 - 2^4 : 8$;
в) $5^3 : 125 + 10$; г) $\frac{1}{2} \cdot 6^3 - 5^3 : \left(2\frac{1}{2}\right)^2$.

3 Намерете числената стойност на изразите:

а) $(7+5^2) : 2^5 + 2 \cdot 5$;
б) $(5^2 - 2^2) \cdot (5^2 + 2^2) + 21$;
в) $2 \cdot (5^3 - (11^2 + 0,5^2)) - \left(1\frac{1}{2}\right)^2$;
г) $((3^2 - 1)^2 + (3^2 + 1)^2) : 2 - (2^3 + 1)^2$.

4 Пресметнете по два начина изразите:

а) $2 \cdot 3^5 + 8 \cdot 3^5$; б) $2^4 \cdot 18 - 2^4 \cdot 8$;
в) $3^2 \cdot 150 + 3^2 \cdot 350 + 3^2 \cdot 500$.

5 Сравнете числените стойности на двета израза:

а) $7^2 - 2^2$ и $(7-2)^2$;
б) $6^2 + 5^2$ и $(6+5)^2$.

6 Проверете верността на равенствата:

а) $3^2 + 4^2 = 5^2$;
б) $5^2 + 12^2 = 13^2$;
в) $7^2 + 24^2 = 25^2$;
г) $8^2 + 15^2 = 17^2$;
д) $(1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$;
е) $(1+2+3+4+5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.

НАМИРАНЕ НА НЕИЗВЕСТНА КОМПОНЕНТА ПРИ ДЕЙСТВИЕ СТЕПЕНУВАНЕ

Компонентите на действие степенуване са:

- основата a ;
- степенният показател n (n – естествено число);
- степента $a^n = b$.

При действие степенуване се решават три вида задачи:

I вид: $2^3 = x$, $x = ?$ | По дадена основа и степенен показател да се намери степента.

Този вид задачи се решават, като се използва определението на понятието “степен”:

$$a^n = x, \quad x = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ множителя}}; \\ 2^3 = x, \quad x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad x = 8.$$

ЗАДАЧА 1

Намерете x , ако: а) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = x$; б) $0,3^4 = x$; в) $(-2)^5 = x$.

Решение: а) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = x \quad x = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} \quad x = \frac{4}{49}$
 б) $0,3^4 = x \quad x = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0081 \quad x = 0,0081$
 в) $(-2)^5 = x \quad x = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \quad x = -32$

II вид: $2^x = 8$, $x = ?$ | По дадена основа и степен да се намери степенният показател.

Тази задача може да се реши, защото числото 8 е произведение от множители, равни на 2:

$$2^x = 8, \quad \underbrace{2 \dots 2}_{x \text{ множителя}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ множителя}}, \quad \text{т.е. } 2^x = 2^3, \quad x = 3.$$

ЗАДАЧА 2

Намерете x , ако: а) $3^x = 243$; б) $0,7^x = 0,49$; в) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{81}{625}$.

Решение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \quad 3^x = 243 & \text{б)} \quad 0,7^x = 0,49 & \text{в)} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{81}{625} \\ 3^x = 3^5 & 0,7^x = 0,7^2 & \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \\ x = 5 & x = 2 & x = 4 \end{array}$$

III вид: $x^3 = 8$, $x = ?$ | По дадени степенен показател и степен да се намери основата.

Тази задача може да се реши, защото числото 8 е произведение от 3 равни множители:

$$x^3 = 8, \quad x \cdot x \cdot x = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad x^3 = 2^3, \quad x = 2.$$

ЗАДАЧА 3

Намерете x , ако: а) $x^5 = 243$; б) $x^3 = \frac{1}{216}$.

Решение:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \quad x^5 = 243 \\ \quad \quad \quad 243 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 81 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 27 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 9 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 3 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 1 \Big| \\ \quad \quad 243 = \underline{\underline{3.3.3.3.3}} = 3^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{б)} \quad x^3 = \frac{1}{216} \\ \quad \quad \quad 216 \Big| 2 \\ \quad \quad \quad 108 \Big| 2 \\ \quad \quad \quad 54 \Big| 2 \\ \quad \quad \quad 27 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 9 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 3 \Big| 3 \\ \quad \quad \quad 1 \Big| \\ \quad \quad 216 = \underline{\underline{2.3.2.3.2.3}} = 6^3 \end{array}$$



Числото 216 е произведение от три прости множители, равни на 2, и три прости множители, равни на 3, т.е. на 3 множители, равни на $2 \cdot 3 = 6$.

ЗАДАЧА 4

Намерете числото, което трябва да се постави в празните квадратчета $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}$ на таблицата.

Решение:

1) $a^n = 5^3$, $a^n = 125$

a	5	2	?	?	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$
n	3	$\boxed{2}$?	6	7	$\boxed{5}$
a^n	$\boxed{1}$?	32	729	$\frac{1}{128}$	$\frac{16}{81}$

2) $2^n = 32$, $2^n = 2^5$, $n = 5$

$$\begin{array}{l} 729 \Big| 3 \quad 128 \Big| 2 \\ 243 \Big| 3 \quad 64 \Big| 2 \\ 81 \Big| 3 \quad 32 \Big| 2 \\ 27 \Big| 3 \quad 16 \Big| 2 \\ 9 \Big| 3 \quad 8 \Big| 2 \\ 3 \Big| 3 \quad 4 \Big| 2 \\ 1 \Big| \quad 2 \Big| 2 \\ 729 = 3^6 \quad 128 = 2^7 \end{array}$$

3) $a^6 = 729$, $a^6 = 3^6$, $a = 3$

4) $a^7 = \frac{1}{128}$, $a^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$, $a = \frac{1}{2}$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{16}{81}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^4$, $n = 4$

6) $a^n = \left(1\frac{1}{3}\right)^4$, $a^n = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81}$, $a^n = 3\frac{13}{81}$

Ако две степени са равни и имат равни основи, различни от нула, то степенните им показатели също са равни.

ЗАДАЧИ

Намерете x , ако:

1 а) $3^4 = x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = x$; в) $x = 0,2^4$; г) $x = \left(1\frac{1}{2}\right)^3$; д) $12^3 = x$.

2 а) $3^x = 81$; б) $625 = 5^x$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$; г) $0,2^x = 0,008$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{32}{243}$.

3 а) $x^3 = 125$; б) $128 = x^7$; в) $x^5 = 243$; г) $x^3 = \frac{1}{27}$; д) $x^3 = \frac{8}{27}$.

4 Запишете като степен с основа, която е просто число, следните числа:

а) 1024; б) 3125;
в) 2187; г) 2401.

5 Пречертайте таблицата в тетрадките си и попълнете празните квадратчета.

a	1,3	4	?	?	$\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$
n	3	$\boxed{2}$?	6	5	$\boxed{5}$
a^n	$\boxed{1}$?	1024	729	$\frac{1}{3125}$	$\frac{1}{2048}$

Като използваме определението за степен, получаваме:

$$\begin{array}{l} a^3 \cdot a^5 = ? \\ a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = ? \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a^3 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ множителя}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ множителя}} = \\ = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{(3+5) \text{ множителя}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{(3+5) \text{ множителя}} = a^{3+5} = a^8 \\ a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a}_{(2+3+4) \text{ множителя}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{(2+3+4) \text{ множителя}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{(2+3+4) \text{ множителя}} = a^{2+3+4} = a^9 \end{array} \right.$$



Правило:

При умножение на степени с равни основи се получава степен със същата основа и показател, равен на сбора от показателите на множителите.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^n \cdot a^m \cdot a^p = a^{n+m+p}$$

Практическо правило:

Степени с равни основи умножаваме, като пишем същата основа и съберем показателите.

Например: $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$;

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{4+5+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{12}.$$



Правилото за умножение на степени с равни основи може да се използва и във вида

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^{m+n+p} = a^m \cdot a^n \cdot a^p$$

Пример:

$$a^7 = a^{1+6} = a^1 \cdot a^6$$

$$a^7 = a^{1+2+4} = a^1 \cdot a^2 \cdot a^4$$

$$a^7 = a^{2+5} = a^2 \cdot a^5$$

$$a^7 = a^{2+2+3} = a^2 \cdot a^2 \cdot a^3$$

$$a^7 = a^{3+4} = a^3 \cdot a^4$$

$$a^7 = a^{1+1+2+3} = a^1 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3$$

ЗАДАЧА 1 Напишете и изкажете като степен произведенията:

а) $2^5 \cdot 2^2$; б) $\left(\frac{7}{8}\right)^4 \cdot \frac{7}{8}$; в) $0,1 \cdot 0,1^2 \cdot 0,1^7$; г) $10 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^{59}$.

Решение: а) 2^7 , б) $\left(\frac{7}{8}\right)^5$, в) $0,1^{10}$, г) 10^{65}

ЗАДАЧА 2 Умножете степените:

а) $10^4 \cdot 10^{12}$; б) $0,1 \cdot 0,1^{10} \cdot 0,1^{100}$; в) $17 \cdot 17^2 \cdot 17^{13}$; г) $\left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^8 \cdot \frac{3}{10}$.

Решение:

а) $10^4 \cdot 10^{12} = 10^{4+12} = 10^{16}$

б) $0,1 \cdot 0,1^{10} \cdot 0,1^{100} = 0,1^{1+10+100} = 0,1^{111}$

в) $17 \cdot 17^2 \cdot 17^{13} = 17^{1+2+13} = 17^{16}$

г) $\left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^1 = \left(\frac{3}{10}\right)^{4+8+1} = \left(\frac{3}{10}\right)^{13}$

ЗАДАЧА 3 Запишете като степен:

а) $11^3 \cdot 11^{15}$; б) $x^2 \cdot x^5$; в) $\left(\frac{a}{2}\right)^7 \cdot \frac{a}{2}$; г) $(x+1)^6 \cdot (x+1)^3$.

Решение:

а) $11^3 \cdot 11^{15} = 11^{3+15} = 11^{18}$

в) $\left(\frac{a}{2}\right)^7 \cdot \frac{a}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^{7+1} = \left(\frac{a}{2}\right)^8$

б) $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$

г) $(x+1)^6 \cdot (x+1)^3 = (x+1)^{6+3} = (x+1)^9$

ЗАДАЧА 4 Намерете x , ако ($a \neq 0$):

а) $x : a^{11} = a^5$;

б) $a^2 \cdot a^5 \cdot a^x = a^{11}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad x : a^{11} &= a^5 \\ x &= a^5 \cdot a^{11} \\ x &= a^{5+11} \\ x &= a^{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad a^2 \cdot a^5 \cdot a^x &= a^{11} \\ a^{2+5+x} &= a^{11} \\ 7+x &= 11 \\ x &= 11-7 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5 Запишете като степен с основа 2 изразите:

а) $2^3 + 7 \cdot 2^3$;

б) $6 \cdot 2^5 + 2^7 + 3 \cdot 2^6$.

Решение:

а) $2^3 + 7 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot (1+7) = 2^3 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$

б) $6 \cdot 2^5 + 2^7 + 3 \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^5 + 2^2 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2 \cdot 2^5 =$
 $= 2^5 \cdot (6+4+6) = 2^5 \cdot 16 = 2^5 \cdot 2^4 = 2^9$

ЗАДАЧИ

1 Запишете като степен произведенията:

- а) $5^7 \cdot 5^9$;
 б) $a^7 \cdot a^{22}$;
 в) $0,3^6 \cdot 0,3^5 \cdot 0,3^4$;
 г) $(a+x)^5 \cdot (a+x)^{11} \cdot (a+x)^{13}$;
 д) $2 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 2 \cdot 3^7$;
 е) $2 \cdot a \cdot (2 \cdot a)^8 \cdot (2 \cdot a)^{11}$.

2 Запишете като степен и пресметнете произведенията:

- а) $2^2 \cdot 2^3$;
 б) $0,1^3 \cdot 0,1^2$;
 в) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$;
 г) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$;
 д) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1\frac{1}{2}$.

3 Намерете x ($a \neq 0$), ако:

а) $a^x \cdot a^3 = a^{18}$;

б) $a^3 \cdot a^x \cdot a^4 = a^{15}$;

в) $x : a^2 = a^3$;

г) $x : a^3 = a^{11}$;

д) $a^x : a^3 = a^5$.

4 Намерете x ($a \neq 0$), ако:

а) $a^3 \cdot a^x \cdot a^{11} = a^5 \cdot a^{20}$;

б) $a^x \cdot a^{10} \cdot a^5 = a^3 \cdot a^{21}$;

в) $x : a^3 = a^2 \cdot a^4 \cdot a^6$;

г) $x : a^8 = a^7 \cdot a \cdot a^{11}$;

д) $a^x : a^3 = a^2 \cdot a^5$;

е) $a^9 : a^x = a^2 \cdot a^3$.

5 Запишете като степен с основа 2 изразите:

а) $3 \cdot 2^9 - 2^{10}$;

б) $12 \cdot 2^3 + 2^5$;

в) $5 \cdot 2^7 + 3 \cdot 2^7$;

г) $11 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^5$;

д) $9 \cdot 2^8 + 7 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^6 \cdot 2^2$;

е) $6 \cdot 2^5 + 2^4 + 3 \cdot 2^{3^2-5}$.

Нека $a \neq 0$. Като използваме определението за степен, получаваме:

$$a^5 : a^2 = ? \quad \frac{a^5}{a^2} = \frac{\cancel{a}^1 \cdot \cancel{a}^1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^1}{\cancel{a}^1 \cdot \cancel{a}^1} = a^3, \quad \text{т.e. } \frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3;$$

$$a^2 : a^2 = ? \quad \frac{a^2}{a^2} = \frac{\cancel{a}^1 \cdot \cancel{a}^1}{\cancel{a}^1 \cdot \cancel{a}^1} = 1, \quad \text{или } \frac{a^2}{a^2} = 1;$$

$$a^2 : a^5 = ? \quad \frac{a^2}{a^5} = \frac{\cancel{a}^1 \cdot \cancel{a}^1}{\cancel{a}^1 \cdot \cancel{a}^1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^1} = \frac{1}{a^3}, \quad \text{т.e. } \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^{5-2}} = \frac{1}{a^3}.$$



Правило:

- При $a \neq 0$ $a^n : a^m = ?$
- ако $n > m$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
 - ако $n = m$, $\frac{a^n}{a^n} = 1$;
 - ако $n < m$, $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$,

където m и n са естествени числа.

ЗАДАЧА 1

Пресметнете:

а) $3^{19} : 3^{17}$; б) $13^7 : 13^7$; в) $7^{17} : 7^{19}$.

Решение:

а) $\frac{3^{19}}{3^{17}} = 3^{19-17} = 3^2 = 9$ б) $\frac{13^7}{13^7} = 1$ в) $\frac{7^{17}}{7^{19}} = \frac{1}{7^{19-17}} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ЗАДАЧА 2

Представете като степен частното:

а) $(5 \cdot a)^{13} : (5 \cdot a)^8$; б) $\left(\frac{x}{7}\right)^{14} : \left(\frac{x}{7}\right)^9$;
в) $(3 \cdot x \cdot y)^{23} : (3 \cdot x \cdot y)^{20}$; г) $(a+b)^{18} : (a+b)^{12}$.

Решение:

а) $(5 \cdot a)^{13} : (5 \cdot a)^8 = (5 \cdot a)^{13-8} = (5 \cdot a)^5$ б) $\left(\frac{x}{7}\right)^{14} : \left(\frac{x}{7}\right)^9 = \left(\frac{x}{7}\right)^{14-9} = \left(\frac{x}{7}\right)^5$
в) $(3 \cdot x \cdot y)^{23} : (3 \cdot x \cdot y)^{20} = (3 \cdot x \cdot y)^{23-20} = (3 \cdot x \cdot y)^3$ г) $(a+b)^{18} : (a+b)^{12} = (a+b)^{18-12} = (a+b)^6$

ЗАДАЧА 3

Представете като степен с основа x ($x \neq 0$) изразите:

а) $\frac{x^7 \cdot x^5}{x^9}$; б) $\frac{x^{31} \cdot x}{x^3 \cdot x^8 \cdot x^{10}}$.

Решение:

а) $\frac{x^7 \cdot x^5}{x^9} = \frac{x^{7+5}}{x^9} = \frac{x^{12}}{x^9} = x^{12-9} = x^3$ б) $\frac{x^{31} \cdot x}{x^3 \cdot x^8 \cdot x^{10}} = \frac{x^{31+1}}{x^{3+8+10}} = \frac{x^{32}}{x^{21}} = x^{32-21} = x^{11}$

ЗАДАЧА 4 Пресметнете:

a) $\frac{7^3 \cdot 3^5}{3^5 \cdot 7^2}$; б) $\frac{3^3 \cdot 3^8}{3^{12}}$; в) $\frac{40 \cdot 5^3}{5 \cdot 2^4}$; г) $\frac{32 \cdot 49}{2^5 \cdot 7^5}$.

Решение:

а) $\frac{7^3 \cdot 3^5}{3^5 \cdot 7^2} = \frac{3^5}{3^5} \cdot 7^{3-2} = 1 \cdot 7 = 7$

б) $\frac{3^3 \cdot 3^8}{3^{12}} = \frac{3^{11}}{3^{12}} = \frac{1}{3^{12-11}} = \frac{1}{3}$

в) $\frac{40 \cdot 5^3}{5 \cdot 2^4} = \frac{2^3 \cdot \cancel{5}^1 \cdot 5^3}{\cancel{5}^1 \cdot 2^4} = \frac{5^3}{2^{4-3}} = \frac{125}{2} = 62 \frac{1}{2}$

г) $\frac{32 \cdot 49}{2^5 \cdot 7^5} = \frac{2^5 \cdot 7^2}{2^5 \cdot 7^5} = \frac{2^5}{2^5} \cdot \frac{1}{7^{5-2}} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$

ЗАДАЧА 5 Намерете x ($a \neq 0$), ако:

а) $a^5 \cdot x = a^{11}$;

б) $a^{10} : x = a^3$;

в) $x : 7^{15} = \frac{1}{7^{14}}$.

Решение:

а) $a^5 \cdot x = a^{11}$

б) $a^{10} : x = a^3$

в) $x : 7^{15} = \frac{1}{7^{14}}$

$$x = \frac{a^{11}}{a^5}$$

$$x = \frac{a^{10}}{a^3}$$

$$x = \frac{1}{7^{14}} \cdot 7^{15}$$

$$x = a^{11-5}$$

$$x = a^{10-3}$$

$$x = \frac{7^{15}}{7^{14}}$$

$$x = a^6$$

$$x = a^7$$

$$x = 7$$

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

1

а) $7^{15} : 7^{13}$;

б) $0,8^9 : 0,8^7$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{21} : \left(\frac{2}{3}\right)^{18}$;

г) $\left(1\frac{1}{6}\right)^{31} : \left(1\frac{1}{6}\right)^{29}$.

2

а) $3^7 : 3^9$;

б) $0,3^9 : 0,3^{11}$;

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^{27} : \left(\frac{3}{7}\right)^{29}$;

г) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{18} : \left(2\frac{1}{3}\right)^{20}$.

3

а) $\frac{2^7 \cdot 2^5}{2^{10}}$;

б) $\frac{3^7 \cdot 3^2}{3^6 \cdot 3^3}$;

в) $\frac{5^8 \cdot 5^2}{5^5 \cdot 5^3}$;

г) $\frac{7^{26} \cdot 7^3}{7^{20} \cdot 7^8}$.

4

а) $\frac{2^7 \cdot 5^8}{2^5 \cdot 5^7}$;

б) $\frac{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^9}{2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^8}$;

в) $\frac{2^8 \cdot 3^{11} \cdot 3^7}{2^6 \cdot 3^{16}}$;

г) $\frac{5^7 \cdot 7^{15} \cdot 7^{13}}{5^6 \cdot 7^{20} \cdot 7^7}$.

5 Пресметнете стойността на частното:

а) $x^{17} : x^{12}$ за $x = 2$;

б) $x^{23} : x^{20}$ за $x = 3$;

в) $x^{33} : x^{30}$ за $x = 1\frac{1}{2}$;

г) $x^{15} : x^{18}$ за $x = 0,1$.

6 Представете като степен частното ($x \neq 0$):

а) $\frac{x^8 \cdot x^5}{x^9}$;

б) $\frac{2^{15} \cdot x^8}{2^4 \cdot x^7 \cdot x}$;

в) $\frac{x^{20} \cdot x^7}{x^3 \cdot x^5 \cdot x^{13}}$;

г) $\frac{27 \cdot 2^6 \cdot x^7 \cdot x^8}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot x^5}$.

7 Намерете x , ако:

а) $x \cdot 7^7 = 7^9$;

б) $11^{20} : x = 11^{18}$;

в) $x : 3^8 = \frac{1}{3^7}$;

г) $5^7 \cdot x = 5^9 \cdot 5^2$.

НАМИРАНЕ НА ЧИСЛЕНА СТОЙНОСТ НА ИЗРАЗИ, СЪДЪРЖАЩИ СТЕПЕНИ

ЗАДАЧА 1

Пресметнете: а) $\frac{160 \cdot 2^7}{5 \cdot 2^9}$; б) $\frac{128 \cdot 5^2 \cdot 5^3}{625 \cdot 2^2 \cdot 2^5}$.

Решение:

$$\text{а)} \frac{\cancel{160} \cdot 2^7}{\cancel{5} \cdot 2^9} = \frac{32 \cdot 2^7}{2^9} = \frac{2^5 \cdot 2^7}{2^9} = \frac{2^{12}}{2^9} = 2^{12-9} = 2^3 = 8$$

$$\text{б)} \frac{128 \cdot 5^2 \cdot 5^3}{625 \cdot 2^2 \cdot 2^5} = \frac{\cancel{2^7} \cdot 5^5}{\cancel{5^4} \cdot \cancel{2^7}} = 5^{5-4} = 1 \cdot 5 = 5$$



В Задача 1-б) $\frac{2^7}{2^7} = 1$. Тогава можем да съкратим на 2^7 .

ЗАДАЧА 2

Представете като степен с основа 2 израза:

$$\text{а)} (2^{15} : 2^7 + 2^8) : 2^5 + 2^4; \quad \text{б)} (3^2 \cdot 3^4 + 3^5 : 3^2) : 3^3 + 2^5 : 2^3.$$

Решение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} (2^{15} : 2^7 + 2^8) : 2^5 + 2^4 = & \text{б)} (3^2 \cdot 3^4 + 3^5 : 3^2) : 3^3 + 2^5 : 2^3 = \\ = (2^8 + 2^8) : 2^5 + 2^4 = & = (3^6 + 3^3) : 3^3 + 2^2 = \\ = (2 \cdot 2^8) : 2^5 + 2^4 = & = 3^6 : 3^3 + 3^3 : 3^3 + 2^2 = \\ = 2^9 : 2^5 + 2^4 = & = 3^3 + 1 + 4 = \\ = 2^4 + 2^4 = & = 27 + 1 + 4 = \\ = 2 \cdot 2^4 = & = 32 = \\ = 2^5 & \end{array}$$



При решаване на Задача 2-б) използваме правилото за деление на сбор: $(a + b) : c = a : c + b : c$ ($c \neq 0$). Задачата може да се реши и по други начини.

ЗАДАЧА 3

Пресметнете стойността на израза $A = \frac{x^{15} \cdot x^{17}}{x^{30}} + 1$, ако:

$$\text{а)} x = 6; \quad \text{б)} x = \frac{1}{3}; \quad \text{в)} x = 0,5; \quad \text{г)} x = 1\frac{1}{3}.$$

$$\text{Решение: } A = \frac{x^{15} \cdot x^{17}}{x^{30}} + 1 = \frac{x^{32}}{x^{30}} + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow A = x^2 + 1$$

$$\text{а) За } x = 6 \quad A = x^2 + 1 = 6^2 + 1 = 37,$$

$$\text{б) за } x = \frac{1}{3} \quad A = x^2 + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = 1\frac{1}{9},$$

$$\text{в) за } x = 0,5 \quad A = x^2 + 1 = 0,5^2 + 1 = 0,25 + 1 = 1,25,$$

$$\text{г) за } x = 1\frac{1}{3} \quad A = x^2 + 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{16}{9} + 1 = 1\frac{7}{9} + 1 = 2\frac{7}{9}.$$

ЗАДАЧА 4

Изразете x ($a \neq 0$) като степен на a и намерете числената му стойност за $a = \frac{1}{2}$:

а) $x : a^2 = a^{11} : a^9;$

б) $\frac{a^9}{a^3} \cdot x = a^{15} : a^7;$

в) $\frac{a^{25}}{a^{12}} : x = a^7 \cdot a^3.$

Решение:

а) $x : a^2 = a^{11} : a^9$

б) $\frac{a^9}{a^3} \cdot x = a^{15} : a^7$

в) $\frac{a^{25}}{a^{12}} : x = a^7 \cdot a^3$

$x : a^2 = a^2$

$a^6 \cdot x = a^8$

$a^{13} : x = a^{10}$

$x = a^2 \cdot a^2$

$x = a^8 : a^6$

$x = a^{13} : a^{10}$

$x = a^4$

$x = a^2$

$x = a^3$

3а $a = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{16}.$

3а $a = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{4}.$

3а $a = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{8}.$

ЗАДАЧА 5

Покажете, че числовият израз:

а) $A = 2^{17} + 2^{16} + 2^{15}$ се дели на 7;

б) $B = 3^{20} + 3^{18} + 3^{17}$ е кратно на 31.

Решение:

а) $A = 2^{17} + 2^{16} + 2^{15} =$
 $= 2^{15} \cdot 2^2 + 2^{15} \cdot 2^1 + 2^{15} =$
 $= 2^{15} \cdot (2^2 + 2^1 + 1) =$
 $= 2^{15} \cdot 7$

 A се дели на 7.

б) $B = 3^{20} + 3^{18} + 3^{17} =$
 $= 3^{17} \cdot 3^3 + 3^{17} \cdot 3^1 + 3^{17} \cdot 1 =$
 $= 3^{17} \cdot (3^3 + 3^1 + 1) =$
 $= 3^{17} \cdot 31$

 B е кратно на 31.

При решаване на Задача 5 използваме дистрибутивното (разпределителното) свойство: $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$.

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

1 а) $\frac{2^7 \cdot 3^8}{2^6 \cdot 3^7};$ б) $\frac{3^5 \cdot 5^{11}}{81 \cdot 5^4 \cdot 5^7};$
 в) $\frac{64 \cdot 7^3 \cdot 7^{11}}{2^7 \cdot 7^6 \cdot 7^7};$ г) $\frac{125 \cdot 11^3 \cdot 11^8}{5^2 \cdot 11^4 \cdot 11^6}.$

2 а) $2^3 + 3^8 : 3^5;$
 б) $3^{11} : 3^8 - 2^3;$
 в) $\frac{2^8 \cdot 3^2}{2^5};$
 г) $\frac{2^3 \cdot 3^{13}}{3^{15}}.$

3 Представете като степен с основа 3 израза:

а) $(5^6 + 5^4) : 5^4 + 7^8 : 7^8;$
 б) $(7^{15} + 7^{13}) : 7^{13} + 2^5 - 1;$
 в) $(2^8 + 2^9) : 2^5 - 3 \cdot 5^{2^2-3}.$

4 Намерете x , ако:

а) $x \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 5^7;$

б) $5^7 : x = 5^5 \cdot 5^3;$

в) $x : 5^8 = \frac{1}{5^7};$

г) $5^{11} : 5^2 = x \cdot 5^3 \cdot 5^5.$

5 Пресметнете стойността на израза:

а) $A = \frac{x^{13} \cdot y^{25}}{x^{12} \cdot y^{23}}$ за $x = 1,2; y = 5;$

б) $B = \frac{3 \cdot x^7 \cdot y^6}{2 \cdot x^5 \cdot y^4}$ за $x = 3; y = \frac{2}{3};$

в) $C = \frac{2 \cdot x^5 \cdot x^3 \cdot y^8}{3 \cdot x^6 \cdot y^2 \cdot y^9}$ за $x = 3; y = 2;$

г) $D = \frac{3 \cdot x^8 \cdot y^4 \cdot y^5}{5 \cdot x^7 \cdot x^3 \cdot y^7}$ за $x = \frac{1}{2}; y = 5.$

6 Покажете, че:

а) $2^{17} + 2^{15}$ се дели на 5;

б) $3^{18} + 3^{16}$ се дели на 10;

в) $5^{40} + 5^{38} + 5^{37}$ се дели на 31;

г) $3^{30} + 3^{29} + 3^{28}$ се дели на 13.

Като използваме определението за степен и комутативното свойство на умножението, получаваме:

$$\begin{array}{l} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^3 = ? \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^4 = ? \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^3 = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\text{3 множителя}} \cdot \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\text{3 множителя}} \cdot \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\text{3 множителя}} = \\ = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}_{\text{3 множителя}} \cdot \underbrace{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}_{\text{3 множителя}} = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{b}^3; \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^4 = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\text{4 множителя}} \cdot \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\text{4 множителя}} \cdot \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\text{4 множителя}} \cdot \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\text{4 множителя}} = \\ = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}_{\text{4 множителя}} \cdot \underbrace{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}_{\text{4 множителя}} = \mathbf{a}^4 \cdot \mathbf{b}^4 \text{ и т.н.} \end{array} \right.$$

Забелязваме, че $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{b}^3$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^4 = \mathbf{a}^4 \cdot \mathbf{b}^4$, ...

По този начин можем да обосновем следното правило.



Правило за степенуване на произведение

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^n = \mathbf{a}^n \cdot \mathbf{b}^n$$

Като използваме това правило, можем да степенуваме и произведение на повече от два множителя:

$$(\underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}_{\text{n множители}})^n = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^n \cdot \mathbf{c}^n = \mathbf{a}^n \cdot \mathbf{b}^n \cdot \mathbf{c}^n.$$

Следователно при решаване на задачи за степенуване на произведение можем да изкажем следното правило.



Практическо правило

Произведение се степенува, като се степенува всеки от множителите:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d})^n = \mathbf{a}^n \cdot \mathbf{b}^n \cdot \mathbf{c}^n \cdot \mathbf{d}^n.$$

Примери: $(8 \cdot 17)^7 = 8^7 \cdot 17^7$; $(0,9 \cdot 0,018)^5 = 0,9^5 \cdot 0,018^5$.

ЗАДАЧА 1

Представете като произведение на степени изразите:

- | | | |
|----------------------|------------------------------|---|
| a) $(5 \cdot a)^2$; | b) $(0,3 \cdot b)^3$; | c) $\left(\frac{2}{3} \cdot c\right)^4$; |
| г) $(2 \cdot c)^5$; | д) $(2 \cdot a \cdot b)^3$; | е) $(3 \cdot a \cdot b \cdot c)^2$. |

Решение:

- | | |
|--|--|
| a) $(5 \cdot a)^2 = 5^2 \cdot a^2$ | b) $(0,3 \cdot b)^3 = 0,3^3 \cdot b^3$ |
| в) $\left(\frac{2}{3} \cdot c\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot c^4$ | г) $(2 \cdot c)^5 = 2^5 \cdot c^5$ |
| д) $(2 \cdot a \cdot b)^3 = 2^3 \cdot a^3 \cdot b^3$ | е) $(3 \cdot a \cdot b \cdot c)^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ |

При пресмятане на произведение от степени с равни показатели е удобно правилото за степенуване на произведение да се използва и във вида

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Примери: $0,2^4 \cdot 15^4 = (0,2 \cdot 15)^4 = 3^4 = 81$;
 $22^2 \cdot 0,5^2 = (22 \cdot 0,5)^2 = 11^2 = 121$.

ЗАДАЧА 2 Представете като степен произведенията:

a) $27 \cdot x^3$;

б) $64 \cdot a^3 \cdot b^3$.

Решение:

a) $27 \cdot x^3 = 3^3 \cdot x^3 = (3 \cdot x)^3$

б) $64 \cdot a^3 \cdot b^3 = 4^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = (4 \cdot a \cdot b)^3$

ЗАДАЧА 3 Пресметнете по рационален начин:

а) $2^3 \cdot 5^3$; б) $0,25^{71} \cdot 4^{71}$; в) $5^{15} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{15}$; г) $24^6 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^6$.

Решение:

а) $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$

б) $0,25^{71} \cdot 4^{71} = (0,25 \cdot 4)^{71} = 1^{71} = 1$

в) $5^{15} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{15} = \left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)^{15} = 1^{15} = 1$

г) $24^6 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^6 = \left(24 \cdot \frac{1}{12}\right)^6 = 2^6 = 64$

ЗАДАЧА 4 Пресметнете:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{50} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{50} + 2^3$; б) $\left(\frac{16}{51}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{48}\right)^2 \cdot 18^2$.

Решение:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{50} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{50} + 2^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{50} + 2^3 = 1^{50} + 8 = 1 + 8 = 9$

б) $\left(\frac{16}{51}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{48}\right)^2 \cdot 18^2 = \left(\frac{\cancel{16}}{\cancel{51}} \cdot \frac{\cancel{17}}{\cancel{48}}\right)^2 \cdot 18^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot (9 \cdot 2)^2 = \frac{1}{9^2} \cdot 9^2 \cdot 2^2 = 4$

ЗАДАЧИ

1 Представете като произведение на степени изразите:

а) $(7 \cdot a)^3$; б) $(0,5 \cdot b)^4$;
 в) $\left(\frac{2}{5} \cdot m\right)^5$; г) $(5 \cdot n)^7$;
 д) $(a \cdot b \cdot c)^5$; е) $(3 \cdot a \cdot b^2)^6$.

2 Представете като степен произведенията:

а) $32 \cdot x^5$; б) $27 \cdot x^3$;
 в) $243 \cdot c^5$; г) $125 \cdot b^3$.

3 Пресметнете по рационален начин:

а) $4^3 \cdot 25^3$; б) $17^5 \cdot \left(\frac{1}{34}\right)^5$;
 в) $0,5^6 \cdot 2^6$; г) $0,25^3 \cdot 16^3$.

4 Намерете x , ако:

а) $x \cdot 10^3 = 4^5 \cdot 2,5^5$;
 б) $x \cdot 2^7 \cdot 5^7 = 0,4^9 \cdot 25^9$;
 в) $x \cdot 19^5 \cdot \left(\frac{1}{38}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$;

г) $x \cdot 3^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 2^5 \cdot 2^9$.

5 Как се изменя лицето на квадрат, ако страната му се увеличи:

а) 3 пъти; б) 7 пъти?

6 Как се изменя лицето на квадрат, ако страната му се намали:

а) 2 пъти; б) 3 пъти?

Нека $b \neq 0$. Като използваме определението за степен и правилото за умножаване на дроби, получаваме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^3 &= ? & \left(\frac{a}{b}\right)^3 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}; \\ \left(\frac{a}{b}\right)^4 &= ? & \left(\frac{a}{b}\right)^4 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^4}{b^4} \quad \text{и т.н.} \end{aligned}$$

Забелязваме, че $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$, ...

По този начин можем да обосновем следното правило.



Правило за степенуване на частно

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Следователно при решаване на задачи за степенуване на частно можем да изкажем следното правило.



Практическо правило

Частно се степенува, като се степенуват делимого и делителя.

Примери: $\left(\frac{12}{13}\right)^5 = \frac{12^5}{13^5}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{3^7}{4^7}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{10} = \frac{1^{10}}{7^{10}}$.

ЗАДАЧА 1

Представете като частно на степени изразите:

а) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; б) $\left(\frac{7}{8}\right)^2$; в) $\left(\frac{2 \cdot a}{3}\right)^5$; г) $\left(\frac{1}{2 \cdot m}\right)^7$, $m \neq 0$.

Решение:

а) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
 в) $\left(\frac{2 \cdot a}{3}\right)^5 = \frac{(2 \cdot a)^5}{3^5} = \frac{2^5 \cdot a^5}{3^5} = \frac{32 \cdot a^5}{243}$

б) $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7^2}{8^2} = \frac{49}{64}$
 г) $\left(\frac{1}{2 \cdot m}\right)^7 = \frac{1^7}{(2 \cdot m)^7} = \frac{1}{2^7 \cdot m^7} = \frac{1}{128 \cdot m^7}$

При пресмятане на частни от степени с равни показатели в някои случаи е удобно да се използва правилото за степенуване на частно и във вида

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0.$$

Примери: $\frac{27^3}{54^3} = \left(\frac{27}{54}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $0,5^6 = \left(\frac{5}{10}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

ЗАДАЧА 2 Представете като степен:

a) $\frac{a^3}{27}$; б) $\frac{32 \cdot x^5}{3125}$.

Решение:

a) $\frac{a^3}{27} = \frac{a^3}{3^3} = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ б) $\frac{32 \cdot x^5}{3125} = \frac{2^5 \cdot x^5}{5^5} = \frac{(2 \cdot x)^5}{5^5} = \left(\frac{2 \cdot x}{5}\right)^5$

3125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

ЗАДАЧА 3 Пресметнете по рационален начин:

a) $\frac{45^4}{15^4}$; б) $\frac{16^3}{32^3}$; в) $\frac{0,12^3}{0,024^3}$; г) $0,125^2$.

Решение:

a) $\frac{45^4}{15^4} = \left(\frac{45}{15}\right)^4 = 3^4 = 81$ б) $\frac{16^3}{32^3} = \left(\frac{16}{32}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
в) $\frac{0,12^3}{0,024^3} = \left(\frac{0,12}{0,024}\right)^3 = \left(\frac{120}{24}\right)^3 = 5^3 = 125$ г) $0,125^2 = \left(\frac{125}{1000}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

ЗАДАЧА 4 Намерете x , ако:

a) $x : 3^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$; б) $x \cdot 3^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$; в) $x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^6$.

Решение:

a) $x : 3^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ б) $x \cdot 3^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ в) $x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^6$
 $x : 3^5 = \frac{2^5}{3^5}$ $x = \frac{3^3}{4^3} : 3^2$ $x = \frac{3^6}{4^6} : \frac{3^5}{4^5}$
 $x = \frac{2^5 \cdot 3^5}{3^5 \cdot 3^5}$ $x = \frac{3^3}{4^3 \cdot 3^2}$ $x = \frac{3^6}{4^6 \cdot 3^5}$
 $x = 32$ $x = \frac{3}{64}$ $x = \frac{3}{4}$

ЗАДАЧИ**1** Представете като частно от степени изразите:

а) $\left(\frac{17}{19}\right)^{20}$; б) $\left(\frac{12}{13}\right)^8$;
в) $\left(\frac{1}{19}\right)^{11}$; г) $\left(\frac{3 \cdot m}{5}\right)^{12}$.

2 Представете като степен:

а) $\frac{16}{81}$; б) $\frac{256}{6561}$; в) $\frac{x^5}{243}$; г) $\frac{16 \cdot x^4}{625}$.

3 Извършете степенуването ($a \neq 0$, $b \neq 0$):

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; б) $\left(\frac{6}{a}\right)^2$;
в) $\left(\frac{2 \cdot a}{b}\right)^5$; г) $\left(\frac{3 \cdot a}{5 \cdot b}\right)^3$.

4 Пресметнете по рационален начин:

а) $\frac{8^4}{16^4}$; б) $0,25^4$;
в) $\left(\frac{0,15}{0,015}\right)^5$; г) $\left(\frac{5^2 \cdot 5^6}{5^7}\right)^3$.

5 Намерете x , ако:

а) $x : \left(\frac{2}{5}\right)^7 = 5^3 \cdot 5^4$;
б) $x : \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5$;
в) $x \cdot \frac{10^{23}}{5^{23}} = \frac{26^{27}}{13^{27}}$;
г) $\frac{0,75^9}{0,25^9} : x = \frac{18^7}{6^7}$.

Като използваме определението за степен и правилото за умножаване на степени с равни основи, получаваме:

$$\begin{array}{l} (\mathbf{a}^2)^3 = ? \\ (\mathbf{a}^5)^4 = ? \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} (\mathbf{a}^2)^3 = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^{2+2+2} = \mathbf{a}^{3 \cdot 2} = \mathbf{a}^6; \\ (\mathbf{a}^5)^4 = \mathbf{a}^5 \cdot \mathbf{a}^5 \cdot \mathbf{a}^5 \cdot \mathbf{a}^5 = \mathbf{a}^{5+5+5+5} = \mathbf{a}^{4 \cdot 5} = \mathbf{a}^{5 \cdot 4} = \mathbf{a}^{20} \text{ и т.н.} \end{array} \right.$$

Забелязваме, че $(\mathbf{a}^2)^3 = \mathbf{a}^{2 \cdot 3}$, $(\mathbf{a}^5)^4 = \mathbf{a}^{5 \cdot 4}$, ...

По този начин можем да обосновем следното правило.



Правило за степенуване на степен

$$(\mathbf{a}^m)^n = \mathbf{a}^{m \cdot n}, \quad m, n - \text{естествени числа}$$

Следователно при решаване на задачи за степенуване на степен можем да изкажем следното правило.



Практическо правило

Степен се степенува, като се пише същата основа и се умножат показателите.

$$(\mathbf{a}^m)^n = (\mathbf{a}^n)^m = \mathbf{a}^{m \cdot n}$$

ЗАДАЧА 1

(Устно) Извършете степенуването:

$$\text{а)} (2^5)^6; \quad \text{б)} (5^{12})^3; \quad \text{в)} (a^7)^8; \quad \text{г)} (a^6)^{10}.$$

Отговор: а) 2^{30} , б) 5^{36} , в) a^{56} , г) a^{60}

ЗАДАЧА 2

Представете 2^{36} във вид на степен с основа:

$$\text{а)} 2^2; \quad \text{б)} 2^3; \quad \text{в)} 2^6; \quad \text{г)} 2^9.$$

Решение:

$$\text{а)} 2^{36} = (2^2)^{18} \quad \text{б)} 2^{36} = (2^3)^{12} \quad \text{в)} 2^{36} = (2^6)^6 \quad \text{г)} 2^{36} = (2^9)^4$$

При пресмятане на степени в някои случаи е удобно правилото за степенуване на степен да се използва и във вида

$$\mathbf{a}^{m \cdot n} = (\mathbf{a}^m)^n = (\mathbf{a}^n)^m. \quad \text{Пример: } \left(\frac{2}{3} \right)^6 = \left(\frac{2}{3} \right)^{2 \cdot 3} = \left(\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right)^3 = \left(\frac{4}{9} \right)^3 = \frac{64}{729} \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^6 = \left(\frac{2}{3} \right)^{3 \cdot 2} = \left(\left(\frac{2}{3} \right)^3 \right)^2 = \left(\frac{8}{27} \right)^2 = \frac{64}{729}.$$

ЗАДАЧА 3

Като използвате правилото за степенуване на степен, пресметнете:

$$\text{а)} 3^4; \quad \text{б)} 2^8; \quad \text{в)} 3^6; \quad \text{г)} 5^6.$$

Решение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} 3^4 = 3^{2 \cdot 2} = (3^2)^2 = 9^2 = 81 & \text{б)} 2^8 = 2^{4 \cdot 2} = (2^4)^2 = 16^2 = 256 \\ \text{в)} 3^6 = 3^{3 \cdot 2} = (3^3)^2 = 27^2 = 729 & \text{г)} 5^6 = 5^{3 \cdot 2} = (5^3)^2 = 125^2 = 15\,625 \end{array}$$

ЗАДАЧА 4 Представете 5^{30} във вид на степен с основа: а) 5^5 ; б) 25.

Решение: а) $5^{30} = 5^{5 \cdot 6} = (5^5)^6$ б) $5^{30} = 5^{2 \cdot 15} = (5^2)^{15} = 25^{15}$

ЗАДАЧА 5 Намерете x , ако: а) $(2^x)^3 = (2^6)^5$; б) $(5^3)^x = (5^7)^9$.

Решение: а) $(2^x)^3 = (2^6)^5$
 $2^{3 \cdot x} = 2^{30}$
 $3 \cdot x = 30$
 $x = 10$

б) $(5^3)^x = (5^7)^9$
 $5^{3 \cdot x} = 5^{63}$
 $3 \cdot x = 63$
 $x = 21$

ЗАДАЧА 6 Намерете x , ако:

а) $(2^x)^2 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$; б) $3^x \cdot (3^2)^3 = 3 \cdot 27 \cdot 81$; в) $5^x : 5^2 = 125 \cdot 625$ ($x > 2$).

Решение:

а) $(2^x)^2 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$
 $2^{2 \cdot x} = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$
 $2^{2 \cdot x} = 2^{1+2+3+4}$
 $2^{2 \cdot x} = 2^{10}$
 $2 \cdot x = 10$
 $x = 5$

б) $3^x \cdot (3^2)^3 = 3 \cdot 27 \cdot 81$
 $3^x \cdot 3^6 = 3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$
 $3^{x+6} = 3^{1+3+4}$
 $3^{x+6} = 3^8$
 $x+6 = 8$
 $x = 2$

в) $5^x : 5^2 = 125 \cdot 625$
 $5^{x-2} = 5^3 \cdot 5^4$
 $5^{x-2} = 5^{3+4}$
 $x-2 = 7$
 $x = 9$

ЗАДАЧА 7 Намерете x , ако:

а) $(7^3)^5 \cdot x = (7^4)^4$; б) $x \cdot (2^6)^7 = (2^{11})^4$; в) $(5^8)^9 : x = (5^7)^{10}$.

Решение:

а) $(7^3)^5 \cdot x = (7^4)^4$
 $7^{15} \cdot x = 7^{16}$
 $x = \frac{7^{16}}{7^{15}}$
 $x = 7^{16-15}$
 $x = 7^1$
 $x = 7$

б) $x \cdot (2^6)^7 = (2^{11})^4$
 $x \cdot 2^{42} = 2^{44}$
 $x = \frac{2^{44}}{2^{42}}$
 $x = 2^{44-42}$
 $x = 2^2$
 $x = 4$

в) $(5^8)^9 : x = (5^7)^{10}$
 $5^{72} : x = 5^{70}$
 $x = \frac{5^{72}}{5^{70}}$
 $x = 5^{72-70}$
 $x = 5^2$
 $x = 25$

ЗАДАЧИ

1 Запишете като степен:

а) $(7^2)^5$; б) $(0,6^8)^3$;
в) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^4$; г) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{10}$.

2 Като използвате правилото за степенуване на степен, пресметнете:

а) 5^4 ; б) 3^6 ; в) 2^{10} ; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^8$.

3 Представете 7^{40} като степен с основа:
а) 7²; б) 7⁴; в) 7⁸; г) 7¹⁰.

4 Представете 2^{48} като степен с основа:
а) 4; б) 8; в) 16; г) 64.

5 Намерете x , ако:

а) $(2^5)^9 \cdot x = (2^6)^8$;
б) $(3^7)^8 : x = (3^{11})^5$;
в) $x : (2^3)^7 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^4$;
г) $x \cdot (7^8)^9 = (7^{14})^5$.

6 Намерете x , ако:

а) $(5^x)^3 = (5^6)^2$;
б) $(7^2)^x = (7^5)^8$;
в) $(11^3)^{15} = (11^x)^5$;
г) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^6$.

ЗАДАЧА 1 Пресметнете:

$$\text{а)} \frac{(3^2)^3 \cdot 2^2}{9^2}; \quad \text{б)} \frac{(2^3 \cdot 2^2)^2 \cdot (3^3)^4}{(6^2)^5}; \quad \text{в)} \frac{14^3 \cdot 3^5}{21^2 \cdot (2^2)^2}.$$

Решение:

$$\text{а)} \frac{(3^2)^3 \cdot 2^2}{9^2} = \frac{3^6 \cdot 2^2}{(3^2)^2} = \frac{3^6 \cdot 2^2}{3^4} = 3^{6-4} \cdot 2^2 = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\text{б)} \frac{(2^3 \cdot 2^2)^2 \cdot (3^3)^4}{(6^2)^5} = \frac{(2^5)^2 \cdot 3^{12}}{6^{10}} = \frac{2^{10} \cdot 3^{12}}{(2 \cdot 3)^{10}} = \frac{2^{10} \cdot 3^{12}}{2^{10} \cdot 3^{10}} = 3^{12-10} = 3^2 = 9$$

$$\text{в)} \frac{14^3 \cdot 3^5}{21^2 \cdot (2^2)^2} = \frac{(2 \cdot 7)^3 \cdot 3^5}{(3 \cdot 7)^2 \cdot 2^4} = \frac{2^3 \cdot 7^3 \cdot 3^5}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 2^4} = \frac{7^{3-2} \cdot 3^{5-2}}{2^{4-3}} = \frac{7 \cdot 3^3}{2} = \frac{7 \cdot 27}{2} = 94,5$$

ЗАДАЧА 2

Пресметнете стойността на израза $A = \frac{x^{13} \cdot y^{25}}{x^{12} \cdot y^{23}}$ за $x = 1,2$; $y = 2^3 - 3$.

Решение:

$$\text{1. } A = \frac{x^{13} \cdot y^{25}}{x^{12} \cdot y^{23}} = x^{13-12} \cdot y^{25-23} = x \cdot y^2$$

$$\text{2. } y = 2^3 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$\text{3. } A = x \cdot y^2 = 1,2 \cdot 5^2 = 1,2 \cdot 25 = 30.$$

ЗАДАЧА 3 Съкратете дробите ($a \neq 0$):

$$\text{а)} \frac{2^{15} \cdot 3^{14} \cdot 25^6}{8^4 \cdot 9^7 \cdot 5^{14}}; \quad \text{б)} \frac{2^{19} \cdot (3 \cdot a^2)^{15}}{9^8 \cdot (4 \cdot a^3)^9}.$$

Решение:

$$\text{а)} \frac{2^{15} \cdot 3^{14} \cdot 25^6}{8^4 \cdot 9^7 \cdot 5^{14}} = \frac{2^{15} \cdot 3^{14} \cdot (5^2)^6}{(2^3)^4 \cdot (3^2)^7 \cdot 5^{14}} = \frac{2^{15} \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}} = \frac{2^{15-12}}{5^{14-12}} = \frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}$$

$$\text{б)} \frac{2^{19} \cdot (3 \cdot a^2)^{15}}{9^8 \cdot (4 \cdot a^3)^9} = \frac{2^{19} \cdot 3^{15} \cdot (a^2)^{15}}{(3^2)^8 \cdot (2^2)^9 \cdot (a^3)^9} = \frac{2^{19} \cdot 3^{15} \cdot a^{30}}{3^{16} \cdot 2^{18} \cdot a^{27}} = \frac{2^{19-18} \cdot a^{30-27}}{3^{16-15}} = \frac{2 \cdot a^3}{3}$$

ЗАДАЧА 4

Опростете израза $A = \left(\frac{2 \cdot a^3}{b^4}\right)^2 : \left(\frac{a^5}{4 \cdot b^3}\right)^3$ ($a \neq 0, b \neq 0$).

Решение:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2 \cdot a^3}{b^4}\right)^2 : \left(\frac{a^5}{4 \cdot b^3}\right)^3 = \frac{(2 \cdot a^3)^2}{(b^4)^2} : \frac{(a^5)^3}{(4 \cdot b^3)^3} = \frac{2^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (2^2)^3 \cdot (b^3)^3}{(b^4)^2 \cdot (a^5)^3} = \\ &= \frac{2^2 \cdot a^6 \cdot 2^6 \cdot b^9}{b^8 \cdot a^{15}} = \frac{2^{2+6} \cdot b^{9-8}}{a^{15-6}} = \frac{2^8 \cdot b}{a^9} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5

Пресметнете по два начина числената стойност на израза $A = \frac{5^7 + 4 \cdot 5^6}{5^2 \cdot 5^4}$.

Решение:

$$\text{I начин: } A = \frac{5^7 + 4 \cdot 5^6}{5^2 \cdot 5^4} = \frac{5^{6+1} + 4 \cdot 5^6}{5^{2+4}} = \frac{5^6 \cdot 5 + 4 \cdot 5^6}{5^6} = \frac{5^6 \cdot (5+4)}{5^6} = 9$$

$$\text{II начин: } A = \frac{5^7 + 4 \cdot 5^6}{5^2 \cdot 5^4} = \frac{5^7 + 4 \cdot 5^6}{5^6} = \frac{5^7}{5^6} + \frac{4 \cdot 5^6}{5^6} = 5^{7-6} + 4 = 5 + 4 = 9$$

ЗАДАЧА 6

Пресметнете числената стойност на израза:

$$\text{a) } A = \frac{7 \cdot 2^9 + 2^8}{9 \cdot 2^8 - 2^{10}}; \quad \text{б) } B = \frac{3^7 + 3^6 - 4 \cdot 3^5}{3^6 + 3^5}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{7 \cdot 2^9 + 2^8}{9 \cdot 2^8 - 2^{10}} = \\ &= \frac{7 \cdot 2^{8+1} + 2^8}{9 \cdot 2^8 - 2^{8+2}} = \\ &= \frac{7 \cdot 2^8 \cdot 2 + 2^8}{9 \cdot 2^8 - 2^8 \cdot 2^2} = \\ &= \frac{2^8 \cdot (14+1)}{2^8 \cdot (9-4)} = \frac{15}{5} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } B &= \frac{3^7 + 3^6 - 4 \cdot 3^5}{3^6 + 3^5} = \\ &= \frac{3^5 \cdot 3^2 + 3^5 \cdot 3 - 4 \cdot 3^5}{3^5 \cdot 3 + 3^5} = \\ &= \frac{\cancel{3^5}(3^2 + 3 - 4)}{\cancel{3^5}(3+1)} = \\ &= \frac{12 - 4}{4} = 3 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ**1** Извършете степенуването:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (5^8)^{10}; & \text{б) } (6^3)^7; \\ \text{в) } (a^4)^5; & \text{г) } (2 \cdot a^3)^7; \\ \text{д) } (5^3 \cdot a^4 \cdot b^5)^3; & \text{е) } \left(\frac{3^7 \cdot a^2 \cdot b}{5^4} \right)^5. \end{array}$$

2 Представете като степен ($b \neq 0$):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } m^2 \cdot n^4; & \text{б) } 64 \cdot a^{12}; \\ \text{в) } 125 \cdot a^6 \cdot b^{12}; & \text{г) } a^5 : b^{10}; \\ \text{д) } \frac{3^2 \cdot a^4 \cdot b^4}{5^2}; & \text{е) } \frac{x^8}{16 \cdot b^4}. \end{array}$$

3 Пресметнете:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{2^6 \cdot 2^{11} \cdot 2^4}{2^7 \cdot 2^{12}}; & \text{б) } \frac{7^{15} \cdot 7^3 \cdot 7^7}{7^4 \cdot 7^{18} \cdot 7^6}; \\ \text{в) } \frac{9^6 \cdot 3^3}{27^2 \cdot 3^8}; & \text{г) } \frac{5^4 \cdot 25^3}{(5^3)^3}. \end{array}$$

4 Пресметнете:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{9^7 \cdot 36^5}{3^{13} \cdot 6^{10}}; & \text{б) } \frac{15^6 \cdot 25^4}{5^{13} \cdot 3^3}; \\ \text{в) } \frac{49^5 \cdot 6^{11}}{21^9 \cdot 2^{10} \cdot 3^2}; & \text{г) } \frac{12^3 \cdot 9^2 \cdot 5^4}{8^2 \cdot 15^4}. \end{array}$$

5 Опростете изразите:

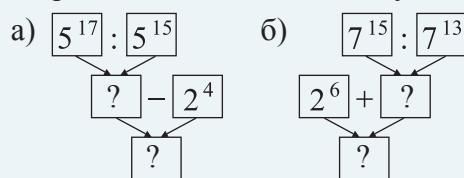
$$\begin{array}{ll} \text{а) } \left(\frac{3 \cdot x^2}{4 \cdot y} \right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot y}{3 \cdot x} \right)^3, & x \neq 0, y \neq 0; \\ \text{б) } \left(\frac{8 \cdot a^3}{9 \cdot b^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{27 \cdot b^3}{16 \cdot a^4} \right)^2, & a \neq 0, b \neq 0. \end{array}$$

6 Пресметнете по два начина:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{7^7 + 7^6}{7^6}; & \text{б) } \frac{7^5 - 7^4}{7^3 \cdot 7}; \\ \text{в) } \frac{3^9 + 3^8 + 3^7}{3^4 \cdot 3^3}; & \text{г) } \frac{5^5 + 5^6 + 5^7}{5^2 \cdot 5^3}. \end{array}$$

7 Пресметнете:

$$\text{а) } \frac{2^8 + 2^9 + 2^{10}}{2^{10} - 2^9}; \quad \text{б) } \frac{7 \cdot 2^9 + 2^8}{9 \cdot 2^9 - 2^{10}}.$$

8 По дадената схема съставете израз и пресметнете стойността му:

Произведението $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ може да се запише като степен $(-2)^4$. Основата на степента е отрицателно число и се поставя в скоби, защото

$$(-2)^4 \neq -2^4 \quad \begin{cases} (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16; \\ -2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 1

Извършете степенуването:

а) $(-3)^2$; б) $(-2)^4$; в) $(-3)^3$; г) $(-2)^5$.

Решение:

а) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

$(-3)^2 = +9$

б) $(-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{\text{четен}} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{\text{четен}} = 4 \cdot 4 = 16$

$(-2)^4 = +16$

в) $(-3)^3 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{\text{нечетен}} \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$

$(-3)^3 = -27$

г) $(-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{\text{четен}} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{\text{четен}} \cdot (-2) = 4 \cdot 4 \cdot (-2) = -32 \quad (-2)^5 = -32$



Степен с основа отрицателно число и показател

| n , който е четно число, е положително число (Задача 1-а, б));

| n , който е нечетно число, е отрицателно число (Задача 1-в, г)).

ЗАДАЧА 2

(Устно) Определете знака на степента:

а) $(-21)^5$; б) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{10}$; в) $(-1,5)^{15}$; г) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Отговор: а) (−), б) (+), в) (−), г) (+)

Познатите правила за степените с показател n – естествено число, са в сила както при положителна основа, така и при отрицателна основа.



Свойства на степените с показател естествено число

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n, \quad a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^n} = 1, \quad a \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}, \quad n < m, \quad a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Свойствата на степените са равенства, които могат да се прилагат и така:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m \text{ и т.н.}$$

ЗАДАЧА 3

Запишете като степен произведенията:

а) $(-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^5$; б) $-64 \cdot a^3 \cdot b^3$; в) $-16 \cdot (a^2)^2 \cdot b \cdot b^3$.

- Решение:**
- $(-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^5 = (-1)^{2+3+5} = (-1)^{10}$
 - $-64 \cdot a^3 \cdot b^3 = (-4)^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = (-4 \cdot a \cdot b)^3$
 - $-16 \cdot (a^2)^2 \cdot b \cdot b^3 = -2^4 \cdot a^4 \cdot b^4 = -(2 \cdot a \cdot b)^4$

ЗАДАЧА 4 Пресметнете:

- $\left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot 2^3;$
- $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^3;$
- $\frac{(-3)^2 \cdot (-2)^5 \cdot (-1)^2}{(-2)^3 \cdot 9 \cdot (-1)^3}.$

Решение:

- $\left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot 2^3 = \frac{(-3)^2}{4^2} \cdot 2^3 = \frac{9 \cdot 2^3}{2^4} = \frac{9}{2} = 4,5$
- $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -2^3 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = 0$
- $\frac{(-3)^2 \cdot (-2)^5 \cdot (-1)^2}{(-2)^3 \cdot 9 \cdot (-1)^3} = \frac{3^2 \cdot (-2^5) \cdot 1}{-2^3 \cdot 3^2 \cdot (-1)} = \frac{-3^2 \cdot 2^5}{2^3 \cdot 3^2} = -2^2 = -4$



При пресмятане на изрази (Задача 4-б)) следваме реда на действията: степенуване, умножение (деление) и събиране (изваждане).

ЗАДАЧА 5 Намерете числената стойност на израза $A = x^3 - 3x + 2$, ако:

- $x = 2$;
- $x = -2$.

Решение: $A = x^3 - 3x + 2$

- За $x = 2$ $A = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$.
- За $x = -2$ $A = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$.

ЗАДАЧА 6 Разстоянието от Слънцето до Земята е приблизително $1,5 \cdot 10^8$ km, а от Слънцето до планетата Уран е около $2,9 \cdot 10^9$ km. Колко пъти това разстояние е по-голямо от разстоянието Земя – Слънце?

Решение: $\frac{2,9 \cdot 10^9}{1,5 \cdot 10^8} = \frac{2,9 \cdot 10}{1,5} \approx 1,9 \cdot 10 = 19$

Разстоянието Уран – Слънце е приблизително 19 пъти по-голямо от разстоянието Земя – Слънце.

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

1 а) $(-2)^3 - (-3)^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$;
в) $(-3)^2 - (-3)^3$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

2 а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3^4$;
б) $\frac{(-2)^3 \cdot (-8)^2}{(-4)^5}$;
в) $-3^3 : (-2)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2^3$;
г) $\frac{(-2)^5 + (-2)^3}{(-2)^3}$.

3 Намерете числената стойност на израза $A = 5 - x^3$, ако:

- $x = 1$;
- $x = 2$;
- $x = -2$;
- $x = -3$.

4 Намерете числената стойност на израза $A = -x^3 - 2x^2$, ако:

- $x = 2$;
- $x = -2$;
- $x = \frac{1}{2}$;
- $x = -\frac{1}{2}$.

5 Намерете числената стойност на израза $A = x^4 - x^3 + 2$, ако:

- $x = 2$;
- $x = -2$;
- $x = -3$;
- $x = -1$.

СТЕПЕН С НУЛЕВ ПОКАЗАТЕЛ И СТЕПЕН С ЦЯЛ ПОКАЗАТЕЛ

При $n = 1$ по определение $a^1 = a$. Това равенство е вярно и когато основата на степента е отрицателно число.

Примери: $(-2)^1 = -2$; $(-0,3)^1 = -0,3$.

Степен с нулев показател

Знаем, че $\frac{a^5}{a^5} = 1$. От друга страна, $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$.

Знаем, че $\frac{a^{21}}{a^{21}} = 1$. От друга страна, $\frac{a^{21}}{a^{21}} = a^{21-21} = a^0$.



Прието е под a^0 , $a \neq 0$, да разбираме числото едно.

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

ЗАДАЧА 1 Като използвате степените на числото 10, запишете като сбор числото 2507.

Решение: $2507 = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

ЗАДАЧА 2 Запишете с едно число сума

$$3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Отг.: 3 045

За да представим едно число като сбор чрез степените на 10, цифрата на единиците умножаваме с $10^0 (= 1)$.

Степен с цял отрицателен показател

Знаем, че $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$. От друга страна, $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$.

Знаем, че $\frac{a^7}{a^{10}} = \frac{1}{a^{10-7}} = \frac{1}{a^3}$. От друга страна, $\frac{a^7}{a^{10}} = a^{7-10} = a^{-3}$.



Прието е под a^{-n} да разбираме числото $\frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$),
където n е цяло число.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

ЗАДАЧА 3 Запишете като степен с цял показател и основа цяло число дробите:

а) $\frac{1}{2^3}, \frac{1}{7^5}$; б) $\frac{3^2}{3^2}, \frac{11^5}{11^5}$; в) $\frac{2^3}{2^{-2}}$; г) $\frac{4^{-8}}{4^2}$.

Решение: а) $2^{-3}, 7^{-5}$ б) $3^0, 11^0$ в) $2^{3-(-2)} = 2^5$ г) $4^{-8-2} = 4^{-10}$

ЗАДАЧА 4

Запишете като степен с основа 10 числата: а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{100}$; в) $\frac{1}{1000}$.

Решение: а) $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ б) $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ в) $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

ЗАДАЧА 5 Като използвате степените на числото 10, запишете като сбор числото 36,28.

Решение: $36,28 = 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100} = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$

ЗАДАЧА 6 Запишете като степен:

а) с положителен показател $3^{-4}, 5^{-1}, 3^2 \cdot 3^{-5}, \frac{3^{-2}}{5^{-2}}$;

б) с отрицателен показател $\frac{1}{2^3}, \frac{1}{5^9}, \left(\frac{1}{3}\right)^7, \frac{2^5}{3^5}$.

Решение:

а) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad 5^{-1} = \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 \quad 3^2 \cdot 3^{-5} = 3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad \frac{3^{-2}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

б) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3} \quad \frac{1}{5^9} = 5^{-9} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{3^7} = 3^{-7} \quad \frac{2^5}{3^5} = \frac{3^{-5}}{2^{-5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

ЗАДАЧА 7 Запишете като обикновена дроб числата:

а) $2^{-1}; \quad$ б) $3^{-1}; \quad$ в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}; \quad$ г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}.$

Решение:

а) $2^{-1} = \frac{1}{2} \quad$ б) $3^{-1} = \frac{1}{3} \quad$ в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \quad$ г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$



Когато степенният показател е -1 (Задача 7), при степенуването се получава реципрочното число на основата на степента.



Свойства на степените с цял показател

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^1 = a$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

ЗАДАЧИ

1 Запишете чрез степените на числото 10 числата:

а) 285; б) 3 004;
в) 12 560; г) 135,627.

2 Запишете с едно число съборовете:

а) $9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0;$
б) $1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 +$
 $+ 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0;$
в) $5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2};$
г) $7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1}.$

3 Запишете като степен на цяло число:

а) $\frac{1}{3^2}, \quad \frac{1}{5^8}; \quad$ б) $\frac{8^3}{8^{-1}}, \quad \frac{7^2}{7^3}.$

4 Запишете като степен:

а) с положителен показател $2^{-5}, 3^{-4}, 5^{-8};$

б) с отрицателен показател $\frac{1}{2^4}, \frac{1}{3^7}, \left(\frac{1}{2}\right)^5.$

5 Запишете като обикновена дроб:

а) $4^{-3}, 2^{-1}; \quad$ б) $5^{-1}, 5^{-2};$
в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \left(-\frac{1}{2}\right)^3; \quad$ г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$

6 Запишете като степен с показател -1 :

а) $\frac{1}{7}, \frac{1}{11}; \quad$ б) 4, 8.

ЗАДАЧА 1 Опростете и запишете като степен с основа цяло число изразите:

$$\text{а)} \frac{3^0 \cdot 3 \cdot 9^3}{(-81)^2}; \quad \text{б)} \frac{5^2 \cdot (-25)^3}{5^0 \cdot 5^4 \cdot 125^2}; \quad \text{в)} \frac{(-2)^3 \cdot 8 \cdot (-16)}{2^4 \cdot 2^{-4} \cdot (-2)^4}.$$

Решение:

$$\text{а)} \frac{3^0 \cdot 3 \cdot 9^3}{(-81)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot (3^2)^3}{(3^4)^2} = \frac{3 \cdot 3^6}{3^8} = 3^{7-8} = 3^{-1}$$

$$\text{б)} \frac{5^2 \cdot (-25)^3}{5^0 \cdot 5^4 \cdot (5^3)^2} = \frac{5^2 \cdot (-1)^3 \cdot 25^3}{5^0 \cdot 5^4 \cdot (5^3)^2} = -\frac{5^2 \cdot 5^6}{1 \cdot 5^4 \cdot 5^6} = -5^{2-4} = -5^{-2}$$

$$\text{в)} \frac{(-2)^3 \cdot 8 \cdot (-16)}{2^4 \cdot 2^{-4} \cdot (-2)^4} = \frac{-2^3 \cdot 2^3 \cdot (-2^4)}{1 \cdot 2^4} = \frac{2^{10}}{2^4} = 2^{10-4} = 2^6$$



В Задача 1-в) $2^4 \cdot 2^{-4} = \begin{cases} 2^{4+(-4)} = 2^0 = 1 \\ 2^4 \cdot \frac{1}{2^4} = 1 \end{cases}$

ЗАДАЧА 2 Запишете като степен с цял показател и основа цяло число дробите:

$$\text{а)} \left(\frac{7^{-1}}{7^5}\right)^2; \quad \text{б)} \left(\frac{5^{-2}}{5^{-5}}\right)^7; \quad \text{в)} \left(\frac{3^6}{3^{-7}}\right)^{-2}; \quad \text{г)} \left(\frac{2^{-5}}{2^{-4}}\right)^{-2}.$$

Решение:

$$\text{а)} \left(\frac{7^{-1}}{7^5}\right)^2 = (7^{-1-5})^2 = (7^{-6})^2 = 7^{-12} \quad \text{б)} \left(\frac{5^{-2}}{5^{-5}}\right)^7 = (5^{-2-(-5)})^7 = (5^3)^7 = 5^{21}$$

$$\text{в)} \left(\frac{3^6}{3^{-7}}\right)^{-2} = (3^{6-(-7)})^{-2} = (3^{6+7})^{-2} = 3^{-26} \quad \text{г)} \left(\frac{2^{-5}}{2^{-4}}\right)^{-2} = (2^{-5-(-4)})^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2$$

ЗАДАЧА 3 Пресметнете:

$$\text{а)} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}; \quad \text{б)} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot 3^{-1}; \quad \text{в)} (0,1^{-1})^3 \cdot (2^{-3})^2 \cdot 5^{-2}.$$

Решение:

$$\text{а)} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{3^3}{4^3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\text{б)} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot 3^{-1} = \frac{3^3}{2^3} \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3} = 3^2 \cdot 2 = 18$$

$$\text{в)} (0,1^{-1})^3 \cdot (2^{-3})^2 \cdot 5^{-2} = 10^3 \cdot 2^{-6} \cdot 5^{-2} = \frac{2^3 \cdot 5^3}{2^6 \cdot 5^2} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

ЗАДАЧА 4

Опростете израза $A = \frac{(-2x^3)^3 \cdot (-6x^4y^9)^{-2}}{(-3y^5)^{-4}}$ ($x \neq 0, y \neq 0$) и пресметнете стойността му, ако $x = 27 \cdot 3^{-4}$ и $y = (-8)^3 \cdot (-4)^{-4}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad A &= \frac{(-2x^3)^3 \cdot (-6x^4y^9)^{-2}}{(-3y^5)^{-4}} = \frac{(-2)^3 x^9 \cdot (-3y^5)^4}{(-6x^4y^9)^2} = \\ &= \frac{-2^3 \cdot x^9 \cdot 3^4 \cdot y^{20}}{6^2 \cdot x^8 \cdot y^{18}} = \frac{-2^3 \cdot 3^4 \cdot x^{9-8} \cdot y^{20-18}}{2^2 \cdot 3^2} = -18xy^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{2.} \quad x = 27 \cdot 3^{-4} = 3^3 \cdot 3^{-4} = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{3.} \quad y = (-8)^3 \cdot (-4)^{-4} = \frac{-8^3}{(-4)^4} = \frac{-2^9}{4^4} = \frac{-2^9}{2^8} = -2$$

$$\mathbf{4.} \quad A = -18xy^2 = -18 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2)^2 = -6 \cdot 4 = -24$$

ЗАДАЧА 5

Запишете като десетични дроби числата:

$$\mathbf{a)} 2 \cdot 10^{-3}; \quad \mathbf{б)} 3 \cdot 10^{-5}; \quad \mathbf{в)} 1,4 \cdot 10^{-4}; \quad \mathbf{г)} 2,35 \cdot 10^{-6}.$$

Решение:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a)} 2 \cdot 10^{-3} = & \mathbf{б)} 3 \cdot 10^{-5} = & \mathbf{в)} 1,4 \cdot 10^{-4} = & \mathbf{г)} 2,35 \cdot 10^{-6} = \\ = 0,\underbrace{002}_3 & = 0,\underbrace{00003}_5 & = 0,\underbrace{00014}_4 & = 0,\underbrace{00000235}_6 \end{array}$$

ЗАДАЧИ

1 Запишете като степен с основа – цяло число изразите:

$$\mathbf{a)} \frac{(-2)^5 \cdot (-4)^3}{8^2};$$

$$\mathbf{б)} \frac{3^7 \cdot (-9)^3}{(-3)^2 \cdot (-27)^3};$$

$$\mathbf{в)} \frac{(-5)^5 \cdot (-25)^2}{(-125)^4 \cdot 5^0};$$

$$\mathbf{г)} \frac{(-7)^5 \cdot 49^2}{7^0 \cdot 7 \cdot (-49)^3}.$$

2 Пресметнете:

$$\mathbf{a)} \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^0;$$

$$\mathbf{б)} \left(\frac{3}{7}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{9}{49}\right)^3 \cdot (-7)^2;$$

$$\mathbf{в)} (-0,25)^3 \cdot (-0,5)^{-4} \cdot 8;$$

$$\mathbf{г)} (2^{-3})^2 \cdot (-3)^{-3} \cdot (-6)^3.$$

3 Запишете като степен с цял показател и основа цяло число дробите:

$$\mathbf{а)} \left(\frac{2^{-3}}{2^3}\right)^{-5}; \quad \mathbf{б)} \left(\frac{3^{-2}}{3^{-5}}\right)^{-3};$$

$$\mathbf{в)} \left(\frac{5^3}{5^{-4}}\right)^{-2}; \quad \mathbf{г)} \left(\frac{2^{-5}}{4^{-3}}\right)^{-1}.$$

4 Опростете израза

$$A = \frac{(-2x^5)^7 \cdot (-8x^{12})^{-4}}{(-4x^3)^{-5}} \quad (x \neq 0)$$

и пресметнете стойността му при:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{а)} x = (-4)^{-1}; & \mathbf{б)} x = 5 \cdot (-2)^3; \\ \mathbf{в)} x = -7 \cdot 2^{-2}; & \mathbf{г)} x = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}. \end{array}$$

5 Запишете като десетични дроби числата:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{а)} 3 \cdot 10^{-2}; & \mathbf{б)} 5 \cdot 10^{-3}; \\ \mathbf{в)} 2,7 \cdot 10^{-4}; & \mathbf{г)} 3,12 \cdot 10^{-5}. \end{array}$$

ЗАДАЧА 1 Като използвате степените на 10, запишете като сбор числото 291 587.

Решение:

$$\begin{aligned} 291\,587 &= 200\,000 + 90\,000 + 1\,000 + 500 + 80 + 7 = \\ &= 2 \cdot 100\,000 + 9 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7 = \\ &= 2 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \end{aligned}$$

Записът $2 \cdot 10^5$, $9 \cdot 10^4$, $1 \cdot 10^3$, ... се използва за по-кратко записване на големи числа. Множителите пред степените на 10 (2, 9, 1, ...) са естествени числа, по-големи или равни на 1 и по-малки от 10, или числото нула.

Когато множителят пред 10^n (n – естествено число) е число (k), което е по-голямо или равно на 1 и по-малко от 10, т.е. $1 \leq k < 10$, казваме, че числото е записано в стандартен запис.



Стандартен запис на естествено число

Стандартен запис на естествено число A се нарича произведение от вида

$$A = k \cdot 10^n, \text{ където } 1 \leq k < 10 \text{ и } n \text{ – естествено число.}$$

Степенният показател n се нарича **порядък на числото**.

Примери: $\underbrace{23\,000}_{4 \text{ знака}} = 2,3 \cdot \underbrace{10\,000}_{4 \text{ нули}} = 2,3 \cdot 10^4$; $\underbrace{3\,580\,000}_{6 \text{ знака}} = 3,58 \cdot \underbrace{1\,000\,000}_{6 \text{ нули}} = 3,58 \cdot 10^6$; ...

ЗАДАЧА 2 Запишете със стандартен запис: разстоянието от Слънцето до планетата:

- а) Венера е приблизително сто и осем милиона километра;
- б) Земя е приблизително сто и петдесет милиона километра;
- в) Нептун е приблизително четири милиарда и петстотин милиона километра.

Решение:

а) $\underbrace{108\,000\,000}_{= 1,08 \cdot 10^8} =$	б) $\underbrace{150\,000\,000}_{= 1,5 \cdot 10^8} =$	в) $\underbrace{4\,500\,000\,000}_{= 4,5 \cdot 10^9} =$
---	--	---

ЗАДАЧА 3 Запишете със стандартен запис и определете порядъка на числата:

а) $53 \cdot 10^8$; б) $0,258 \cdot 10^6$.

Решение:

а) $53 \cdot 10^8 = 5,3 \cdot 10 \cdot 10^8 = 5,3 \cdot 10^9$ – девети порядък

б) $0,258 \cdot 10^6 = 0,258 \cdot 10 \cdot 10^5 = 2,58 \cdot 10^5$ – пети порядък

ЗАДАЧА 4 Запишете в десетична бройна система числата:

а) $2 \cdot 10^5$; б) $5,6 \cdot 10^4$; в) $3,21 \cdot 10^6$; г) $1,205 \cdot 10^8$.

Решение:

а) $2 \cdot 10^5 = \underbrace{2\,000\,000}_{5 \text{ знака}}$

б) $5,6 \cdot 10^4 = \underbrace{5\,6000}_{4 \text{ знака}}$

в) $3,21 \cdot 10^6 = \underbrace{3\,210\,000}_{6 \text{ знака}}$

г) $1,205 \cdot 10^8 = \underbrace{1\,205\,000\,000}_{8 \text{ знака}}$

ЗАДАЧА 5 Светлината се разпространява със скорост 300 000 km/s. Известно е, че разстоянието от Слънцето до Земята е $1,5 \cdot 10^8$ km. За колко секунди светлината идва от Слънцето до Земята?

Решение:

От зависимостта $S = v \cdot t$ намираме

$$300\,000 \cdot t = 1,5 \cdot 10^8, \quad t = \frac{1,5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5}, \quad t = 0,5 \cdot 10^3, \quad t = 500.$$

Светлината идва от Слънцето до Земята за 500 s.

Стандартен запис на краяна десетична дроб

Знаем, че големите числа се записват със стандартен запис като произведение на число k , $1 \leq k < 10$, и степен на числото 10 с цял положителен показател.

Примери: $\underbrace{8\,000\,000} = 8 \cdot 10^6$; $\underbrace{24\,000\,000} = 2,4 \cdot 10^7$; $\underbrace{12\,800\,000\,000} = 1,28 \cdot 10^{10}$.

И за крайните десетични дроби се използва стандартен запис, като те се записват като произведение на число k , $1 \leq k < 10$, и степен на числото 10 с цял отрицателен показател.

Примери: $0,3 = \frac{3}{10} = 3 \cdot 10^{-1}$; $0,002 = \frac{2}{10^3} = 2 \cdot 10^{-3}$;
 $0,08 = \frac{8}{100} = \frac{8}{10^2} = 8 \cdot 10^{-2}$; $0,00000025 = \frac{25}{10^8} = \frac{2,5}{10^7} = 2,5 \cdot 10^{-7}$.

ЗАДАЧА 6 Запишете със стандартен запис числата:

- а) 0,0005; б) 0,000006; в) 0,00038; г) 0,0000000473.

Решение:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \underbrace{0,0005} = & \text{б)} \underbrace{0,000006} = & \text{в)} \underbrace{0,00038} = & \text{г)} \underbrace{0,0000000473} = \\ = 5 \cdot 10^{-4} & = 6 \cdot 10^{-6} & = 3,8 \cdot 10^{-4} & = 4,73 \cdot 10^{-8} \end{array}$$

ЗАДАЧИ

Запишете със стандартен запис числата:

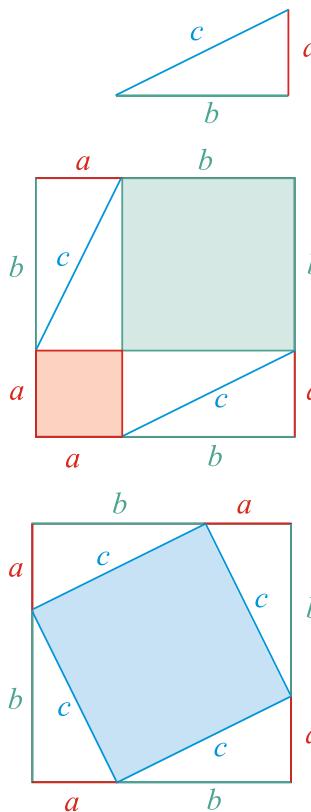
- 1** а) 10 000; б) 10 000 000;
в) 100; г) 100 000 000.
2 а) 4 000; б) 50 000;
в) 900 000; г) 8 000 000.
3 а) 340; б) 28 000;
в) 35 000 000; г) 420 000.
4 а) 25 600; б) 387 000;
в) 13 750 000; г) 310 800 000.
5 а) $53 \cdot 10^5$; б) $0,27 \cdot 10^4$;
в) $0,125 \cdot 10^8$; г) $258 \cdot 10^4$.

Запишете в десетична бройна

система числата:

- 6** а) $5 \cdot 10^3$; б) $2,3 \cdot 10^5$;
в) $8 \cdot 10^6$; г) $9,2 \cdot 10^7$.
7 а) $4,25 \cdot 10^4$; б) $3,81 \cdot 10^7$;
в) $1,03 \cdot 10^5$; г) $5,042 \cdot 10^4$.
8 Запишете със стандартен запис
числата:
а) 0,00034; б) 0,0023;
в) 0,00000378; г) 0,00000056.

ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА – ПРИЛОЖЕНИЕ НА СТЕПЕНИТЕ



Даден е правоъгълен триъгълник с катети a и b и хипотенуза c . Ще покажем, че сборът от квадратите на катетите е равен на квадрата на хипотенузата, т.e. $a^2 + b^2 = c^2$.

Начертаваме два квадрата със страна, равна на $a + b$. Всеки от квадратите разделяме на части, както е показано на фигураните.

Фигурата се състои от четири правоъгълни триъгълника с катети a и b , квадрат със страна a и квадрат със страна b .

Сборът от лицата на двета квадрата е

$$(1) \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

Фигурата се състои от четири правоъгълни триъгълника с катети a и b и квадрат със страна c^* .

Лицето на квадрата със страна c е

$$(2) \quad c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

От (1) и (2) следва, че $a^2 + b^2 = c^2$.

Тази зависимост между квадратите на страните в правоъгълен триъгълник е известна като **питагорова теорема**.

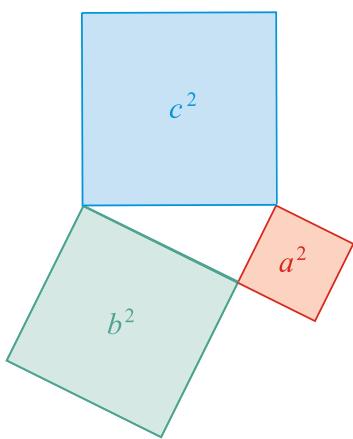


Питагорова теорема

В правоъгълния триъгълник сборът от квадратите на катетите е равен на квадрата на хипотенузата.

Питагоровата теорема се онагледява с т. нар. „Гащи на Питагор“.

Сборът от лицата на двета квадрата със страни катетите на правоъгълен триъгълник е равен на лицето на квадрат със страна хипотенузата.



Тройката цели числа, които са дължини на страните на правоъгълен триъгълник, се нарича **питагорова тройка числа**.

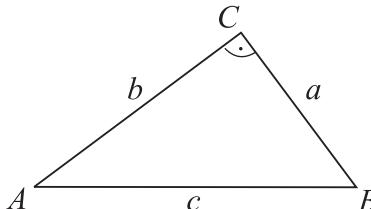
В следващата таблица са дадени най-често срещаните основни питагорови тройки.

3, 4, 5	6, 8, 10	9, 12, 15	12, 16, 20	15, 20, 25
5, 12, 13	10, 24, 26	15, 36, 39	20, 48, 52	25, 60, 65
7, 24, 25	14, 48, 50	21, 72, 75	28, 96, 100	35, 120, 125
8, 15, 17	16, 30, 34	24, 45, 51	32, 60, 68	40, 75, 85

* Строго доказателство, че фигурата е квадрат, ще направим в 7. клас.

ЗАДАЧА 1 Правоъгълният $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) има катет $a = 6$ см и лице $B = 24$ см².

- Намерете:
- дължината на катета b в сантиметри;
 - дължината на хипотенузата c в сантиметри;
 - обиколката P на триъгълника.

Решение:

a) $B = \frac{a \cdot b}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{6 \cdot b}{2} &= 24 \\ 3 \cdot b &= 24 \\ b &= 8 \text{ см} \end{aligned}$$

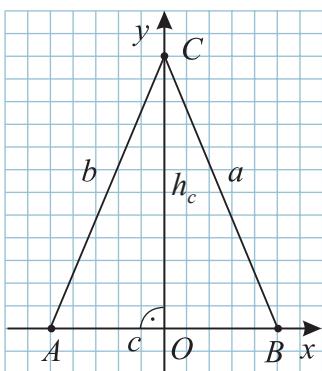
b) $P = a + b + c$
 $P = 6 + 8 + 10$
 $P = 24 \text{ см}$

б) Прилагаме питагоровата теорема.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 6^2 + 8^2 &= c^2 \\ 36 + 64 &= c^2 \\ c^2 &= 100 = 10^2 \\ c &= 10 \text{ см} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2 В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките $A(-5; 0)$, $B(5; 0)$ и $C(0; 12)$.

- Намерете:
- лицето B на $\triangle ABC$ в квадратни мерни единици;
 - дължината на AC и BC в мерни единици;
 - обиколката P на $\triangle ABC$ в мерни единици.

Решение:

a) $AB = c = 10 \text{ м. ед.}$

$CO = h_c = 12 \text{ м. ед.}$

$$B = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$B = \frac{10 \cdot 12}{2}$$

$B = 60 \text{ кв. м. ед.}$

б) За $\triangle AOC$ ($\angle O = 90^\circ$) прилагаме

питагоровата теорема.

$$AC^2 = AO^2 + CO^2$$

$$AC^2 = 5^2 + 12^2$$

$$AC^2 = 25 + 144$$

$$AC^2 = 169 = 13^2$$

$AC = 13 \text{ м. ед.}$

Аналогично намираме $BC = 13 \text{ м. ед.}$

b) $P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC$

$$P_{\triangle ABC} = 10 + 13 + 13$$

$$P_{\triangle ABC} = 36 \text{ м. ед.}$$

ЗАДАЧИ

- 1** Правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) има катет $b = 16$ см и лице $B = 96$ см².

Намерете дължината на:

- катета a ;
- хипотенузата c ;
- височината към хипотенузата h_c .

- 2** В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$ и $C(0; 8)$. Намерете:

- $B_{\triangle ABC}$ в кв. м. ед.;
- $P_{\triangle ABC}$ в м. ед.;
- разстоянието от A до BC в м. ед.

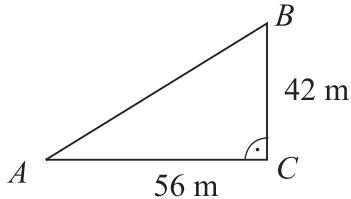
- 3** В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките $A(-5; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 8)$ и $D(-5; 8)$. Намерете:

- B_{ABCD} в кв. м. ед.;
- P_{ABCD} в м. ед.

- 4** В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките $A(-7; 0)$, $B(7; 0)$, $C(3; 3)$ и $D(-3; 3)$. Намерете:

- B_{ABCD} в кв. м. ед.;
- P_{ABCD} в м. ед.

ЗАДАЧА 1 От точка A до точка B може да се стигне направо или през точка C . Намерете с колко метра се скъсява пътят, ако се мина направо.



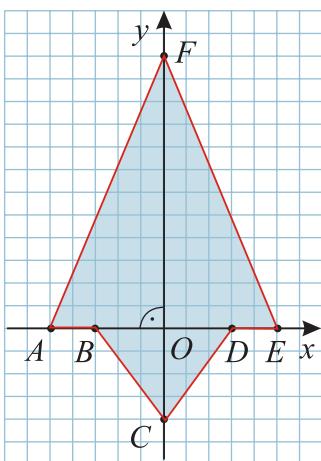
Решение:

- През т. C $S_{AB} = S_{AC} + S_{CB} = 56 + 42 = 98$ m.
- За $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) прилагаме питагоровата теорема.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + CB^2 \\ AB^2 &= 56^2 + 42^2 \\ AB^2 &= 3\,136 + 1\,764 \\ AB^2 &= 4\,900 = 70^2 \\ AB &= 70 \text{ m} \end{aligned}$$

- Разстоянието се скъсява с $98 - 70 = 28$ m.

ЗАДАЧА 2 В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките $A(-5; 0)$, $B(-3; 0)$, $C(0; -4)$, $D(3; 0)$, $E(5; 0)$ и $F(0, 12)$. Намерете:



Решение:

a) лицето на фигурата $ABCDEF$ в квадратни мерни единици:

$$B_\phi = B_{\triangle BCD} + B_{\triangle AEF} = \frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{10 \cdot 12}{2}$$

$$B_\phi = 12 + 60 = 72 \text{ кв. м. ед.}$$

- b) 1. За $\triangle AOF$ прилагаме питагоровата теорема:

$$\begin{aligned} AF^2 &= AO^2 + OF^2 \\ AF^2 &= 5^2 + 12^2 \\ AF^2 &= 13^2 \\ AF &= 13 \text{ м. ед.} \end{aligned}$$

2. От $\triangle EOF$ аналогично намираме $EF = 13$ м. ед.

3. За $\triangle BOC$ прилагаме питагоровата теорема:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BO^2 + OC^2 \\ BC^2 &= 3^2 + 4^2 \\ BC^2 &= 25 \\ BC &= 5 \text{ м. ед.} \end{aligned}$$

4. От $\triangle OCD$ аналогично намираме $CD = 5$ м. ед.

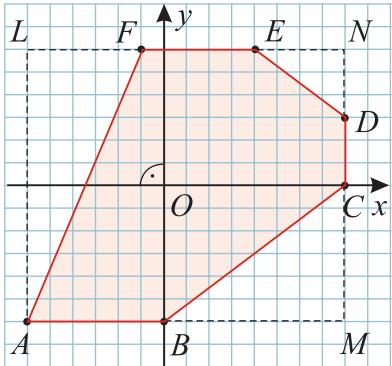
5. $P_\phi = AB + BC + CD + DE + EF + FA$

$$P_\phi = 2 + 5 + 5 + 2 + 13 + 13 = 40 \text{ м. ед.}$$

ЗАДАЧА 3 В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките $A(-6; -6)$, $B(0; -6)$, $C(8; 0)$, $D(8; 3)$, $E(4; 6)$ и $F(-1, 6)$. Намерете:

- лицето на фигурата $ABCDEF$ в квадратни мерни единици;
- обиколката на фигурата $ABCDEF$ в мерни единици.

Решение: Построяваме точките A, B, C, D, E и F и “опаковаме” фигураната $ABCDEF$ с правоъгълник $AMNL$ по показания начин.



$$\begin{aligned}
 a) B_{\text{фиг}} &= B_{AMNL} - (B_{\triangle BMC} + B_{\triangle DNE} + B_{\triangle ALF}) = \\
 &= AM \cdot AL - \left(\frac{BM \cdot CM}{2} + \frac{DN \cdot EN}{2} + \frac{AL \cdot FL}{2} \right) = \\
 &= 14 \cdot 12 - \left(\frac{8 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{12 \cdot 5}{2} \right) = \\
 &= 168 - (24 + 6 + 30) = \\
 &= 108 \text{ кв. м. ед.}
 \end{aligned}$$

б) Прилагаме питагоровата теорема за:

$$\triangle BMC \quad BC^2 = BM^2 + CM^2 \quad BC = 10 \text{ м. ед.}$$

$$\triangle DNE \quad DE^2 = DN^2 + NE^2 \quad DE = 5 \text{ м. ед.}$$

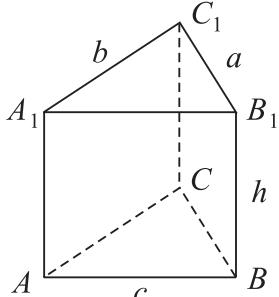
$$\triangle ALF \quad AF^2 = AL^2 + LF^2 \quad AF = 13 \text{ м. ед.}$$

$$P_{\text{фиг}} = AB + BC + CD + DE + EF + FA$$

$$P_{\text{фиг}} = 6 + 10 + 3 + 5 + 5 + 13 = 42 \text{ м. ед.}$$

ЗАДАЧА 4 Права триъгълна призма $ABC A_1 B_1 C_1$ има за основа правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) с катет $a = 4$ см. Призмата има обем $V = 48$ см³ и височина $h = 8$ см. Намерете: а) дължината на катета b и на хипотенузата c на $\triangle ABC$; б) сбора от всички ръбове на призмата.

Решение:

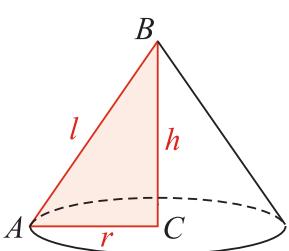


$$\begin{aligned}
 a) \quad 1. \quad V &= B \cdot h & 2. \quad B &= \frac{a \cdot b}{2} & 3. \quad \text{За } \triangle ABC \text{ прилагаме} \\
 48 &= B \cdot 8 & 48 &= \frac{4 \cdot b}{2} & \text{питагоровата теорема.} \\
 B &= 48 : 8 & 6 &= \frac{4 \cdot b}{2} & c^2 = a^2 + b^2 \\
 B &= 6 \text{ см}^2 & b &= 3 \text{ см} & c^2 = 4^2 + 3^2 \\
 & & & & c = 5 \text{ см}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \Sigma &= 2 \cdot P + 3 \cdot h = 2 \cdot (a + b + c) + 3 \cdot h = \\
 &= 2 \cdot (4 + 3 + 5) + 3 \cdot 8 = 2 \cdot 12 + 24 = 48 \text{ см}
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5 Правоъгълният $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) с катет $AC = 6$ см е завъртян около катета BC . Повърхнината на полученото тяло е 96π см². Намерете обема V на полученото тяло.

Решение: Полученото тяло е конус с $r = AC = 6$ см, $h = BC$ и $l = AB$.



$$\begin{aligned}
 1. \quad B &= \pi r^2 & 2. \quad S_1 &= S + B & 3. \quad S &= \pi r l \\
 B &= \pi \cdot 6^2 & 96\pi &= S + 36\pi & 60\pi &= \pi \cdot 6 \cdot l \\
 B &= 36\pi \text{ см}^2 & S &= 60\pi \text{ см}^2 & l &= 10 \text{ см} \\
 4. \quad \text{За } \triangle ABC \text{ (}\angle C = 90^\circ\text{)} & & & & 5. \quad V &= \frac{B \cdot h}{3} \\
 l^2 &= r^2 + h^2 & & & V &= \frac{36\pi \cdot 8}{3} \\
 100 &= 36 + h^2 & & & & \\
 h^2 &= 64 & & & & \\
 h &= 8 \text{ см.} & & & & V &= 96\pi \text{ см}^3
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- 1 В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(-4; 0)$, $B(4; 6)$, $C(0; 9)$ и $D(-4; 9)$. Намерете:
а) B_{ABCD} в кв. м. ед.;
б) дълчините на AB и BC в м. ед.;
в) P_{ABCD} в м. ед.

- 2 В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките $A(-12; 0)$, $B(-6; 0)$, $C(0; -8)$, $D(6; 0)$, $E(12; 0)$ и $F(0; 5)$. Намерете:
а) B_{ABCDEF} в кв. м. ед.;
б) P_{ABCDEF} в м. ед.

ЗАПОМНЕТЕ!

Степен с основа a и степенен показател n , който е естествено число, се записва a^n и означава произведение от n равни на a множители:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ множителя}}, \quad a^1 = a, \quad 0^n = 0, \quad 1^n = 1.$$

Действието, при което се пресмята стойността на дадена степен, се нарича степенуване.

Свойства на степените:

$$\begin{array}{lll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}, \quad a \neq 0, \quad n < m & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0, \quad m > n & a^0 = 1, \quad a \neq 0 & \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0 \\ \frac{a^n}{a^n} = 1, \quad a \neq 0 & a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n - \text{цияло} & (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ & & \text{число} \end{array}$$

Въз основа на тези свойства се изказват правила за действия със степени.

ЗАДАЧА 1 Проверете правилно ли е попълнена таблицата за степента a^n .

$a \backslash n$	1	2	3	4	5	6
2	2	4	8	16	32	64
3	3	9	27	81	243	729
5	5	25	125	625	3125	15 625

Отг.: Таблицата е попълнена правилно.

ЗАДАЧА 2

Пресметнете: а) $\frac{(2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^4)^2}{(6^4 \cdot 125)^3}$; б) $\frac{5^7 + 4 \cdot 5^6}{5^7 - 2 \cdot 5^6}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{(2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^4)^2}{(6^4 \cdot 125)^3} &= \frac{2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 5^8}{6^{12} \cdot 125^3} = \frac{2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 5^8}{(2 \cdot 3)^{12} \cdot (5^3)^3} = \frac{2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 5^8}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^9} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5} \\ \text{б)} \frac{5^7 + 4 \cdot 5^6}{5^7 - 2 \cdot 5^6} &= \frac{5^6 \cdot 5 + 4 \cdot 5^6}{5^6 \cdot 5 - 2 \cdot 5^6} = \frac{5^6 \cdot (5+4)}{5^6 \cdot (5-2)} = \frac{5^6 \cdot 9}{5^6 \cdot 3} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3

Опростете изразите ($x \neq 0, y \neq 0$):

$$\text{а)} A = 21 \cdot x \cdot y^6 \cdot \frac{y^2}{7 \cdot x \cdot y^4}; \quad \text{б)} B = x^8 : \left(\frac{x^3}{x^2} : \frac{x^5}{x^4} \right).$$

$$\text{Решение: а)} A = 21 \cdot x \cdot y^6 \cdot \frac{y^2}{7 \cdot x \cdot y^4} = \frac{21 \cdot x \cdot y^8}{7 \cdot x \cdot y^4} = 3y^4$$

$$\text{б)} B = x^8 : \left(\frac{x^3}{x^2} : \frac{x^5}{x^4} \right) = x^8 : \left(\frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{x^4}{x^5} \right) = x^8 : \frac{x^7}{x^5} = x^8 : 1 = x^8$$

ЗАДАЧА 4 Подредете по големина числата, като започнете от най-малкото:

$$2^{11}; 4^7; 8^3; 16^5; 32^3; 64^2.$$

Решение: Записваме числата като степени с основа 2:

$$2^{11}; (2^2)^7; (2^3)^3; (2^4)^5; (2^5)^3; (2^6)^2, \quad \text{т.e. } 2^{11}; 2^{14}; 2^9; 2^{20}; 2^{15}; 2^{12}.$$

$$\text{Получаваме } 2^9 < 2^{11} < 2^{12} < 2^{14} < 2^{15} < 2^{20}, \quad \text{т.e. } 8^3 < 2^{11} < 64^2 < 4^7 < 32^3 < 16^5.$$

ЗАДАЧА 5 Намерете число, което е представено с израза:

$$\text{а) } 4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 5;$$

$$\text{б) } 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7;$$

$$\text{в) } 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}.$$

Решение:

$$\text{а) } 4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 5 =$$

$$= 4 \cdot 100 000 + 6 \cdot 10 000 + 1 \cdot 1 000 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 5 = 461 895$$

$$\text{б) } 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7 =$$

$$= 2 \cdot 10 000 + 0 \cdot 1 000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 = 20 357$$

$$\text{в) } 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} =$$

$$= 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100} = 354,87$$

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

$$\text{1 а) } 3^{2^4-15}; \quad \text{б) } 2^6 : 4 - 16;$$

$$\text{в) } (2^2 - 1) \cdot 2 - 1;$$

$$\text{г) } \left(\left(\frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) : \frac{2}{9} + 1\frac{1}{2}.$$

$$\text{2 а) } \frac{2^{1008} \cdot 3^5}{3^2 \cdot 2^{1006}}; \quad \text{б) } \left(\frac{1^{1021} \cdot 2^{1021} \cdot 3^{1021}}{1^{1018} \cdot 2^{1020} \cdot 3^{1022}} \right)^2.$$

$$\text{3 а) } \frac{5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^8}{5^{10} \cdot 5^4}; \quad \text{б) } \frac{25^3 \cdot 8^5}{5^5 \cdot 2^{10}};$$

$$\text{в) } \frac{9^7 \cdot 36^5 \cdot 7^7}{3^{14} \cdot 6^9 \cdot 7^6}; \quad \text{г) } \frac{49^5 \cdot 15^7 \cdot 6^8}{21^{10} \cdot 10^8 \cdot 3^5}.$$

$$\text{4 а) } \frac{7^5 + 7^6}{7^5}; \quad \text{б) } \frac{5^{10} + 5^9 + 5^8}{5^5 \cdot 5^3};$$

$$\text{в) } \frac{7 \cdot 2^9 + 2^8}{9 \cdot 2^8 - 2^{10}}; \quad \text{г) } \frac{5 \cdot 2^8 + 4^5}{7 \cdot 8^2 + 2^7}.$$

5 Запишете със стандартен запис числата:

$$\text{а) } 70 000 000; \quad \text{б) } 25 000;$$

$$\text{в) } 521 000 000; \quad \text{г) } 632 000 000 000.$$

Намерете x , ако:

$$\text{6 а) } x^3 = 3375; \quad \text{б) } 4^x = 1024;$$

$$\text{в) } 2^5 \cdot 2^x = 8^3 : 2^3;$$

$$\text{г) } \left(\left(\frac{2}{5} \right)^x \right)^2 = 2^6 : 5^6.$$

$$\text{7 а) } x : 3^8 = 12^3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3;$$

$$\text{б) } x \cdot \frac{8^{28}}{4^{28}} = \frac{22^{27}}{11^{27}};$$

$$\text{в) } \left(\frac{0,36}{0,09} \right)^3 \cdot x = 8^5 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5;$$

$$\text{г) } \left(\left(\frac{1}{3} \right)^5 \right)^6 \cdot x = (3^2)^{10}.$$

8 Намерете числената стойност на израза:

$$\text{а) } A = 16 \cdot a^4 \cdot b : \frac{(2 \cdot a)^3}{b^5} \text{ за } a = 8, b = 0,5;$$

$$\text{б) } B = 2 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot \left(\frac{a^2}{b^4} : \frac{a^3}{b^2} \right) \text{ за } a = 2^3 - 3, b = 0,1;$$

$$\text{в) } C = \frac{(3 \cdot a^2 \cdot b^3)^3}{(2 \cdot a^3 \cdot b^4)^2} \text{ за } b = \left(\frac{2}{3} \right)^2;$$

$$\text{г) } D = \left(\frac{6 \cdot a^5}{b^4} \right)^3 : \left(\frac{6 \cdot a^8}{b^7} \right)^2 - 2,5 \text{ за } a = \frac{1}{3}, b = 0,5.$$

9 Запишете с числов израз:

а) сбора от квадратите на числата 2 и x ;

б) квадрата на сбора на числата 2 и x ;

в) сбора от кубовете на числата 3 и a ;

г) куба от сбора на числата 3 и a .

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “СТЕПЕНУВАНЕ”

1. Стойността на израза $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^3$ е:
A) 30;
B) 42;
C) 36;
D) 60.
2. Стойността на израза $(3^2 - 7)^4 : 2^3 + 0,5^2$ е:
A) 0,25;
B) 1,25;
C) 2,25;
D) 4,25.
3. Стойността на израза $\frac{5^{17} \cdot (5^6)^2}{5^{19} \cdot 5}$ е:
A) 5^{10} ;
B) 5^{29} ;
C) 5^{20} ;
D) 5^9 .
4. Ако $3^x \cdot 3^6 = 9^4$, то x е:
A) 2;
B) 3;
C) 1;
D) 4.
5. Не е вярно, че:
A) $3^7 \cdot 3^5 > 3^8 \cdot 3^3$;
B) $5^6 : 5^2 < 5^7 : 5^4$;
C) $(2^5)^2 > (2^3)^3$;
D) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$.
6. Стандартният запис на числото 2 300 000 000 е:
A) $2,3 \cdot 10^{10}$;
B) $2,3 \cdot 10^8$;
C) $2,3 \cdot 10^9$;
D) $2,3 \cdot 10^{11}$.
7. При $a \neq 0$ изразът $\frac{(2 \cdot a^2)^4}{(4 \cdot a^3)^2 \cdot a^{-5}}$ е равен на:
A) a^7 ;
B) a^5 ;
C) a^8 ;
D) a^6 .
8. Намерете числената стойност на израза $A = 2x^3 - 3x^2 + 5$, ако:
a) $x = 3$;
b) $x = -\frac{1}{2}$.
9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на числовия израз. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на израза със същата стойност.
- | | | | |
|-----|--------------------------------------|-----|---------------------------------------|
| (A) | $2^7 - 3 \cdot 2^5$ | (1) | $7^2 - 2^4$ |
| (Б) | $\frac{3^5 - 3^4 - 3^3}{3^3}$ | (2) | $(5^2 - 3^2) \cdot 2^{-1}$ |
| (В) | $\frac{4^{-5} \cdot (-2)^4}{8^{-3}}$ | (3) | $(-6)^2 - (-2)^2$ |
| | | (4) | $7^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ |
10. Опростете израза

$$A = \frac{(-2x^3)^4 \cdot (-3xy^3)^3}{(-12x^7y^4)^2} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$
и намерете числената му стойност при $x = \frac{2^8 + 4^5 - 8^3}{2^9 - 16^2}$ и $y = \frac{3^7 - 3^6}{3^8 - 3^9}$.

ТЕМА 4

УРАВНЕНИЯ

(Урок № 86 – Урок № 97)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- числови равенства;
- уравнение от вида $ax + b = 0$ ($a \neq 0$);
- правила за решаване на уравнения;
- моделиране с уравнения.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да решават уравнение от вида $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) и уравнения, свеждащи се към него;
- да използват уравнения при моделиране на ситуации.

**Числово равенство**

Когато между две числа или два числови израза поставяме знака за равенство („=“), получаваме числови равенства.

Вярно числово равенство

Примери: $4 = 2^2$; $5 = \frac{10}{2}$; $(-3)^3 = -27$; $2 : \frac{1}{3} = 5 + 1$.

Знакът \neq показва, че две числа или два числови израза не са равни.

Примери: $5 \neq 7$; $1 + 5 \neq 2 \cdot 3 - 1$; $(-2)^3 \neq 8$.

Свойства на числовите равенства

Ако $2 = \frac{6}{3}$, то $\frac{6}{3} = 2$; ако $3^2 = 9$, то $9 = 3^2$.

1. свойство Ако $a = b$, то $b = a$.

В примерите: a приема стойности $2, 3^2$,
 b приема стойности $\frac{6}{3}, 9$.

Ако $8 = 2^3$. 2 и $2^2 \cdot 2 = 2^3$, то $8 = 2^3$.

2. свойство Ако $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

В примера: a приема стойност 8 ,
 b приема стойност $2^2 \cdot 2$,
 c приема стойност 2^3 .

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} 4 = 2^2 \\ 9 = 3^2 \end{array} (+) \\ \text{то } \begin{array}{r} 4 + 9 = 2^2 + 3^2 \\ 13 = 13. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} 5^2 = 25 \\ 4^2 = 16 \end{array} (-) \\ \text{то } \begin{array}{r} 5^2 - 4^2 = 25 - 16 \\ 9 = 9. \end{array} \end{array}$$

3. свойство

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} a = b \\ c = d \end{array} (+) \\ \text{то } \begin{array}{r} a + c = b + d. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} a = b \\ c = d \end{array} (-) \\ \text{то } \begin{array}{r} a - c = b - d. \end{array} \end{array}$$

В примерите:
 a приема стойности $4, 5^2$,
 b приема стойности $2^2, 25$,
 c приема стойности $9, 4^2$,
 d приема стойности $3^2, 16$.

Приложение към 3. свойство

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} a = b \\ c = c \end{array} (+) \\ \text{то } \begin{array}{r} a + c = b + c. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} a = b \\ c = c \end{array} (-) \\ \text{то } \begin{array}{r} a - c = b - c. \end{array} \end{array}$$



Когато събираме (изваждаме) две равенства, сборът (разликата) на левите им страни е равен на сума (разликата) на десните им страни. Казваме, че равенствата събираме (изваждаме) **почленно**.

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} 2^2 = 4 \\ 2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2, \end{array} | \cdot 2 \\ \text{то } \begin{array}{r} 8 = 8. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ако } \begin{array}{r} 3^3 = 27 \\ 3^3 : 3^2 = 27 : 3^2, \end{array} | : 3^2 \\ \text{то } \begin{array}{r} 3 = 3. \end{array} \end{array}$$

4. свойство Ако $a = b \mid . c$, то $a \cdot c = b \cdot c$.	Ако $a = b \mid : c, c \neq 0$, то $a : c = b : c$.
--	--



Свойствата на числовите равенства записахме с буквите a, b, c, d , като всяка буква в равенството е заменена с конкретно число.

ЗАДАЧА 1

Дадено е равенството $a = b$ и числото c . Приложете:

свойство 1 за $a = \frac{10}{2}$ и $b = 5$;

свойство 2 за $a = \frac{4}{2}, b = \frac{6}{3}, c = 2$;

свойство 3 за $a = 25, b = 5^2, c = 5$;

свойство 4 за $a = 3^2, b = 9, c = 3$.

Решение:

Свойство 1: Ако $\frac{10}{2} = 5$, то $5 = \frac{10}{2}$.

Свойство 2: Ако $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ и $\frac{6}{3} = 2$, то $\frac{4}{2} = 2$.

Свойство 3: Ако $25 = 5^2 (+)$

Ако $25 = 5^2 (-)$

$5 = 5$,

$5 = 5$,

то $25 + 5 = 5^2 + 5$

то $25 - 5 = 5^2 - 5$

$30 = 30$.

$20 = 20$.

Свойство 4: Ако $3^2 = 9 \mid . 3$,

Ако $3^2 = 9 \mid : 3$,

то $3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3$

то $3^2 : 3 = 9 : 3$

$27 = 27$.

$3 = 3$.

ЗАДАЧА 2

Покажете, че ако x е неизвестно число, то $2x + 3x = 5x$. Проверете верността на равенството за $x = 8$.

Решение: От дистрибутивното свойство следва, че

$$2 \cdot x + 3 \cdot x = (2 + 3) \cdot x = 5 \cdot x^*, \text{ т.e. } 2x + 3x = 5x.$$

$$\text{За } x = 8 \text{ получаваме } 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 5 \cdot 8$$

$$16 + 24 = 40$$

$$40 = 40.$$

ЗАДАЧА 3

Намерете: а) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x$; б) $7x + 4x$; в) $7x - 4x$; г) $7,8x - 2,3x$.

Решение: а) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)x = 1 \cdot x = x$

б) $7x + 4x = 11x$

в) $7x - 4x = (7 + (-4))x = 3x$, т.e. $7x - 4x = 3x$

г) $7,8x - 2,3x = (7,8 + (-2,3))x = 5,5x$, т.e. $7,8x - 2,3x = 5,5x$

ЗАДАЧИ

1 Дадено е $a = b$ и c . Приложете:

свойство 1 за $a = 16, b = 4^2$;

свойство 2 за $a = 3^2, b = 9, c = \frac{18}{2}$;

свойство 4 за $a = 4^2, b = 16, c = 2$.

2 Дадено е $a = b$ и $c = d$. Приложете

свойство 3 за $a = 3, b = \frac{9}{3}, c = 4, d = \frac{8}{2}$.

Намерете:

3 а) $7x + 2x$; б) $8x + x$;

в) $9x + 5x$; г) $9x - x$.

4 а) $5x + 2x - 3x$; б) $7x - 2x - 8x$;

в) $8x + 3x - 9x$; г) $7x - 2x - 13x$.

5 а) $5,7x + 2,3x$; б) $3,8x - 5,8x$;

в) $\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}x$; г) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}x$.

* При записа $5 \cdot x$ точката може да не се пише $\rightarrow 5x$.

ЗАДАЧА 1 Намерете неизвестното x , ако:

а) $x + 4 = 7$

б) $5 \cdot x + 3 = 0$

Решение:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \quad x + 4 = 7 \quad \rightarrow | \quad \boxed{} + 2 = 3 \\ \quad \quad \quad x = 7 - 4 \quad \quad \quad \boxed{} = 3 - 2 \\ \quad \quad \quad x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{б)} \quad 5 \cdot x + 3 = 0 \\ \quad \quad \quad 5x = 0 - 3 \\ \quad \quad \quad 5x = -3 \quad \rightarrow | \quad 2 \cdot \boxed{} = 6 \\ \quad \quad \quad x = -3 : 5 \quad \quad \quad \boxed{} = 6 : 2 \\ \quad \quad \quad x = -\frac{3}{5} \quad (x = -0,6) \end{array}$$



Уравнение с едно неизвестно наричаме равенство, в което едно число, означено с буква (например x, y, z, \dots), се приема за неизвестно.



Корен (решение) на едно уравнение се нарича число, което, поставено на мястото на неизвестното, превръща уравнението във вярно числово равенство.

Примери: (зад. 1)

- $x = 3$ е корен на уравнението $x + 4 = 7$, защото $3 + 4 = 7$, $7 = 7$;
- $x = -\frac{3}{5}$ е корен на уравнението $5 \cdot x + 3 = 0$,
защото $5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 = 0$, $-3 + 3 = 0$, $0 = 0$.



Да решим едно уравнение означава да намерим корена (корените) на уравнението (ако има корен).

За да проверим дали правилно сме решили едно уравнение, заместваме получената стойност на x в даденото уравнение и ако получим вярно числово равенство, тя е корен на уравнението. Казваме, че сме извършили **проверка** на решението.

Уравненията от вида $5 \cdot x + 3 = 0$, $7 \cdot x + 14 = 0$, $2x - 6 = 0$, ... могат да се запишат с букви:

$ax + b = 0$ ($a \neq 0$), като

левата страна дясната страна

ax се нарича член на уравнението, който съдържа неизвестното,
 b се нарича **свободен член** (не съдържа x),

$a \neq 0$, защото, ако $a = 0$, членът $ax = 0$ и няма да има уравнение;
 a се нарича коефициент пред неизвестното x .

ЗАДАЧА 2 Без да решавате уравнението $2x + 14 = 0$, проверете дали:

- а) $x = -7$ е корен; б) $x = 7$ не е корен
на даденото уравнение.

Решение:

а) $2x + 14 = 0$	б) $2x + 14 = 0$
?	?
$2 \cdot (-7) + 14 = 0$	$2 \cdot 7 + 14 = 0$
?	?
$-14 + 14 = 0$	$14 + 14 = 0$
$0 = 0$	$28 \neq 0$

Правило за решаване на уравнение от вида

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

1. Прехвърляме свободния член b в дясната страна на уравнението с обратен знак.

$$ax + b = 0 \rightarrow ax = -b$$

2. Делим двете страни на уравнението с коефициента пред x (или умножаваме с реципрочната му стойност).

$$ax = -b \quad | : a \quad \frac{a \cdot x}{a} = -\frac{b}{a}, \text{ т.е. } x = -\frac{b}{a}$$

ЗАДАЧА 3

Решете уравненията:

а) $5x + 4 = 0$; б) $7x - 3 = 0$; в) $\frac{1}{2}x + 4 = 0$.

Решение:

а) $5x + 4 = 0$	б) $7x - 3 = 0$	в) $\frac{1}{2}x + 4 = 0$
$5x = -4 \quad : 5$	$7x = 3 \quad : 7$	$\frac{1}{2}x = -4 \quad \cdot 2$
$x = -\frac{4}{5}$	$x = \frac{3}{7}$	$x = -8$

ЗАДАЧА 4

Решете уравненията:

а) $2x - 4,8 = 0$; б) $3x + 7,2 = 0$; в) $0,2x + 5 = 0$.

Решение:

а) $2x - 4,8 = 0$	б) $3x + 7,2 = 0$	в) $0,2x + 5 = 0$
$2x = 4,8 \quad : 2$	$3x = -7,2 \quad : 3$	$0,2x = -5 \quad : 0,2$
$x = 2,4$	$x = -2,4$	$x = -5 : 0,2$
		$x = -25$



Ако коефициентът пред x е дробно число, по-рационално е да умножим с реципрочното му число.

Примери: $\frac{2}{3}x = -5 \quad | \cdot \frac{3}{2}$ $x = -\frac{15}{2}$, $x = -7\frac{1}{2}$

ЗАДАЧИ

- 1 Проверете дали числото 5 е корен на уравнението:

а) $4x - 20 = 0$; б) $-3x + 15 = 0$;
в) $0,2x - 1 = 0$; г) $\frac{2}{3} \cdot x - 3\frac{1}{3} = 0$.

- 2 Кое от числата $-5, -2, 4$ и 6 е корен на уравнението:

а) $3x - 12 = 0$; б) $2x + 10 = 0$;
в) $5x - 30 = 0$; г) $4x + 8 = 0$?

- 3 Кое от числата $-2,1; -1,2; 0,4$ и $2,5$ е корен на уравнението:

а) $5x - 2 = 0$; б) $4x + 4,8 = 0$;
в) $3x - 7,5 = 0$; г) $3x + 6,3 = 0$?

Решете уравненията:

4 а) $3x - 21 = 0$; б) $4x + 32 = 0$;
в) $-2x + 10 = 0$; г) $-7x - 14 = 0$.

5 а) $2x - 9 = 0$; б) $3x - 2 = 0$;
в) $2x + 9 = 0$; г) $3x + 1 = 0$.

6 а) $\frac{1}{3} \cdot x - 2 = 0$; б) $\frac{3}{7} \cdot x - 4 = 0$;
в) $\frac{2}{9} \cdot x + 3 = 0$; г) $\frac{3}{8} \cdot x - 2 = 0$.

РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ ОТ ВИДА $ax + b = 0$ ($a \neq 0$). УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Проверете дали числото 3 е корен на уравненията:

a) $7x - 21 = 0$; 6) $-3x + 9 = 0$; b) $\frac{2}{3} \cdot x - 2 = 0$; r) $0,4x - 1,2 = 0$.

Решение:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & 7x - 21 = 0 & \text{b)} \frac{2}{3} \cdot x - 2 = 0 \\
 & 7 \cdot 3 - 21 = 0 & \frac{2}{3} \cdot 3 - 2 = 0 \\
 & 21 - 21 = 0 & 2 - 2 = 0 \\
 & 0 = 0 & 0 = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 \text{b)} & -3x + 9 = 0 & \text{c)} 0,4x - 1,2 = 0 \\
 & -3 \cdot 3 + 9 = 0 & 0,4 \cdot 3 - 1,2 = 0 \\
 & -9 + 9 = 0 & 1,2 - 1,2 = 0 \\
 & 0 = 0 & 0 = 0
 \end{array}$$

ЗАДАЧА 2 Без да решавате уравнението $5x + 3 = 0$, проверете дали:

a) $x = -0,6$ е корен; б) $x = 0,6$ не е корен на даденото уравнение.

Решение:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 5x + 3 = 0 \\ & \quad ? \\ & 5 \cdot (-0,6) + 3 = 0 \\ & \quad ? \\ & -3 + 3 = 0 \\ & \quad 0 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{b)} & 5x + 3 = 0 \\ & \quad ? \\ & 5 \cdot 0,6 + 3 = 0 \\ & \quad ? \\ & 3 + 3 = 0 \\ & \quad 6 \neq 0 \end{array}$$

ЗАДАЧА 3 Решете уравненията:

a) $2x - 9 = 0$; б) $2x + 13 = 0$; в) $9x - 7 = 0$; г) $5x + 3 = 0$

Решение:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x - 9 = 0 & \text{b) } 2x + 13 = 0 & \text{c) } 9x - 7 = 0 \\ 2x = 9 & 2x = -13 & 9x = 7 \\ x = \frac{9}{2} & x = -\frac{13}{2} & x = \frac{7}{9} \\ x = 4.5 & x = -6.5 & \end{array}$$

ЗАДАЧА 4 Решете уравненията:

a) $2x - 3,4 = 0$; б) $3x + 4,5 = 0$; в) $0,3x - 6 = 0$; г) $-1,2x + 6 = 0$.

Решение:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} 2x - 3,4 = 0 & \text{b)} 3x + 4,5 = 0 & \text{c)} 0,3x - 6 = 0 & \text{d)} -1,2x + 6 = 0 \\
 2x = 3,4 & 3x = -4,5 & 0,3x = 6 & -1,2x = -6 \\
 x = 3,4 : 2 & x = -4,5 : 3 & x = 6 : 0,3 & x = -6 : (-1,2) \\
 x = 1,7 & x = -1,5 & x = 20 & x = 5
 \end{array}$$

ЗАДАЧА 5 Решете уравненията:

а) $\frac{3}{7} \cdot x - 2 = 0;$

б) $\frac{5}{9} \cdot x + 3 = 0.$

Решение: а) I начин:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} \cdot x - 2 &= 0 \\ \frac{3}{7} \cdot x &= 2 \quad | : \frac{3}{7} \\ x &= 2 : \frac{3}{7} \\ x &= 2 \cdot \frac{7}{3} \\ x &= \frac{14}{3} \\ x &= 4\frac{2}{3}\end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} \cdot x - 2 &= 0 \\ \frac{3}{7} \cdot x &= 2 \quad | \cdot \frac{7}{3} \\ \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} \cdot x &= 2 \cdot \frac{7}{3} \\ x &= \frac{14}{3} \\ x &= 4\frac{2}{3}\end{aligned}$$

б) I начин:

$$\begin{aligned}\frac{5}{9} \cdot x + 3 &= 0 \\ \frac{5}{9} \cdot x &= -3 \quad | : \frac{5}{9} \\ x &= -3 : \frac{5}{9} \\ x &= -3 \cdot \frac{9}{5} \\ x &= -\frac{27}{5} \\ x &= -5\frac{2}{5}\end{aligned}$$

II начин:

$$\begin{aligned}\frac{5}{9} \cdot x + 3 &= 0 \\ \frac{5}{9} \cdot x &= -3 \quad | \cdot \frac{9}{5} \\ \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{5} x &= -3 \cdot \frac{9}{5} \\ x &= -\frac{27}{5} \\ x &= -5\frac{2}{5}\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 6 Намислих едно число. Умножих го с 8. Полученото произведение увеличих с 56 и получих 0. Кое число съм намислил?**Решение:** x – намисленото число

$$\begin{aligned}8 \cdot x + 56 &= 0 \\ 8 \cdot x &= -56 \\ x &= -56 : 8 \\ x &= -7\end{aligned}$$

Отг.: Намисленото число е -7 .**ЗАДАЧИ**

Решете уравненията:

- 1** а) $2x - 13 = 0$; б) $5x + 21 = 0$;
в) $4x - 9 = 0$; г) $4x + 1 = 0$.

- 2** а) $2x - 6,2 = 0$; б) $3x + 7,8 = 0$;
в) $4x - 3,2 = 0$; г) $5x + 7,5 = 0$.

Решете по два начина уравненията:

- 3** а) $0,2x - 3 = 0$; б) $0,3x + 2,1 = 0$;
в) $0,4x - 2 = 0$; г) $0,3x + 6 = 0$.

- 4** а) $\frac{2}{3} \cdot x - 3 = 0$;
б) $\frac{3}{4} \cdot x + 2 = 0$;

- в) $\frac{5}{6} \cdot x - \frac{1}{3} = 0$;
г) $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{2} = 0$.

- 5** Намислих едно число. Умножих го с 5. Полученото произведение намалих с 45 и получих 0. Кое число съм намислил?

- 6** Намислих едно число. Умножих го с $\frac{3}{7}$. Полученото число намалих с 18 и получих 0. Кое число съм намислил?

ЗАДАЧА 1 Решете уравненията:

a) $2x + 7x + 9 = 0$; б) $6x - x - 10 = 0$.

Решение:

a) $\underline{2x} + \underline{7x} + 9 = 0$

$9x + 9 = 0$

$9x = -9 \quad | : 9$

$x = -1$

б) $\underline{6x} - \underline{x} - 10 = 0$

$5x - 10 = 0$

$5x = 10 \quad | : 5$

$x = 2$



В едно уравнение всеки израз може да се замени с равен на него израз.

Примери: В зад. 1 $2x + 7x = 9x$, $6x - x = 5x$.**ЗАДАЧА 2** Годините на майката са 4 пъти повече от тези на дъщерята. Намерете годините на всяка от тях, ако майката е с 24 години по-голяма от дъщеря си.**Решение:** Означаваме годините на дъщерята с x .Годините на майката са $4x$.

I начин: Разликата между годините на майката и тези на дъщерята е 24.

$4x - x = 24$

$3x = 24 \quad | : 3$

$x = 8$

Отг.: Дъщерята е на 8 години.Майката е на 32 години ($4 \cdot 8 = 32$).

II начин: Годините на майката са 24 повече от тези на дъщерята.

$4x = x + 24$

В това уравнение неизвестното x се намира в двете му страни.

Как ще решаваме уравнение от този вид?

Двете уравнения $\begin{cases} (1) 4x = x + 24 \\ (2) 4x - x = 24 \end{cases}$ са модел на една и съща зависимостмежду годините на майката и на дъщерята. **Забелязваме, че** уравнението (2) е получено от уравнението (1), като x е прехвърлено от дясната в лявата страна с обратен знак.**ЗАДАЧА 3** Запишете с равенство по два начина твърдението**7x е с 5 по-голямо от 3x.****Решение:** I начин: $7x = 3x + 5$ II начин: $7x - 3x = 5$ 

Всеки член на едно уравнение може да се прехвърли от едната му страна в другата с противоположен (обратен) знак.

ЗАДАЧА 4 Решете уравненията:

а) $3x = 2x - 1$; б) $5x - 7 = 3x + 1$; в) $5x - 11 = 2x - 26$.

Решение:

а) $3x = 2x - 1$

$3x - 2x = -1$

$x = -1$

б) $5x - 7 = 3x + 1$

$5x - 3x = 1 + 7$

$2x = 8$

$x = 4$

в) $5x - 11 = 2x - 26$

$5x - 2x = -26 + 11$

$3x = -15$

$x = -5$

ЗАДАЧА 5 Решете уравнението $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{2}x + 2$.

Решение: $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{2}x + 2$

$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = 2 + 5$

$\left(\underbrace{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}_6 \right)x = 2 + 5$

$\frac{2-3}{6}x = 7$

$-\frac{1}{6}x = 7 \quad | \cdot (-1)$

$\frac{1}{6}x = -7 \quad | \cdot 6$

$x = -42$



Уравнението се свежда до $-\frac{1}{6}x = 7$, т.е. коефициентът пред неизвестното x е с отрицателен знак. Тогава умножаваме двете страни на уравнението с (-1) .

ЗАДАЧА 6 Решете уравнението $6x + 19 - 2x = 17 - 3x - 12$.**Решение:**

$6x + 19 - 2x = 17 - 3x - 12$

$4x + 19 = 5 - 3x$

$4x + 3x = 5 - 19$

$7x = -14 \quad | : 7$

$x = -2$

1. Заменяме изразите в двете страни на уравнението с равни на тях изрази.
2. Членовете, които съдържат x , прехвърляме в лявата страна, а свободните членове – в дясната.
3. Умножаваме или делим двете страни на уравнението с подходящо число, което е различно от 0.



При решаване на уравненията реда на прилагане на правилата избираме съобразно конкретната задача.

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $7x - 3x - 5 = -17$;

2 $6x - 3x + 13 = 4$;

3 $3x - 7x + 1 = 33$;

4 $8x - 5x - 5 = 7$;

5 $\frac{2}{3}x + 1 = \frac{1}{3}x - 6$;

6 $\frac{3}{5}x - 4 = \frac{2}{5}x + 5$;

7 $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{4}x + 1$;

8 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ.

УПРАЖНЕНИЕ № 1

ЗАДАЧА 1 Решете уравнението $4x - 2,5x + 3 = 8 : \frac{1}{2} - 1$.

Решение:

$$\begin{aligned} 4x - 2,5x + 3 &= 8 : \frac{1}{2} - 1 \\ 1,5x + 3 &= 16 - 1 \\ 1,5x &= 15 - 3 \\ 1,5x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad 1,5x &= 12 \quad | : 1,5 \\ x &= 12 : 1,5 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 1,5x &= 12 \quad | \cdot 2 \\ 3x &= 24 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 1,5x &= 12 \\ \frac{3}{2}x &= 12 \quad | \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 12 \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Знаем, че дистрибутивното свойство за действията събиране и умножение е
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

За $a = 2$, $b = x$, $c = 3$ получаваме $2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$.

За $a = -5$, $b = 2$, $c = x$ получаваме $-5 \cdot (2 + x) = -5 \cdot 2 + (-5) \cdot x = -5 \cdot 2 - 5x$.

За $a = 3$, $b = x$, $c = -2$ получаваме $3 \cdot (x + (-2)) = 3 \cdot x + 3 \cdot (-2) = 3x - 3 \cdot 2$,
т.e. $3 \cdot (x - 2) = 3 \cdot x - 3 \cdot 2$.

При записа $3 \cdot (x - 2)$ точката може да не се пише, т.e. $3(x - 2)$.

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

a) $2(x + 3) - x = 10$; б) $3(x - 2) + 4 = 10$; в) $-5(2 + x) + x = 6$.

Решение:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 2(x + 3) - x = 10 & \text{б)} 3(x - 2) + 4 = 10 & \text{в)} -5(2 + x) + x = 6 \\ 2x + 6 - x = 10 & 3x - 6 + 4 = 10 & -10 - 5x + x = 6 \\ x + 6 = 10 & 3x - 2 = 10 & -10 - 4x = 6 \\ x = 10 - 6 & 3x = 10 + 2 & -4x = 6 + 10 \\ x = 4 & 3x = 12 \quad | : 3 & -4x = 16 \quad | . (-1) \\ & x = 4 & 4x = -16 \\ & & x = -4 \end{array}$$

ЗАДАЧА 3 Решете уравненията:

a) $5(1 - x) = -10x$; б) $2(x + 4) = 4(x - 1)$; в) $2(x + 3) = 4(x + 3,5)$.

Решение:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 5(1 - x) = -10x & \text{б)} 2(x + 4) = 4(x - 1) & \text{в)} 2(x + 3) = 4(x + 3,5) \\ 5 - 5x = -10x & 2x + 8 = 4x - 4 & 2x + 6 = 4x + 14 \\ -5x + 10x = -5 & 2x - 4x = -4 - 8 & 2x - 4x = 14 - 6 \\ 5x = -5 \quad | : 5 & -2x = -12 \quad | . (-1) & -2x = 8 \quad | . (-1) \\ x = -1 & 2x = 12 \quad | : 2 & 2x = -8 \quad | : 2 \\ & x = 6 & x = -4 \end{array}$$

ЗАДАЧА 4 Решете уравненията:

а) $5x - 4 = 3x + 2;$

б) $5x - 1 = 3(x - 1);$

в) $8(x - 2) = 3(x + 1) + 11.$

Решение:

а) $5x - 4 = 3x + 2$

$5x - 3x = 2 + 4$

$2x = 6 \quad | : 2$

$x = 3$

б) $5x - 1 = 3(x - 1)$

$5x - 1 = 3x - 3$

$5x - 3x = -3 + 1$

$2x = -2 \quad | : 2$

$x = -1$

в) $8(x - 2) = 3(x + 1) + 11$

$8x - 16 = 3x + 3 + 11$

$8x - 16 = 3x + 14$

$8x - 3x = 14 + 16$

$5x = 30 \quad | : 5$

$x = 6$

ЗАДАЧА 5 Решете уравненията:

а) $2(x - 7) + 5 = 0;$

б) $4(x + 1,8) - 3 = 0;$

в) $3\left(x + \frac{2}{3}\right) + 7 = 0.$

Решение:

а) $2(x - 7) + 5 = 0$

$2x - 14 + 5 = 0$

$2x - 9 = 0$

$2x = 9 \quad | : 2$

$x = 4,5$

б) $4(x + 1,8) - 3 = 0$

$4x + 7,2 - 3 = 0$

$4x + 4,2 = 0$

$4x = -4,2 \quad | : 4$

$x = -1,05$

в) $3\left(x + \frac{2}{3}\right) + 7 = 0$

$3x + 2 + 7 = 0$

$3x + 9 = 0$

$3x = -9 \quad | : 3$

$x = -3$

ЗАДАЧА 6 Намислих едно число. Намалих го с 5 и получената разлика умножих по 3. Полученото произведение намалих с 9 и получих 0. Кое число съм намислил?**Решение:** x е намисленото число.

$3(x - 5) - 9 = 0$

$3x - 15 - 9 = 0$

$3x - 24 = 0$

$3x = 24 \quad | : 3$

$x = 8$

Отг.: Намисленото число е 8.**ЗАДАЧИ**

Решете уравненията:

- 1** а) $2(x + 3) - x = 9;$
б) $3(x - 2) + 2x = 14;$
в) $4(x - 4) + 2x = 14;$
г) $5(x - 3) - 2x = 3.$

- 2** а) $5(x - 2) = 2x + 5;$
б) $7(x - 3) = 3x + 7;$
в) $5x + 9 = 2(x - 3);$
г) $7x + 6 = 3(x - 2).$

- 3** а) $3(x - 1,2) + 9,6 = 0;$
б) $7(x - 1,3) - 4,9 = 0;$
в) $6(x - 2,1) - 5,4 = 0;$
г) $9(x - 1,5) + 4,5 = 0.$

- 4** а) $3\left(x + \frac{2}{3}\right) + 7 = 0;$
б) $6\left(x - \frac{5}{6}\right) - 13 = 0;$
в) $7\left(x + \frac{5}{7}\right) - 19 = 0;$
г) $9\left(x - \frac{8}{9}\right) - 19 = 0.$

- 5** а) $5(x - 2) - 5 = 3(x + 3) - 2x;$
б) $7 - 3(x + 3) = 5x - 2(x + 4);$
в) $6(x - 3) - 2(x + 4) = 7(x + 1) - 5(x + 3);$
г) $7x - 2(x + 1,5) = 5(x - 1,4) - 3\left(x + \frac{2}{3}\right).$

РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ.

УПРАЖНЕНИЕ № 2

ЗАДАЧА 1 Решете уравненията:

а) $5x + 8 = 2x - 13$; б) $4(x - 2) = 6x + 10$; в) $3(x - 2) = 5(x + 4)$.

Решение:

а) $5x + 8 = 2x - 13$	б) $4(x - 2) = 6x + 10$	в) $3(x - 2) = 5(x + 4)$
$5x - 2x = -13 - 8$	$4x - 8 = 6x + 10$	$3x - 6 = 5x + 20$
$3x = -21 \quad : 3$	$4x - 6x = 10 + 8$	$3x - 5x = 20 + 6$
$x = -7$	$-2x = 18 \quad \cdot (-1)$	$-2x = 26 \quad \cdot (-1)$
	$2x = -18 \quad : 2$	$2x = -26 \quad : 2$
	$x = -9$	$x = -13$

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

а) $3(x - 1,5) = 5(x - 2,5)$; б) $7\left(x + \frac{6}{7}\right) = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)$; в) $8\left(x + 1\frac{3}{4}\right) = 5(x + 1,8)$.

Решение:

а) $3(x - 1,5) = 5(x - 2,5)$	б) $7\left(x + \frac{6}{7}\right) = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)$	в) $8\left(x + 1\frac{3}{4}\right) = 5(x + 1,8)$
$3x - 4,5 = 5x - 12,5$	$7x + 6 = 4x - 3$	$8x + 8 \cdot \frac{7}{4} = 5x + 9$
$3x - 5x = -12,5 + 4,5$	$7x - 4x = -3 - 6$	$8x + 14 = 5x + 9$
$-2x = -8 \quad \cdot (-1)$	$3x = -9 \quad : 3$	$8x - 5x = 9 - 14$
$2x = 8 \quad : 2$	$x = -3$	$3x = -5 \quad : 3$
$x = 4$		$x = -\frac{5}{3}$
		$x = -1\frac{2}{3}$

ЗАДАЧА 3 Решете уравненията:

а) $7(x + 2) - 5(x + 3) = 8(x + 1) - 3(x + 6)$; б) $5(x - 1,6) - 3\left(x + \frac{2}{3}\right) = 8(x + 1,5) - 3\left(x + \frac{7}{3}\right)$.

Решение:

а) $7(x + 2) - 5(x + 3) = 8(x + 1) - 3(x + 6)$	б) $5(x - 1,6) - 3\left(x + \frac{2}{3}\right) = 8(x + 1,5) - 3\left(x + \frac{7}{3}\right)$
$7x + 14 - 5x - 15 = 8x + 8 - 3x - 18$	$5x - 8 - 3x - 2 = 8x + 12 - 3x - 7$
$2x - 1 = 5x - 10$	$2x - 10 = 5x + 5$
$2x - 5x = -10 + 1$	$2x - 5x = 5 + 10$
$-3x = -9 \quad \cdot (-1)$	$-3x = 15 \quad \cdot (-1)$
$3x = 9 \quad : 3$	$3x = -15 \quad : 3$
$x = 3$	$x = -5$

ЗАДАЧА 4 Решете уравненията:

а) $\frac{x}{7} - 0,5 = \frac{3x}{14} - \frac{5}{7}$; б) $\frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{5x}{6} + 1$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x}{7} - 0,5 &= \frac{3x}{14} - \frac{5}{7} \quad | \cdot 14 \\ \frac{14x}{7} - \frac{14}{2} &= \frac{14 \cdot 3x}{14} - \frac{14 \cdot 5}{7} \\ 2x - 7 &= 3x - 10 \\ 2x - 3x &= -10 + 7 \\ -x &= -3 \quad | \cdot (-1) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{x}{3} - \frac{3x}{4} &= \frac{x}{2} - \frac{5x}{6} + 1 \quad | \cdot 12 \\ \frac{12x}{3} - \frac{12 \cdot 3x}{4} &= \frac{12x}{2} - \frac{12 \cdot 5x}{6} + 12 \\ 4x - 9x &= 6x - 10x + 12 \\ -5x &= -4x + 12 \\ -5x + 4x &= 12 \\ -x &= 12 \quad | \cdot (-1) \\ x &= -12 \end{aligned}$$



При решаване на Задача 4 двете страни на уравнението се умножават с число, което е НОК на знаменателите.

ЗАДАЧА 5

В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на уравнението със същия корен.

(A)	$5(x - 3) = 2(x + 3)$	(1) $5 - 2x = 5$
(Б)	$8 - 4(x - 2) = 6(1 - x)$	(2) $4x + 21 = 1$
		(3) $3x - 5 = 16$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{(A) } 5(x - 3) &= 2(x + 3) \\ 5x - 15 &= 2x + 6 \\ 5x - 2x &= 6 + 15 \\ 3x &= 21 \quad | : 3 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Б) } 8 - 4(x - 2) &= 6(1 - x) \\ 8 - 4x + 8 &= 6 - 6x \\ 16 - 4x &= 6 - 6x \\ -4x + 6x &= 6 - 16 \\ 2x &= -10 \quad | : 2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(1) } 5 - 2x &= 5 \\ -2x &= 5 - 5 \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } 4x + 21 &= 1 \\ 4x &= 1 - 21 \\ 4x &= -20 \quad | : 4 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) } 3x - 5 &= 16 \\ 3x &= 16 + 5 \\ 3x &= 21 \quad | : 3 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Отг.:

A	3
B	2

ЗАДАЧА 6

Намислих едно число. Умножих го по 7. Полученото число намалих с 15 и получих удвоеното намислено число. Кое число съм намислил?

Решение: x – намисленото число

$$\begin{aligned} 7x - 15 &= 2x \\ 7x - 2x &= 15 \\ 5x &= 15 \quad | : 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Отг.: Намисленото число е 3.**ЗАДАЧИ**

Решете уравненията:

- 1 $3(x - 5) + 2 = 4(x + 2);$
- 2 $5(x - 1) - 6(2 - x) = 3(1 + x);$
- 3 $\frac{x}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2x}{5} - \frac{7}{15};$

$$\text{4) } \frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x}{6} - \frac{3}{4};$$

$$\text{5) } \frac{x}{3} - \frac{x}{8} - 1 = \frac{x}{2} + 2;$$

$$\text{6) } \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - 5 = \frac{7x}{9} - 2 : \frac{1}{3}.$$

МОДЕЛИРАНЕ С УРАВНЕНИЯ ОТ ВИДА $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

Много задачи от живота, науката и техниката водят до решаване на уравнения. Съставянето на уравнение за дадена текстова задача означава, че задачата се превежда от говоримия език на езика на математиката – казваме, че сме построили **математически модел на задачата**.

Ще изкажем твърдения най-напред на говорим език и след това ще ги запишем с математическо равенство:

x е с 2 по-голямо от 5	$x = 5 + 2$	x е с 3 % по-голямо от 5	$x = 5 + \frac{3}{100} \cdot 5$
x е с 2 по-малко от 5	$x = 5 - 2$	x е с 3 % по-малко от 5	$x = 5 - \frac{3}{100} \cdot 5$
x е 3 пъти по-голямо от 5	$x = 3 \cdot 5$	x е четно число	$x = 2k,$ $k = 1, 2, \dots$
x е 3 пъти по-малко от 5	$x = \frac{5}{3}$	x е нечетно число	$x = 2k - 1,$ $k = 1, 2, \dots$
x е $\frac{2}{3}$ от 5	$x = \frac{2}{3} \cdot 5$	x , разделено с числото 3,	$\left. \begin{array}{l} \text{има частно 2 и остатък 1} \\ \frac{x}{3} = 2 + \frac{1}{3} \end{array} \right\}$
x е 3 % от 5	$x = \frac{3}{100} \cdot 5$		

При решаване на текстови задачи:

1. Избираме неизвестно число.
2. Съставяме математически модел → уравнение.
3. Решаваме уравнението.
4. Записваме с думи отговора на задачата.

За онагледяване и удобство в някои случаи използваме чертеж и таблица.

ЗАДАЧА 1

Намислих едно положително число. Увеличих го 5 пъти и получих число, с 5 по-малко от числото 25. Кое число съм намислил?

Решение: 1. Намисленото число е x , $x > 0$.

2. Увеличих го 5 пъти $\rightarrow 5 \cdot x$

Получих числото $25 - 5 = 20$

Уравнението е $5x = 20$

3. Решаваме уравнението: $5x = 20 \quad | : 5$
 $x = 4$.

Отг.: Намисленото число е 4.

ЗАДАЧА 2

Фирма купила от банка долари за 1 416 лв. при курс 1 доллар = 1,77 лв. Колко долара е купила фирмата?

Решение: Фирмата е закупила x долара.

Уравнението е

$$\begin{aligned} 1,77 \cdot x &= 1 416 \\ x &= 1 416 : 1,77 \\ x &= 800. \end{aligned}$$

Отг.: Фирмата е закупила 800 долара.

ЗАДАЧА 3 В една детската градина купили ябълки по 1,89 лв. за 1 kg и платили 37,80 лв. Колко килограма ябълки са купили?

Решение: Закупили са x kg ябълки.

$$\text{Уравнението е } 1,89 \cdot x = 37,80 \quad | : 1,89 \\ x = 20.$$

Отг.: За детската градина са купили 20 kg ябълки.

ЗАДАЧА 4 Намислих едно число. Намалих го с 11. Една пета от полученото число увеличих с 4 и получих най-голямото едноцифрене просто число. Кое число съм намислил?

Решение:

Намислих числото x .

Намалих го с 11 и получих

$$x - 11.$$

Една пета от полученото число е

$$\frac{1}{5}(x - 11).$$

Увеличих това число с 4

$$\frac{1}{5}(x - 11) + 4.$$

Получих 7.

$$\text{Уравнението е } \frac{1}{5}(x - 11) + 4 = 7$$

$$\frac{1}{5}(x - 11) + 4 = 7 \quad | \cdot 5$$

$$x - 11 + 20 = 35$$

$$x + 9 = 35$$

$$x = 35 - 9$$

$$x = 26.$$

Отг.: Намисленото число е 26.

ЗАДАЧА 5 Сборът на две последователни цели числа е 17. Намерете числата.

Решение: Двете числа са x и $x + 1$. Уравнението е $x + x + 1 = 17$

$$2x = 17 - 1$$

$$2x = 16 \quad | : 2$$

$$x = 8.$$

Отг.: Числата са 8 и 9.

ЗАДАЧА 6 Сборът на три последователни четни числа е 42. Намерете числата.

Решение: Трите числа са $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$.

$$\text{Уравнението е } 2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 42$$

$$6x + 6 = 42$$

$$6x = 42 - 6$$

$$6x = 36 \quad | : 6$$

$$x = 6.$$

Отг.: Числата са 12, 14 и 16.

ЗАДАЧИ

1 Иван купил 4 еднакви тетрадки и сборник, който струва 6,40 лв. Платил 12 лв. Намерете цената на една тетрадка.

2 Петър купил 3 еднакви кофички кисело мляко и 1 литър олио, което струва 2,40 лв. Платил 6 лв. Намерете цената на една кофичка кисело мляко.

3 Г-н Иванов купил зеле по 0,45 лв. за килограм и 16 kg тиква по 0,65 лв. за килограм и платил общо 29,30 лв. Колко килограма зеле е купил г-н Иванов?

4 Сборът на четири последователни числа е 182. Намерете числата.

ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ С УРАВНЕНИЯ ОТ ВИДА $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

ЗАДАЧА 1 Намислих едно положително число. Увеличих го 5 пъти. Полученото число намалих с 28 и получих намисленото число. Кое число съм намислил?

Решение: Намисленото число е x , $x > 0$.

Увеличих го 5 пъти $\rightarrow 5x$.

Полученото число намалих с 28 $\rightarrow 5x - 28$.

Получих намисленото число x .

$$\begin{aligned} \text{Уравнението е } & 5x - 28 = x \\ & 5x - x = 28 \\ & 4x = 28 \quad | : 4 \\ & x = 7. \end{aligned}$$

Отг.: Намисленото число е 7.

ЗАДАЧА 2 Сборът на две последователни четни числа е 66. Намерете числата.

Решение: Числата са $2x$ и $2x + 2$.

Уравнението е $2x + 2x + 2 = 66$

$$\begin{aligned} & 4x = 66 - 2 \\ & 4x = 64 \quad | : 4 \\ & x = 16. \end{aligned}$$

Числата са $(2x = 2 \cdot 16 = 32)$ 32 и 34.

Отг.: 32 и 34

ЗАДАЧА 3 Сборът на две последователни нечетни числа е 40. Намерете числата.

Решение: Числата са $2x - 1$ и $2x + 1$.

Уравнението е $2x - 1 + 2x + 1 = 40$

$$\begin{aligned} & 4x = 40 \\ & x = 10. \end{aligned}$$

Числата са $(2x - 1 = 2 \cdot 10 - 1 = 20 - 1 = 19)$ 19 и 21.

Проверка: $19 + 21 = 40$

Отг.: 19 и 21

ЗАДАЧА 4 При деление на едно число с 14 се получава частно 5 и остатък 3. Кое е това число?

Решение: Числото е x .

$$\begin{aligned} \text{Уравнението е } & \frac{x}{14} = 5 + \frac{3}{14} \quad | \cdot 14 \\ & x = 5 \cdot 14 + 3 \\ & x = 70 + 3 \\ & x = 73. \end{aligned}$$

Отг.: Числото е 73.

ЗАДАЧА 5 Марио, Йосиф и Петър решили общо 95 задачи. Марио решил с 5 задачи по-малко от Йосиф. Йосиф решил два пъти повече задачи от Петър. Колко задачи е решил Марио?

Решение: Задачите, които е решил Петър, са x .

Задачите, които е решил Йосиф, са $2x$, а Марио е решил $2x + 5$.

Уравнението е $x + 2x + 2x + 5 = 95$

$$5x = 90$$

$$x = 18.$$

Отг.: Марио решил 41 задачи.

ЗАДАЧА 6 Иво е 3 пъти по-малък от майка си, а сестра му Ани е с 2 години по-малка от Иво. Сборът на годините на майката и двете ѝ деца е 63. Намерете годините на майката, на Иво и на Ани.

Решение: Годините на майката са x .

Годините на Иво са $\frac{x}{3}$, а на Ани са $\frac{x}{3} - 2$.

Уравнението е $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} - 2 = 63 \quad | \cdot 3$
 $3x + x + x - 2 \cdot 3 = 63 \cdot 3$

$$5x = 63 \cdot 3 + 6$$

$$5x = 195$$

$$x = 39.$$

Отг.: Майката е на 39, Иво е на 13, Ани е на 11 години.

ЗАДАЧА 7 За един час секретарка набира 10 страници, а друга – с 20% повече. За колко часа двете секретарки ще наберат текст от 154 страници, ако работят заедно?

Решение: Двете заедно ще наберат 154 страници за x часа.

Едната секретарка $\rightarrow 10$ стр. за 1 час

Другата секретарка $\rightarrow 10 + \frac{20}{100} \cdot 10 = 12$ стр. за 1 часа.

Уравнението е $10x + 12x = 154$

$$22x = 154 \quad | : 22$$

$$x = 7.$$

Отг.: Двете секретарки ще наберат заедно 154 страници за 7 часа.

ЗАДАЧИ

- 1** Намислих едно число. Намалих го с 3. Полученото число умножих по 5. Към произведението прибавих 17 и получих 32. Кое число съм намислил?
- 2** Сборът на две последователни четни числа е 266. Намерете числата.
- 3** Сборът на три последователни нечетни числа е 111. Намерете числата.
- 4** Намислих едно число. Увеличих го с 12. Една трета от полученото число намалих с 9 и получих най-малкото просто двуцифreno число. Кое число съм намислил?
- 5** При деление на едно число на 17 се получава частно 4 и остатък 9. Кое е това число?
- 6** Ани е 3 пъти по-малка от майка си, а брат ѝ Влади е с 3 години по-голям от Ани. Сборът от годините на тримата е 63. На колко години е всеки от тях?

ПРАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ С УРАВНЕНИЯ

ЗАДАЧА 1

За обзавеждане на класна стая закупили маси и два пъти повече столове общо за 2 070 лв. Намерете колко маси и колко стола са закупили, ако цената на една маса е 45 лв., а цената на един стол е 35 лв.

Решение: Закупили са x маси и $2x$ столове.

$$\text{Уравнението е } 45x + 35 \cdot 2x = 2\ 070$$

$$45x + 70x = 2\ 070$$

$$115x = 2\ 070 \quad | : 115$$

$$x = 18.$$

Закупили са 18 маси и $(18 \cdot 2 = 36)$ 36 стола.

ЗАДАЧА 2

В един склад за книги имало 4 пъти повече книги, отколкото в друг склад. След като от първия склад продали 6 000 книги, а на втория доставили 3 000 книги, в двата склада имало равен брой книги. По колко книги първоначално е имало във всеки склад?

Решение: В I склад $4x$ книги; продали $6\ 000 \rightarrow 4x - 6\ 000$.

Във II склад x книги; доставили $3\ 000 \rightarrow x + 3\ 000$.

Броят на книгите в двата склада станал поравно.

$$\text{Уравнението е } 4x - 6\ 000 = x + 3\ 000$$

$$4x - x = 3\ 000 + 6\ 000$$

$$3x = 9\ 000 \quad | : 3$$

$$x = 3\ 000.$$

В I склад имало $3\ 000 \cdot 4 = 12\ 000$ книги,

във II склад имало 3 000 книги.

ЗАДАЧА 3

Група приятели решили да купят подарък на Иван за рождения му ден. Те пресметнали, че ако съберат по 2 лв. за подаръка, няма да стигнат 5 лв., а ако съберат по 3 лв., ще останат 3 лв. за цветя. Колко са приятелите, които ще купят подарък на Иван, и колко лева струва подаръкът?

Решение: Приятелите на Иван са x , $x \in N$.

	Брой приятели	Вноска (лв.)	Събрана сума (лв.)	Цена на подаръка
I начин	x	2	$2x$	$2x + 5$
II начин	x	3	$3x$	$3x - 3$

$$\text{Уравнението е } 2x + 5 = 3x - 3$$

$$2x - 3x = -3 - 5$$

$$(2 - 3)x = -8$$

$$(-1)x = -8 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = 8.$$

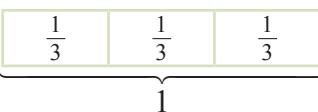
Приятелите на Иван са 8. Цената на подаръка е $(2 \cdot 8 + 5 = 21)$ 21 лв.

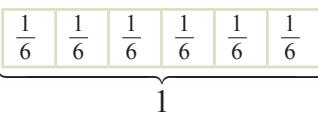
Текстови задачи, които се решават чрез въвеждане на части от числото 1

ЗАДАЧА 4

Един работник може да свърши определена работа за 3 дни, а друг работник може да свърши същата работа за 6 дни. Ако двамата работници работят заедно, за колко дни ще свършат работата?

Решение: Приемаме, че цялата работа е 1.

I работник  за 1 ден свършва $\frac{1}{3}$ част от работата.

II работник  за 1 ден свършва $\frac{1}{6}$ част от работата.

Ако двамата работници работят заедно, ще свършат работата за x дни.

	сам свърши работата (дни)	за 1 ден (части от работата)	работили (дни)	свършили работа (части)	цялата работа (в части)
I раб.	3	$\frac{1}{3}$	x	$x \cdot \frac{1}{3}$	1
II раб.	6	$\frac{1}{6}$	x	$x \cdot \frac{1}{6}$	

Уравнението е $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1 \quad | \cdot 6$

$$\frac{6 \cdot x}{3} + \frac{6 \cdot x}{6} = 1 \cdot 6 \quad \rightarrow \quad 2x + x = 6 \\ 3x = 6 \quad | : 3 \\ x = 2.$$

Двамата работници ще свършват заедно работата за два дни.

ЗАДАЧИ

- За обзавеждане на класна стая закупили маси по 82 лв. и столове по 47 лв. на обща стойност 2 816 лв. Намерете броя на закупените маси и броя на закупените столове, ако броят на столовете е 2 пъти по-голям от броя на масите.
- Петя и Ася отишли на пазар и похарчили една и съща сума. Петя похарчила парите си още на първата сергия, като купила банани по 1,80 лв. за един килограм. Ася от друга сергия закупила същото количество банани, но по 1,40 лв. за един килограм, и с останалите 1,20 лв. купила ябълки. По колко килограма банани са купили Петя и Ася?
- За подготовка на класна работа по математика учителката дала задачи от сборника. Петър решавал 3 дни по един и същ брой задачи на ден и решил 15 задачи повече от зададените. Зоя решавала 2 дни по същия брой задачи като Петър и не успяла да реши 5 задачи. Колко задачи е дала учителката?
- Един трактор може да изоре една нива за 6 часа, а друг – за 12 часа. Ако работят заедно, за колко часа двата трактора ще изорат нивата?
- Две тръби пълнят един басейн. Първата тръба може да го напълни за 12 часа, а втората тръба – за 4 часа. За колко часа двете тръби, ако пълнят едновременно, ще напълнят басейна?

РЕШАВАНЕ НА ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ ОТ ДВИЖЕНИЕ

При решаване на задачи от движение се използва зависимостта между изминатия път S , средната скорост v и времето t , която е $S = v \cdot t$.

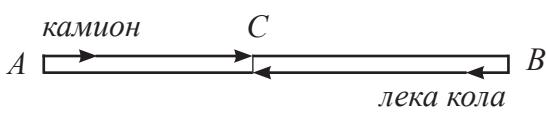
Мерната единица за v е съобразена с мерните единици за S и t .

Например, ако S се измерва с километри (km), а t – с часове (h), v се измерва с километри за час (km/h).

ЗАДАЧА 1 Разстоянието между градовете A и B е 280 km. От A за B пътувал камион със скорост $v = 60$ km/h, а в същото време от B за A пътувала лека кола със скорост, с 20 km/h по-голяма от скоростта на камиона. Намерете след колко часа двете превозни средства са се срещнали.

Решение: Камионът и леката кола са се срещнали след x часа.

Скоростта на леката кола е $(60 + 20 = 80)$ 80 km/h.



	v km/h	t часа	S km
камион	60	x	$AC = 60x$
лека кола	80	x	$BC = 80x$

$$AC + BC = AB$$

$$\text{общо } AB = 280$$

$$\text{Уравнението е } 60x + 80x = 280$$

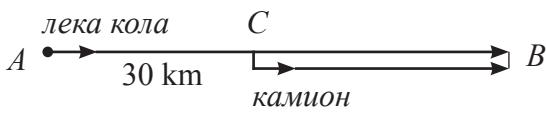
$$140x = 280 \quad | : 140$$

$$x = 2.$$

Камионът и леката кола са се срещнали след 2 часа.

ЗАДАЧА 2 Град C е между градовете A и B и разстоянието $AC = 30$ km. От A за B пътува лека кола със скорост 70 km/h, а в същото време от C за B пътува камион със скорост 50 km/h. Двете превозни средства пристигат едновременно в град B . Намерете времето на пътуване на камиона и леката кола и разстоянията AB и CB .

Решение: Двете превозни средства тръгват едновременно и пристигат в B в едно и също време – пътуват x часа.



	v km/h	t часа	S km
лека кола	70	x	$AB = 70x$
камион	50	x	$CB = 50x$

$$AB - BC = AC$$

$$AC = 30$$

$$\text{Уравнението е } 70x - 50x = 30$$

$$20x = 30 \quad | : 20$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{3}{2} \text{ часа} = 1 \frac{1}{2} \text{ часа} (= 1 \text{ час и } 30 \text{ минути})$$

Двете превозни средства са пътували 1 час и 30 минути.

$$AB = 70x = 70 \cdot \frac{3}{2} = 105, \quad CB = 50x = 50 \cdot \frac{3}{2} = 75,$$

$$AB = 105 \text{ km},$$

$$CB = 75 \text{ km}.$$

ЗАДАЧА 3

Моторна лодка изминава разстоянието между две пристанища на една река и се връща обратно за 8 часа. Намерете разстоянието между двете пристанища, ако скоростта на лодката в спокойна вода е 18 km/h, а скоростта на течението е 3 km/h.

Решение: Разстоянието между двете пристанища е x km.

$$\begin{aligned}v_{\text{по течението}} &= v_{\text{лодката в спокойна вода}} + v_{\text{на течението}} = 18 + 3 = 21 \text{ km/h} \\v_{\text{срещу течението}} &= v_{\text{лодката в спокойна вода}} - v_{\text{на течението}} = 18 - 3 = 15 \text{ km/h}\end{aligned}$$

	S km	v km/h	t h
по течението	x	21	$\frac{x}{21}$
срещу течението	x	15	$\frac{x}{15}$

$$t_{\text{по теч.}} + t_{\text{ср. теч.}} = 8$$

$$\text{Уравнението е } \frac{x}{21} + \frac{x}{15} = 8 \quad | \cdot 105$$

$$5x + 7x = 8 \cdot 105$$

$$12x = 8 \cdot 105$$

$$x = \frac{8 \cdot 105}{12}$$

$$x = 70.$$

Разстоянието между двете пристанища е 70 km.

ЗАДАЧИ

- 1** Разстоянието между градовете A и B е 280 km. От A към B тръгнала лека кола, а от B към A в същото време тръгнал камион. Двете превозни средства се срещнали след 2 часа. Ако скоростта на камиона е с 20 km/h по-малка от скоростта на колата, намерете скоростите на двете превозни средства.
- 2** Разстоянието между градовете A и B е 240 km. От A за B пътува лека кола със скорост 90 km/h, а в същото време от B за A (по същия път) пътува автобус със скорост, с 20 km/h по-малка от скоростта на леката кола. Намерете след колко време двете превозни средства ще се срещнат.
- 3** Разстоянието между градовете A и B е 420 km. От двата града един срещу друг тръгнали едновременно лека кола и камион и се срещнали 3 часа след тръгването си. Скоростта на

леката кола е била с 20 km/h по-голяма от тази на камиона. Намерете скоростите на двете превозни средства.

- 4** Град C е между градовете A и B и разстоянието между градовете A и C е 40 km. От A за B пътува лека кола със скорост 95 km/h, а в същото време от C за B пътува друга лека кола със скорост 75 km/h. Двете леки коли пристигат едновременно в град B . Намерете:
 - а) колко време е пътувала всяка кола;
 - б) разстоянието между градовете A и B .
- 5** Моторна лодка изминава разстоянието между пристанищата A и B на една река и се връща обратно за 7 часа. Намерете разстоянието между двете пристанища, ако скоростта на лодката в спокойна вода е 17,5 km/h, а скоростта на течението е 2,5 km/h.

ЗАПОМНЕТЕ!

Свойства на числовите равенства:**1.** Ако $a = b$, то $b = a$.**2.** Ако $a = b$, $b = c$, то $a = c$.

$$\begin{array}{l} \text{3. Ако } \begin{array}{c} a = b \\ + c = d \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} a = b \\ - c = d \end{array} \right. \\ \text{то } \frac{a+c = b+d}{a-c = b-d}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{4. Ако } \begin{array}{c} a = b \\ | + c, \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} a = b \\ | - c, \end{array} \right. \\ \text{то } a+c = b+c. \end{array}$$

5. Ако $a = b | \cdot c$, $\left| \begin{array}{c} a = b | : c \neq 0 \\ a \cdot c = b \cdot c. \end{array} \right. \quad a : c = b : c$.

Решаване на уравнение:

$$\begin{array}{l} ax + b = 0 | -b \\ ax = -b | : a \neq 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{array}$$

ЗАДАЧА 1 Решете уравненията:

a) $6x + 5 - 4x = 13 - 4x + 4$;
b) $8 + 2(z - 3) = 10z - 3(z - 4)$;

Решение:

a) $6x + 5 - 4x = 13 - 4x + 4$
 $2x + 5 = 17 - 4x$
 $2x + 4x = 17 - 5$
 $6x = 12 | : 6$
 $x = 2$

b) $8 + 2(z - 3) = 10z - 3(z - 4)$
 $8 + 2z - 6 = 10z - 3z + 12$
 $2z + 2 = 7z + 12$
 $2z - 7z = 12 - 2$
 $-5z = 10 | \cdot (-1)$
 $5z = -10 | : 5$
 $z = -2$

б) $5(x - 1) + 3 = 4(x - 5) - 2x$;
г) $8(y + 3) - 2y = 9(y - 2) + 12$.

б) $5(x - 1) + 3 = 4(x - 5) - 2x$
 $5x - 5 + 3 = 4x - 20 - 2x$
 $5x - 2 = 2x - 20$
 $5x - 2x = -20 + 2$
 $3x = -18 | : 3$
 $x = -6$

г) $8(y + 3) - 2y = 9(y - 2) + 12$
 $8y + 24 - 2y = 9y - 18 + 12$
 $6y + 24 = 9y - 6$
 $6y - 9y = -6 - 24$
 $-3y = -30 | \cdot (-1)$
 $3y = 30 | : 3$
 $y = 10$

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

a) $7(x - 2) - 2(x + 3) = 4(x - 4) - 2(x + 5)$; б) $3x - 2(x + 5) - 9 = 7 - 5(x + 4) + 3x$.

Решение:

a) $7(x - 2) - 2(x + 3) = 4(x - 4) - 2(x + 5)$
 $7x - 14 - 2x - 6 = 4x - 16 - 2x - 10$
 $5x - 20 = 2x - 26$
 $5x - 2x = -26 + 20$
 $3x = -6 | : 3$
 $x = -2$

б) $3x - 2(x + 5) - 9 = 7 - 5(x + 4) + 3x$
 $3x - 2x - 10 - 9 = 7 - 5x - 20 + 3x$
 $x - 19 = -2x - 13$
 $x + 2x = -13 + 19$
 $3x = 6 | : 3$
 $x = 2$

ЗАДАЧА 3 В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на уравнението със същия корен.

(A)	$8(x - 3) - 1 = 5(x + 1)$	(1) $4 + x = 6$
		(2) $\frac{x}{5} - 1 = 1$
(Б)	$7 - 2(x + 4) = 1 - x$	(3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = -\frac{1}{3}$

Решение: (A) $8(x - 3) - 1 = 5(x + 1)$ (Б) $7 - 2(x + 4) = 1 - x$

$$\begin{array}{l} 8x - 24 - 1 = 5x + 5 \\ 8x - 25 = 5x + 5 \\ 8x - 5x = 5 + 25 \\ 3x = 30 \quad | : 3 \\ x = 10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7 - 2x - 8 = 1 - x \\ -2x - 1 = 1 - x \\ -2x + x = 1 + 1 \\ -x = 2 \quad | \cdot (-1) \\ x = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (1) 4 + x = 6 & (2) \frac{x}{5} - 1 = 1 \quad | \cdot 5 & (3) \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = -\frac{1}{3} \quad | \cdot 6 \\ x = 6 - 4 & x - 5 = 5 & 3x - 2x = -2 \\ x = 2 & x = 5 + 5 & x = -2 \\ & x = 10 & \end{array}$$

Отг.:

A	2
Б	3

ЗАДАЧА 4 Един басейн се пълни през една тръба за 36 часа, през друга – за 24 часа, а през трета – за 18 часа. За колко часа ще се напълни този басейн, ако са отворени и трите тръби едновременно?

Решение: Ако са отворени и трите тръби, басейнът ще се напълни за x часа, $x > 0$.

тръба	сама напълва басейна (часа)	за 1 час (части от басейна)	пълнили басейна (часове)	напълнили части от басейна	целият басейн (части)
I	36	$\frac{1}{36}$	x	$x \cdot \frac{1}{36}$	
II	24	$\frac{1}{24}$	x	$x \cdot \frac{1}{24}$	1
III	18	$\frac{1}{18}$	x	$x \cdot \frac{1}{18}$	

Уравнението е

$$\begin{array}{l} \frac{x}{36} + \frac{x}{24} + \frac{x}{18} = 1 \quad | \cdot 72 \\ \frac{72 \cdot x}{36} + \frac{72 \cdot x}{24} + \frac{72 \cdot x}{18} = 72 \cdot 1 \\ 2x + 3x + 4x = 72 \\ 9x = 72 \quad | : 9 \\ x = 8. \end{array}$$

Отг.: Ако са отворени и трите тръби, басейнът ще се напълни за 8 часа.

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1 $5x - 20 - 2x = 4$; **7** $7(x - 2) - 3(x + 2) = 4(x - 2) - 2(x + 1)$;

2 $7(x - 2) - 2x = 3x - 8$; **8** $9(x + 1) - 5(x + 3) = 6(x + 2) - 4(x + 4)$.

3 $2(x - 5) - 4x = 2(x + 3)$;

4 $2(x - 2,5) + 2(x + 3) = 9$;

5 $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} = 1 + x$;

6 $\frac{2x}{5} + \frac{x}{-3} - \frac{7}{15} = \frac{4x}{15} + \frac{2}{15}$.

9 Една фирма може да свърши определена работа за 12 дни, друга фирма може да свърши същата работа за 9 дни, а трета фирма – за 18 дни. За колко дни трите фирми, ако работят заедно, могат да свършат тази работа.

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “УРАВНЕНИЯ”

1. Числото 3 е корен на уравнението:
 - A) $2x - 5 = 0$;
 - B) $\frac{1}{2} \cdot x - 3 = 0$;
 - C) $x + 3 = 0$;
 - D) $4x - 12 = 0$.

2. Числото -2 **не** е корен на уравнение-то:
 - A) $2(x + 3) - 2 = 0$;
 - B) $4(x + 1,5) = 3\left(x + 1\frac{1}{3}\right)$;
 - C) $3(x + 1) = 2(x + 0,5)$;
 - D) $5(x + 2) = 2(x + 1)$.

3. Коренът на уравнението $3x + 21 = 0$ е:
 - A) 7;
 - B) -7;
 - C) 19;
 - D) -19.

4. Коренът на уравнението $4(x - 2) - 3 = 2x + 5$ е:
 - A) 5;
 - B) 3,5;
 - C) 8;
 - D) $2\frac{2}{3}$.

5. Намислих едно число. Намалих го с 8. Получената разлика умножих с 3 и получих 21. Намисленото число е:
 - A) 7;
 - B) 8;
 - C) -1;
 - D) 15.

6. Сборът на две последователни нечетни числа е 40. По-малкото число е:
 - A) 17;
 - B) 23;
 - C) 19;
 - D) 21.

7. В едно семейство има три деца – Ани, Петя и Георги. Георги е два пъти по-

голям от Ани, а Петя е с 3 години по-малка от Георги. Сборът от годините на трите деца е 17. На колко години е Георги?

- A) 4;
- B) 6;
- C) 8;
- D) 10.

8. В лявата колона на бланката за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на уравнението със същия корен.

(A)	$7(x - 1) = 3(x + 3)$	(1) $2x + 1 = 7$
		(2) $2(x + 3) = 9$
		(3) $0,5x = 2$
(Б)	$5(x + 1,4) = 2(x + 6,5)$	(4) $0,5x + 1 = 0$
		(5) $4x - 1 = 7$

9. В лявата колона на бланката за отговори е написан номерът на твърдението. Срещу всеки номер запишете „ДА”, ако твърдението е вярно, или „НЕ”, ако твърдението **не** е вярно.

№	Твърдение
(1)	Коренът на уравнението $5 - 3(1 - x) = 5x$ е естествено число.
(2)	Коренът на уравнението $6(x - 2) = 7(x + 3)$ е отрицателно число.
(3)	Коренът на уравнението $7(x - 2) = 3(x - 4)$ е цяло число.

10. Пресметнете числената стойност на израза $A = x^2 : y - 2y \cdot |x|$, ако $5(x - 1,2) - 3\left(x + \frac{1}{3}\right) = 4(x + 1,25)$ и $5 - 3(y + 2) = 2(1 - y)$.

ТЕМА 5

ПРОПОРЦИИ

(Урок № 98 – Урок № 110)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- отношение, пропорция;
- свойства на пропорциите;
- пропорционалност, коефициент на пропорционалност;
- права и обратна пропорционалност.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да прилагат знанията за пропорция в практически задачи;
- да откриват права и обратна пропорционалност в познати ситуации;
- да разчитат, организират и интерпретират информация, зададена чрез диаграми и таблици.

Отношение

ПРИМЕР 1 В една рецепта за домашна лютеница сътношението между количеството на чушките и доматите е **13 : 3**. Това означава, че за 13 kg чушки са необходими 3 kg домати.

ПРИМЕР 2 За приготвяне на варов разтвор (вар, пясък и вода) за фина мазилка сътношението между варта и пясъка е **2 : 5**. Това означава, че към 2 части вар се прибавят 5 части пясък.

ПРИМЕР 3 На бутилка с концентрат за плодов сироп пише **1 : 13**. Това показва, че 1 мерна единица (м. ед.) концентрат се разрежда с 13 м. ед. вода.

ПРИМЕР 4 Географската карта е чертеж на земната повърхност в уменен размер, например с мащаб **1 : 100 000**. Това означава, че 1 km е изображен на картата с 1 см.

В Примерите 1 – 4 се използва частното на две числа:

$$13 : 3 ; \quad 2 : 5 ; \quad 1 : 13 ; \quad 1 : 100\,000 .$$



Частното на две числа a и $b \neq 0$ се нарича **отношение** на тези числа.

Пишем „ $a : b$ “ или $\frac{a}{b}$ “, четем „ a към b “ или „ a се отнася към b “.

Ако числата в една задача изразяват количества продукти, или количества строителни материали, или разстояние между две точки и т.н., казваме, че тези числа изразяват **величини**.

При образуване на отношение на две числа, които изразяват величини, те трябва да са измерени с **една и съща мерна единица**.

В Пример 1 → килограми, в Пример 4 → сантиметри.

ЗАДАЧА 1 Дължината на правоъгълник е $a = 1,2$ dm, а широчината е $b = 4$ cm. Намерете отношението $a : b$.

Решение: За да намерим отношението $a : b$, превръщаме измеренията a и b в една и съща мерна единица.

$$\text{I начин: } a = 1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}; b = 4 \text{ cm} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3, \quad \frac{a}{b} = 3$$

$$\text{II начин: } a = 1,2 \text{ dm}; b = 4 \text{ cm} = 0,4 \text{ dm} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1,2}{0,4} = 3, \quad \frac{a}{b} = 3$$



Отношението на две величини не зависи от избора на мерната единица.

Пропорция

ЗАДАЧА 2 Пресметнете отношенията и ги сравнете:

a) $\frac{36}{6}$ и $\frac{42}{7}$; б) $\frac{8}{44}$ и $\frac{14}{77}$.

Решение:

а) От $\frac{36}{6} = 6$ и $\frac{42}{7} = 6$ следва, че отношенията са равни, т.e. $\frac{36}{6} = \frac{42}{7}$.
б) От $\frac{8}{44} = \frac{2}{11}$ и $\frac{14}{77} = \frac{2}{11}$ следва, че отношенията са равни, т.e. $\frac{8}{44} = \frac{14}{77}$.



Две равни отношения, свързани със знака за равенство, образуват **пропорция**.

Пишем „ $a : b = c : d$ “ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ “, където b и d са различни от 0 числа; четем „ **a към b както c към d** “ или „ **a към b се отнася както c към d** “.

Числата a , b , c , d се наричат **членове на пропорцията**.



ЗАДАЧА 3 Проверете пропорции ли са равенствата:

a) $\frac{12}{6} = \frac{18}{9}$; б) $\frac{3}{21} = \frac{4}{28}$; в) $\frac{15}{3} = \frac{30}{5}$.

Решение:

а) $2 = 2 \rightarrow$ да б) $\frac{1}{7} = \frac{1}{7} \rightarrow$ да в) $5 \neq 6 \rightarrow$ не



В Задача 3-в) двете отношения не са равни, т.e. $\frac{15}{3} \neq \frac{30}{5}$, и не образуват пропорция.

ЗАДАЧИ

- 1** Измеренията на правоъгълник са a и b . Намерете отношението $a : b$, ако:
а) $a = 15$ cm, б) $a = 2,4$ dm,
 $b = 12$ cm; $b = 16$ cm;
в) $a = 0,03$ m, г) $a = 2,8$ dm,
 $b = 1,2$ dm; $b = 210$ mm.

- 2** Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете.

a ($a > 0$)	21	5,6	18	4	7	0,8
b ($b > 0$)	14	2,1	3	20	7	1,2
$a : b$ ($\frac{a}{b}$)	?	?	?	?	?	?

- 3** В една рецепта за приготвяне на мармелад е посочено, че на 5 kg сливи се

слагат 2 kg захар. Запишете отношението на сливите към захарта в тази рецептa.

- 4** Сравнете отношенията:
а) $\frac{10}{15}$ и $\frac{4}{6}$; б) $\frac{4}{8}$ и $\frac{15}{30}$;
в) $\frac{8}{12}$ и $\frac{10}{15}$; г) $\frac{7}{21}$ и $\frac{9}{12}$.

- 5** Проверете пропорции ли са равенствата:
а) $\frac{16}{10} = \frac{24}{15}$; б) $\frac{4}{14} = \frac{21}{8}$;
в) $\frac{8}{12} = \frac{20}{30}$; г) $\frac{9}{12} = \frac{15}{20}$.

ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ. КОЕФИЦИЕНТ НА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ

ЗАДАЧА 1 Изразете периметъра P на квадрат чрез страната му a . Изчислете P за $a = 1; 2; 2,5; 3$ (cm) и подредете получените стойности в таблица.

Решение:

$$P = 4 \cdot a$$

a (cm)	1	2	2,5	3
P (cm)	4	8	10	12

Забелязваме, че:

- с увеличаване дължината на страната на квадрата се увеличава и обиколката му;
- $\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{10}{2,5} = \frac{12}{3} = 4$, т.e. частното от обиколката и съответната страна е едно и също число (4).

Числото 4 е броят на страните на квадрата. То е постоянно число.



Равните отношения $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{2,5}{10} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ също образуват пропорции.
Числото $\frac{1}{4}$ е постоянно число.

ЗАДАЧА 2 Цената на 1 kg сирене е 5 лв. Изразете цената z на x (kg) количество сирене. Изчислете z (в лв.) за $x = 1; 2; 2,5; 3$ (kg) и подредете получените стойности в таблица.

Решение:

$$z = 5 \cdot x$$

x (kg)	1	2	2,5	3
z (лв.)	5	10	12,5	15

Забелязваме, че:

- с увеличаване на количеството закупено сирене се увеличава и заплатената сума;
- $\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{12,5}{2,5} = \frac{15}{3} = 5$, т.e. частното от заплатената сума и съответното закупено количество сирене (в kg) е едно и също число (5).

Числото 5 е цената на 1 kg сирене. В задачата това число е фиксирано (постоянно).

При решаване на Задачи 1 и 2 получихме една и съща зависимост:

$$y = k \cdot x, \text{ където } \begin{cases} \text{в Задача 1} & \begin{array}{l} y = P \text{ е обиколка на квадрат,} \\ x = a \text{ е страна на квадрат,} \\ k = 4 \text{ е брой на страни (постоянен).} \end{array} \\ \text{в Задача 2} & \begin{array}{l} y = z \text{ е заплатена сума за закупеното сирене,} \\ x \text{ е количество (kg),} \\ k = 5 \text{ е цена на 1 kg} \end{array} \end{cases} \text{ (постоянно число за тази задача).}$$

За величините P и a (z и x) казваме, че са пропорционални, а числото $k = 4$ ($k = 5$) е коефициент на пропорционалност (число, което не се променя в условието на дадена задача).



Ако между величините y и x има зависимост от вида

$$y = k \cdot x, \quad k \neq 0,$$

казваме, че y и x са пропорционални величини с коефициент на пропорционалност k .

Зависимостта $y = k \cdot x, \quad k \neq 0$, се нарича **пропорционалност**.

ЗАДАЧА 3

Една диня от 6 kg струва 2,40 лв. Намерете:

- а) цената на 1 kg диня;
- б) цената на една диня, която е 7 kg и 200 g;
- в) килограмите на диня, която струва 5 лв. и 4 ст.

Решение:

Ако една диня е по-тежка, тя ще е и по-скъпа, т.e.

между цената y и количеството x (kg) има пропорционалност с коефициент k – цената на 1 kg.

$$\text{а)} \quad y = k \cdot x, \quad 2,40 = k \cdot 6, \quad k = 2,40 : 6, \quad k = 0,40$$

Цената на 1 kg диня е 0,40 лв.

$$\text{б)} \quad y = 0,40 \cdot x, \quad y = 0,40 \cdot 7,2, \quad y = 2,88$$

Цената на диня от 7 kg и 200 g е 2 лв. и 88 ст.

$$\text{в)} \quad y = 0,40 \cdot x, \quad 5,04 = 0,40 \cdot x, \quad x = 5,04 : 0,40, \quad x = 12,6$$

Диня с цена 5,04 лв. тежи 12 kg и 600 g.



В зависимостта $y = k \cdot x$ участват три величини: y , k и x . В Задача 3 по дадени две от тези величини се търси третата:

$$y = k \cdot x, \quad k = \frac{y}{x}, \quad x = \frac{y}{k}.$$



Зависимостта $y = k \cdot x$ ($k \neq 0$) се нарича още **права пропорционалност**.

Зависимостта $y = k \cdot \frac{1}{x}$ ($k \neq 0, x \neq 0$) също е пропорционалност и се нарича още **обратна пропорционалност**.

ЗАДАЧИ

- 1** Изразете периметъра P на равностранен триъгълник чрез страната му a . Изчислете P за $a = 0,8; 2,3; 5,6; 12; 20,3$ (cm) и подредете получените стойности в таблица.
- 2** Цената на 1 kg грозде е 1,40 лв.
 - a)** Изразете цената z на количеството x .
 - b)** Изчислете z (в лв.) за $x = 2; 2,3; 3; 4,5; 7; 12$ (kg) и подредете получените стойности в таблица.
- 3** Една двойка съответни стойности на x и y при пропорционалност $y = k \cdot x$ са $x = 12,4$ и $y = 3,1$. Намерете коефициента на пропорционалност и съответните стойности на:
 - a)** y , ако $x = 44,8$;
 - b)** x , ако $y = 20,8$.
- 4** Една тиква тежи 8,5 kg и струва 3,40 лв. Намерете:
 - a)** цената на 1 kg от тиквата;
 - b)** цената на една тиква, която тежи 12,800 kg;
 - c)** колко килограма тежи тиква, която струва 5,44 лв.

ЗАДАЧА 1

Дадени са пропорциите: а) $\frac{12}{8} = \frac{15}{10}$; б) $\frac{21}{14} = \frac{0,3}{0,2}$.

За всяка от тях | пресметнете произведението на крайните членове;
| пресметнете произведението на средните членове;
| сравнете двете произведения.

Решение:

$$\text{а)} \frac{12}{8} = \frac{15}{10} \quad \left| \begin{array}{l} 12 \cdot 10 = 120 \\ 8 \cdot 15 = 120 \end{array} \right\} \rightarrow 12 \cdot 10 = 8 \cdot 15$$

$$\text{б)} \frac{21}{14} = \frac{0,3}{0,2} \quad \left| \begin{array}{l} 21 \cdot 0,2 = 4,2 \\ 14 \cdot 0,3 = 4,2 \end{array} \right\} \rightarrow 21 \cdot 0,2 = 14 \cdot 0,3$$

Забелязваме, че в Задача 1 за всяка от пропорциите произведението от крайните членове е равно на произведението от средните членове. Това свойство важи за всяка пропорция.

**Основно (главно) свойство на пропорциите:**

Произведението на крайните членове на една пропорция е равно на произведението от средните членове.

Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ е пропорция, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Вярно е и твърдението: “Ако $a \cdot d = b \cdot c$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ е пропорция”.

ЗАДАЧА 2

Обосновете по два начина твърдението: “Равенството $\frac{14}{21} = \frac{22}{33}$ е пропорция”.

Решение:

$$\text{I начин: } \left. \begin{array}{l} \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \\ \frac{22}{33} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{14}{21} = \frac{22}{33} \text{ е пропорция.}$$

$$\text{II начин: } \left. \begin{array}{l} \frac{14}{21} = \frac{22}{33} \\ 14 \cdot 33 = 462 \\ 21 \cdot 22 = 462 \end{array} \right\} \frac{14}{21} = \frac{22}{33} \text{ е пропорция.}$$

ЗАДАЧА 3

Намерете x , ако:

$$\text{а)} \frac{x}{5} = \frac{14}{35}; \quad \text{б)} \frac{9}{2} = \frac{27}{x}; \quad \text{в)} \frac{5}{x} = \frac{35}{28}; \quad \text{г)} \frac{2}{3} = \frac{x}{12}.$$

Решение:

Като приложим основното свойство на пропорцията, да намерим x .

$$\begin{array}{cccc} \text{а)} \frac{x}{5} = \frac{14}{35} & \text{б)} \frac{9}{2} = \frac{27}{x} & \text{в)} \frac{5}{x} = \frac{35}{28} & \text{г)} \frac{2}{3} = \frac{x}{12} \\ 35 \cdot x = 5 \cdot 14 & 9 \cdot x = 2 \cdot 27 & 5 \cdot 28 = x \cdot 35 & 2 \cdot 12 = 3 \cdot x \\ x = \frac{5 \cdot 14}{35} & x = \frac{2 \cdot 27}{9} & 35 \cdot x = 5 \cdot 28 & 3 \cdot x = 2 \cdot 12 \\ x = 2 & x = 6 & x = \frac{5 \cdot 28}{35} & x = \frac{2 \cdot 12}{3} \\ & & x = 4 & x = 8 \end{array}$$

Всеки член на една пропорция може да се изрази чрез останалите три члена, като се приложи **практическото правило**:

- **всеки краен член** е равен на произведението на средните членове, разделено на другия краен член (*Задача 3-а), б)*);
- **всеки среден член** е равен на произведението на крайните членове, разделено на другия среден член (*Задача 3-в), г*)).

$$\frac{x}{5} = \frac{14}{35}$$

$$x = \frac{5 \cdot 14}{35}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{27}{x}$$

$$x = \frac{2 \cdot 27}{9}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{35}{28}$$

$$x = \frac{5 \cdot 28}{35}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{2 \cdot 12}{3}$$



Всеки член на пропорцията се нарича **четвърта пропорционална** на останалите три члена.

ЗАДАЧА 4

Намерете x , ако: а) $\frac{7}{18} = \frac{14}{x}$; б) $\frac{5}{16} = \frac{x}{32}$.

Решение:

Като приложим практическото правило, получаваме:

$$\text{а)} \frac{7}{18} = \frac{14}{x}, \quad x = \frac{18 \cdot 14}{7}, \quad x = 36; \quad \text{б)} \frac{5}{16} = \frac{x}{32}, \quad x = \frac{5 \cdot 32}{16}, \quad x = 10.$$

ЗАДАЧА 5

Определете x , а след това y от пропорциите $\frac{x}{25} = \frac{3}{5}$ и $\frac{x}{20} = \frac{6}{y}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{1. } \frac{x}{25} &= \frac{3}{5} \\ x &= \frac{25 \cdot 3}{5} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. } \frac{x}{20} &= \frac{6}{y} \\ \frac{15}{20} &= \frac{6}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3. } \frac{15}{20} &= \frac{6}{y} \\ y &= \frac{20 \cdot 6}{15} \\ y &= 8 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- 1** Като използвате основното свойство на пропорциите, проверете пропорции ли са:
- а) $4 : 6 = 10 : 15$; б) $5 : 7 = 20 : 28$;
в) $15 : 20 = 9 : 12$; г) $12 : 8 = 9 : 6$.

- 2** Намерете неизвестният член x в пропорцията:

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{x}{5} &= \frac{3}{15}; & \text{б)} \frac{2}{x} &= \frac{6}{9}; \\ \text{в)} \frac{0,8}{0,5} &= \frac{x}{0,2}; & \text{г)} \frac{4}{0,5} &= \frac{32}{x}. \end{aligned}$$

- 3** Намерете x , ако:

$$\begin{aligned} \text{а)} x : 5 &= 2 : 3; & \text{б)} 6 : x &= 2 : 3; \\ \text{в)} 0,4 : 1 &= x : 5; & \text{г)} 3 : 4 &= 5 : x. \end{aligned}$$

- 4** Проверете равни ли са неизвестните членове в пропорциите:

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{x}{7} &= \frac{5}{9} \text{ и } \frac{y}{5} = \frac{7}{9}; \\ \text{б)} \frac{6}{x} &= \frac{20}{21} \text{ и } \frac{y}{6} = \frac{21}{20}. \end{aligned}$$

- 5** Определете x , а след това y от пропорциите:

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{x}{10} &= \frac{3}{15} \text{ и } \frac{x}{14} = \frac{y}{21}; \\ \text{б)} \frac{3}{x} &= \frac{0,6}{1} \text{ и } \frac{4}{x} = \frac{y}{10}; \\ \text{в)} \frac{4}{14} &= \frac{x}{21} \text{ и } \frac{10}{12} = \frac{y}{x}; \\ \text{г)} \frac{0,2}{0,3} &= \frac{4}{x} \text{ и } \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Дадена е пропорцията $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Приема се, че a, b, c, d са рационални числа, различни от 0, и $a \neq b \neq c \neq d$.

В пропорцията $a : b = c : d$ членовете a и d са крайни членове;
 b и c са средни членове

и се номерират $\begin{array}{cccc} a & : & b & = & c & : & d \\ \text{първи} & & \text{втори} & & \text{трети} & & \text{четвърти} \\ \text{член} & & \text{член} & & \text{член} & & \text{член} \end{array}$.

ЗАДАЧА 1

Дадена е пропорцията $\frac{2}{7} = \frac{14}{49}$.

- Кои членове са средни и кои – крайни?
- Кой от членовете е първи, втори, трети, четвърти?

Решение:

- 7 и 14 са средни членове, 2 и 49 са крайни членове.
- 2 е първи член, 7 – втори, 14 – трети, и 49 е четвърти член.

Свойства на пропорциите

Главно свойство: Ако $a \neq 0, b \neq 0$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Свойства ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$)		Пример:
1.	Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.	Ако $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, то $\frac{9}{3} = \frac{6}{2}$ ($= 3$).
2.	Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.	Ако $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, то $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ ($= \frac{1}{3}$).
3.	Ако $(\frac{a}{b} = \frac{c}{d})$, то $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.	Ако $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, то $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ ($= \frac{3}{2}$).
4.	Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.	Ако $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, то $\frac{2}{3} = \frac{2+6}{3+9}$ ($= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$).
5.	Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$.	Ако $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, то $\frac{2}{3} = \frac{2-6}{3-9}$ ($= \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$).
6.	Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.	Ако $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, то $\frac{2+3}{3} = \frac{6+9}{9}$ ($= \frac{5}{3}$).
7.	Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.	Ако $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, то $\frac{2-3}{3} = \frac{6-9}{9}$ ($= -\frac{1}{3}$).

Всяко от свойствата от 1 до 7 е вярно и в обратна посока.

Например, ако $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

ЗАДАЧА 2 За пропорцията $\frac{4}{14} = \frac{6}{21}$ приложете свойствата от 1 до 7.

Решение: 1. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21} \rightarrow \frac{21}{14} = \frac{6}{4} \left(\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \right)$

2. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21} \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{14}{21} \left(\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \right)$

3. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21} \rightarrow \frac{14}{4} = \frac{21}{6} \left(\frac{7}{2} = \frac{7}{2} \right)$

4. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21} \rightarrow \frac{4}{14} = \frac{4+6}{14+21} \left(\frac{4}{14} = \frac{10}{35}, \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \right)$

5. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21} \rightarrow \frac{4}{14} = \frac{4-6}{14-21} \left(\frac{4}{14} = \frac{-2}{-7}, \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \right)$

6. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21} \rightarrow \frac{4+14}{14} = \frac{6+21}{21} \left(\frac{18}{14} = \frac{27}{21}, \frac{9}{7} = \frac{9}{7} \right)$

7. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21} \rightarrow \frac{4-14}{14} = \frac{6-21}{21} \left(\frac{-10}{14} = \frac{-15}{21}, \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \right)$

ЗАДАЧА 3 Покажете, че ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $a \neq b, c \neq d, b \neq 0, c \neq 0$, то $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

Решение: За $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ прилагаме свойство 2 и получаваме $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

За $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ прилагаме свойство 5 и получаваме $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d}$.

За $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d}$ прилагаме свойство 2 и получаваме $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

ЗАДАЧИ

1 Проверете, че ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ за пропорциите:

а) $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; б) $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$;

в) $\frac{4}{14} = \frac{6}{21}$; г) $\frac{6}{21} = \frac{9}{24}$.

2 Проверете, че ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ за пропорциите:

а) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$; б) $\frac{2}{7} = \frac{10}{35}$;

в) $\frac{6}{8} = \frac{0,3}{0,4}$; г) $\frac{4}{18} = \frac{10}{45}$.

3 Проверете, че ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ за пропорциите:

а) $\frac{-4}{5} = \frac{8}{-10}$; б) $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$;

в) $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$; г) $\frac{0,2}{0,3} = \frac{-8}{-12}$.

4 Проверете, че ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ за пропорциите:

а) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$; б) $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$;

в) $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$; г) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

5 Проверете, че ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ за пропорциите:

а) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; б) $\frac{0,1}{0,4} = \frac{5}{20}$;

в) $\frac{1,2}{1,5} = \frac{8}{10}$; г) $\frac{6}{14} = \frac{1,5}{3,5}$.

6 Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, покажете, че:

а) $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$; б) $\frac{a}{a-c} = \frac{b}{b-d}$;

в) $\frac{b}{a+b} = \frac{d}{c+d}$; г) $\frac{b-d}{b} = \frac{a-c}{a}$.

ЗАДАЧА 1

Колко грама злато има в едно украсение, направено от сплав, която съдържа мед и злато, ако отношението на златото към медта е $6 : 5$ и медта в украсението е 9 g.

Решение:

x g е златото.

$$\text{злато} : \text{мед} = 6 : 5$$

$$x : 9 = 6 : 5 \rightarrow \frac{x}{9} = \frac{6}{5}, \quad x = \frac{9 \cdot 6}{5} = \frac{54}{5} = 10,8$$

В украсението има 10,8 g злато.

ЗАДАЧА 2

Дължината на окръжност се отнася към диаметъра ѝ както $22 : 7$.

Намерете:

- а) дължината на окръжност, ако диаметърът ѝ е 21 см;
- б) диаметъра на окръжност, ако дължината ѝ е 66 см.

Решение:

$$\begin{array}{c} \text{дължината на} \\ \text{окръжност} \end{array} : \begin{array}{c} \text{диаметъра на} \\ \text{окръжност} \end{array} = 22 : 7$$

а) x е дължината на окръжност.

$$x : 21 = 22 : 7$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{21} &= \frac{22}{7} \\ x &= \frac{21 \cdot 22}{7} \\ x &= 66 \end{aligned}$$

Дължината на окръжността е 66 см.

б) x е диаметърът на окръжност.

$$66 : x = 22 : 7$$

$$\begin{aligned} \frac{66}{x} &= \frac{22}{7} \\ x &= \frac{66 \cdot 7}{22} \\ x &= 21 \end{aligned}$$

Дължината на диаметъра е 21 см.

ЗАДАЧА 3

Разстоянието между два града е 165 km. Какво е разстоянието (в см) между тях на карта с мащаб $1 : 1\,000\,000$?

Решение: x см е разстоянието между градовете на картата.

$$165 \text{ km} = 165\,000 \text{ m} = 16\,500\,000 \text{ cm}$$

$$S_{\text{карта}} : S_{\text{действителност}} = 1 : 1\,000\,000$$

$$x (\text{cm}) : 16\,500\,000 = 1 : 1\,000\,000$$

$$\frac{x}{16\,500\,000} = \frac{1}{1\,000\,000}, \quad x = \frac{16\,500\,000 \cdot 1}{1\,000\,000} = 16,5$$

Разстоянието между градовете на картата е 16,5 см.

ЗАДАЧА 4

На карта с мащаб $1 : 40\,000\,000$ разстоянието между градовете A и B е 2,6 см. Намерете действителното разстояние между градовете A и B в километри.

Решение: x см е действителното разстояние AB .

$$S_{\text{карта}} : S_{\text{действителност}} = 1 : 40\ 000\ 000$$

$$2,6 : x \text{ (cm)} = 1 : 40\ 000\ 000$$

$$\frac{2,6}{x} = \frac{1}{40\ 000\ 000}, \quad x = \frac{2,6 \cdot 40\ 000\ 000}{1} = 104\ 000\ 000 \text{ (cm)}$$

$$104\ 000\ 000 \text{ cm} = 1\ 040\ 000 \text{ m} = 1\ 040 \text{ km}$$

Действителното разстояние е $AB = 1\ 040 \text{ km}$.



При решаване на Задача 4 намираме търсеното разстояние в сантиметри. По-удобно е превръщането на мерните единици да е в последователност $\text{cm} \rightarrow \text{m} \rightarrow \text{km}$.

ЗАДАЧА 5 На технически чертеж на жилищен блок дължината L_1 на блока е 60 см, а действителната му дължина L е 30 м. Намерете машаба на чертежа.

Решение: Машабът на чертежа е $1 : x$.

$$L_1 : L = 1 : x \quad (30 \text{ m} = 3\ 000 \text{ cm})$$

$$60 : 3\ 000 = 1 : x$$

$$\frac{60}{3\ 000} = \frac{1}{x},$$

$$x = \frac{3\ 000 \cdot 1}{60} = 50$$

Машабът на чертежа е $1 : 50$.

ЗАДАЧИ

- 1** За приготвяне на варов разтвор за фина мазилка отношението на варта към пясъка е $2 : 5$. Намерете колко килограма вар трябва да се прибавят към 700 kg пясък, за да се получи исканият разтвор.
- 2** За приготвяне на циментов разтвор се смесва цимент и пясък в отношение $1 : 4$. Намерете колко килограма пясък е необходимо да прибавим към 150 kg цимент, за да получим искания разтвор.
- 3** Вид домашна лютеница се приготвя от чушки и домати в отношение $13 : 3$. Имаме 30 kg чушки. Намерете колко килограма домати трябва да купим, за да пригответим тази лютеница.
- 4** Дълчините на катетите на правоъгълен триъгълник се отнасят както
- 5 : 12.** Намерете лицето на триъгълника, ако дължината на по-големия катет е 24 см.
- 5** Разстоянието между две селища е 560 km. Намерете разстоянието (в см) между тях на карта с машаб $1 : 1\ 000\ 000$.
- 6** Разстоянието между два града е 380 km. Какво е разстоянието (в см) между тях на карта с машаб $1 : 2\ 000\ 000$?
- 7** На скица с машаб $1 : 2\ 000$ дължината на отсечката AB е 3 см. Намерете действителното разстояние между A и B в метри.
- 8** На географска карта с машаб $1 : 100\ 000$ разстоянието между две селища е 27 см. Намерете действителното разстояние между тези селища в километри.

ЗАДАЧА 1 Двама съдружници спечелили 2 700 лв. и си поделили печалбата в отношение $5 : 4$. Намерете по колко лева е получил всеки от тях.

Решение:

Отношението $5 : 4 = \frac{5}{4}$ можем да запишем $\frac{5 \cdot x}{4 \cdot x}, x > 0$.

Тогава I съдружник е получил $5 \cdot x$ лв., а II – $4 \cdot x$ лв.

$$5 \cdot x + 4 \cdot x = 2700$$

$$9 \cdot x = 2700$$

$$x = 2700 : 9$$

$$x = 300 \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot x = 5 \cdot 300 = 1500 \\ 4 \cdot x = 4 \cdot 300 = 1200 \end{cases}$$

Отг.: I съдружник е получил 1 500 лв., а II съдружник – 1 200 лв.

ЗАДАЧА 2 Периметърът на $\triangle ABC$ е 36 см. Дадено е, че $a : b = 3 : 4$ и $b : c = 4 : 5$. Намерете страните на триъгълника.

Решение:

От даденото $a : b = 3 : 4$

$b : c = 4 : 5$

можем да запишем $a : b : c = 3 : 4 : 5$.

Знаем, че $a + b + c = 36$ (cm).

Приемаме, че $a = 3 \cdot x, b = 4 \cdot x, c = 5 \cdot x$.

Тогава $3 \cdot x + 4 \cdot x + 5 \cdot x = 36$

$$12 \cdot x = 36$$

$$x = \frac{36}{12}$$

$$x = 3$$

За страните на $\triangle ABC$ намираме:

$$a = 3 \cdot x = 3 \cdot 3 = 9,$$

$$b = 4 \cdot x = 4 \cdot 3 = 12,$$

$$c = 5 \cdot x = 5 \cdot 3 = 15.$$

Отг.: $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm.



Отношенията $a : b$ и $b : c$ е прието да записваме $a : b : c$.

ЗАДАЧА 3 В склад на магазин има общо 600 чифта обувки, като отношението на количествата дамски, мъжки и детски обувки е $5 : 2 : 3$. Намерете колко чифта обувки от всеки вид има в склада.

Решение:

Приемаме, че: | дамските обувки са $5 \cdot x$ чифта;
мъжките обувки са $2 \cdot x$ чифта;
детските обувки са $3 \cdot x$ чифта.

$$5 \cdot x + 2 \cdot x + 3 \cdot x = 600$$

$$10 \cdot x = 600$$

$$x = 60$$

Тогава $5 \cdot x = 5 \cdot 60 = 300, 2 \cdot x = 2 \cdot 60 = 120, 3 \cdot x = 3 \cdot 60 = 180$.

Отг.: 300 чифта дамски, 120 чифта мъжки и 180 чифта детски обувки

ЗАДАЧА 4 Вкусен домашен мармалад се приготвя от сливи, праскови и захар в отношение $7 : 3 : 4$. Набрахме 28 kg сливи. Колко килограма праскови и колко килограма захар трябва да купим, за да направим от всичките сливи мармалад?

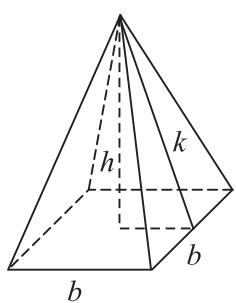
Решение: Приемаме, че $\left| \begin{array}{l} \text{сливите са } 7 \cdot x, \\ \text{prasковите са } 3 \cdot x, \\ \text{захарта е } 4 \cdot x. \end{array} \right.$ Сливите са 28 kg. Тогава $7 \cdot x = 28$
 $x = 4$.

$$3 \cdot x = 3 \cdot 4 = 12, \quad 4 \cdot x = 4 \cdot 4 = 16$$

Отг.: Трябва да купим 12 kg праскови и 16 kg захар.

ЗАДАЧА 5 Периметърът на основата на правилна четириъгълна пирамида е 48 cm и $b : h : k = 6 : 4 : 5$, където b е основният ръб, h е височината и k е апотемата на пирамидата. Намерете повърхнината и обема на пирамидата.

Решение:



1. $b = 6 \cdot x, \quad h = 4 \cdot x, \quad k = 5 \cdot x$
2. $P = 4 \cdot b \quad 3. \quad b = 6 \cdot x = 12 \text{ cm}$
 $48 = 4 \cdot 6 \cdot x \quad h = 4 \cdot x = 8 \text{ cm}$
 $x = 2 \text{ cm} \quad k = 5 \cdot x = 10 \text{ cm}$
4. $S = \frac{P \cdot k}{2} \quad 5. \quad B = b^2 = 144$
 $S = \frac{48 \cdot 10}{2} \quad B = 144 \text{ cm}^2$
 $S = 240 \text{ cm}^2$
6. $S_1 = S + B \quad 7. \quad V = \frac{B \cdot h}{3}$
 $S_1 = 240 + 144 \quad V = \frac{144 \cdot 8}{3}$
 $S_1 = 384 \text{ cm}^2 \quad V = 384 \text{ cm}^3$

Отг.:

$$S_1 = 384 \text{ cm}^2 \quad V = 384 \text{ cm}^3$$

ЗАДАЧИ

1. Периметърът на правоъгълник е 1 100 mm. Намерете страните a и b на правоъгълника (в cm), ако знаете, че $a : b = 6 : 5$.
2. Обемът на конус е $800 \pi \text{ cm}^3$, диаметърът му е 20 cm, а за височината и образуващата знаем, че $h : l = 12 : 13$. Намерете околната и пълната повърхнина на конуса.
3. Три магазина получили стока общо за 2 400 лв. и си я поделили в отношение $1 : 2 : 3$. Намерете за колко лева стока е получил всеки магазин.
4. Вкусна домашна лютеница се получава от червени чушки, патладжани и доматено пюре, които се отнасят както $12 : 4 : 1$. Имаме 3 kg доматено
- пюре. По колко килограма чушки и патладжани трябва да купим, за да използваме доматеното пюре, което имаме?
5. За получаване на кафява боя се смесват синя, жълта и червена в отношение $1 : 2 : 3$. Намерете колко килограма синя, жълта и червена боя са необходими за получаването на 9 kg кафява боя.
6. Височината на конус е 9 cm, а за радиуса, височината и образуващата знаем, че $r : h : l = 4 : 3 : 5$. Намерете радиуса, образуващата, околната и пълната повърхнина и обема на конуса.

ЗАДАЧА 1 Напишете формула за произведението y на числото 3 с произволно число x .

Решение:

$$y = 3x, \quad x - \text{произволно число}$$

ЗАДАЧА 2 Изразете периметъра P на равностранен триъгълник чрез страната му x . Изчислете периметъра за $x = 1; 2; 2,5; 3$ (в см) и подредете получените стойности в таблица.

Решение:

$$P = 3x \text{ при } x > 0$$

x (cm)	1	2	2,5	3
P (cm)	3	6	7,5	9

ЗАДАЧА 3 Кофа с вместимост 18 L се пълни с вода. Количество вода в края на всяка минута е записано в таблицата:

Време x (в min)	0	1	2	3	4	5	6
Количество вода y (в L)	0	3	6	9	12	15	18

- Напишете формула за зависимостта между величините x и y .
- Изчислете количеството вода в кофата след 2 min 30 s.

Решение:

- $y = 3x, \quad 0 \leq x \leq 6$
- $y = 3 \cdot 2,5 = 7,5$. След 2 min 30 s в кофата ще има 7,5 L вода.

При решаване на трите задачи получихме една и съща зависимост

$y = kx$, като $\left| \begin{array}{l} \text{в Задача 1} \quad y = 3x, x \text{ е произволно число,} \\ \text{в Задача 2} \quad y = 3x, x \text{ е страна на равностранен триъгълник,} \\ \text{в Задача 3} \quad y = 3x, x \text{ е времето (в min).} \end{array} \right.$



За две величини x и y казваме, че са **правопропорционални**, ако между тях съществува зависимост от вида $y = kx$ ($k \neq 0$).

Коефициентът k се нарича коефициент на пропорционалност.

Ако проследим изменението на стойностите на x и съответните стойности на y в таблиците на Задачи 2 и 3, ще забележим, че:

- с увеличаване на величината x се увеличава и съответната стойност на величината y (P), тъй като $k > 0$;
- отношението на стойностите на променливата y към съответните стойности на променливата x е постоянна величина, равна на коефициента на пропорционалност k :

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \dots = \frac{y}{x} = k, \quad x \neq 0.$$

ЗАДАЧА 4 Докажете, че при правата пропорционалност $y = kx$ отношението на които и да са стойности на величината x е равно на отношението на съответните стойности на величината y .

Решение:

Нека x_1 и x_2 са две произволни стойности на величината x , а y_1 и y_2 – съответните стойности на величината y .

$$\text{От } y_1 = kx_1 \text{ и } y_2 = kx_2 \text{ получаваме } \frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2}, \text{ т.e. } \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

ЗАДАЧА 5 Пълнотата на човек с височина h m се характеризира с величината A , която е в правопропорционална зависимост с теглото му P kg, т.e. $A = kP$, където коефициентът на пропорционалност $k = \frac{1}{h^2}$ се изчислява индивидуално за всеки човек. Ако h е вашата височина и P – вашето тегло, пресметнете k и след това A . Направете извод за вашата пълнота, като се ръководите от таблицата.

$A < 15$	болестна слабост
$15 \leq A < 19$	слабост
$19 \leq A < 25$	нормално тегло
$25 \leq A < 30$	пълнота
$A \geq 30$	затлъстяване

Решение:

- Ако вие сте висок 1,77 m и тежите 70 kg, то тогава $k = \frac{1}{1,77^2} \approx 0,32$.
 $A = 0,32 \cdot 70 = 22,4$, $19 \leq A < 25 \Rightarrow$ вашето тегло е нормално.
- Ако вие сте висок 1,77 m и тежите 80 kg, то тогава $k = \frac{1}{1,77^2} \approx 0,32$.
 $A = 0,32 \cdot 80 = 25,6$, $25 \leq A < 30 \Rightarrow$ вие сте пълен.

ЗАДАЧИ

- 1** Известно е, че величината U се изменя правопропорционално на величината l с коефициент на пропорционалност 2. Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете.

l	4	1,5	?	10	?	3,5	11,1	?
U	?	?	6	?	8,2	?	?	300

- 2** Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете така, че величината y да е правопропорционална на величината x . Намерете коефициента на пропорционалност.

x	-5	-3	-1	0	1	3	5
y	15	?	?	?	?	?	?

- 3** Дадена е таблицата

x инча	1	2	3	4	5	6
y см	2,54	5,08	7,62	10,16	12,70	15,24

Изразете зависимостта между дължината в сантиметри и съответната дължина в инчове.

- 4** Начертайте таблиците в тетрадките си и ги попълнете (с точност до една хилядна). Определете коефициента на пропорционалност.

x мили	1	2	3	4
$y = 1,6093x$ km	?	?	?	?
x km	1	2	3	4
$y = kx$ мили	0,6214	?	?	?

Дадена е правата пропорционалност $y = 3x$.

Проверете вярно ли е попълнена таблицата.

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

Всяка стойност на x и съответната ѝ стойност на y могат да се разглеждат като координати на точка в декартова координатна система.

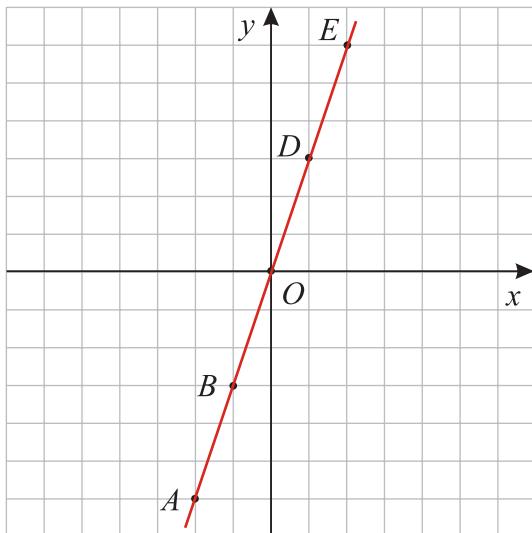
Например: $x = -2, y = -6$ е точка $(-2; -6)$

$x = 1, y = 3$ е точка $(1; 3)$.

ЗАДАЧА 1

Върху квадратна мрежа начертайте декартова (правоъгълна) координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление) и означете точките, като използвате попълнената по-горе таблица.

- $A(-2; -6)$
- $B(-1; -3)$
- $O(0; 0)$
- $D(1; 3)$
- $E(2; 6)$



Ако начертаем права през две от тези точки, например A и E , при точен чертеж тази права ще мине и през точките B , O и D . Опитно установихме, че избраните пет точки **лежат на една права**, която се нарича **графика на правата пропорционалност** $y = 3x$.

Всяка права е определена от две точки. За да начертаем графиката на правата пропорционалност, достатъчно е да намерим две точки от нея и да начертаем правата, която минава през тези две точки.

Графиката на правата пропорционалност минава през началото на координатната система $O(0; 0)$.

При чертане на графиката на правата пропорционалност за удобство едната от двете точки може да бъде точката $O(0; 0)$.

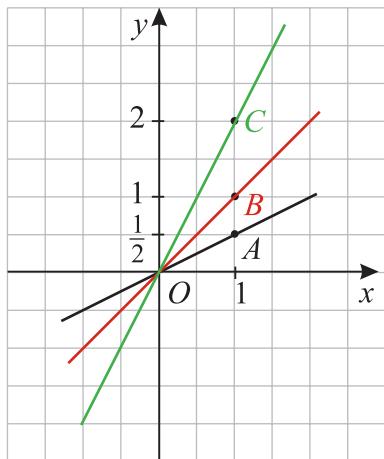
ЗАДАЧА 2 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 2 деления). Начертайте графиката на правата пропорционалност:

a) $y = \frac{1}{2}x$; б) $y = x$; в) $y = 2x$.

Решение:

x	0	1	
$y = \frac{1}{2}x$	0	$\frac{1}{2}$	$A\left(1; \frac{1}{2}\right)$
$y = x$	0	1	$B(1; 1)$
$y = 2x$	0	2	$C(1; 2)$

При $k > 0$ графиката на правата пропорционалност лежи в първи и трети квадрант.



Записването на координатите на точката $O(0; 0)$ е излишно. За да начертаем графиката на правата пропорционалност, достатъчно е да намерим координатите само на една точка и да начертаем правата линия, която минава през нея и точката O .

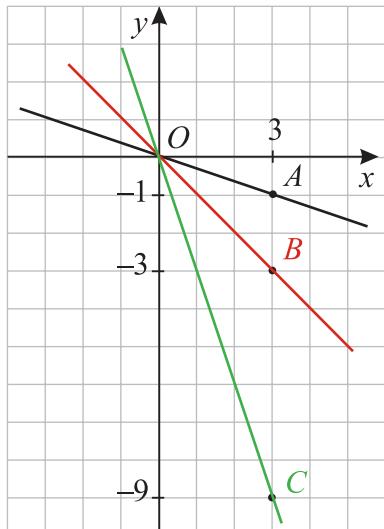
ЗАДАЧА 3 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Начертайте графиката на правата пропорционалност:

a) $y = -\frac{1}{3}x$; б) $y = -x$; в) $y = -3x$.

Решение:

x	3	
$y = -\frac{1}{3}x$	-1	$A(3; -1)$
$y = -x$	-3	$B(3; -3)$
$y = -3x$	-9	$C(3; -9)$

При $k < 0$ графиката на правата пропорционалност лежи във втори и четвърти квадрант.



ЗАДАЧИ

1 Върху квадратна мрежа начертайте правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление). Начертайте графиката на правата пропорционалност:

a) $y = 2x$ и $y = -2x$; б) $y = -3x$ и $y = 3x$; в) $y = \frac{1}{3}x$ и $y = -\frac{1}{2}x$.

ЗАДАЧА 1

Лицето на правоъгълник е 400 см^2 . Намерете широчината на правоъгълника y , ако дължината му x е:

- а) 10 см; б) 40 см; в) 50 см; г) 100 см.

Решение:

Лицето на правоъгълника е $S = x \cdot y$, т.е. $400 = x \cdot y$. Търсим $y = \frac{400}{x}$.

$$\text{а) За } x = 10 \text{ см, } y = \frac{400}{x} = \frac{400}{10} = 40, \quad y = 40 \text{ см;}$$

$$\text{б) за } x = 40 \text{ см, } y = \frac{400}{x} = \frac{400}{40} = 10, \quad y = 10 \text{ см;}$$

$$\text{в) за } x = 50 \text{ см, } y = \frac{400}{x} = \frac{400}{50} = 8, \quad y = 8 \text{ см;}$$

$$\text{г) за } x = 100 \text{ см, } y = \frac{400}{x} = \frac{400}{100} = 4, \quad y = 4 \text{ см.}$$

Забелязваме, че:

- ако различни правоъгълници имат едно и също лице, произведението на двете им измерения е едно и също ($x \cdot y = 400$).
Правоъгълник с по-голяма дължина 10; 40; 50; 100,
има по-малка широчина 40; 10; 8; 4;
- между дължината на правоъгълник x и широчината му y съществува зависимостта $y = \frac{400}{x}$, т.е. $y = \frac{S}{x}$.

Тази зависимост може да се запише $y = 400 \cdot \frac{1}{x}$.

Стойностите на y са пропорционални на стойностите на $\frac{1}{x}$, т.е. на обратните (реципрочните) стойности на x . Тази зависимост между y и x се нарича обратна пропорционалност, а числото 400 не се променя и е коефициент на пропорционалност.



Ако между величините y и x има зависимост от вида

$$y = k \cdot \frac{1}{x}, \quad k \neq 0, \quad x \neq 0,$$

казваме, че те са **обратнопропорционални с коефициент на пропорционалност k** .

Зависимостта $y = k \cdot \frac{1}{x}$, $k \neq 0$, $x \neq 0$, се нарича **обратна пропорционалност**.

ЗАДАЧА 2

Ако x и y са обратнопропорционални величини, намерете коефициента k . Начертайте таблицата в тетрадките си и я попълнете.

x	8	4	$\frac{1}{2}$?	?
$y = k \cdot \frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$?	?	2	4

Решение: От $x = 8$ и $y = \frac{1}{2}$ намираме k : $\frac{1}{2} = k \cdot \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{2} : \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{2} \cdot 8$, $k = 4$.

От $y = 4 \cdot \frac{1}{x}$ следва $x \cdot y = 4$.

$$\text{Тогава: } \begin{cases} \text{за } x = 4, y = 4 \cdot \frac{1}{4}, y = 1; \\ \text{за } x = \frac{1}{2}, y = 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}, y = 8; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{за } y = 2, x \cdot 2 = 4, x = \frac{4}{2}, x = 2; \\ \text{за } y = 4, x \cdot 4 = 4, x = \frac{4}{4}, x = 1. \end{array} \right.$$



Когато между x и y има обратнопропорционална зависимост с коефициент k и по дадени две от тези величини търсим третата, по-удобно е вместо $y = k \cdot \frac{1}{x}$ да запишем $y = \frac{k}{x}$ или $x \cdot y = k$.

Графика на обратната пропорционалност

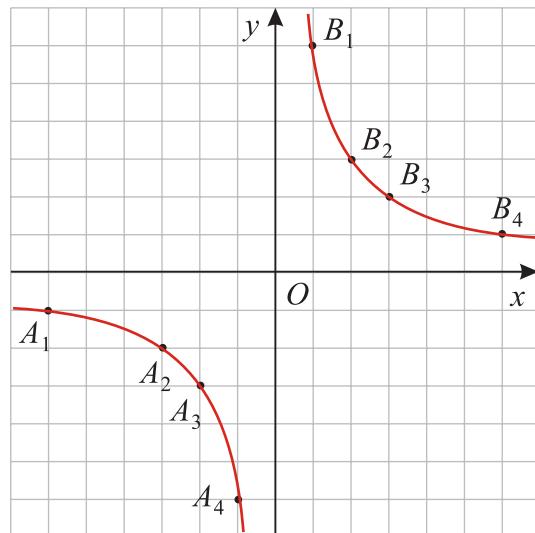
Дадена е обратната пропорционалност $y = 6 \cdot \frac{1}{x}$. Проверете вярно ли е попълнена таблицата.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y = 6 \cdot \frac{1}{x}$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1
	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4
	(-6; -1)	(-3; -2)	(-2; -3)	(-1; -6)	(1; 6)	(2; 3)	(3; 2)	(6; 1)

Върху квадратна мрежа е начертана правоъгълна координатна система Oxy (1 м. ед. = 1 деление) и са означени точките $A_1(-6; -1)$, $B_1(1; 6)$, $A_2(-3; -2)$, $B_2(2; 3)$, $A_3(-2; -3)$, $B_3(3; 2)$, $A_4(-1; -6)$, $B_4(6; 1)$.

При плавното съединяване на точките A_1, \dots, A_4 и точките B_1, \dots, B_4 се получават две криви линии, които са графика на обратната пропорционалност.

Графиката на $y = k \cdot \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) не минава през точките с абсциса 0 (т.e. не пресича ординатната ос y).



ЗАДАЧИ

- 1** y е обратнопропорционално на x с коефициент на пропорционалност k . Запишете зависимостта между y и x , начертайте в тетрадките и попълнете таблицата при $k = 3$.

x	$\frac{1}{5}$	0,1	1	2	2,5	3	6
y	?	?	?	?	?	?	?

- 2** Ако y зависи обратнопропорционално от x , запишете зависимостта между y и x , начертайте в тетрадките и попълнете таблицата.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	6	9	12
y	?	?	?	?	$\frac{1}{9}$?	?

- 3** Лицето на правоъгълен триъгълник с катети a и b е 96 cm^2 . Ако единият катет е $a = 96; 48; 24; 12; 8; 6; 4; 2; (1 \text{ cm})$, намерете съответната дължина на катета b . Запишете зависимостта между a и b и получените стойности за b подредете в таблица.

РАЗЧИТАНЕ НА ДАННИ, ПРЕДСТАВЕНИ ЧРЕЗ ДИАГРАМИ И ГРАФИКИ

Таблица 1. Средна температура на въздуха през първото шестмесечие на дадена година.

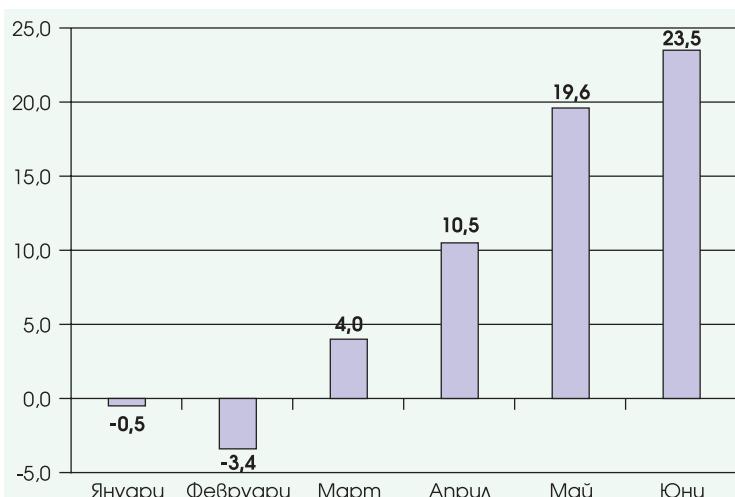
Метеорологични станции	Средномесечни температури в градуси по Целзий					
	Януари	Февруари	Март	Април	Май	Юни
Видин	-0,5	-3,4	4,0	10,5	19,6	23,5
Плевен	-0,2	-3,6	4,7	10,9	20,5	23,7
Велико Търново	0,7	-2,7	4,2	10,4	19,8	23,4
Варна	3,0	-2,1	3,3	8,3	17,2	23,0
Бургас	3,5	-0,8	3,4	8,1	16,9	23,4
Хасково	2,9	-1,6	4,6	10,0	19,0	24,4
Казанлък	1,4	-2,4	3,5	9,2	18,1	22,7
София	0,2	-3,5	4,0	8,8	18,0	21,9

Данните от таблица 1 могат да се използват за проследяване на промяната на температурата в дадено населено място от месец януари до месец юни, за сравнителен анализ на температурите в различните населени места, за климатични изследвания, свързани със земеделието, и др.

Например от таблицата се вижда, че за изброените градове месецът с най-ниски температури е февруари, че температурите през месец януари са най-високи в морските градове Варна и Бургас и т.н.

Средномесечните температури във Видин за първото полугодие на годината са дадени на диаграмата.

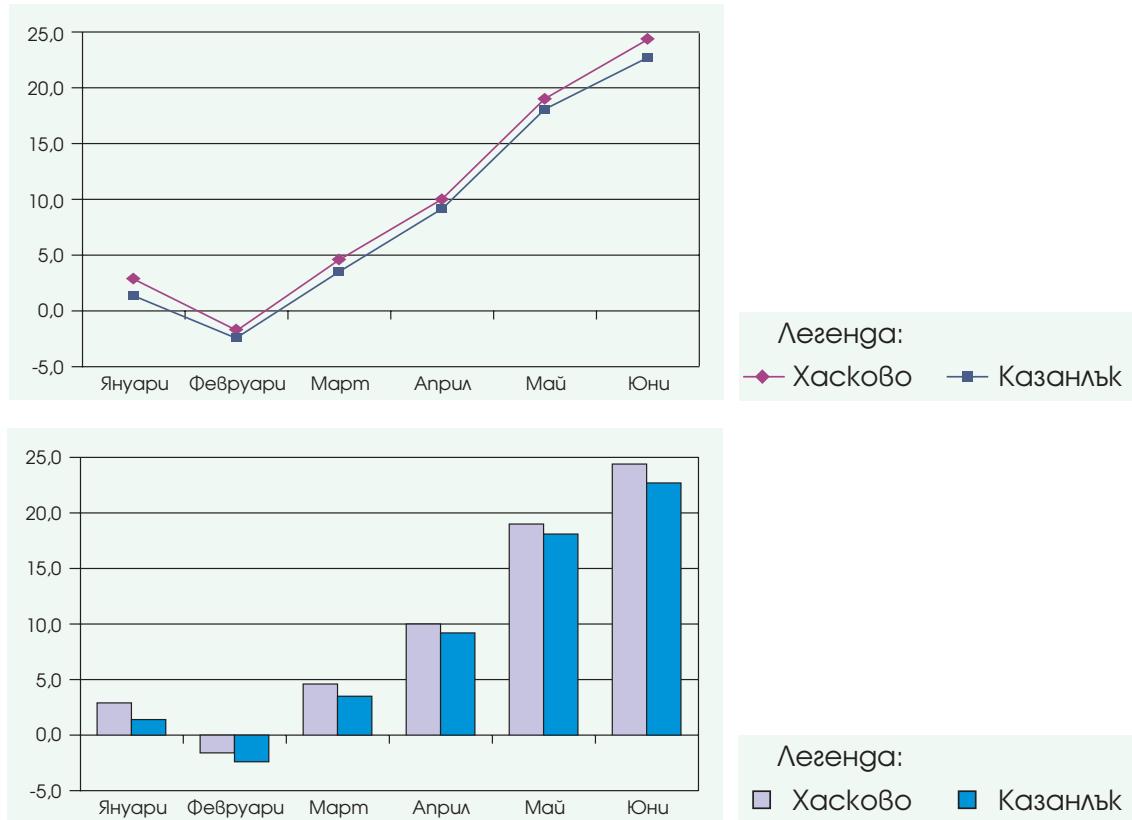
гр. Видин



От диаграмата се вижда, че най-ниската температура във Видин е измерена през месец февруари ($-3,4^{\circ}$), а най-високата – през месец юни ($23,5^{\circ}$).

За сравняване на температурите в Хасково и Казанлък през първото полугодие на годината може да се използва както обикновена линейна диаграма, така и диаграма с правоъгълници.

Средномесечни температури в Хасково и Казанлък

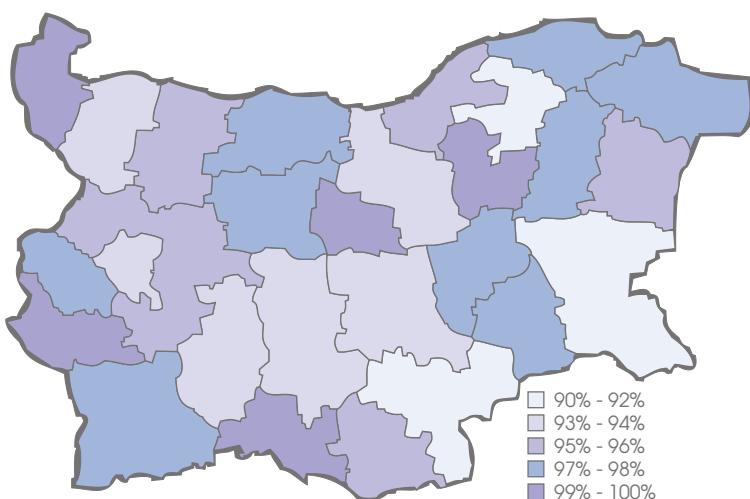


От сравняването на данните на двете графики става ясно, че през първото полугодие на годината средномесечните температури в Хасково и Казанлък бележат еднаква тенденция на промяна (или се понижават, или нарастват по едно и също време), като през целия период температурите в Хасково са по-високи от тези в Казанлък.

Друг начин за графично представяне на данни е **картограмата**. При нея се използват данни за дадена географска територия и чрез оцветяване на различните изследвани райони от нея се черпи съответната информация.

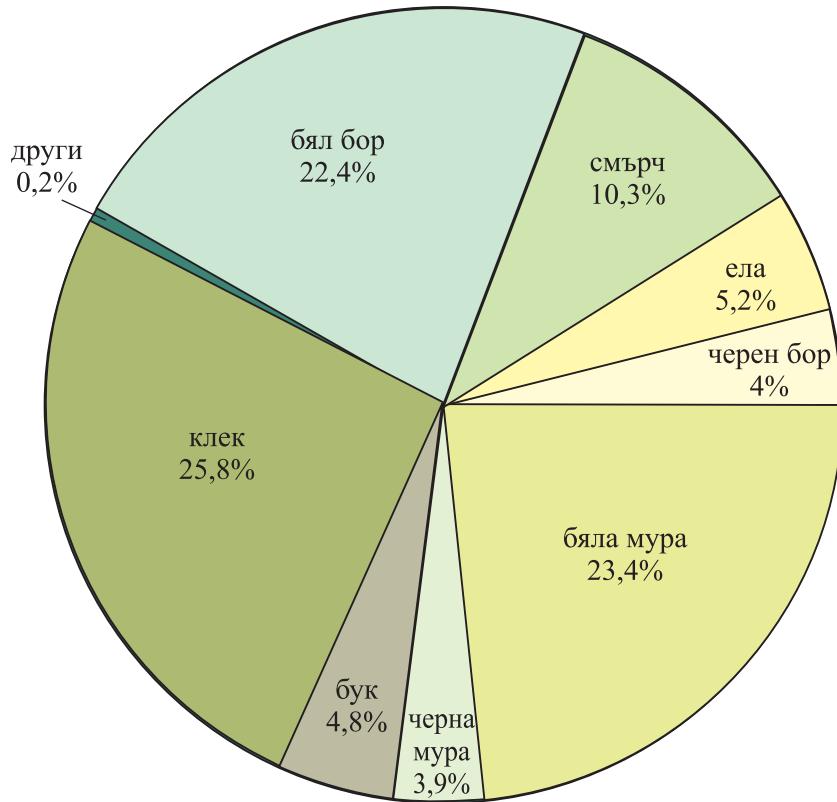
Пример за картограма: Броят (изразен чрез проценти) на хората от населението на България по области, които имат регистрация при общопрактикуващ (личен) лекар.

От картограмата се вижда, че голямата част от българското население има избран общопрактикуващ лекар, като най-съществени пропуски в това отношение се забелязват в областите Хасково, Разград и Бургас.



РАЗЧИТАНЕ НА ДАННИ, ПРЕДСТАВЕНИ ЧРЕЗ КРЪГОВА ДИАГРАМА

ЗАДАЧА 1 Дадена е кръгова диаграма, която дава информация за разпределението на дървесните видове в залесената площ на Национален парк Пирин.



От кръговата диаграма следва, че с най-голямо площно участие е клекът, следван от бялата мура, белия бор, смърча и елата, която заема около 2 пъти по-малка площ от смърча.

Могат да се направят и други изводи. Например площта, заемана от черния бор и черната мура, е почти равна. Същото се отнася и за елата и бука.

ЗАДАЧА 2 В Националния парк Пирин клекът заема 5962 ха залесена площ. Като използвате кръговата диаграма от Задача 1, пресметнете:

- общата залесена площ на парка (в ха);
- площта, която е залесена с бяла мура и със смърч.

Решение: а) Означаваме с x общата залесена площ (ха).

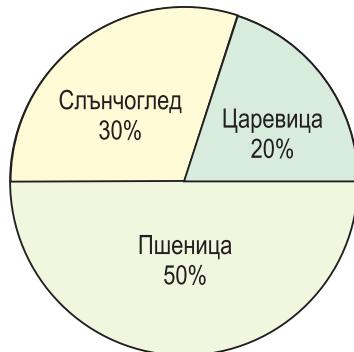
$$25,8\% \text{ от } x = 5962, \quad x = 23108,5 \text{ ха}$$

- б) Бяла мура – $23,4\%$ от $23108,5 \approx 5407$ ха
Смърч – $10,3\%$ от $23108,5 \approx 2380$ ха

Други видове дървета, които се срещат в Пирин, са трепетлика, ива, ливански кедър, акация и др.

ЗАДАЧА 3 В земеделска кооперация отглеждат три вида култури (царевица, слънчоглед и пшеница) на обща площ 12 600 дка. Кръговата диаграма показва разпределението на площите на различните култури. Намерете:

- отношението на площите на трите култури;
- площта, на която се отглеждат всяка от културите.



Решение:

$$\text{а)} \text{ царевица} : \text{слънчоглед} : \text{пшеница} = \\ = 20\% : 30\% : 50\% = 2 : 3 : 5$$

б) Означаваме съответните площи:

$$\text{царевица} = 2x, \text{слънчоглед} = 3x, \text{пшеница} = 5x. \\ \text{Съставяме уравнението } 2x + 3x + 5x = 12\ 600 \\ 10x = 12\ 600 \\ x = 1\ 260.$$

Съответните площи в декари са:

$$\text{царевица} = 2\ 520, \text{слънчоглед} = 3\ 780, \text{пшеница} = 6\ 300.$$

ЗАДАЧА 4 На кръговата диаграма е представено разпределението на разходите (за настаняване, транспорт, храна и други) за едноседмична почивка на едно семейство.

- Намерете отношението на различните разходите.
- Ако разходите за транспорт са с 360 лв. по-малко от тези за храна, намерете колко лева са всички разходи за почивката на семейството.



Решение:

$$\text{а)} \text{ настаняване} : \text{транспорт} : \text{храна} : \text{други} = \\ = 35\% : 15\% : 45\% : 5\% = 7 : 3 : 9 : 1$$

$$\text{б)} \text{ Приемаме, че разходите за настаняване са } 7x, \\ \text{транспорт} - 3x, \text{храна} - 9x, \text{други} - 1x. \\ \text{Съставяме уравнението } 9x = 3x + 360$$

$$9x - 3x = 360 \\ 6x = 360 \\ x = 60.$$

Всички разходи на семейството са

$$7x + 3x + 9x + x = 20x = 20 \cdot 60 = 1\ 200 \text{ лв.}$$

ЗАДАЧИ

- 1** На кръговата диаграма е представено разпределението на работещите на един обект.
- Намерете отношението на броя на техническите ръководители към броя на инженерите към броя на строителните работници;
 - Ако броят на работещите на обекта е 60 человека, намерете броя на техническите ръководители;
 - Ако техническите ръководители са с 8 человека повече от инженерите, намерете броя на строителните работници.



ЗАПОМНЕТЕ!

Отношение на две числа (величини) $a \neq 0$ и $b \neq 0$ е $a : b$ или $\frac{a}{b}$.

Ако a и b изразяват величини, те трябва да бъдат измерени с една и съща мерна единица.

Пропорция – две равни отношения, свързани с “=”, т.е.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{или} \quad a : b = c : d.$$

Основно (главно) свойство: ако $b \neq 0$, $d \neq 0$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Четвърта пропорционална: $a = \frac{b \cdot c}{d}$, $b = \frac{a \cdot d}{c}$, $c = \frac{a \cdot d}{b}$, $d = \frac{b \cdot c}{a}$.

Всеки член на пропорцията е четвърта пропорционална на останалите три.

Величините y и x са **пропорционални**, ако $y = k \cdot x$, $k \neq 0$, където k е **коefficient на пропорционалност**.

ЗАДАЧА 1 Намерете x , ако:

а) $\frac{x}{7} = \frac{4}{35}$; б) $\frac{15}{x} = \frac{0,3}{0,12}$; в) $\frac{13}{14} = \frac{x}{2,8}$; г) $\frac{5}{3,8} = \frac{4}{x}$.

Решение:

а) $\frac{x}{7} = \frac{4}{35}$	б) $\frac{15}{x} = \frac{0,3}{0,12}$	в) $\frac{13}{14} = \frac{x}{2,8}$	г) $\frac{5}{3,8} = \frac{4}{x}$
$x = \frac{7 \cdot 4}{35}$	$x = \frac{15 \cdot 0,12}{0,3}$	$x = \frac{13 \cdot 2,8}{14}$	$x = \frac{3,8 \cdot 4}{5}$
$x = 0,8$	$x = 6$	$x = 2,6$	$x = 3,04$

ЗАДАЧА 2 Определете y от пропорциите $\frac{x}{15} = \frac{2}{5}$ и $\frac{x+1}{14} = \frac{6}{y}$.

Решение: От $\frac{x}{15} = \frac{2}{5}$ $x = \frac{15 \cdot 2}{5}$, $x = 6$.

$$\text{От } \frac{x+1}{14} = \frac{6}{y} \quad \frac{6+1}{14} = \frac{6}{y}, \quad \frac{7}{14} = \frac{6}{y}, \quad \frac{1}{2} = \frac{6}{y}, \quad y = \frac{2 \cdot 6}{1}, \quad y = 12.$$

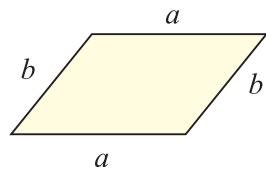
ЗАДАЧА 3 Периметърът на успоредник е 54 см, а страните му a и b се отнасят като 7 : 2. Намерете страните на успоредника.

Решение:

От $a : b = 7 : 2$, $a = 7 \cdot x$, $b = 2 \cdot x$
и $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ получаваме
 $2 \cdot 7 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x = 54$
 $18 \cdot x = 54$, $x = 3$.

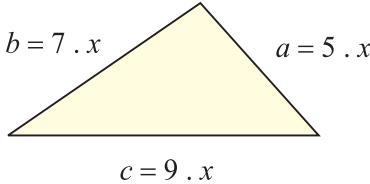
Тогава $| a = 7 \cdot x = 7 \cdot 3 = 21$,
 $| b = 2 \cdot x = 2 \cdot 3 = 6$.

Отв.: $a = 21$ см; $b = 6$ см



ЗАДАЧА 4 Страните на триъгълник се отнасят както $5 : 7 : 9$. Разликата между най-голямата и най-малката страна е 12 см. Намерете страните на триъгълника.

Решение:



От $a : b : c = 5 : 7 : 9$

$$a = 5 \cdot x, \quad b = 7 \cdot x, \quad c = 9 \cdot x.$$

Най-малката страна е $a = 5 \cdot x$, а най-голямата страна е $c = 9 \cdot x$, като

$$c - a = 12$$

$$9 \cdot x - 5 \cdot x = 12$$

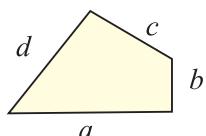
$$4 \cdot x = 12$$

$$x = 3.$$

Отг.: $a = 15$ см; $b = 21$ см; $c = 27$ см

ЗАДАЧА 5 Периметърът на четириъгълник е 116 см, а страните му се отнасят както $2 : 7 : 9 : 11$. Намерете страните на четириъгълника.

Решение:



От $a : b : c : d = 2 : 7 : 9 : 11$,

$$a = 2 \cdot x, \quad b = 7 \cdot x, \quad c = 9 \cdot x, \quad d = 11 \cdot x$$

и $P = a + b + c + d$ получаваме

$$2 \cdot x + 7 \cdot x + 9 \cdot x + 11 \cdot x = 116$$

$$29 \cdot x = 116$$

$$x = 4.$$

Отг.: $a = 8$ см; $b = 28$ см; $c = 36$ см; $d = 44$ см

ЗАДАЧИ

1 Намерете x , ако:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{x}{3} = \frac{10}{15}, & \text{б)} \frac{7}{x} = \frac{42}{6}; \\ \text{в)} \frac{3}{7} = \frac{x}{35}, & \text{г)} \frac{2}{9} = \frac{10}{x}. \end{array}$$

2 Намерете четвъртата пропорционална x в пропорциите:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} x : 7 = 20 : 5; & \text{б)} 3 : x = 12,5 : 25; \\ \text{в)} 2,6 : 2 = x : 3; & \text{г)} \frac{1}{3} : \frac{5}{6} = 1 : x. \end{array}$$

3 Определете x и y от пропорциите:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{x}{5} = \frac{8}{2} \text{ и } \frac{x}{30} = \frac{y}{9}; \\ \text{б)} \frac{2}{x} = \frac{1,4}{4,9} \text{ и } \frac{x}{-21} = \frac{-2}{y}; \\ \text{в)} 12 : 15 = x : 5 \text{ и } x : 7 = y : 14; \\ \text{г)} 15 : 6 = 5 : x \text{ и } \frac{x+1}{6} = \frac{y}{14}. \end{array}$$

4 Периметърът на правоъгълник е 64 см, а страните му a и b се отнасят както $5 : 3$. Намерете страните и лицето на правоъгълника.

5 Страните на правоъгълен триъгълник се отнасят както $5 : 12 : 13$. Раз-

ликата между катетите му е 14 см.

Намерете страните, периметъра и лицето на триъгълника.

6 В една фирма броят на служителите с висше, средно и основно образование се отнася както $3 : 2 : 1$. Броят на всички служители е 450.

а) Намерете броя на служителите с висше, със средно и с основно образование.

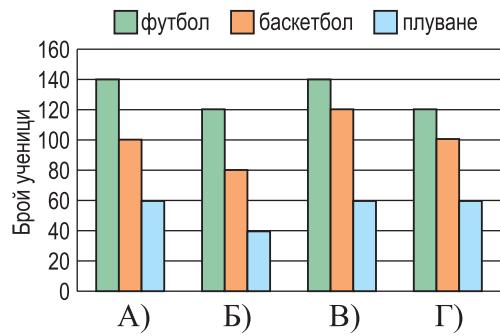
б) Направете кръгова диаграма, изобразяваща разпределението на служителите по образование.

7 Мармелад се приготвя от грозде, праскови, ябълки, дюли, тикви и захар в съотношение съответно $5 : 4 : 3 : 2 : 1 : 5$. Намерете количествата на останалите продукти, необходими за спазване на рецептата, ако имаме:

а) 3 kg грозде; б) 8 kg захар.

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “ПРОПОРЦИИ”

1. Неизвестното x от пропорцията $\frac{x}{6} = \frac{9}{10}$ е:
А) 2; Б) 2,5; В) 5,4; Г) 4,5.
2. Ако $3 : a = 2 : b$, то отношението $a : b$ е:
А) $\frac{1}{3}$; Б) $\frac{3}{2}$; В) $\frac{2}{3}$; Г) $\frac{1}{2}$.
3. В VI^б клас броят на момчетата към този на момичетата са в отношение 3 : 5. Момчетата са 12. Момичетата са:
А) 18; Б) 20; В) 15; Г) 16.
4. Ако $\frac{x}{15} = \frac{0,3}{0,5}$ и $1,6 : 1,2 = y : 9$, то $x + y$ е:
А) 6; Б) 9; В) 12; Г) 21.
5. Ако a, b, c, d са числа, различни от нула, и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то винаги е вярно, че:
А) $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$;
Б) $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$;
В) $\frac{a+c}{b} = \frac{a+c}{d}$;
Г) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
6. В едно училище броят на учениците, които тренират футбол, баскетбол и плуване, е в отношение 7 : 5 : 3. Коя графика съответства на броя на учениците, които тренират съответно футбол, баскетбол и плуване?



7. На карта с мащаб 1 : 2 000 000 разстоянието между два града е 17,6 см. Намерете действителното разстояние между градовете в километри.
А) 32,1; Б) 3520; В) 352; Г) 3,52.
8. Пътниците в един самолет са 210. Броят на децата и този на мъжете се отнасят както 3 : 4, а отношението на броя на мъжете към този на жените е 6 : 7. Намерете:
а) колко са децата в самолета;
б) броя на жените в самолета.
9. На пробен изпит по математика се явили 200 ученици от 6. клас. На кръговата диаграма е представено разпределението на получените от тях оценки. Отношението на броя на момичетата към този на момчетата, получили оценка „отличен“, е 7 : 3.



- Намерете броя на:
- а) учениците, получили оценка „отличен“;
б) учениците, получили оценка, повисока от „среден“;
в) момичетата, получили оценка „отличен“.
10. Успоредник има обиколка 56 см и за страните му a и b е изпълнено $a : b = 3 : 4$. Ако едната височина на успоредника е 14 см, намерете лицето му в квадратни сантиметри.

ТЕМА 6

ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

(Урок № 111 – Урок № 121)

В ТАЗИ ТЕМА СЕ ИЗУЧАВАТ:

- множества и операции с тях;
- случайно събитие;
- вероятност на случайно събитие като отношение на възможности;
- средноаритметично на данни;
- организиране и представяне на данни.

УЧЕНИЦИТЕ СЕ НАУЧАВАТ:

- да намират подмножество на множество и сечение и обединение на множества;
- да пресмятат вероятност на случайно събитие;
- да намират средноаритметично и да го използват при интерпретиране на данни;
- да представлят емпирични данни в таблици и диаграми.

Буквите на азбуката, учениците от една паралелка, естествените числа, жителите на един град са съвкупности от различни обекти, обединени по някакъв общ признак.



Множество

Съвкупност от обекти, обединени по някакъв общ признак, ще наричаме множество.

Множествата **означаваме** с големи латински букви: A, B, C, D .



Елемент

Всеки обект, който принадлежи на дадено множество, се нарича елемент на това множество.

	Пишем	Четем
x е елемент от множеството A	$x \in A$	x принадлежи на A
x не е елемент от множеството A	$x \notin A$	x не принадлежи на A



Едно множество се нарича **безкрайно**, ако елементите му са безброй много.
Едно множество се нарича **краино**, ако елементите му са краен брой.

ПРИМЕР 1 Всички цели положителни числа образуват множеството на естествените числа. Множеството на естествените числа се означава с латинската буква N .

Записваме $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Множеството N е **безкрайно**, тъй като елементите му (целите положителни числа) са безброй много.

Числото 3 е елемент на множеството N . Пишем $3 \in N$.

Числото -5 не е елемент на множеството N , защото не е положително.

Пишем $-5 \notin N$.

Числото $\frac{1}{2}$ не е елемент на множеството N , защото не е цяло. Пишем $\frac{1}{2} \notin N$.

ПРИМЕР 2 Множеството от всички четни едноцифирени числа.

Записваме $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Множеството A е **краино**. То съдържа четири елемента.

Числото 6 е елемент на множеството A . Пишем $6 \in A$.

Числото 10 не е елемент на множеството A , защото не е едноцифрено.

Пишем $10 \notin A$.

Числото 3 не е елемент на множеството A , защото не е четно. Пишем $3 \notin A$.



Празно множество

Множество, което не съдържа нито един елемент, се нарича **празно множество** и се означава с \emptyset .

ПРИМЕР 3

Множеството от всички четни едноцифрени числа, кратни на 5.

Записваме $A = \emptyset$.

Празното множество също е крайно.



Равенство на множества

Две множества A и B , които се състоят от едни и същи елементи независимо от подредбата им, се наричат равни. Записваме $A = B$.

ПРИМЕР 4

Множеството $A = \{2, 5, 7\}$ е равно на множеството $B = \{7, 2, 5\}$.

ЗАДАЧА 1

Запишете множеството A от всички нечетни числа по-големи от 4 и по-малки от 16. Намерете броя на елементите на множеството A .

Решение: $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ Множеството A съдържа шест елемента.

ЗАДАЧА 2

Нека B е множеството от всички цели числа, по-големи от -10 и по-малки от 20 . Кои от числата $-11; -7; -5,5; 0; 6,7; 20; 19,9; 21; -10; 15; -9; -5; 10$ са елементи на множеството B ? Запишете отговора, като използвате знака \in .

Решение: $-7 \in B; 0 \in B; 15 \in B; -9 \in B; -5 \in B; 10 \in B$.

ЗАДАЧА 3

Нека C е множеството от всички цели числа, модулът на които е по-малък от 6 . Кои от числата $-4; -7; -3,5; 0; 3; 6; 4,4; 2; -6; 5; 3,7; -5; 8$ не са елементи на множеството C ? Запишете отговора, като използвате знака \notin .

Решение: $-7 \notin C; -3,5 \notin C; 6 \notin C; 4,4 \notin C; -6 \notin C; 3,7 \notin C; 8 \notin C$.

ЗАДАЧА 4

(Устно) Крайни или безкрайни са:

- множеството от всички естествени числа, кратни на 10 ;
- множеството от всички цели числа, модулът на които е по-голям от 5 ;
- множеството от правилните дроби със знаменател 100 ;
- множеството от неправилните дроби със знаменател 20 ?

ЗАДАЧИ

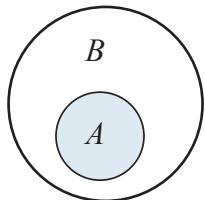
- Запишете множеството A от всички четни числа, по-големи от 7 и по-малки от 23 . Намерете броя на елементите на множеството A .
- Запишете множеството B от всички цели числа, по-големи от -4 и по-малки от 7 . Намерете броя на елементите на множеството B .
- Нека C е множеството от всички цели числа, по-големи от -8 и по-малки от 12 . Кои от числата $-9; -7; -6,5; 2; 3,5; 11; 12; 7; -3; 3$ са елементи на множеството C ? Запишете отговора, като използвате знака \in .
- Нека D е множеството от всички числа, модулът на които е по-голям от 4 . Кои от числата $-4; -7; -3; 0; 7; 6; 5,4; 2; 4; 5$ не са елементи на множеството D ? Запишете отговора, като използвате знака \notin .
- Крайни или безкрайни са:
 - множеството от всички цели числа, модулът на които е по-малък от 100 ;
 - множеството от правилните дроби с числител 10 ;
 - множеството от неправилните дроби с числител 20 ?

**Подмножество**

Едно множество **A** се нарича подмножество на множество **B**, ако всички елементи на множество **A** са елементи и на множество **B**. Записваме $A \subset B$.

ПРИМЕР 1 Множеството $A = \{1, 3, 5\}$ е подмножество на множеството $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

ПРИМЕР 2 Множеството $A = \{a, b, v\}$ е подмножество на множеството $B = \{a, b, v, g\}$.

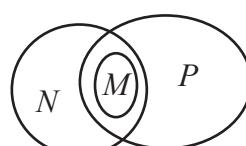
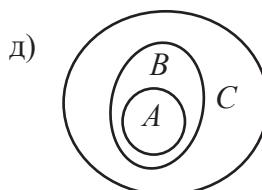
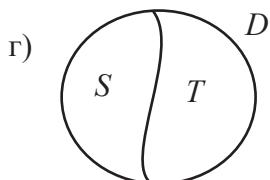
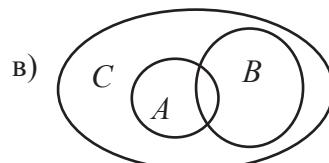
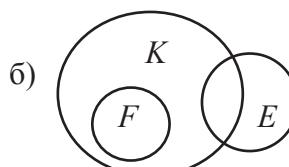
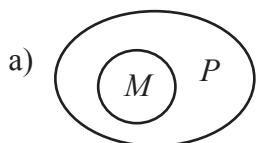


Фактът, че множество A е подмножество на множество B , се илюстрира с помощта на кръговете на Ойлер. Ясно се вижда, че всички точки от кръга A принадлежат и на кръга B .

За всяко множество A е вярно, че $A \subset A$.

Празното множество \emptyset е подмножество на всяко множество.

ЗАДАЧА 1 Определете от илюстрациите кое от множествата се явява подмножество на другото.



Решение:

a) $M \subset P$

б) $F \subset K; E \not\subset K$ (E не е подмножество на K)

в) $A \subset C; B \subset C$

г) $S \subset D; T \subset D$

д) $A \subset B; A \subset C; B \subset C$

е) $M \subset N; M \subset P$

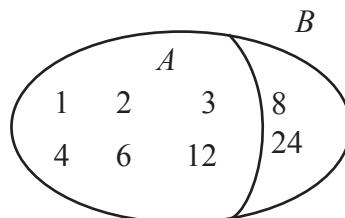
ЗАДАЧА 2 Нека A е множеството на всички делители на числото 12, а B – множеството на всички делители на числото 24. Запишете множествата A и B и ги изобразете графично. Кое от тях се явява подмножество на другото?

Решение:

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

A е подмножество на множеството B ($A \subset B$).



ЗАДАЧА 3

Дадено е множеството $B = \{1, 2, 4, 8\}$. Запишете всички подмножества на множеството B , които съдържат:

- а) един елемент; б) два елемента; в) три елемента.

Решение: а) $\{1\}; \{2\}; \{4\}; \{8\}$

б) $\{1, 2\}; \{1, 4\}; \{1, 8\}; \{2, 4\}; \{2, 8\}; \{4, 8\}$

в) $\{1, 2, 4\}; \{1, 2, 8\}; \{1, 4, 8\}; \{2, 4, 8\}$

ЗАДАЧА 4

Нека A е множеството от всички цели числа, по-големи от -2 и по-малки от 10 . Запишете най-голямото подмножество на множеството A , което съдържа само:

- а) естествени числа; б) прости числа; в) числа, кратни на 3 .

Решение: $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

б) $\{2, 3, 5, 7\}$

в) $\{3, 6, 9\}$

ЗАДАЧА 5

Запишете кое от множествата се явява подмножество на другото:

а) N – множеството на естествените числа, M – множеството на четните числа;

б) Z – множеството на целите числа, N – множеството на естествените числа;

в) Z – множеството на целите числа, Q – множеството на рационалните числа.

Решение: а) $M \subset N$ б) $N \subset Z$ в) $Z \subset Q$

ЗАДАЧИ

1 Нека A е множеството на всички делители на числото 30 , а B – множеството на всички делители на числото 15 . Запишете множествата A и B и ги изобразете графично. Кое от тях се явява подмножество на другото?

2 Нека A е множеството на всички кратни на 3 числа, по-малки от 30 . Запишете най-голямото подмножество на множеството A , което съдържа само:

- а) едноцифрени числа;
б) двуцифрени числа.

3 Нека A е множеството на всички естествените числа, по-малки от 15 . Запишете най-голямото подмножество на множеството A , което съдържа само:

а) прости числа;

б) четни числа.

4 Нека A е множеството на всички двуцифрени естествените числа, по-големи от 20 и по-малки от 40 . Запишете най-голямото подмножество на множеството A , което съдържа само:

- а) числа, кратни на 5 ;
б) числа, кратни на 3 .

5 Дадено е множеството $A = \{3, 6, 9\}$. Запишете всички подмножества на множеството A , които съдържат:

- а) един елемент;
б) два елемента.

6 Дадено е множеството $B = \{a, b, c, d\}$. Запишете всички подмножества на множеството B , които съдържат:

- а) два елемента;
б) три елемента.



Сече~~ни~~не на две множества

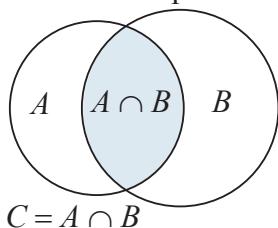
Ако две множества **A** и **B** имат общи елементи, то те се наричат **пресичащи се**. Общите елементи на двете множества разглеждаме като отделно множество **C**, което се нарича сечение на множествата **A** и **B**.

Записваме $C = A \cap B$.

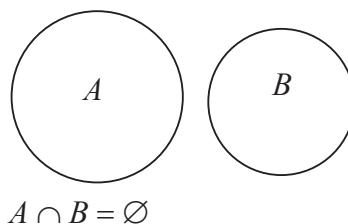
Ако две множества **A** и **B** нямат общи елементи, то те се наричат **непресичащи се** и тяхното сечение е празното множество. Записваме $A \cap B = \emptyset$.

Графично представяне на сечение на две множества:

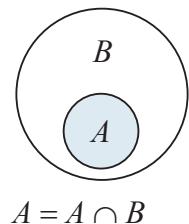
1. A и B са пресичащи се.



2. A и B са непресичащи се.



3. A е подмножество на B .



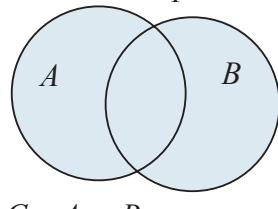
Обединение на две множества

Множество **C**, което се състои от елементите на две множества **A** и **B**, се нарича обединение на множествата **A** и **B**. Записваме $C = A \cup B$.

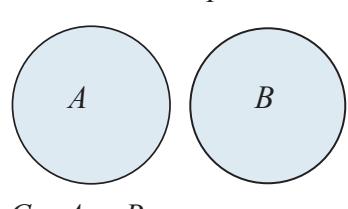
Ако множествата **A** и **B** имат общи елементи, в обединението общите елементи участват само веднъж.

Графично представяне на обединение на две множества:

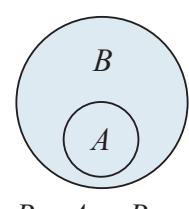
1. A и B са пресичащи се.



2. A и B са непресичащи се.



3. A е подмножество на B .



ЗАДАЧА 1

Дадени са множествата $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{3, 7, 8, 9, 10, 12\}$.

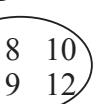
Намерете множествата: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$.

Решение:

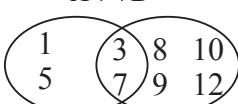
а)



B



$A \cap B$

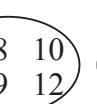


$$A \cap B = \{3, 7\}$$

б)

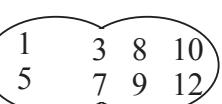


B



$A \cup B$

$A \cup B$



$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

ЗАДАЧА 2 Нека A е множеството на всички естествените числа, по-малки от 6, а B – множеството на едноцифрените прости числа. Намерете множествата $A \cap B$ и $A \cup B$.

Решение: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{2, 3, 5, 7\}$.

Числата 2, 3 и 5 са общи елементи за двете множества, т.e.

$$A \cap B = \{2, 3, 5\}.$$

Числата 2, 3 и 5 влизат в обединението само веднъж, т.e.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}.$$

ЗАДАЧА 3 Нека A е множеството на всички делители на числото 16, а B – множеството на всички делители на числото 20.

а) Намерете множествата A, B и $A \cap B$.

б) Намерете най-големия елемент на множеството $A \cap B$. Как се нарича този елемент?

Решение: а) $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}; B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Числата 1, 2 и 4 са общи елементи за двете множества, т.e.

$A \cap B = \{1, 2, 4\}$. Множеството $A \cap B$ се нарича множество от общите делители на числата 16 и 20.

б) Най-големият елемент на множеството $A \cap B$ е 4. Той се нарича *най-голям общ делител* на числата 16 и 20.

ЗАДАЧА 4 Нека A е множеството на всички кратни на 4 числа, по-малки от 40, а B – множеството на всички кратни на 6 числа, по-малки от 50.

а) Намерете множествата A, B и $A \cap B$.

б) Намерете най-малкия елемент на множеството $A \cap B$. Как се нарича този елемент?

Решение: а) $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}; B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$.

Числата 12, 24 и 36 са общи елементи за двете множества, т.e.

$$A \cap B = \{12, 24, 36\}.$$

б) Най-малкият елемент на множеството $A \cap B$ е 12. Той се нарича *най-малко общо кратно* на числата 4 и 6.

ЗАДАЧИ

1 Дадени са множествата $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$. Намерете множествата: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$.

2 Дадени са множествата $A = \{3, 7, 9\}$ и $B = \{2, 3, 4, 7, 9, 11\}$. Намерете множествата: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$.

3 Нека A е множеството на всички едноцифрени естествени числа, а B – множеството на всички четни числа, по-малки от 15. Намерете множествата: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$.

4 Нека A е множеството на всички делители на числото 12, а B – мно-

жеството на всички делители на числото 15.

а) Намерете множествата A, B и $A \cap B$.

б) Намерете най-големия елемент на множеството $A \cap B$. Как се нарича този елемент?

5 Нека A е множеството на всички кратни на 3 числа, по-малки от 25, а B – множеството на всички кратни на 4 числа, по-малки от 30.

а) Намерете множествата A, B и $A \cap B$.

б) Намерете най-малкия елемент на множеството $A \cap B$. Как се нарича този елемент?

В заобикалящия ни свят има много явления и **събития**, които са взаимносвързани и могат да се предвиждат.

Ако поставим съд с вода в хладилна камера, можем да предвидим, че водата ще промени състоянието си от течно в твърдо, т.е. ще се превърне в лед. Това събитие е **достоверно**.



Достоверно събитие

Когато след извършване на един опит се знае, че дадено събитие ще настъпи, то се нарича **достоверно** (сигурно) събитие.

Ако хвърлим един зар, можем да предвидим, че няма да се паднат 7 точки. Това събитие е **невъзможно**.



Невъзможно събитие

Когато след извършване на един опит се знае, че дадено събитие няма да настъпи, то се нарича **невъзможно** събитие.

Има събития, които не могат да се предвидят.

Ако хвърлим една монета, не можем да предвидим с коя страна тя ще падне на земята – с лицевата или с герба. Това събитие е **случайно**.

Ако хвърлим един зар, не можем да предвидим дали ще се паднат 6 точки, или няма да се паднат 6 точки. Това събитие е **случайно**.



Случайно събитие

Когато след извършване на един опит дадено събитие може да настъпи, а може и да не настъпи, то се нарича **случайно** събитие.

Има много примери за случайни събития. Например броят на дъждовните дни за един месец в дадена местност, броят на родените момчета за една година в един град, броят на пътните произшествия на една магистрала за една година и т.н.

ЗАДАЧА 1

Хвърляме монета върху твърда хоризонтална повърхност. Колко и кои са всички възможности (възможните изходи), които могат да се случат при този опит?

Решение: При този опит възможните изходи са два – да се падне лице или да се падне герб.

Означаваме w_1 – пада се лице, w_2 – пада се герб.

Двета изхода от този опит образуват множеството от всички възможни изходи, $\Omega = \{w_1, w_2\}$.

Множеството от всички възможни изходи при даден опит означаваме с Ω (четем „омега“).

ЗАДАЧА 2 Хвърляме правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Колко и кои са възможните изходи, които могат да се случат при този опит?

Решение: Тъй като зарът е правилен и има шест страни, при този опит възможните изходи са шест.

Означаваме точките, които се падат, съответно:

w_1 – 1 точка, w_2 – 2 точки, w_3 – 3 точки,

w_4 – 4 точки, w_5 – 5 точки, w_6 – 6 точки.

Множеството от всички възможни изходи е $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$.

ЗАДАЧА 3 Хвърляме две монети върху твърда хоризонтална повърхност. Колко и кои са всички възможните изходи, които могат да се случат при този опит?

Решение: Възможните изходи са четири:

w_1 – падат се лице-лице,



w_2 – падат се лице-герб,



w_3 – падат се герб-лице,



w_4 – падат се герб-герб.



Множеството от всички възможни изходи е $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

ЗАДАЧА 4 Хвърляме правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки.

а) Нека A е събитието „да се паднат четен брой точки“.

Кои са благоприятните възможности (изходи) за събитието A ?

б) Нека B е събитието „да се паднат по-малко от 5 точки“.

Кои са благоприятните възможности (изходи) за събитието B ?

Решение: а) При хвърлянето на зара благоприятните възможности за събитието A са w_2 – падат се 2 точки, w_4 – падат се 4 точки, w_6 – падат се 6 точки, т.е. $A = \{w_2, w_4, w_6\}$.

б) При хвърлянето на зара благоприятните възможности за събитието B са w_1 – пада се 1 точка, w_2 – падат се 2 точки, w_3 – падат се 3 точки, w_4 – падат се 4 точки, т.е. $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

ЗАДАЧА 5 Хвърляме правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки.

а) Нека A е събитието „падат се по-малко от 7 точки“.

Кои са благоприятните възможности за събитието A ?

б) Нека B е събитието „падат се повече от 6 точки“.

Кои са благоприятните възможности за събитието B ?

Решение: а) При хвърлянето на зара благоприятните възможности за събитието A съвпада с множеството от всички възможни изходи Ω , т.е. **A е достоверното събитие**.

б) При хвърлянето на зара няма благоприятните възможности за събитието B , т.е. **B е невъзможното събитие**.

Достоверното събитие означаваме с Ω .

Невъзможното събитие означаваме с \emptyset .

ВЕРОЯТНОСТ НА СЛУЧАЙНО СЪБИТИЕ КАТО ОТНОШЕНИЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИ

От определението на понятието „случайно събитие“ следва, че при провеждане на един опит не е възможно да се предскаже настъпването на това събитие. Оказва се обаче, че ако се извършат достатъчно голям брой опити, започват да се проявяват някои закономерности на случайното събитие.

Например при многократно хвърляне на една монета се забелязва, че броят на падналите се лица се доближава до броя на падналите се гербове.

Теорията на вероятностите е математическа наука, предмет на която е изучаването на закономерностите на случаите събития. Основна задача в теорията на вероятностите е на всяко случаено събитие да се съпостави число, с което да се оценява степента на възможност то да настъпи. Такова число ще наричаме вероятност на случаено събитие.



Класическа вероятност

Ако при даден опит има n възможни изхода и m от тях са благоприятни за събитието A , то вероятността за настъпване на събитието A се нарича отношението на броя на благоприятните към броя на възможните изходи.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{брой благоприятни възможности}}{\text{брой на всички възможности}}$$

За вероятността са изпълнени следните **свойства**:

- Вероятността на достоверното събитие е единица: $P(\Omega) = 1$.
- Вероятността на невъзможното събитие е нула: $P(\emptyset) = 0$.
- За вероятността на кое да е събитие A е в сила: $0 \leq P(A) \leq 1$.

ЗАДАЧА 1 Хвърляме монета върху твърда хоризонтална повърхност.

Каква е вероятността да се падне герб?

Решение: Монетата има две страни – лице и герб. Всички възможности са две, т.e. $n = 2$.

Искаме да се падне герб. Благоприятната възможност е само една, т.e. $m = 1$.

Съгласно определението за вероятност следва, че $P = \frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 2 Хвърляме правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Каква е вероятността да се паднат 6 точки?

Решение: Зарът има 6 страни. Всички възможности са $n = 6$.

Искаме да се паднат 6 точки. Благоприятната възможност е само една, т.e. $m = 1$.

Тогава вероятността да се паднат 6 точки е $P = \frac{1}{6}$.

ЗАДАЧА 3 Хвърляме правилен зар, на стените на който са отбелязани съответно 1 точка, 2 точки, 3 точки, 4 точки, 5 точки и 6 точки. Каква е вероятността да се паднат нечетен брой точки?

Решение: Всички възможности са $n = 6$.

Благоприятните възможности са 3: пада се 1 точка, падат се 3 точки, падат се 5 точки, т.е. $m = 3$.

Тогава вероятността да се паднат нечетен брой точки е $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 4 В една кутия има 2 бели и 8 черни топки. Изважда се по случаен начин една топка.

а) Каква е вероятността извадената топка да е бяла?

б) Каква е вероятността извадената топка да е черна?

Решение: В кутията има общо 10 топки, т.е. всички възможности са $n = 10$.

а) Броят на белите топки е 2, т.е. благоприятните възможности са $m = 2$. Вероятността извадената топка да е бяла е $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

б) Броят на черните топки е 8, т.е. благоприятните възможности са $m = 8$. Вероятността извадената топка да е черна е $P = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

ЗАДАЧА 5 В лотария са пуснати 1 000 билета, между които 80 са печеливши. Купен е един билет.

а) Каква е вероятността той да е печеливш?

б) Каква е вероятността той да не е печеливш?

Решение: В лотария са пуснати 1 000 билета, т.е. всички възможности са $n = 1 000$.

а) Броят на печелившите билети е 80, т.е. благоприятните възможности са $m = 80$.

Вероятността купеният билет да е печеливш е $P = \frac{80}{1000} = 0,08$.

б) Броят на непечелившите билети е $1 000 - 80 = 920$, т.е. благоприятните възможности са $m = 920$.

Вероятността купеният билет да не е печеливш е $P = \frac{920}{1000} = 0,92$.

ЗАДАЧИ

- 1** Хвърляме правилен зар. Каква е вероятността да се паднат 5 точки?
- 2** Хвърляме правилен зар. Каква е вероятността да се паднат четен брой точки?
- 3** Хвърляме правилен зар. Каква е вероятността да се паднат повече от 3 точки?
- 4** Хвърляме правилен зар. Каква е вероятността точките, които се паднат, да са кратни на 3?
- 5** Хвърляме правилен зар. Каква е вероятността точките, които се паднат, да са делители на 10?
- 6** В една кутия има 4 бели и 6 черни топки. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността тя да е бяла?
- 7** В лотария са пуснати 2000 билета, между които 120 са печеливши. Купен е един билет. Каква е вероятността той да не е печеливш?

ВЕРОЯТНОСТ НА СЛУЧАЙНО СЪБИТИЕ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 В една кутия има 8 бели, 10 зелени и 12 червени топки. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността извадената топка:

- а) да е червена; б) да не е червена?

Решение: Всички възможности са $n = 8 + 10 + 12 = 30$.

а) Благоприятните възможности за събитието „извадената топка е червена“ са $m = 12$.

Търсената вероятност е $P = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0,4$.

б) Благоприятните възможности за събитието „извадената топка не е червена“ са $m = 8 + 10 = 18$, т.e. топката може да бъде бяла (8 възможности) или зелена (10 възможности).

Търсената вероятност е $P = \frac{18}{30} = \frac{6}{10} = 0,6$.

ЗАДАЧА 2 В касичка има 18 монети по 2 лв., 32 монети по 1 лв., 24 монети по 50 ст. и 26 монети по 20 ст. По случаен начин е извадена една монета. Каква е вероятността стойността на извадената монета да е:

- а) 1 лв.; б) по-голяма от 1 лв.; в) по-малка от 1 лв.?

Решение: Броят на всички монети е $18 + 32 + 24 + 26 = 100$, т.e. всички възможности са $n = 100$.

а) Монетите със стойност 1 лв. са 32, $m = 32$, $P = \frac{32}{100} = 0,32$.

б) Монети със стойност, по-голяма от 1 лв., са монетите със стойност 2 лв., които са 18, $m = 18$, $P = \frac{18}{100} = 0,18$.

в) Монети със стойност, по-малка от 1 лв., са или монетите със стойност 50 ст., или монетите със стойност 20 ст.,

$m = 24 + 26 = 50$, $P = \frac{50}{100} = 0,5$.

ЗАДАЧА 3 Нека буквите от думата „МАТЕМАТИКА“ са написани на отделни еднакви картончета, а картончетата са разбъркани. По случаен начин е изтеглено едно картонче. Каква е вероятността върху него да е написана:

- а) буквата „A“; б) гласна буква в) съгласна буква?

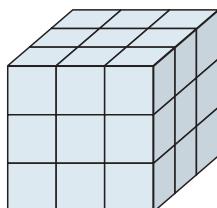
Решение: Броят на всички букви (картончета) е 10, т.e. всички възможности са $n = 10$.

а) На 3 от картончетата е написана буквата „A“, $m = 3$, $P = \frac{3}{10} = 0,3$.

б) На 5 от картончетата е написана гласна буква (A, E, A, И, А), $m = 5$, $P = \frac{5}{10} = 0,5$.

в) На 5 от картончетата е написана съгласна буква (M, Т, M, Т, K), $m = 5$, $P = \frac{5}{10} = 0,5$.

ЗАДАЧА 4 Кубът на чертежа е съставен от 27 еднакви малки кубчета. Всички стени на големия куб са оцветени. След това кубчетата са размесени.



Каква е вероятността произволно избрано кубче да:

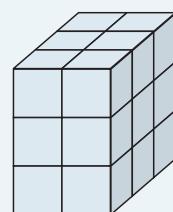
- а) има три оцветени стени;
- б) има точно две оцветени стени;
- в) има точно една оцветена стена;
- г) да няма оцветена стена?

Решение: Броят на всички кубчета е 27, т.е. всички възможности са $n = 27$.

- а) За да има едно кубче три оцветени стени, то трябва да е било на връх на куба. Кубът има 8 върха, т.е. кубчета с три оцветени стени са 8, $m = 8$, $P = \frac{8}{27}$.
- б) За да има едно кубче точно две оцветени стени, то трябва да е принадлежало на ръб от куба, но не и на връх на куба. Такива кубчета са 12, на всеки ръб по едно, $m = 12$, $P = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.
- в) За да има едно кубче точно една оцветена стена, то трябва да е принадлежало на стена от куба, но не и на ръб на куба. Такива кубчета са 6, на всяка стена по едно, $m = 6$, $P = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.
- г) Едно кубче няма оцветена стена, ако не е принадлежало на стена на куба. Такова кубче е само едно, $m = 1$, $P = \frac{1}{27}$.

ЗАДАЧИ

- 1** В една кутия има 16 бели, 20 зелени и 14 червени топки. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността тя да не е бяла?
- 2** В една кутия има 9 бели, 14 зелени и 17 червени топки. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността тя да не е зелена?
- 3** В касичка има 13 монети по 20 ст., 17 монети по 50 ст., 9 монети по 1 лв. и 11 монети по 2 лв. По случаен начин е извлечена една монета. Каква е вероятността стойността на извлеченната монета да е:
а) по-голяма от 50 ст.;
б) по-малка от 1 лв.;
в) по-голяма от 1 лв.?
- 4** Нека буквите от думата „СТАТИСТИКА“ са написани на отделни еднакви картончета, а картончетата са разбръкани. По случаен начин е изтеглено едно картонче. Каква е вероятността върху него да е написана:
а) буквата „Т“;
б) гласна буква;
в) съгласна буква?
- 5** Паралелепипедът на чертежа е съставен от 18 еднакви малки кубчета. Всички стени на паралелепипеда са оцветени. След това кубчетата са размесени. Каква е вероятността произволно избрано кубче да:
- а) има три оцветени стени;
 - б) има точно две оцветени стени;
 - в) има точно една оцветена стена?



ОПИСАНИЕ НА ДАННИ – СРЕДНОАРИТМЕТИЧНО

ЗАДАЧА 1 Турист изминал разстоянието между две хижи за 3 часа. Първия час се движил със скорост 5 km/h, втория – с 4,5 km/h, а третия час – с 3,7 km/h. Намерете каква е била средната скорост на туриста.

Решение:

$$V_{cp} = \frac{5 + 4,5 + 3,7}{3} = \frac{13,2}{3} = 4,4$$

$$V_{cp} = 4,4 \text{ km/h}$$

Средната скорост на туриста е 4,4 km/h.



Средна стойност (средноаритметично*) на числа е сборът на числата, разделен на техния брой.

ЗАДАЧА 2 В таблицата са дадени средните температури през дните на една седмица.

Понеделник	Вторник	Сряда	Четвъртък	Петък	Събота	Неделя
– 2°	– 3°	0°	1°	2°	– 1°	– 4°

Намерете средната температура за тази седмица.

Решение:

$$t^o_{cp} = \frac{-2 - 3 + 0 + 1 + 2 - 1 - 4}{7} = \frac{-7}{7} = -1$$

$$t^o_{cp} = -1^\circ$$

Средната температура за седмицата е -1° .

ЗАДАЧА 3 В едно училище има 78 шестокласници. Срочните им оценки по математика са дадени в следната таблица:

Брой ученици	Слаб	Среден	Добър	Мн. добър	Отличен
78	3	12	25	21	17

Намерете средния успех по математика за този срок.

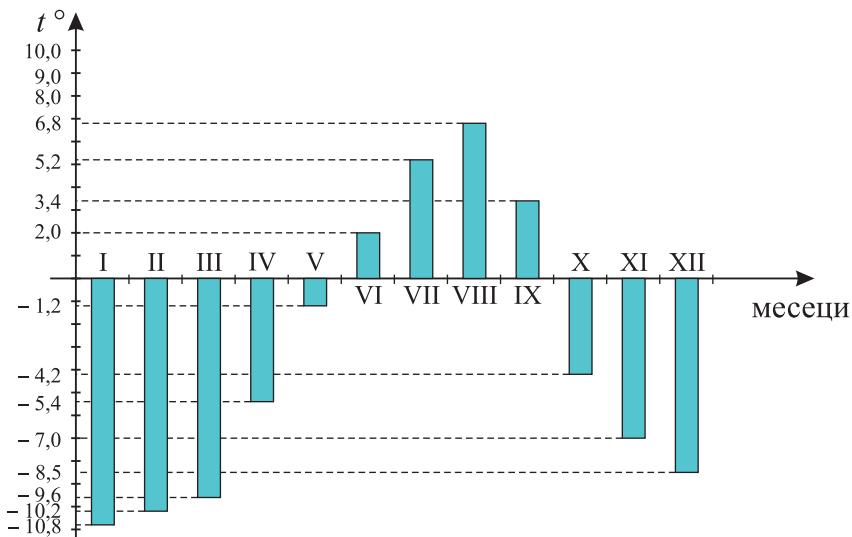
Решение:

$$\begin{aligned} & (\underbrace{2 + 2 + 2}_{3 \text{ пъти}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{12 \text{ пъти}} + \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{25 \text{ пъти}} + \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{21 \text{ пъти}} + \underbrace{6 + \dots + 6}_{17 \text{ пъти}}) : 78 = \\ & = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 25 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 17}{78} = \\ & = \frac{6 + 36 + 100 + 105 + 102}{78} = \frac{349}{78} = 4,4743 \approx 4,47 \end{aligned}$$

Средният успех по математика е добър 4,47.

* Понятието “средна стойност (средноаритметично)” въведохме в учебника за 5. клас от същите автори, стр. 172.

ЗАДАЧА 4 Средната месечна температура на връх Мусала, измерена в градуси по Целзий, е дадена на следната диаграма:



За връх Мусала намерете:

- През кой месец средната температура е най-ниска?
- Каква е средната температура през първите три месеца на годината?
- Каква е средната температура през второто полугодие на годината?
- Каква е средната температура за разглежданата година?

Решение:

a) Най-ниската средна месечна температура е измерена през месец януари ($-10,8^{\circ}$).

b) За месеците I, II и III $t_{\text{cp}}^{\circ} = \frac{-10,8^{\circ} - 10,2^{\circ} - 9,6^{\circ}}{3} = -10,2^{\circ}$.

v) За второто полугодие (м. VII – м. XII)

$$t_{\text{cp}}^{\circ} = \frac{5,2^{\circ} + 6,8^{\circ} + 3,4^{\circ} - 4,2^{\circ} - 7^{\circ} - 8,5^{\circ}}{6} \approx -0,7^{\circ}.$$

г) За избраната година

$$t_{\text{cp}}^{\circ} = \frac{-10,8^{\circ} - 10,2^{\circ} - 9,6^{\circ} - 5,4^{\circ} - 1,2^{\circ} + 2^{\circ} + 5,2^{\circ} + 6,8^{\circ} + 3,4^{\circ} - 4,2^{\circ} - 7^{\circ} - 8,5^{\circ}}{12} \approx -3,3^{\circ}.$$

ЗАДАЧИ

1 Домакиня купила три вида домати: 2 kg за салата по 1,80 лв. за килограм, 3 kg за готовене по 90 ст. за килограм, 6 kg за консервиране по 60 ст. за килограм. Намерете средната цена на 1 kg домати, купени от домакинята.

2 Средната стойност на приходите и разходите, направени от фирма за първото тримесечие на годината, са

дадени в таблица (приближението е с точност до 1000):

Месец	Приходи (лв.)	Разходи (лв.)
януари	14 000	8 000
февруари	25 000	7 000
март	30 000	6 000

Намерете средната печалба на фирмата през първото тримесечие.

ТАБЛИЧНО ИЛИ ГРАФИЧНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ДАННИ



Данните са информация за различни сфери от обществения живот и за природата, зададена с числа. За нуждите на практиката се събират данни, които се систематизират, обработват и изследват. Целта е да се направят верни изводи и прогнози за явленията в природата и обществените процеси. Този дял от математиката, който се занимава със събиране и обработване на данни, се нарича **статистика**. В нашата страна има Национален статистически институт, който всяка година издава статистически справочник със събраните и обработени данни за предходната година.

Таблично представяне на данни

В приложената по-долу таблица са приведени данни за броя на театрите в България по райони.

	Брой театри в България по райони през 2015 г.						
	Северо-западен	Северен централен	Северо-източен	Юго-източен	Юго-западен	Южен централен	ОБЩО
Брой театри	7	8	8	12	30	10	75
Дял* в проценти	9%	11%	11%	16%	40%	13%	100%

Табличната форма за представяне на данни е нагледна, кратка и много удобна. Всяка статистическа таблица съдържа:

- заглавие – кратко, ясно и точно,
- заглавен ред – описва съдържанието на колонките,
- челна колона – определя съдържанието на редовете,
- клетки – в тях се записват данните.

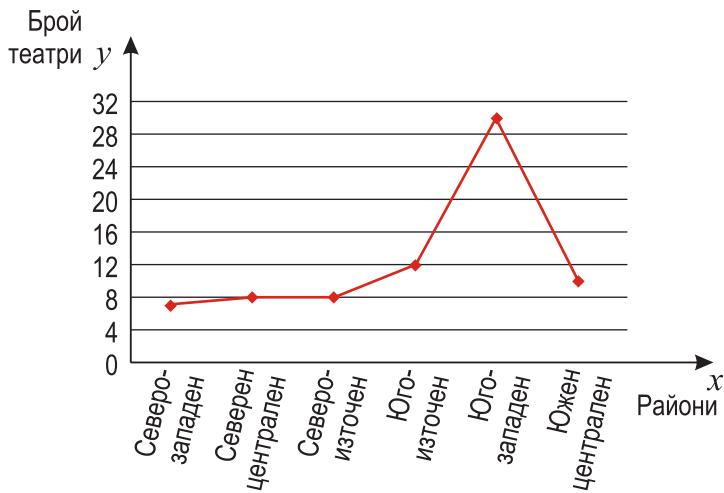


Графично представяне на данни

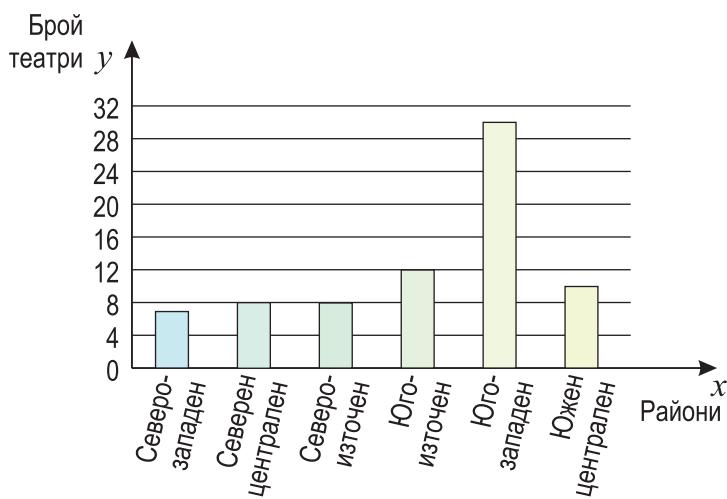
Графичното представяне на данни, известно още като “статистически графики” или “диаграми”, осигурява нагледност и по-лесно възприемане и разчитане на процесите, които се изследват. Има различни видове статистически графики. Ще се спрем на някои от тях, като използваме таблицата.

* Процентите са записани с точност до 1.

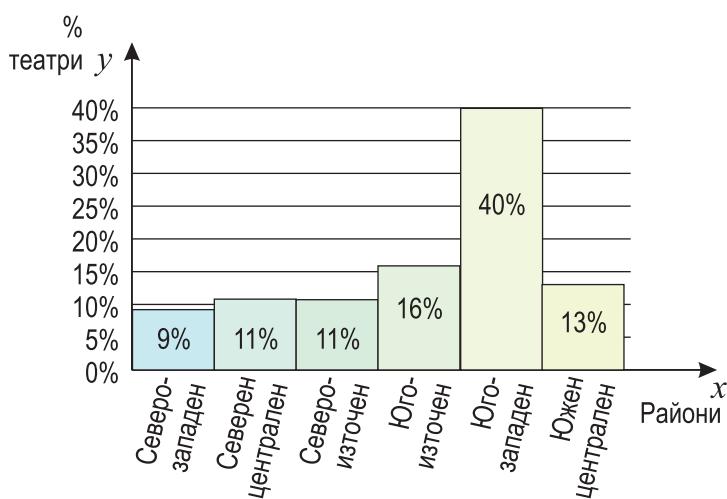
Обикновена линейна диаграма



Правоъгълна (стълбова) диаграма



Хистограма



За построяване на обикновена линейна диаграма се използват две перпендикулярни оси Ox и Oy .

- По оста Ox се нанасят равни отсечки с избрана дължина, които съответстват на районите на България.
- По оста Oy се нанасят числа, съобразени с броя на театрите, при подходящо избрана (друга) мерна единица.
- Всяка от нанесените точки се определя от две величини – в случая от района и от броя на театрите в него.
- Построените точки се свързват с отсечки и се получава графично представяне на данните от таблицата чрез обикновена линейна диаграма.

За построяване на правоъгълна (стълбова) диаграма се използват две перпендикулярни оси Ox и Oy .

- Върху оста Ox се нанасят равни отсечки с избрана дължина, които съответстват на районите на България.
- Върху оста Oy се нанасят числа, съобразени с броя на театрите, при подходящо избрана (друга) мерна единица.
- Начертани са 6 правоъгълника с равни основи. Второто измерение на всеки от тях има дължина съответно 7, 8, 8, 12, 30, 10.

За построяване на хистограма се използват две перпендикулярни оси Ox и Oy .

- По оста Ox се нанасят равни отсечки ($= 1$ м. ед.), съответстващи на районите на България.
- По оста Oy при подходящо избрана мерна единица се нанасят числа, съобразени с процентното разпределение на театрите по райони.
- Начертани са 6 правоъгълника с основа 1 м. ед. Второто измерение на всеки от тях е определено с друга мерна единица и има дължина съответно 9, 11, 11, 16, 40 и 13. Ако приемем тези числа условно за “лицата” на получените правоъгълници, то сборът им е $100\% = 1$.

ЗАДАЧА

В VI^a клас всички 30 ученици завършили I учебен срок без оценка слаб по математика. Броят на получените оценки среден, добър, мн. добър и отличен се отнася както 1 : 3 : 4 : 2.

- а) Намерете броя на учениците, получили оценки среден, добър, мн. добър и отличен.
- б) Намерете процента на учениците, получили оценки среден, добър, мн. добър и отличен.
- в) Представете получените данни в а) и б) таблично.
- г) Пресметнете средния успех на VI^a клас по математика.
- д) Представете данните чрез правоъгълна диаграма.
- е) Представете данните чрез кръгова диаграма.

Решение:

а) Означаваме с a, b, c, d съответно броя на учениците, получили оценки 3, 4, 5 и 6 по математика.

Тогава $a:b:c:d = 1:3:4:2$ и $a = 1, b = 3, c = 4, d = 2$.

Броят на учениците е 30: $a + b + c + d = 30$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 3 \cdot x + 4 \cdot x + 2 \cdot x &= 30 \\ (1 + 3 + 4 + 2) \cdot x &= 30 \\ 10 \cdot x &= 30, \quad x = 3. \end{aligned}$$

Учениците получили: среден (3) са $a = 1 \cdot 3 = 3, \quad a = 3,$

добър (4) са $b = 3 \cdot 3 = 9, \quad b = 9,$

мн. добър (5) са $c = 4 \cdot 3 = 12, \quad c = 12,$

отличен (6) са $d = 2 \cdot 3 = 6, \quad d = 6.$

б) Пресмятаме процента на учениците, получили съответната оценка.

Среден (3)	Добър (4)	Мн. добър (5)	Отличен (6)
$p\% \text{ от } 30 = 3$	$p\% \text{ от } 30 = 9$	$p\% \text{ от } 30 = 12$	$p\% \text{ от } 30 = 6$
$p \cdot 0,3 = 3$	$p \cdot 0,3 = 9$	$p \cdot 0,3 = 12$	$p \cdot 0,3 = 6$
$p = 3 : 0,3$	$p = 9 : 0,3$	$p = 12 : 0,3$	$p = 6 : 0,3$
$p = 10$	$p = 30$	$p = 40$	$p = 20$

в) Получаваме таблицата:

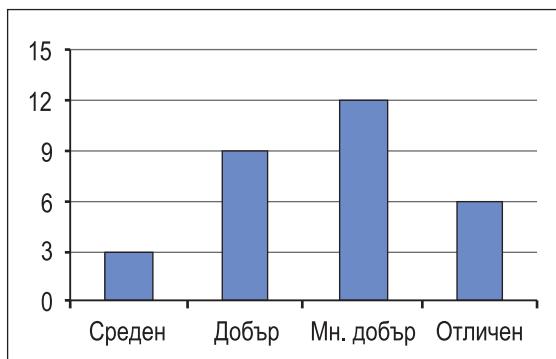
Оценка	3	4	5	6
Брой ученици	3	9	12	6
Процент	10	30	40	20

г) Средният успех на VI^a клас по математика е:

$$\frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 6}{3 + 9 + 12 + 6} = \frac{9 + 36 + 60 + 36}{30} = \frac{141}{30} = \frac{47}{10} = 4,7.$$

Средният успех е мн. добър (4,70).

д) За построяването на правоъгълна (стълбова) диаграма използваме две перпендикулярни оси Ox и Oy .



- Върху оста Ox нанасяме равни отсечки с избрана дължина, които съответстват на получената оценка.
- Върху оста Oy нанасяме числа, съобразени с броя на учениците, получили съответната оценка, при подходящо избрана (друга) мерна единица.
- Начертаваме четири правоъгълника с равни основи и ги оцветяваме. Второто измерение на всеки от правоъгълниците има дължина съответно 3, 9, 12, 6.

Начертаната правоъгълна диаграма дава нагледна информация за броя на получените оценки по математика от VI^a клас.

е) Ще разделим кръга на четири части, които се отнасят както $1 : 3 : 4 : 2$. Целият кръг (съответната окръжност) е 360° .

$$\text{От } a : b : c : d = 1 : 3 : 4 : 2$$

$$a = 1 \cdot y, b = 3 \cdot y, c = 4 \cdot y, d = 2 \cdot y.$$

$$1 \cdot y + 3 \cdot y + 4 \cdot y + 2 \cdot y = 360^\circ$$

$$(1 + 3 + 4 + 2) \cdot y = 360^\circ$$

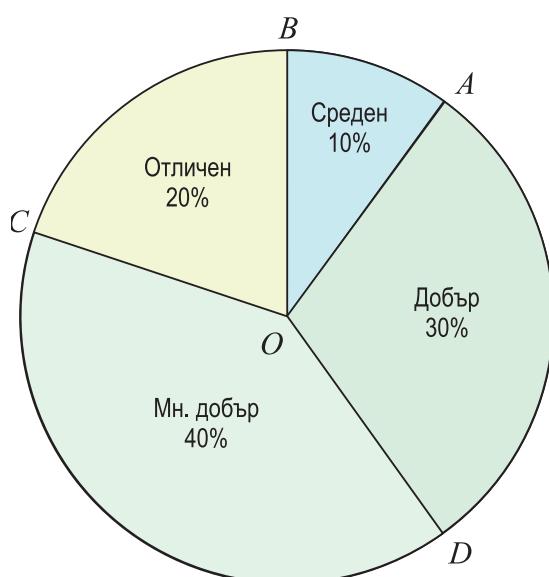
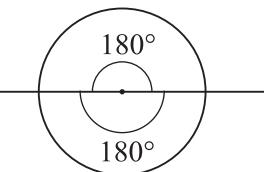
$$10 \cdot y = 360^\circ, y = 36^\circ$$

$$\text{Тогава } a = 1 \cdot 36^\circ = 36^\circ, a = 36^\circ,$$

$$b = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ, b = 108^\circ,$$

$$c = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ, c = 144^\circ,$$

$$d = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ, d = 72^\circ.$$



Начертаваме окръжност с произволен радиус OA .

С транспортир последователно нанасяме

$$\angle AOB = 36^\circ,$$

$$\angle BOC = 108^\circ,$$

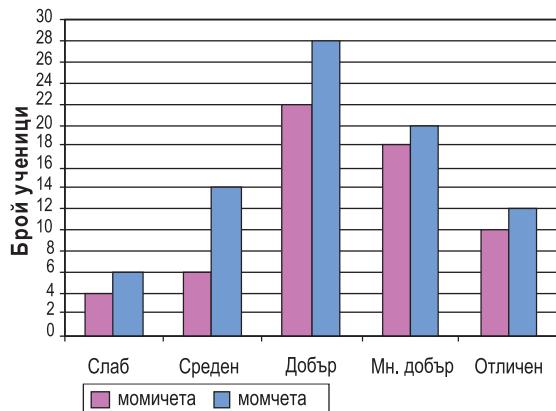
$$\angle COD = 144^\circ,$$

$$\angle DOA = 72^\circ.$$

Начертаната кръгова диаграма дава нагледна информация за процентното разпределение на оценките по математика, получени от учениците от VI^a клас.

ГРАФИЧНИ ИЛИ ТАБЛИЧНИ ПРЕДСТАВЯНИЯ НА ЕДНИ И СЪЩИ ДАННИ. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Дадена е сравнителна диаграма на резултатите от пробен изпит по математика за ученици от 6. клас.

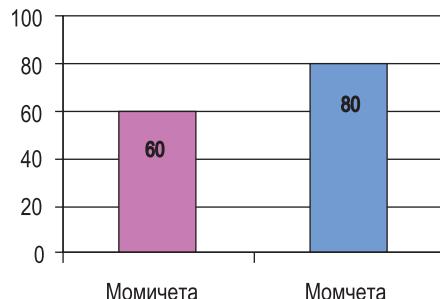


- Представете таблично данните от диаграмата и ги обобщете.
- Колко момичетата и колко момчетата са се явили на изпита? Представете резултата графично.
- Колко учениците са получили оценки слаб, среден, добър, мн.добър и отличен? Представете резултата графично.
- Пресметнете общия среден успех от изпита.
- Сравнете средния успех на момичетата със средния успех на момчетата.

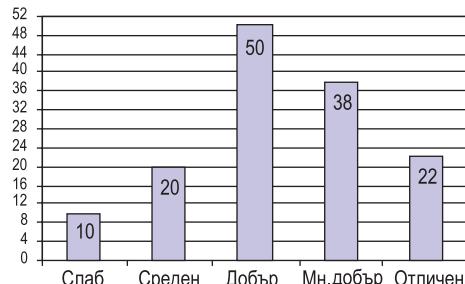
Решение:

a)	Оценка	Слаб	Среден	Добър	Мн. добър	Отличен	Общ брой ученици
	Брой момичета	4	6	22	18	10	60
	Брой момчета	6	14	28	20	12	80
	Общ брой ученици	10	20	50	38	22	140

б) Брой ученици по пол.



в) Брой ученици по резултат.



г) Общият среден успех е

$$\frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 38 + 6 \cdot 22}{10 + 20 + 50 + 38 + 22} = \frac{20 + 60 + 200 + 190 + 132}{140} = \frac{602}{140} = 4,30.$$

д) Средният успех на момичетата е

$$\frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 22 + 5 \cdot 18 + 6 \cdot 10}{4 + 6 + 22 + 18 + 10} = \frac{8 + 18 + 88 + 90 + 60}{60} = \frac{264}{60} = 4,40.$$

Средният успех на момчетата е

$$\frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 14 + 4 \cdot 28 + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 12}{6 + 14 + 28 + 20 + 12} = \frac{12 + 42 + 112 + 100 + 72}{80} = \frac{338}{80} = 4,225 \approx 4,23.$$

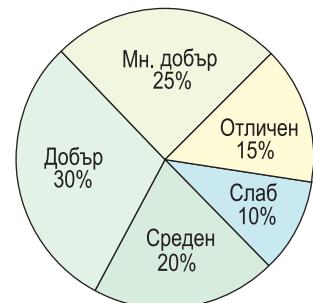
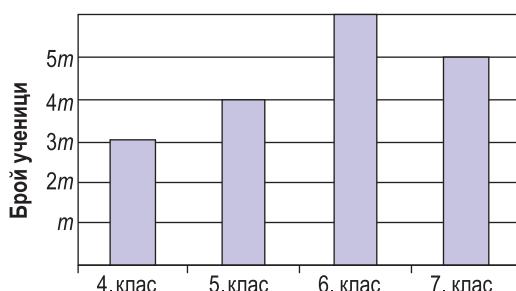
Средният успех на момичетата е по-голям от средния успех на момчетата.

ЗАДАЧА 2

На състезание по математика са се явили 180 ученици от едно училище.

На правоъгълната диаграма е показано разпределението им по класове.

На кръговата диаграма е показано разпределението на оценките на учениците от 6. клас.



а) Колко ученици от всеки клас са се явили на изпита? Представете резултата таблично.

б) Намерете броя на учениците от 6. клас, получили оценки среден, добър, мн. добър и отличен. Представете данните таблично и чрез правоъгълна диаграма.

Решение:

а) От правоъгълната диаграма отчитаме броя на явилите се на състезанието ученици:

$$3 \cdot m - \text{от 4. клас}, \quad \text{Броят на всички участници в състезанието е } 180.$$

$$4 \cdot m - \text{от 5. клас}, \quad 3 \cdot m + 4 \cdot m + 6 \cdot m + 5 \cdot m = 180$$

$$6 \cdot m - \text{от 6. клас}, \quad 18 \cdot m = 180$$

$$5 \cdot m - \text{от 7. клас}. \quad m = 10$$

Броят на учениците от: 4. клас е $3 \cdot m = 3 \cdot 10 = 30$, 5. клас е $4 \cdot m = 4 \cdot 10 = 40$, 6. клас е $6 \cdot m = 6 \cdot 10 = 60$, 7. клас е $5 \cdot m = 5 \cdot 10 = 50$.

Оценка	4. клас	5. клас	6. клас	7. клас	Общо
Брой ученици	30	40	60	50	180

б) От кръговата диаграма отчитаме процентите на получените оценки:

$$\text{слаб: } 10 \% \text{ от } 60 = 0,1 \cdot 60 = 6,$$

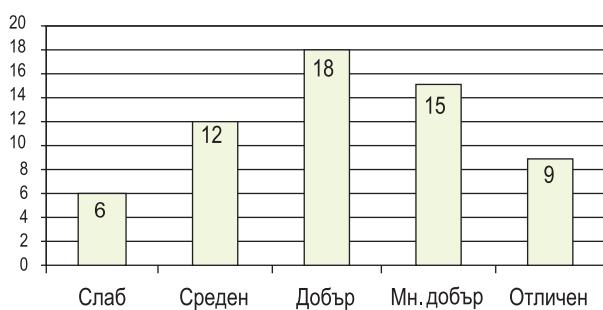
$$\text{среден: } 20 \% \text{ от } 60 = 0,2 \cdot 60 = 12,$$

$$\text{добър: } 30 \% \text{ от } 60 = 0,3 \cdot 60 = 18,$$

$$\text{мн. добър: } 25 \% \text{ от } 60 = 0,25 \cdot 60 = 15,$$

$$\text{отличен: } 15 \% \text{ от } 60 = 0,15 \cdot 60 = 9.$$

Оценка	Слаб	Среден	Добър	Мн. добър	Отличен	Общо
Брой ученици	6	12	18	15	9	60



ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕМАТА „ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА“

ЗАПОМНЕТЕ!

Множество – съвкупност от обекти, обединени по някакъв общ признак.

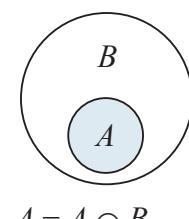
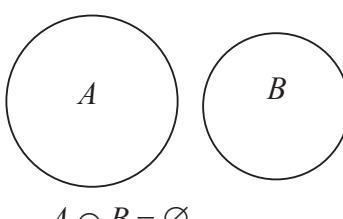
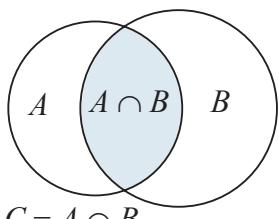
Елемент на множество – всеки обект, който принадлежи на дадено-то множество.

Безкрайно множество – множество, което съдържа безброй много елементи.

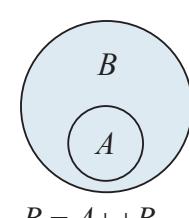
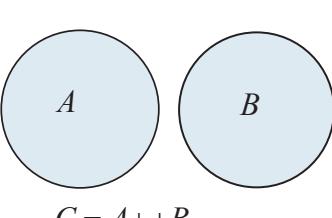
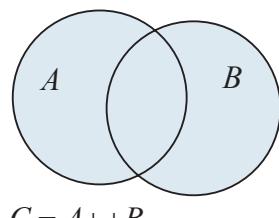
Крайно множество – множество, което съдържа краен брой еле-менти.

Подмножество – A е подмножество на B , ако всички елементи на множество A са елементи и на множество B .

Сечение на две множества:



Обединение на две множества:



Достоверно събитие: Когато след извършване на един опит се знае, че дадено събитие ще настъпи, то се нарича достоверно (сигур-но) събитие.

Невъзможно събитие: Когато след извършване на един опит се знае, че дадено събитие няма да настъпи, то се нарича невъзможно събитие.

Случайно събитие: Когато след извършване на един опит дадено събитие може да настъпи, а може и да не настъпи, то се нарича слу-чайно събитие.

Класическа вероятност. Ако при даден опит има n възможни изходи и m от тях са благоприятни за събитието A , то вероятност за настъпване на събитието A се нарича отношението на броя на благо-приятните към броя на възможните изходи.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{брой благоприятни възможности}}{\text{брой на всички възможности}}$$

ЗАДАЧА 1 Нека A е множеството на всички делители на числото 45, а B – множеството на всички делители на числото 60.

- Намерете множествата: A , B , $A \cap B$ и $A \cup B$.
- Намерете всички подмножества на множеството $A \cap B$, елементите на които са числа, кратни на 5.
- Намерете всички подмножества на множеството $A \cup B$, елементите на които са делители на числото 9.

Решение:

a) $A = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

Числата 1, 3, 5 и 15 са общи елементи за двете множества, т.e. $A \cap B = \{1, 3, 5, 15\}$.

Числата 1, 3, 5 и 15 влизат в обединението само веднъж, т.e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 45, 60\}$.

- Подмножествата на $A \cap B$, елементите на които са числа, кратни на 5, са: $\{5\}$; $\{15\}$, $\{5, 15\}$.
- Подмножествата на $A \cup B$, елементите на които са делители на числото 9, са $\{1\}$; $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$, $\{1, 3, 9\}$.

ЗАДАЧА 2 Нека числата 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 са написани на отделни еднакви картончета, които са разбъркани. По случаен начин е изтеглено едно картонче. Каква е вероятността числото, написано върху него, да е:
а) просто; б) нечетно; в) двуцифreno?

Решение:

Броят на всички числа (картончета) е 10, т.e. всички възможности са $n = 10$.

a) На 4 от картончетата е написано просто число (3, 5, 7, 11), $m = 4$,

$$P = \frac{4}{10} = 0,4.$$

б) На 5 от картончетата е написано нечетно число (3, 5, 7, 9, 11), $m = 5$,

$$P = \frac{5}{10} = 0,5.$$

в) На 3 от картончетата е написано двуцифreno число (10, 11, 12), $m = 3$,

$$P = \frac{3}{10} = 0,3.$$

ЗАДАЧА 3 В една фирма работят 5 работници със заплата 650 лв., 2 специалисти със заплата 900 лв. и 1 ръководител със заплата 1 550 лв. Намерете:
а) колко лева е средната заплата във фирмата;
б) каква е вероятността случайно избран служител да е със заплата 650 лв.

Решение:

a) $\frac{650 \cdot 5 + 900 \cdot 2 + 1550 \cdot 1}{5 + 2 + 1} = \frac{3250 + 1800 + 1550}{8} = \frac{6600}{8} = 825$

Средната заплата във фирмата е 825 лв.

б) Броят на всички служители е $5 + 2 + 1 = 8$. 5 от тях са със заплата 650 лв.

Търсената вероятност е $\frac{5}{8}$.

ОБЩИ ЗАДАЧИ ВЪРХУ ТЕМАТА „ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА“

1. Запишете множеството A от всички нечетни числа, по-големи от 4 и по-малки от 26. Намерете броя на елементите на множеството A .
2. Дадени са множествата $A = \{2, 4, 5, 8\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 13\}$. Намерете множествата:
a) $A \cap B$; б) $A \cup B$.
3. Нека A е множеството на всички двуцифрени естествените числа, по-големи от 75 и по-малки от 85, а B – множеството всички двуцифрени числа, кратни на 20. Намерете множествата:
a) $A \cap B$; б) $A \cup B$.
4. За непразни множества A и B проверете верността на твърденията:
a) $A \subset (A \cap B)$; б) $(A \cap B) \subset B$;
в) $B \subset (A \cup B)$; г) $(A \cup B) \subset A$;
д) $(A \cup \emptyset) = A$; е) $(A \cap \emptyset) = \emptyset$.
5. Хвърляме правилен зар. Каква е вероятността да се паднат по-малко от 5 точки?
6. Хвърляме правилен зар. Каква е вероятността точките, които се паднат, да са просто число?
7. В една кутия има 12 бели и 8 черни топки. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността тя да е черна?
8. В една кутия има 30 топки, от които 6 са сини. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността тя да не е синя?
9. Нека числата 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20 са написани на отделни еднакви картончета, а картончетата са разбъркани. По случаен начин е изтеглено едно картонче. Каква е вероятността върху него да е написано:
а) четно число;
б) число, кратно на 5;
в) едноцифрено число?
10. Числата от 1 до 50 са написани на отделни еднакви картончета, а картончетата са разбъркани. По случаен начин е изтеглено едно картонче. Кое е по-вероятно: да се падне число, по-голямо от 25, или да се падне число, по-малко от 25?
11. В една кутия има 45 топки – бели, червени и сини. Белите топки са 2 пъти повече от червените и 3 пъти по-малко от сините. Изважда се по случаен начин една топка. Каква е вероятността тя да е:
а) червена; б) синя; в) бяла?
12. В една кутия има 120 кламера – бели, зелени и сини. Белите кламери са 3 пъти повече от зелените и с 20 по-малко от сините. Изважда се по случаен начин един кламер. Каква е вероятността той да е:
а) бял; б) син; в) зелен?
13. В един клас средният успех от 5 предмета е 5,40, а средният успех от други 3 предмета е 4,60. Намерете средния успех от всичките 8 предмета.
14. В един клас средният успех от 7 предмета е 5,40, а средният успех от други 3 предмета е 4,80. Намерете средния успех от всичките 10 предмета.
15. За 10 години локомотив изминавал средно по 380 000 km годишно. Ако през първите 4 години локомотивът е изминавал средно по 500 000 km годишно, намерете по колко километра средно е изминавал през всяка от следващите 6 години.

ИЗХОДНО НИВО

(Урок № 122 – Урок № 129)

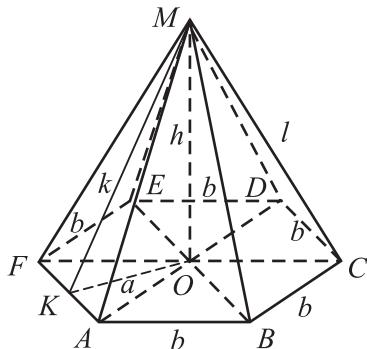
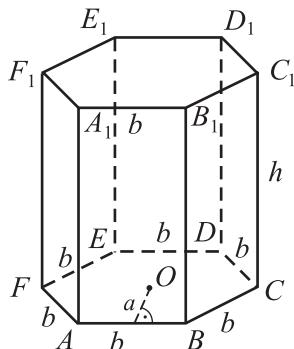
**ГОДИШЕН ПРЕГОВОР ЧРЕЗ ЗАДАЧИ И
ТЕСТОВЕ НА ТЕМИТЕ:**

- **РЪБЕСТИ ТЕЛА**
- **ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА**
- **РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА**
- **СТЕПЕНУВАНЕ**
- **УРАВНЕНИЯ**
- **ПРОПОРЦИИ**

**ПРИМЕРЕН ТЕСТ ЗА ИЗХОДНО НИВО
С РЕШЕНИЯ**

**ДВА ПРИМЕРНИ ТЕСТА ЗА ИЗХОДНО
НИВО**

ЗАДАЧИ

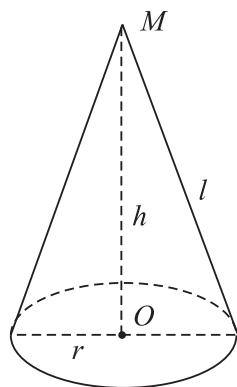
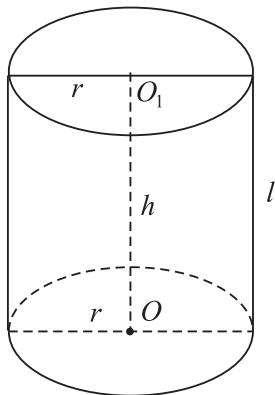
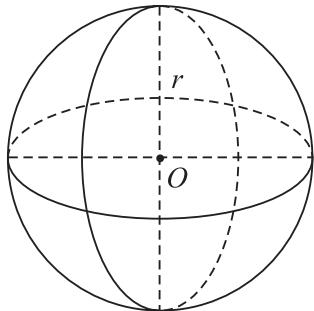


1. За измеренията a , b , c на правоъгълен паралелепипед е дадено, че $a : b : c = 2 : 3 : 5$. Сборът от всички ръбове на паралелепипеда е 280 cm. Намерете S , S_1 и V на паралелепипеда.
2. Намерете обема на правилна четириъгълна призма с основен ръб 6 cm и лице на повърхнината ѝ 312 cm^2 .
3. Правилна шестоъгълна призма има обем $2,106 \text{ dm}^3$. Височината на призмата е 10 cm, а апотемата на основата ѝ е 7,8 cm. Намерете S и S_1 на призмата.
4. Правилна четириъгълна пирамида има лице на околната повърхнина 260 cm^2 , апотема 13 cm и височина, с 2 cm по-голяма от основния ѝ ръб. Намерете S_1 и V на пирамидата.
5. Обемът на правилна шестоъгълна пирамида е 2784 cm^3 . Основният ѝ ръб е 11,6 cm, а височината ѝ е 2,4 dm. Апотемата на основата се отнася към апотемата на пирамидата както $5 : 13$. Намерете S и S_1 на пирамидата.
6. Основата на права призма е ромб със страна b . Височината на призмата е h , като $b : h = 3 : 5$, а околната ѝ повърхнина е 540 cm^2 . Намерете сума от всички ръбове на призмата.
7. Основата на права призма е $\triangle ABC$ със страни a , b и c . Височината на призмата е h , като $a : b : c : h = 4 : 5 : 6 : 7$, а околната ѝ повърхнина е 945 cm^2 . Намерете височината на призмата.
8. Права триъгълна призма има за основа правоъгълен триъгълник с катети a , b и хипотенуза c . Височината на призмата е h и $a : b : c : h = 3 : 4 : 5 : 8$. Ако обемът на призмата е 1296 cm^3 , намерете повърхнината ѝ.
9. Правилна четириъгълна пирамида има основен ръб b , височина h и апотема k , за които е известно, че $b : h = 3 : 2$ и $k : h = 5 : 4$. Околната повърхнина на пирамидата е $S = 60 \text{ cm}^2$. Намерете S_1 и V на пирамидата.
10. Правоъгълен паралелепипед има измерения a , b и c , за които е известно, че $a : b = 3 : 2$ и $b : c = 5 : 4$. Намерете S_1 и V на паралелепипеда, ако:
 - сборът на всичките му ръбове е 264 cm ;
 - най-малкият периметър на негова стена е 108 cm .

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “РЪБЕСТИ ТЕЛА”

1. Права шестоъгълна призма има околнен ръб 3 dm . Сборът от всички околни ръбове на призмата в сантиметри е:
A) 9;
B) 18;
C) 90;
D) 180.
2. Правилна триъгълна пирамида има основен ръб 18 cm и лице на една околна стена 21 cm^2 . Апотемата на пирамидата в сантиметри е:
A) 6;
B) 4;
C) 7;
D) 5.
3. Броят на върховете на една пирамида е 8. Броят на ръбовете на тази пирамида е:
A) 7;
B) 16;
C) 12;
D) 14.
4. Правилна четириъгълна призма има основен ръб 5 cm и околнен ръб 10 cm . Повърхнината на призмата в квадратни сантиметри е:
A) 250;
B) 225;
C) 150;
D) 125.
5. Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с катети 5 cm и 8 cm , а височината на призмата е 10 cm . Обемът ѝ в кубически сантиметри е:
A) 400;
B) 300;
C) 250;
D) 200.
6. Основният и околният ръб на правилна четириъгълна призма са в отношение $3 : 7$. Сборът от всичките ѝ ръбове е 208 cm . Околният ръб на призмата в сантиметри е:
A) 36,4;
B) 12;
C) 28;
D) 16.
7. Правилна четириъгълна пирамида има основен ръб 16 cm и околна повърхнина 320 cm^2 . Височината и апотемата на пирамидата са в отношение $3 : 5$. Обемът ѝ в кубически сантиметри е:
A) 512;
B) 320;
C) 256;
D) 1536.
8. Тяло е съставено от куб и правилна четириъгълна пирамида с обща основа и равни височини. Ако лицето на основата е 36 cm^2 , намерете в кубически сантиметри обема на:
 - а) правилната четириъгълна пирамида;
 - б) тялото.
9. Основата на права призма е правоъгълен трапец с основи $a = 10 \text{ cm}$ и $b = 7 \text{ cm}$ и бедра $c = 4 \text{ cm}$ и $d = 5 \text{ cm}$. Ако височината на призмата е 15 cm , намерете:
 - а) околната повърхнина на призмата в квадратни сантиметри;
 - б) повърхнината на призмата в квадратни сантиметри;
 - в) обема на призмата в кубически сантиметри.
10. В правилна триъгълна пирамида с лице на основата $B = 45 \text{ cm}^2$ и височина $h = 20 \text{ cm}$ е издълбана триъгълна пирамида с лице на основата B_1 , 5 пъти по-малко от B , и височина, 4 пъти по-малка от h . Намерете обема на полученото тяло в кубически сантиметри.

ЗАДАЧИ



1. Прав кръгов цилиндър с радиус на основата r и височина h има периметър на осното сечение 44 см и $r : h = 3 : 5$. Намерете повърхнината на цилиндъра в квадратни сантиметри.
2. Прав кръгов цилиндър има околнна повърхнина $120 \pi \text{ dm}^2$ и повърхнина $192 \pi \text{ dm}^2$. Намерете обема на цилиндъра в кубически десиметри.
3. Прав кръгов цилиндър има периметър на основата $P = 24 \pi \text{ см}$ и обем $V = 720 \pi \text{ см}^3$. Намерете повърхнината на цилиндъра в квадратни сантиметри.
4. Прав кръгов конус има осно сечение равностранен триъгълник с периметър 48 см. Намерете околната повърхнина на конуса в квадратни сантиметри.
5. Правоъгълен триъгълник с катети 9 см и 12 см и хипотенуза 15 см е завъртян около хипотенузата си. Намерете обема на полученото тяло в кубически сантиметри.
6. Цилиндър с диаметър на основата 8 dm има повърхнина $112 \pi \text{ dm}^2$. Намерете колко литра е вместимостта на цилиндъра.
7. Конус с диаметър на основата 12 см има обем $96 \pi \text{ см}^3$. Намерете S и S_1 на конуса, ако за височината му h и образувателната му l е в сила $h : l = 4 : 5$.
8. От метално кълбо с диаметър 24 см са излети 96 конични отвеса с диаметър на основата 6 см и равни височини. Намерете височината на отвесите.
9. Правоъгълен трапец с основи 10 см и 6 см и бедра 3 см и 5 см е завъртян около голямата си основа. Намерете повърхнината и обема на полученото тяло.
10. Правоъгълен трапец с основи 10 см и 6 см и бедра 3 см и 5 см е завъртян около малката си основа. Намерете повърхнината и обема на полученото тяло.

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА”

1. Прав кръгов цилиндър има диаметър 10 см и образуваща 3 dm . Повърхнината на цилиндъра в квадратни сантиметри е:
A) 325π ;
B) 300π ;
B) 600π ;
G) 350π .
2. Конус с обем $V = 48 \pi \text{ cm}^3$ и диаметър 8 см има височина:
A) 3 см;
B) 6 см;
B) 9 см;
G) 18 см.
3. Прав кръгов конус има радиус 4 см и височина 9 см. Обемът на конуса в кубически сантиметри е:
A) 12π ;
B) 144π ;
B) 48π ;
G) 192π .
4. Прав кръгов конус с радиус r и образуваща l има периметър на осното сечение 60 cm и $r : l = 3 : 7$. Повърхнината на конуса в квадратни сантиметри е:
A) 81π ;
B) 189π ;
B) 260π ;
G) 270π .
5. Кълбо и цилиндър имат равни обеми и равни радиуси $r = 9 \text{ cm}$. Височината на цилиндъра в сантиметри е:
A) 9;
B) 3;
B) 12;
G) 6.
6. От метално кълбо с диаметър 16 см са излети метални топчета с радиус 2 см. Броят на получените топчета е:
A) 16;
B) 64;
B) 32;
G) 128.
7. Правоъгълен триъгълник с катети 3 см и 6 см е завъртян около по-големия си катет. Обемът на полученото тяло в кубически сантиметри е:
A) 18π ;
B) 54π ;
B) 27π ;
G) 36π .
8. Правоъгълник със страни 4 см и 8 см е завъртян около по-голямата си страна. Намерете:
 - а) повърхнината на полученото тяло в квадратни сантиметри;
 - б) обема на полученото тяло в кубически сантиметри.
9. Правоъгълен триъгълник с катети $a = 6 \text{ cm}$ и b се върти около катета b . Ако обемът на полученото тяло е $96 \pi \text{ cm}^3$, намерете:
 - а) лицето на триъгълника в квадратни сантиметри;
 - б) хипотенузата на триъгълника в сантиметри;
 - в) повърхнината на полученото тяло в квадратни сантиметри.
10. Тяло е образувано от цилиндър и полукълбо с обща основа. Осното сечение на цилиндъра е квадрат с лице 144 cm^2 . Намерете повърхнината и обема на полученото тяло.

ЗАДАЧИ

- Изобразете върху числовата ос числата:
 а) $-7; -4; -2; 0; 3; 5;$
 б) $-3; -1; 0; 1; 3;$
 в) $-5; -2; 0; 2; 5;$
 г) $-5,5; -1,5; 0; 2,5; 4,5.$
- Изобразете върху числовата ос всички цели числа, за които е вярно:
 а) $|x| = 4;$
 б) $|x| < 2,6;$
 в) $|x| \leq 3;$
 г) $1 < |x| \leq 4.$
- Начертайте таблиците в тетрадките си и ги попълнете.

a	-11	-6	-3,4	$-2\frac{1}{3}$	-0,8
$-a$?	?	?	?	?
$ a $?	?	?	?	?
$ -a $?	?	?	?	?

a	0	$\frac{1}{7}$	2,5	7	13
$-a$?	?	?	?	?
$ a $?	?	?	?	?
$ -a $?	?	?	?	?

- Начертайте правоъгълна координатна система и означете точката $A_1(-5; -3)$. Намерете:
 а) точката A_2 , симетрична на A_1 спрямо Oy ;
 б) точката A_3 , симетрична на A_2 спрямо Ox ;
 в) точката A_4 , симетрична на A_3 спрямо Oy ;
 г) периметъра и лицето на фигурата $A_1A_2A_3A_4$.
- Напишете 6 числа, първото от които е -32 , а всяко следващо се получава,

като умножим предходното му с $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Намерете:

- произведенietо на второто и петото число;
- произведенietо на първото и шестото число;
- произведенietо на третото и четвъртото число;
- сбора на всички числа.

Пресметнете:

- $12 : (-3) - 8 : (-2) - (-3),$
 $-4 \cdot (-3) + 9 : (-3) - (-2)^2;$
- $(-13,4 - 2,6) : (-2) + 5 \cdot (-3),$
 $(-13,6 + 5,6) : (-4) - (-3)^2.$

Пресметнете:

- $-3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) - \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot 6;$
- $\left(-5\frac{1}{3} + 6\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) - |-9|;$
- $\frac{-32 - 16 : (-4) + 8}{5 \cdot (-3) - 7 \cdot (-2)}.$

Разкрийте скобите и пресметнете:

- $-(-3) - (5 - 11 - 21);$
- $-7 - 2 \cdot (-4 - 3,5 + 1).$

Пресметнете стойността на израза $B = x : (-3) - 2 \cdot y - 7$, ако:

- $x = -9, \quad y = 2;$
- $x = 12, \quad y = -3;$
- $x = -15, \quad y = -3,5;$
- $x = -7,5, \quad y = -3,5.$

Намерете x , ако:

- $x + 17,5 = -5\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{16} + 7,5;$
- $-2\frac{1}{7} \cdot 4\frac{1}{5} - x = -3\frac{1}{3} \cdot 2,4 - 3 \cdot 2\frac{1}{3};$
- $x - 5 : \left(-1\frac{2}{3}\right) = 5 + 3 : (-0,5);$
- $-3\frac{1}{3} \cdot 1,2 - x = -3,25 \cdot 1\frac{3}{13} - 6.$

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА”

1. Сборът $-8,5 + 2,3 - 3,6 + 4,2$ е:
 - A) $-10,2$;
 - B) $-1,6$;
 - C) -14 ;
 - D) $-5,6$.
 2. Стойността на израза
 $-2 \cdot |-3| - |-7|$ е:
 - A) 13 ;
 - B) 1 ;
 - C) -13 ;
 - D) -1 .
 3. Не е вярно неравенството:
 - A) $-17 > -12,3$;
 - B) $-15,6 < 2,7$;
 - C) $-3,8 < -1,3$;
 - D) $-5,6 < 0$.
 4. Стойността на израза
 $(-6)^2 \div (-3) - 8 \div \left(-\frac{1}{2}\right) - |-5|$ е:
 - A) -33 ;
 - B) -1 ;
 - C) 4 ;
 - D) 9 .
 5. Намислих едно число. Умножих го по модула на -3 и получих противоположното число на 9 . Намисленото число е:
 - A) -3 ;
 - B) 3 ;
 - C) 27 ;
 - D) -27 .
 6. При $x = -3$ стойността на израза
 $A = 5 \cdot |x - 1| - 2 \cdot |1 - x| - x$ е:
 - A) 5 ;
 - B) 15 ;
 - C) -5 ;
 - D) 31 .
 7. Намислих едно число. Разделих го с модула на $-\frac{2}{3}$ и получих реципрочно-то число на $-\frac{1}{12}$. Намисленото число е:
 - A) 8 ;
 - B) -18 ;
 - C) 18 ;
 - D) -8 .
 8. Намерете числената стойност на израза $A = -x^3 - x^2 + 23$, ако:
 - a) $x = 2 \cdot (-3) + |-4|$;
 - b) $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$.
 9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на числовия израз. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на израза със същата стойност.
- | | | | |
|-----|--|-----|---|
| (A) | $-12 : 2 + 4$ | (1) | $5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-7)$ |
| (Б) | $3 \cdot (-2)^3 - 4 : \left(-\frac{1}{6}\right)$ | (2) | $(-5)^2 - 3^2 - (-4)^2$ |
| (В) | $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
$\frac{1}{6} - \frac{1}{4}$ | (3) | $5 \frac{2}{13} - (-8) - 15 \frac{2}{13}$ |
| | | (4) | $-\frac{1}{3} + 2 \frac{5}{6} - 0,5$ |
10. В правоъгълна координатна система Oxy (1 деление = 1 м. ед.) постройте точките $A(-2; -1)$, $B(2; -1)$, $C(2; 1)$ и $D(-2; 4)$. Намерете:
 - а) лицето на $ABCD$ в квадратни мерни единици;
 - б) обиколката на $ABCD$ в мерни единици.

ЗАДАЧИ

1. Дадени са числата 40; 90; 160; 175 и 704. Всяко от тези числа представете като произведение от степени с основи простите множители на числата.
2. Представете числата 5184 и 1764 като произведение от степени с основи простите им множители и намерете естественото число x , за което:
 - $x^2 = 5184$;
 - $x^2 = 1764$.
3. Пресметнете:
 - $6^2 - 7^2$;
 - $-3^3 + 2 \cdot 5^2$;
 - $(-2,3)^2 - (1,3)^2$;
 - $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$.
4. Пресметнете:
 - $\frac{36^4 \cdot 25^3 \cdot (-1)^9}{6^7 \cdot 5^6 \cdot (-1)^{12}}$;
 - $\frac{49^5 \cdot 81^4 \cdot (-2)^6}{7^9 \cdot 3^{15} \cdot 4^3}$;
 - $\frac{27^5 \cdot 64^2 \cdot 125^3}{9^7 \cdot (-8)^5 \cdot 25^5}$.
5. Пресметнете:
 - $\frac{7 \cdot 3^9 + 3^{11}}{8 \cdot 3^9}$;
 - $\frac{5^{11} - 2 \cdot 5^{10} + 3 \cdot 5^9}{5^9}$;
 - $\frac{6^{12} - 2 \cdot 6^{11} + 6^{10}}{6^{11} - 6^{10}}$.
6. Пресметнете стойността на израза:
 - $A = \frac{7^3 a^5 b^4}{7^2 a^4 b^5}$ за $a = -2$ и $b = -14$;
 - $B = \frac{(-2a^7 b^5)^4}{(2a^9 b^7)^3}$ за $a = -2$ и $b = -\frac{1}{7}$;
 - $C = \left(\frac{5a^7}{b^8}\right)^2 : \left(\frac{5a^5}{b^6}\right)^3$ за $a = 2$ и $b = -10$.
7. Намерете числото n от равенството:
 - $5^{3n+1} = 5^7$;
 - $\frac{2^{3n+1}}{2^{n+1}} = 2^{10}$;
 - $\frac{5^n \cdot 5^{n+3}}{5^2} = 5^9$;
 - $\left(\frac{2}{3}\right)^{3n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+9}$.
8. Проверете верността на равенство $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, ако:
 - $x = 6$ и $y = 3$;
 - $x = -5$ и $y = 2$;
 - $x = 7$ и $y = -3$;
 - $x = -11$ и $y = -4$.
9. Проверете верността на равенство $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, ако:
 - $x = 7$ и $y = 3$;
 - $x = 13$ и $y = -12$;
 - $x = 2,7$ и $y = 7,3$;
 - $x = \frac{1}{3}$ и $y = -\frac{2}{3}$.
10. Проверете верността на равенство $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, ако:
 - $x = 5$ и $y = 2$;
 - $x = -2$ и $y = 3$;
 - $x = 2$ и $y = -3$;
 - $x = -2$ и $y = -3$.

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “СТЕПЕНУВАНЕ”

1. Стойността на израза $(-2)^3 - (-3)^2$ е:
 - 1;
 - 1;
 - 17;
 - 3.
 2. За $a = -2$ стойността на израза $A = 3a^3 - 4a^2 - a + 2$ е:
 - 4;
 - 36;
 - 12;
 - 24.
 3. $(9 - 5)^2$ е равно на:
 - $9^2 - 5^2$;
 - $9^2 + 5^2$;
 - $9^2 - 9 \cdot 5 + 5^2$;
 - $9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5 + 5^2$.
 4. Изразът $\frac{3^{11} \cdot 3^8 \cdot 3}{3^{12} \cdot 3^3 \cdot 3^2}$ е равен на:
 - 81;
 - 243;
 - 9;
 - 27.
 5. Изразът $\frac{(-2)^7 \cdot 2^5 \cdot (-13^5)^8}{(-2)^3 \cdot (-2^4)^2 \cdot (-13^{13})^3}$ е равен на:
 - 26;
 - 26;
 - 13;
 - 13.
 6. За да е вярно равенството $4^{18} = 8^8$. \square , в квадратчето трябва да поставим:
 - 8^3 ;
 - 16^3 ;
 - 4^2 ;
 - 2^{10} .
 7. За $a = |-2|$ стойността на израза $\frac{36^5 \cdot (a^5)^3}{6^9 \cdot (a^7)^2}$ е:
 - 12;
 - 12;
 - 3;
 - 24.
 8. Правоъгълен триъгълник с лице 30 см^2 има дължина на единия катет 12 см. Намерете в сантиметри:
 - дълчината на другия катет;
 - дълчината на хипотенузата.
 9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на числовия израз. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на израза със същата стойност.
- | | | |
|-----|---|--|
| (А) | $\frac{3^7 \cdot 2^7}{6^3 \cdot (-36)^2}$ | (1) $5^0 + \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$ |
| (Б) | $\frac{5^7 + 3 \cdot 5^6}{(-125)^2}$ | (2) $2^3 - (-3)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ |
| | | (3) $2^3 - \frac{5^7}{25^3}$ |
| (В) | $\frac{3^{-2} \cdot 2^{-3}}{6^{-3}}$ | (4) $2^{-1} + 2^{-1}$ |
10. Ако $a = -\frac{1}{2}$ и $b = (-2)^8$, намерете стойността на израза

$$A = \left(\frac{2a^3}{3b^2}\right)^4 : \left(\frac{4a^2}{9b^3}\right)^3.$$

ЗАДАЧИ

Решете уравненията:

1. а) $7x - 6 = 2x + 9$;
б) $5x - 2 = 3(x + 6)$;
в) $8x + 5 = 4x - 11$;
г) $11x + 5 = 2(x - 6,5)$.
2. а) $3(x + 1) = 2(x + 2)$;
б) $2(2x + 1) = 3(x - 5)$;
в) $2(3x - 1) = 5(x + 5)$;
г) $5(2x - 1) = 8(x + 5)$.
3. а) $5(x - 2) - 8(x + 3) = 3(x + 4) - 2(x + 2)$;
б) $3(2x - 3) - 5(x + 1) = 4(x + 3) - 2(x + 8)$;
в) $4(2x - 5) - 8(x - 2) = 3(x + 6) - 4(x + 3)$;
г) $7(2x - 3) - 5(x + 3) = 3(4x - 2) - 2(x + 8)$.
4. а) $\frac{2x+3}{6} - \frac{3x-1}{2} = 1 - \frac{2x-5}{3}$;
б) $\frac{x+3}{4} - \frac{x+5}{8} = 2 - \frac{3x+1}{2}$;
в) $\frac{2x-1}{3} - \frac{2x+9}{12} = \frac{3x-1}{2} - \frac{x+5}{6}$;
г) $\frac{3x+5}{8} - \frac{3x-7}{2} = \frac{2x+3}{4} - \frac{x+9}{8}$.
5. Сборът на две числа е 192. Ако разделим едното число на 6, а другото на 18, ще получим равни частни. Намерете числата.

6. Стопанин гледа зайци и кокошки. Краката на всички животни са 220, а главите им са 70. Колко зайци и колко кокошки гледа стопанинът?
7. Разстоянието между градовете A и B е 300 km. В едно и също време от A и B един срещу друг тръгнали автобус и камион и се срещнали след 2 часа. Намерете скоростите им, ако скоростта на автобуса е с 30 km/h по-висока от тази на камиона.
8. Един работник може да свърши определена работа за 9 часа, а друг – за 6 часа. Първият работник започнал работата в 7 часá сутринта, а вторият – 1 час след него. Намерете в колко часá двамата работници са свършили цялата работа.
9. Една тръба може да напълни басейн за 12 часа, а друга – 2 пъти по-бързо. Първата тръба работила сама 3 часа, а след това отворили и втората. За колко часа е напълнен басейнът?
10. За обзавеждането на един хотел закупили дивани и 5 пъти повече легла за обща сума 48 000 лв. Намерете колко дивана и колко легла са закупили, ако цената на един диван е 960 лв., а на едно легло е 30% от цената на дивана.

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “УРАВНЕНИЯ”

1. Коренът на уравнението $3(x - 1) = 2x$ е:
A) 3;
B) -3;
C) 2;
D) -2.
 2. Коренът на уравнението $9(x - 3) - 7(x - 1) = 8(x - 2)$ е:
A) $\frac{2}{3}$;
B) $-\frac{2}{3}$;
C) $1\frac{1}{2}$;
D) $-1\frac{1}{2}$.
 3. Числото -2 е корен на уравнението:
A) $2(x - 1) = x - 2$;
B) $\frac{x+1}{6} - \frac{x}{2} = \frac{x}{3}$;
C) $2(x - 1) - 3(x - 1) = 8$;
D) $\frac{7-x}{3} - 2 = \frac{x+6}{4}$.
 4. Числото 3 не е корен на уравнението:
A) $3x - 2 = 10 - x$;
B) $4(x + 2) - 5x = 2(x - 2)$;
C) $5(x + 1) - 3(x - 1) = 5x - 1$;
D) $\frac{4(x-1)}{5} - \frac{x+3}{3} = \frac{x}{5} - 1$.
 5. Един работник може сам да свърши определена работа за 5 часа, а друг работник – за 10 часа. Ако работят заедно, двамата работници ще свършат същата работа за:
A) 2 h 30 min;
B) 2 h 18 min;
C) 3 h 10 min;
D) 3 h 20 min.
 6. На рожден ден на Иван присъствали два пъти повече момчета, отколкото момичета. Три момчета си тръгнали по-рано и броят на момчетата и момичетата се изравнил. На рождения ден на Иван първоначално момчета са били:
A) 8;
B) 10;
C) 6;
D) 7.
 7. Намиших едно число, разделих го с -5 и към полученото частно прибавих 10. Полученият сбор умножих с 5 и получих числото 5. Намиленото число е:
A) 30;
B) 35;
C) 40;
D) 45.
 8. Ани и Иво имали общо 50 лв. Иво дал на Ани 6 лв. и парите им станали поравно. Намерете:
а) колко лева е имала Ани;
б) колко лева е имал Иво първоначално?
 9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на уравнението със същия корен.
- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| (A) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1$ | (1) $x + 1 = 2(x - 1)$ |
| | |
| (B) $7 - 4(x - 2) = x$ | (2) $x + -2 = 4$ |
| | |
| (B) $3(x - 2) = 2(x + 1)$ | (3) $x - (-1)^2 = 3^2 - 2^2$ |
| | |
| (B) $5x - 7 = 4x + 1$ | (4) $5x - 7 = 4x + 1$ |
| | |
10. Пресметнете числената стойност на израза $A = 4x^2 : |y| + y^2 : |x|$, ако $3(x + 2) = 2(x + 2,5)$ и $\frac{y-1}{3} = \frac{y-2}{4}$.

ЗАДАЧИ

1. Намерете неизвестния член x в пропорцията:
 - а) $\frac{x}{7} = \frac{21}{28}$;
 - б) $\frac{5}{x} = \frac{30}{20}$;
 - в) $\frac{5}{9} = \frac{x}{36}$;
 - г) $\frac{7}{11} = \frac{21}{x}$.
2. Намерете четвъртата пропорционална x в пропорцията:
 - а) $x : 5 = 3 : 10$;
 - б) $7 : x = 3,5 : 2$;
 - в) $5,6 : 2 = x : 3$;
 - г) $\frac{1}{7} : \frac{3}{7} = 5 : x$.
3. Определете x и y от пропорциите:
 - а) $\frac{x}{6} = \frac{2}{3}$ и $\frac{x}{8} = \frac{y}{9}$;
 - б) $\frac{8}{x} = \frac{4}{3}$ и $\frac{5}{x} = \frac{y}{12}$.
4. Определете x и y от пропорциите:
 - а) $\frac{3}{7} = \frac{x+1}{21}$ и $\frac{2}{y} = \frac{4}{x}$;
 - б) $\frac{5}{7} = \frac{10}{x+8}$ и $\frac{y}{x} = \frac{x}{2}$.
5. Страните на правоъгълен триъгълник се отнасят както $5 : 12 : 13$. Периметърът му е 60 см. Намерете страните и лицето на триъгълника.
6. Награда от 2800 лв. трябва да се разпредели между четирима служители в отношение $2 : 3 : 4 : 5$. Колко лева ще получи всеки служител?
7. В склад броят на детските, мъжките и дамските обувки е в отношение $5 : 4 : 6$. Мъжките обувки са 600 чифта. Намерете колко чифта обувки общо има в склада и колко от тях са дамски.
8. В едно училище броят на учениците, които тренират футбол, баскетбол и плуване, е в отношение $7 : 5 : 3$. Футболистите са с 80 повече от плувците. Намерете броя на учениците, които тренират съответно футбол, баскетбол и плуване.
9. Дълчините на страните на един четириъгълник се отнасят както $4 : 7 : 9 : 10$. Намерете страните на друг четириъгълник, ако те са пропорционални на дадения, и ако:
 - а) периметърът му е 120 см;
 - б) най-малката му страна е 12 см;
 - в) разликата между най-голямата и най-малката му страна е 36 см;
 - г) сборът от най-малката и най-голямата му страна е с 60 см по-малък от събирането на другите две страни.
10. Правилна четириъгълна пирамида има основен ръб b , височина h и обем V . Ако основният ръб се намали 2 пъти, а височината на пирамидата се намали 3 пъти, обемът на получената пирамида е V_1 . Намерете отношението на V към V_1 .
11. Три брата купили имот за 21443 евро. Сумите, които платили първи-ят и вторият, се отнасят както $3 : 4$, а сумите, платени от втория и третия, са в отношение $3 : 5$. По колко евро е платил всеки от братята?

ТЕСТ ВЪРХУ ТЕМАТА “ПРОПОРЦИИ”

1. Неизвестното x от пропорцията $\frac{6}{x} = \frac{4}{5}$ е:
A) 4,8;
B) 3,6;
C) 6,5;
D) 7,5.
2. Ако $12a = 15b$, то отношението $a : b$ е:
A) $\frac{4}{5}$;
B) $\frac{5}{3}$;
C) $\frac{4}{3}$;
D) $\frac{5}{4}$.
3. Като определите x от пропорцията $x : 6 = 5 : 2$, то y от пропорцията $30 : x = y : 2$ е:
A) 1;
B) 4;
C) 15;
D) 2.
4. Годините на Петър се отнасят към тези на Асен както $3 : 2$. Асен е на 12 години. Годините на Петър са:
A) 8;
B) 18;
C) 16;
D) 15.
5. В едно училище има общо 1560 ученици. Броят на изучаващите английски, френски и немски език е в отношение $7 : 3 : 2$. Учениците, които изучават френски език, са:
A) 260;
B) 390;
6. На карта с мащаб $1 : 3\,000\,000$ разстоянието между два града е 12,5 см. Действителното разстояние между тях в километри е:
A) 370;
B) 375;
C) 365;
D) 360.
7. Ако $a : b = 4 : 3$, то стойността на израза $A = \frac{6a+2b}{3a-2b}$ е:
A) 3;
B) 4;
C) 5;
D) 6.
8. За страните a , b и c на триъгълник е вярно, че $a : b = 2 : 3$ и $b : c = 4 : 5$. Ако средната по големина страна е 24 см, намерете:
 - а) дължината на най-малката страна в сантиметри;
 - б) периметъра на триъгълника в сантиметри.
9. В автосалон броят на белите, черните и червените коли е в отношение $7 : 4 : 6$. Белите коли са с 36 повече от черните. Намерете броя на:
 - а) черните коли;
 - б) червените коли;
 - в) всички коли.
10. Дадени са пропорциите $\frac{x}{9} = \frac{2}{3}$; $\frac{5}{x} = \frac{y}{12}$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{z}$. Намерете сума $x + y + z$.

ЗАДАЧА 1 Стойността на израза $18 - 12 : 2 + 3 \cdot (-4)$ е:

- A) -9; B) 15; C) 0; D) 24.

Решение: $18 - 12 : 2 + 3 \cdot (-4) = 18 - 6 - 12 = 18 - 18 = 0$

Отг.: В)

ЗАДАЧА 2 Стойността на израза $3 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-5)^2$ е:

- A) 74; B) -26; C) 26; D) -74.

Решение: $3 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-5)^2 = 3 \cdot (-8) - 2 \cdot 25 = -24 - 50 = -74$

Отг.: Г)

ЗАДАЧА 3 Правилна четириъгълна пирамида има периметър на основата 32 см и височина $h = 6$ см. Обемът V на пирамидата (в cm^3) е:

- A) 192; B) 384; C) 256; D) 128.

Решение: Основата е квадрат с ръб b .

$$P = 4b$$

$$B = b^2$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

$$4b = 32$$

$$B = 8^2$$

$$V = \frac{64 \cdot 6}{3} = 128 \text{ cm}^3$$

$$b = 8 \text{ см}$$

$$B = 64 \text{ cm}^2$$

Отг.: Г)

ЗАДАЧА 4 Повърхнината на цилиндър е $400\pi \text{ см}^2$. Ако радиусът му е $r = 10 \text{ см}$, височината на цилиндъра в сантиметри е:

- A) 20; B) 10; C) 15; D) 30.

Решение:

$$B = \pi r^2$$

$$S_1 = S + 2B$$

$$S = 2\pi r \cdot h$$

$$B = \pi \cdot 10^2$$

$$400\pi = S + 200\pi$$

$$200\pi = 20\pi \cdot h$$

$$B = 100\pi \text{ см}^2$$

$$S = 200\pi \text{ см}^2$$

$$h = 10 \text{ см}$$

Отг.: Б)

ЗАДАЧА 5

Стойността на израза $\frac{3^{11} \cdot 25^{-4}}{(-9)^5 \cdot 125^{-3}}$ е:

- A) -15; B) 15; C) -30; D) 30.

Решение:
$$\frac{3^{11} \cdot 25^{-4}}{(-9)^5 \cdot 125^{-3}} = \frac{3^{11} \cdot 125^3}{-9^5 \cdot 25^4} = -\frac{3^{11} \cdot (5^3)^3}{(3^2)^5 \cdot (5^2)^4} = -\frac{3^{11} \cdot 5^9}{3^{10} \cdot 5^8} = -3 \cdot 5 = -15$$

Отг.: А)

ЗАДАЧА 6

Периметърът на четириъгълник е 76 см, а страните му се отнасят както $3 : 4 : 5 : 7$. Разликата между най-голямата и най-малката страна на четириъгълника в сантиметри е:

- A) 10; B) 12; C) 14; D) 16.

Решение: $a : b : c : d = 3 : 4 : 5 : 7 \rightarrow a = 3x, b = 4x, c = 5x, d = 7x$

$$P = a + b + c + d, 19x = 76, x = 4$$

$$d - a = 7x - 3x = 4x = 4 \cdot 4 = 16 \text{ см}$$

Отг.: Г)

ЗАДАЧА 7 Числата 2, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 14, 23, 36, 102, 106 са написани на отделни еднакви картончета, които са разбъркани. По случаен начин е изтеглено едно картонче. Вероятността върху него да е написано число, което се дели на 3, е:

- А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{4}$; Г) $\frac{5}{12}$.

Решение:

Броят на всички числа (картончета) е 12, т.е. всички възможности са $n = 12$.

На 4 от картончетата е написано число, което се дели на 3 (6, 9, 36, 102), $m = 4$.

Търсената вероятност е $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Отг.: Б)

ЗАДАЧА 8 За едно училище закупили 210 маси и 2 пъти повече столове за 48 720 лв.

Цената на една маса е с 52 лв. по-висока от тази на един стол. Намерете:

- а) цената на един стол; б) цената на една маса.

Решение: Цената на един стол е x лв. (420 стола)

Цената на една маса е $x + 52$ лв. (210 маси)

$$210 \cdot (x + 52) + 420 \cdot x = 48720 \quad | : 210$$

$$x + 52 + 2x = 232$$

$$3x = 180$$

$$x = 60$$

$$1 \text{ стол} - 60 \text{ лв.}, 1 \text{ маса} - 112 \text{ лв.}$$

Отг.: а) 60 лв.; б) 112 лв.

ЗАДАЧА 9 Пресметнете числената стойност на израза $A = -2x^3 - 3x^2 + 5$, ако:

- а) $x = -1$; б) $x = -2$; в) $x = \frac{1}{2}$.

Решение:

а) $A = -2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 = -2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 5 = 2 - 3 + 5 = 4$

б) $A = -2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 5 = -2 \cdot (-8) - 3 \cdot 4 + 5 = 16 - 12 + 5 = 9$

в) $A = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = -2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 5 = -1 + 5 = 4$

Отг.: а) 4; б) 9; в) 4

ЗАДАЧА 10 Правоъгълен триъгълник с катети 5 см и 12 см е завъртян около по-големия си катет. Намерете обема и повърхнината на полученото тяло.

Решение: Полученото тяло е конус с $r = 5$ см и $h = 12$ см.

Намираме по Питагоровата теорема

$$l^2 = r^2 + h^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$l = 13 \text{ см}$$

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$S_1 = S + B = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 = 65\pi + 25\pi = 90\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Отг.: $V = 100\pi \text{ (cm}^3\text{)}, S_1 = 90\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 1

1. Стойността на израза $-5 \cdot (-3) - (-4)^2 - 1 - 8$ е:
A) -7 ; **B)** 23 ; **C)** 7 ; **D)** -10 .
2. Ако $\frac{x}{27} = \frac{5}{9}$ и $\frac{x}{12} = \frac{50}{y}$, стойността на $y - 2x$ е:
A) 15 ; **B)** 40 ; **C)** 30 ; **D)** 10 .
3. Стойността на израза $\frac{81 \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^6}{(-4)^3 \cdot 27 \cdot 3^7}$ е:
A) 2 ; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $-\frac{1}{2}$; **D)** -2 .
4. Основите на права призма и правилна пирамида са равнолицеви. Височината на пирамидата е два пъти по-голяма от височината на призмата. Обемът на призмата е 66 dm^3 . Обемът на пирамидата в кубически дециметри е:
A) 44 ;
B) 132 ;
C) 33 ;
D) 22 .
5. Обемът на полукълбо с диаметър 6 dm в кубически дециметри е:
A) 36π ;
B) 54π ;
C) 18π ;
D) 72π .
6. Три числа имат следните свойства: $I : II = 5 : 2$ и $II : III = 3 : 4$. Ако най-голямото число е 600 , най малкото е:
A) 40 ;
B) 240 ;
C) 160 ;
D) 320 .
7. Буквите на думата „ПОДМНОЖЕСТВО“ са написани на отделни еднакви картончета, които са разбъркани. По случаен начин е изтеглено едно картонче. Вероятността върху него да е написана съгласна буква е:
A) $\frac{2}{3}$; **B)** $\frac{1}{3}$; **C)** $\frac{3}{4}$; **D)** $\frac{7}{12}$.
8. В правоъгълна координатна система Oxy (1 деление = 1 м. ед.) постройте точките $A(-4; 0)$, $B(4; -6)$, $C(4; 0)$ и $D(0; 3)$. Намерете:
 а) лицето на $ABCD$ в квадратни мерни единици;
 б) обиколката на $ABCD$ в мерни единици.
9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на уравнението със същия корен.

(A) $9(x + 2) = 4(x + 3)$
(Б) $\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = 1 - \frac{x}{30}$
(В) $7 - 2(x + 1,5) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$
(1) $3x - 2 = x - 4,4$ (2) $4(x+1,5)=3(x-1)$ (3) $\frac{x+1,5}{5} = \frac{x+1}{4}$ (4) $\frac{x-5}{2} = \frac{x}{3}$
10. Опростете израза
 $A = (-8x^3y^4)^2 \cdot (-2xy^2)^{-3}$ ($x \neq 0, y \neq 0$)
 и пресметнете числената му стойност при
 $x = (-2)^3 \cdot 4^{-3}$ и $y = 3^2 - (-1)^6$.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ № 2

1. Стойността на израза

$$-8 \div 2 - 7 \cdot 2 \frac{1}{7} - 8 \div \left(-\frac{1}{3}\right) \text{ е:}$$

A) -43; B) -35; C) 5; D) -5.

2. x и y участват в пропорциите $\frac{5}{x} = \frac{2}{1}$

и $y : 3 = 3 : 4$. Разликата $x - y$ е:

- A) -1;
B) 1;
C) 0,5;
D) 0,25.

3. За $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ стойността на израза

$$\frac{x^5 \cdot x^4}{(-x^5)^2} \text{ е:}$$

A) 8; B) $\frac{1}{8}$; C) $-\frac{1}{8}$; D) -8.

4. Права призма има околнен ръб 12 см и основа равнобедрен правоъгълен триъгълник с катет 4 см. Обемът на призмата в кубически сантиметри е:

A) 64; B) 192; C) 96; D) 86.

5. Цилиндър има обем V см³. В него е издълбан конус със същия радиус и

височина, която е $\frac{1}{3}$ от височината на цилиндъра. Обемът на полученото тяло в кубически сантиметри е:

A) $\frac{1}{9}V$; B) $\frac{1}{3}V$; C) $\frac{2}{3}V$; D) $\frac{8}{9}V$.

6. Прав кръгов конус има диаметър на основата d и височина h , като $d : h = 3 : 2$. Ако $d + h = 20$ см, обемът на конуса (в см³) е:

- A) 384π ;
B) 142π ;
C) 24π ;
D) 96π .

7. Паралелепипедът на чертежа е съставен от 16 еднакви малки кубчета.

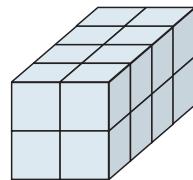
Всички стени на паралелепипеда са оцветени. След това кубчетата са размесени. Вероятността произволно избрано кубче да има три оцветени страни е:

A) $\frac{1}{2}$;

B) $\frac{1}{3}$;

C) $\frac{3}{8}$;

D) $\frac{1}{4}$.



8. В правоъгълна координатна система Oxy (1 деление = 1 м. ед.) постройте точките $A(-6; 0)$, $B(-2; -3)$, $C(3; 9)$ и $D(-6; 9)$. Намерете:

- a) лицето на $ABCD$ (в кв. м. ед.);
b) обиколката на $ABCD$ (в м. ед.).

9. В лявата колона на таблицата за отговори е написана буквата на уравнението. Срещу нея, в дясната колона, запишете номера на уравнението със същия корен.

(A) $7(x+2) = 2(x-3)$

(B) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1 - \frac{x}{6}$

(B) $8 - 2(x+2) = 3(x-2)$

(1) $\frac{3x}{4} = 1 + \frac{x}{2}$

(2) $3(x-1) = 2x$

(3) $3x + 5 = x - 3$

(4) $4(x-1,5) = x$

10. Опростете израза

$$A = (4x^2y^4)^2 \cdot (-2xy^2)^{-3} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

и пресметнете числената му стойност при

$$x = \frac{2^6 - 2^7}{2^7 - 2^8} \quad \text{и} \quad y = 2 : \left(-\frac{1}{3}\right) + 3^{15} : 9^7.$$

ОТГОВОРИ

ВХОДНО НИВО

1. Действия с дроби

1. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{4}{9}$; в) 4,8; г) 5;
2. а) $A = 1$; б) $B = \frac{1}{3}$;
3. в) $C = 6$;
4. а) 3,9; б) 5,3;
5. а) 5; б) 5;
6. 0,96 лв.

2. Част от число. Процент

1. а) 40; б) 280;
2. а) 45 задачи; б) 9 задачи;
3. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$;
4. 40;
5. а) 2500 лв.; б) 1625 лв.;
6. а) 12; б) 120;
7. в) 5,2; г) $3\frac{1}{3}$;
8. костюми – 20%; палта – 25%;
9. а) 54,4; б) 45,44.

3. Геометрични фигури

1. 81 cm^2 ;
2. 18 см;
3. $68,45 \text{ cm}^2$;
4. $87,48 \text{ cm}^2$;
5. $a = 22,5 \text{ cm}$; $h = 15 \text{ cm}$;
 $S = 337,5 \text{ cm}^2$;
6. $h = 14 \text{ cm}$;
7. 18 cm^2 ;
8. 18 см;
9. 9 см

5. Входно ниво

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	Б	2
3	В	2
4	А	3
5	Б	3
6	В	3
7	А	3
Задача 8		
а)	96	3
б)	896	3
Задача 9		
а)	6400	2
б)	9600	2
в)	64	2
Задача 10		
а)	$6; 4\frac{2}{7}$	10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	Б	2
2	В	2
3	А	2
4	Г	3
5	Г	3
6	А	3
7	В	3
Задача 8		
а)	21	3
б)	84	3
Задача 9		
а)	4	2
б)	148	2
в)	0,12	2
Задача 10		
а)	57,2; б) 143	10

ТЕМА 1. ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ И ТЕЛА

7. Окръжност. Дължина на окръжност. Упражнение

1. а) 18,84 см; б) 9,42 см;
в) 17,58 см;
2. а) 21,98 см; б) 13,82 см;
в) 15,7 см;
3. а) 5 см; б) 2,4 см;
в) 3 см;
4. а) 25,12 см; б) 12,56 см;
5. $\approx 40054 \text{ km}$.

8. Дължина на окръжност. Практически задачи. Упражнение

1. 2,51 м;
2. 49,68 лв.;
3. 12,56 м;
4. 85;
5. 82,9 km/h.

9. Кръг. Лице на кръг

1. а) $153,86 \text{ cm}^2$; б) $\approx 4,52 \text{ cm}^2$;
в) $20\frac{4}{11} \text{ cm}^2$;
2. а) $200,96 \text{ cm}^2$;
б) $\approx 26,41 \text{ dm}^2$; в) $\approx 0,28 \text{ m}^2$;
3. $113,04 \text{ cm}^2$;
4. $45,14 \text{ лв.}$;
5. а) $113,04 \text{ cm}^2$; б) $254,34 \text{ cm}^2$;
в) $1384,74 \text{ cm}^2$.

10. Лице на кръг. Упражнение

1. 9 пъти;
2. а) $31,12 \text{ kv. m. ед.}$;
б) $22,88 \text{ kv. m. ед.}$;
3. а) $706,5 \text{ m}^2$;
4. а) $c = 39,4 \text{ m. ед.}$;
 $S = 44,86 \text{ kv. m. ед.}$;
б) $c = 27,98 \text{ m. ед.}$;
 $S = 22,43 \text{ kv. m. ед.}$;
5. а) $9498,5 \text{ cm}^2$;
6. 2826 cm^2 .

11. Многоъгълник. Правилен многоъгълник

1. а) $22,4 \text{ cm}$;
2. а) $n = 8$;
3. а) $2,8 \text{ cm}$;
- б) $12,3 \text{ см.}$

12. Лице на многоъгълник

1. $P = 52 \text{ cm}$;
2. $B = 208 \text{ cm}^2$;
3. $b = 11,6 \text{ cm}$, $a = 8 \text{ cm}$;
4. $n = 9$, $B = 208,8 \text{ cm}^2$;
5. $P = 50 \text{ cm}$, $n = 20$;
6. $B = 126 \text{ cm}^2$;
7. $P = 72 \text{ см.}$

13. Призма. Правилна призма

1. а) не;
2. б) да;
3. в) не;
4. г) не;

Правилна призма	Брой ръбове		
	основни	околни	общо
триъгълна	6	3	9
четириъгълна	8	4	12
петоъгълна	10	5	15
шестоъгълна	12	6	18

5. 168 см.

14. Права призма. Упражнение

2. а) 32 cm ;
3. 64 cm^2 ;
4. б) 88 cm^2 ;
5. 35 cm ;
6. $73,5 \text{ cm}^2$;
7. а) 60 cm ;
8. б) 261 cm^2 ;
9. в) 204 см.

15. Лице на повърхнина на права призма

2. $S = 180 \text{ cm}^2$;
3. $S = 480 \text{ cm}^2$;
4. $S_1 = 528 \text{ cm}^2$;
5. $S = 160 \text{ cm}^2$;
6. $S_1 = 210 \text{ cm}^2$.

16. Лице на повърхнина на права призма. Упражнение

1. $S_1 = 1920 \text{ cm}^2$;
2. $b = 14 \text{ cm}$, $l = 20 \text{ cm}$;
3. $b = 5 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$;
4. а) $S_1 = 2528,4 \text{ cm}^2$;
5. б) 276 см.

17. Обем на права призма

1. 168 cm^3 ;
2. 672 cm^3 ;

3. 1694 cm^3 ; 4. 6000 литра.

18. Обем и повърхнина на права призма. Упражнение

1. $78,75 \text{ cm}^3$; 2. 144 cm^3 ;
3. 5 cm;
4. $h = 13 \text{ cm}$; $S = 416 \text{ cm}^2$;
 $S_1 = 544 \text{ cm}^2$;
5. а) 6 cm, 12 cm; б) $619,2 \text{ cm}^2$;
6. $26,88 \text{ m}^3$.

19. Пирамида. Правилна пирамида

1. 21 cm; 2. 46,8 cm;
3. 195 cm; 4. 31 cm.

20. Правилна пирамида.

Упражнение

2. $31,5 \text{ cm}^2$; 3. 72 cm;
4. 128 cm.

21. Лице на повърхнина на правилна пирамида

1. $S = 78 \text{ cm}^2$; $S_1 = 124,8 \text{ cm}^2$;
2. 576 cm^2 ;
3. $S = 276 \text{ cm}^2$; $S_1 = 496,8 \text{ cm}^2$;
4. 3600.

22. Лице на повърхнина на правилна пирамида.

Упражнение

1. 1296 cm^2 ; 2. $40,2 \text{ cm}^2$;
3. $b = 17,3 \text{ cm}$; $S_1 = 467,1 \text{ cm}^2$;
4. $b = 11,5 \text{ cm}$; $S_1 = 1242 \text{ cm}^2$;

b	k	P	B	S	S_1
6	5	24	36	60	96
10	13	40	100	260	360
8	5	32	64	80	144

24. Обем на правилна пирамида

1. 312 cm^3 ;
2. 51 cm^2 ;
3. а) $34,6 \text{ cm}^3$;
 б) $309,75 \text{ cm}^3$;
 в) $636,3 \text{ cm}^3$;
4. $b = 17 \text{ cm}$;
 $S = 331,5 \text{ cm}^2$;
 $S_1 = 459 \text{ cm}^2$.
5. $b = 5,8 \text{ cm}$;
 $S = 226,2 \text{ cm}^2$;
 $S_1 = 313,2 \text{ cm}^2$.

25. Обем и повърхнина на правилна пирамида.

Упражнение

1. $b = 6 \text{ cm}$; $S = 60 \text{ cm}^2$;
 $S_1 = 96 \text{ cm}^2$;
2. $b = 4,6 \text{ cm}$; $S_1 = 124,2 \text{ cm}^2$;
 $V = 55,2 \text{ cm}^3$;
3. $b = 11,6 \text{ cm}$; $S = 290 \text{ cm}^2$;
 $h = 6 \text{ cm}$;
4. $b = 10,4 \text{ cm}$; $k = 5 \text{ cm}$;
 $S = 78 \text{ cm}^2$.

26. Обобщение на темата “Геометрични фигури и ръбести тела”

1.

	а)	б)	в)	г)
b	4,6	3,5	5,8	4
a	4	3	5	3,5
P	27,6	21	34,8	24
B	55,2	31,5	87	42
h	10	6	5	10
S	276	126	174	240
S_1	386,4	189	348	324
V	552	189	435	420
Σ	115,2	78	99,6	108

2. $V = 336 \text{ cm}^3$; $S_1 = 360 \text{ cm}^2$.

27. Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	Б	2
3	А	2
4	Г	3
5	В	3
6	А	3
7	В	3

Задача 8

- | | | |
|----|--------------------|---|
| а) | 72 cm^3 | 3 |
| б) | 288 cm^3 | 3 |

Задача 9

- | | | |
|----|--------------------|---|
| а) | 6 cm | 2 |
| б) | 312 cm^2 | 2 |
| в) | 360 cm^3 | 2 |

Задача 10

- | | |
|--|----|
| $V = 336 \text{ cm}^3$,
$S_1 = 336 \text{ cm}^2$ | 10 |
|--|----|

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	Г	2
4	Г	3
5	А	3
6	Г	3
7	Б	3

Задача 8		
a)	240 cm^2	3
б)	324 cm^2	3

Задача 9		
a)	12 cm	2
б)	240 cm^2	2
в)	300 cm^2	2

Задача 10		
	160 cm^2	10

28. Прав кръгов цилиндър

1. а) $r = 5 \text{ cm}$; $h = 7 \text{ cm}$;
- б) $r = 7 \text{ cm}$; $h = 5 \text{ cm}$.

29. Лице на повърхнина на цилиндър

2. а) $36\pi \text{ cm}^2$;
- б) $54\pi \text{ cm}^2$;
3. $S = 48\pi \text{ cm}^2$; $S_1 = 66\pi \text{ cm}^2$;
4. $266\pi \text{ cm}^2$;

30. Обем на цилиндър

1. $490\pi \text{ cm}^3 = 1538,6 \text{ dm}^3$;
2. $200\pi \text{ cm}^3$;
3. $V = 45\pi \text{ cm}^3$; $S = 30\pi \text{ cm}^2$;
 $S_1 = 48\pi \text{ cm}^2$;
4. $S_1 = 80\pi \text{ cm}^2$; $V = 96\pi \text{ cm}^3$;
5. $S = 100\pi \text{ cm}^2$; $V = 250\pi \text{ cm}^3$;
6. $12,7 \text{ cm}$;

r (cm)	B (cm^2)	h (cm)	V (cm^3)
3	9π	2	18π
4	16π	5	80π
5	25π	4	100π
6	36π	5	180π

$$8. \approx 75,6 \text{ kg}$$

31. Прав кръгов конус

1. а) $r = 4 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$;
 $l = 5 \text{ cm}$;
- б) $r = 3 \text{ cm}$; $h = 4 \text{ cm}$;
 $l = 5 \text{ cm}$;
2. а) $r = 12 \text{ cm}$; $h = 5 \text{ cm}$;
 $l = 13 \text{ cm}$;

- 6) $r = 5 \text{ cm}$; $h = 12 \text{ cm}$;
 $l = 13 \text{ cm}$.

32. Лице на повърхнина на прав кръгов конус

1. а) 108° ; б) 160° ; в) 60° ;
2. а) $x^\circ = 180^\circ$; б) $x^\circ = 120^\circ$
в) $x^\circ = 60^\circ$; г) $x^\circ = 108^\circ$.

33. Лице на повърхнина на прав кръгов конус.

Упражнение

1. $S_1 = 144\pi \text{ cm}^2$;
2. $S_1 = 84\pi \text{ cm}^2$;
3. $S_1 = 126\pi \text{ cm}^2$;
4. $S = 260\pi \text{ cm}^2$; $S_1 = 360\pi \text{ cm}^2$;
5. $256\pi \text{ cm}^2$; 6. $352\pi \text{ cm}^2$.

34. Обем на конус

1. $V = 120\pi \text{ cm}^3$;

	r (cm)	B (cm^2)	h (cm)	V (cm^3)
3	9π	5	15π	
5	25π	9	75π	
6	36π	8	96π	
7	49π	12	196π	

3. $h = 20 \text{ dm} = 2 \text{ m}$;

4. а) $S = 80\pi \text{ cm}^2$;
 $S_1 = 144\pi \text{ cm}^2$;
 $V = 128\pi \text{ cm}^3$;

- б) $S = 60\pi \text{ cm}^2$;
 $S_1 = 96\pi \text{ cm}^2$;
 $V = 96\pi \text{ cm}^3$;

5. $S_1 = 60\pi \text{ cm}^2$;
 $V = 66\pi \text{ cm}^3$.

35. Сфера. Лице на повърхнина на сфера

1. а) $36\pi \text{ cm}^2$; б) $576\pi \text{ cm}^2$;
в) $9\pi \text{ cm}^2$; г) $25\pi \text{ cm}^2$;
2. а) 7 cm ; б) 8 m ;
в) 5 dm ; г) 5 m ;
3. а) 2 m ; б) 3 cm ;
4. а) 66 cm ; б) 26 cm ;
в) 21 dm ; г) 18 m .

36. Кълбо. Обем на кълбо

1. а) $288\pi \text{ cm}^3$;
б) $\frac{500}{3}\pi \text{ cm}^3$;
2. а) $972\pi \text{ cm}^3$;
б) $2304\pi \text{ cm}^3$;
3. а) $144\pi \text{ cm}^2$; $288\pi \text{ cm}^3$;
б) $324\pi \text{ cm}^2$; $972\pi \text{ cm}^3$.

37. Повърхнина и обем на кълбо. Упражнение

1. 3 cm;
2. $259992 \text{ g} \approx 260 \text{ kg}$;
3. а) V се увеличава 27 пъти;
б) V се намалява 8 пъти;
4. $900\pi \text{ cm}^2$;
5. $180\pi \text{ cm}^2$; $684\pi \text{ cm}^3$;
6. $S_t = 87\pi \text{ cm}^2$; $V_t = 108\pi \text{ cm}^3$.

38. Валчести тела.

Практически задачи.

Упражнение

1. $10048 \text{ g} \approx 10 \text{ kg}$;
2. а) $1020,5 \text{ cm}^3$;
б) $48,67 \text{ m}^2$;
3. 6154,4 литра;
4. $\approx 192,5 \text{ kg}$;
5. 1 m; 6. 250 m.

39. Обобщение на темата “Валчести тела”

1. 15 dm^3 ;
2. $S = 33\pi \text{ cm}^2$; $V = 30\pi \text{ cm}^3$;
3. 3 cm^3 ;
4. $S = 76\pi \text{ cm}^2$; $V = 96\pi \text{ cm}^3$;
5. $1469,52 \text{ cm}^2$;
6. S ще се увеличи с $288\pi \text{ cm}^2$;
 V ще се увеличи с $936\pi \text{ cm}^3$.

40. Тест върху темата “Валчести тела”

Задача №	Отговор	Точки
1	Б	2
2	Б	2
3	А	2
4	Б	3
5	В	3
6	Г	3
7	Г	3
Задача 8		
a)	20	3
б)	96π	3
Задача 9		
a)	10	2
б)	150π	2
в)	100π	2
Задача 10		
	$S_t = 115\pi \text{ (cm}^2\text{)}$	
	$V = 183\frac{1}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$	10

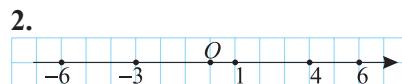
ТЕМА 2. РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

41. Положителни и отрицателни числа. Множество на рационалните числа

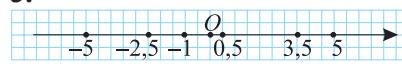
1. а) $+20$; -3 ;
б) $+100$; -50 ;
в) $+2,5$; $-5,5$;
г) $+30$; -10 ;
д) $+2120$; -1752 ;
2. а) 0; б) -39 ; в) $+1535$.

42. Изобразяване на рационални числа върху числовата ос

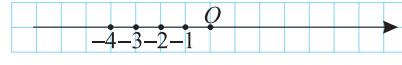
1. $A \rightarrow 2$; $B \rightarrow -5$; $C \rightarrow -3$;
 $D \rightarrow 3$; $E \rightarrow 8$; $F \rightarrow -1$;



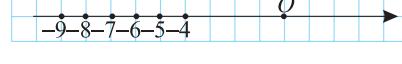
3.



4.

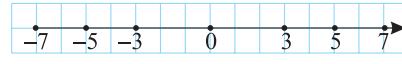


5.



43. Противоположни числа. Абсолютна стойност (модул) на рационално число

1.



2. а) 7 ; 10 ; $0,5$; $3,7$; $\frac{1}{10}$;
б) -8 ; -100 ; $-0,5$; $-7,3$; $-\frac{1}{5}$;

3. а) 7 ; $2,9$; $\frac{3}{7}$; $5\frac{2}{9}$;
б) 8 ; $3,6$; $\frac{2}{9}$; $5\frac{1}{3}$;

4. 4 ; $2,5$; 0 ; $\frac{2}{3}$; $7\frac{1}{7}$.

44. Модул на рационални числа. Упражнение



2.

a	-7	-0,6	0	2,9	$3\frac{1}{9}$	1002
$-a$	7	0,6	0	-2,9	$-3\frac{1}{9}$	-1002
$ a $	7	0,6	0	2,9	$3\frac{1}{9}$	1002
$ -a $	7	0,6	0	2,9	$3\frac{1}{9}$	1002

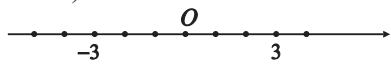
3. а) 16; б) 23,2;
в) 2; г) 3;

4. а) 8; 10; 7,5; б) $7\frac{1}{3}$;
в) 3; 7; 2; $1\frac{2}{3}$;

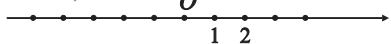
5. а) $A = 3$; $B = 9$;

б) $A = 2\frac{1}{2}$; $B = 5$;

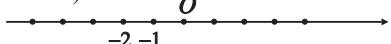
6. а)



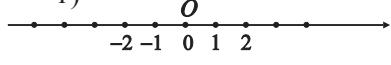
б)



в)



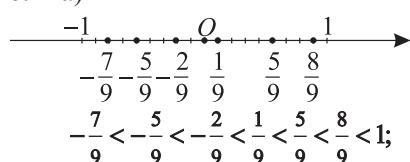
г)



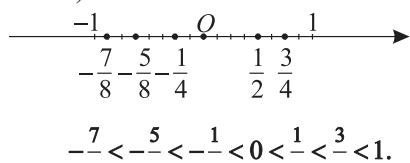
45. Сравняване на рационални числа

1. а) $2 < 2$; б) $5 < 5$;
в) $0 < 0$; г) $2 < 2$;
д) $-1 < -3 < -1$;
е) $-3 < -6 < -3$;
2. а) $-7 < 5$; б) $-4 < 5$;
в) $1 > -2$; г) $5 > -4$;
д) $1 > -7$; е) $-7 < -2$;
3. а) $-102 < 13$;
б) $-21 < 0$;
в) $-27,5 > -33,3$;
г) $-\frac{1}{3} > -7$;
д) $0 > -10,5$;
е) $18 > -18$;
4. а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;
б) $-8 < -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1$;
в) $-6 < -5 < -4$;
г) $-9 < -8 < -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1$;
д) $0 < 1 < 2$;
5. а) $-9 < -6 < 1,7 < 3$;
б) $-6 < 1,7 < 3 < 11$;
в) $-6 < 1,7 < 3$;

6. а)



б)



- в) $-1,2; +15,2; -15,2; +1,2$;

- г) $-15; +23; -30; +38$;

2. а) $-12,5; +13,5$;

- б) $+14,2; +9$;

- в) $-4; +15$;

- г) $-4; -14$;

3. а) $-10,3$; б) $+40,5$;

- в) -24 ; г) $+2\frac{5}{6}$.

50. Събиране и изваждане на рационални числа.

Разкриване на скоби

1. а) $+21; +11$; б) $-11; -21$;

- в) $-5,5; -1,8$; г) $+1,9; +12$;

2. а) $-5; +31$; б) $-31; +5$;

- в) $+2\frac{1}{3}; +8\frac{1}{3}$;

- г) $-8\frac{1}{3}; -2\frac{1}{3}$;

3. а) $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}$; б) $-4; +9\frac{1}{2}$;

- в) $-\frac{3}{8}; -\frac{11}{15}$; г) $-\frac{1}{9}; -\frac{5}{6}$;

4. а) $-5\frac{1}{7}; +11\frac{1}{7}$;

- б) $-11\frac{1}{7}; +5\frac{1}{7}$;

- в) $8,1; 13,9$;

- г) $-13,9; -8,1$.

51. Алгебричен сбор

1. а) 3; 16; б) 12; 28;

- в) $11,3; -13,5$; г) 4; $-9,8$;

- д) $-4,7; -4,1$.

2. а) $-2; -16$; б) $-20; 8$;

- в) $6; -84$; г) $-20; -20$;

- д) 4,5; 1.

52. Алгебричен сбор.

Упражнение

1. а) $20 - 8 = 12$;

- б) $5 - 1 = 4$;

- в) $106 - 106 = 0$;

- г) $19 - 19 = 0$;

2. а) $6,4; -20,8$; б) $4\frac{1}{3}; -\frac{4}{7}$;

- в) $-2,5; -24$; г) $-\frac{1}{6}; 3\frac{1}{7}$;

3. а) $A = -29$; б) $B = 41$;

- в) $C = -2,1$; г) $D = 3\frac{6}{7}$;

4. а) $A = 39$; б) $B = -98$;

- в) $C = 22$; г) $D = -5\frac{2}{3}$.

46. Събиране на рационални числа с единакви знаци

числа с различни знаци

1. а) 0; б) 0;

2. а) $-6; +4$; б) $+7; -14$;

- в) $-13; -5,2$; г) $-5,6; -4,7$;

3. а) 0; б) -1 ; в) $+\frac{1}{2}$; г) $+6$;

4. а) $+6,5$; б) $-15,6$;

- в) $-12\frac{1}{3}$; г) $-4\frac{6}{7}$;

48. Свойства на събирането

1. а) $+4$; б) -5 ;

- в) $+3\frac{3}{11}$; г) $-1\frac{1}{2}$;

2. а) $+13; -13; -66; +5$;

- б) $22; -8; -70; -57$;

3. а) $-12,2; -9,4; 0,6; -4,7$;

- б) $-10,4; -20,5; 5,6; -10,2$;

- в) $-23\frac{1}{3}; -12\frac{4}{7}; 4\frac{2}{3}; 10\frac{1}{6}$.

49. Изваждане на рационални числа

1. а) $+7; +15; -15; -7$;

- б) $-10,3; -6,3; +6,3; +10,3$;

53. Намиране на неизвестно събирамо

1. а) $-3; 13;$ б) $13; 9;$
в) $6; 20;$ г) $-24; -11;$
2. а) $-1,4; -28,1;$
б) $2,2; 9;$
в) $21,6; -21,2.$

54. Умножение на рационални числа

1. а) $-3; -0,4;$ б) $3; 2,5;$
в) $-6; -0,7;$ г) $2,5; 3,4.$
2. а) $-35; -24;$ б) $-48; -55;$
в) $-1,8; -1,5;$ г) $-2,6; -6,4;$
3. а) $24; 44;$ б) $60; 707;$
в) $0,6; 2,4;$ г) $12,6; 17,4;$
4. а) $-1\frac{2}{3}; -2\frac{1}{3};$
б) $-1\frac{1}{7}; -7;$
в) $-2; -\frac{1}{3};$
г) $-1\frac{2}{3}; -2\frac{1}{4};$
5. а) $-0,2; \frac{7}{30};$ б) $-0,63; 0,21;$
в) $-6; 3;$ г) $-4; 3\frac{1}{14};$
6. а) $-6; 21; -1,8; -7;$
б) $12; -42; 3,6; 14;$
в) $1,2; -4,2; 0,36; 1,4;$
г) $1\frac{3}{7}; -5; \frac{3}{7}; 1\frac{2}{3}.$

55. Свойства на умножението

1. а) $-30; 28; 24; -48;$
б) $36; 1,4; 0,88; -7,2;$
2. а) $1230; 13700;$
б) $3270; 4350;$
в) $-140; -200;$
3. а) $-58; -5; 313;$
б) $-12; -435; -20;$
4. $201; -49; \frac{1}{3}; 2\frac{1}{2};$
 $-4\frac{1}{9}; -1008;$
5. а) $A > 0;$ б) $B < 0;$
в) $C > 0;$ г) $D < 0.$

56. Събиране, изваждане и умножение на рационални числа. Упражнение

1. а) $19;$ б) $5;$ в) $-2;$ г) $-6,5;$
2. а) $-17;$ б) $6;$ в) $-1,8;$ г) $-2;$
3. а) $2; -\frac{2}{3}; -8;$

б) $-1\frac{1}{15}; -0,078; 3\frac{1}{3};$

4. а) $-25;$ б) $-17;$
в) $-15,6;$ г) $-16;$
5. а) $23;$ б) $-14;$
в) $120;$ г) $44.$
6. а) $0;$ б) $0;$
в) $-2;$ г) $4.$

57. Деление на рационални числа. Свойства

1. а) $-4; -5; -7; -1;$
б) $-8,1; -4,1; -5; -1;$
в) $8; 3; 34; 21;$
г) $5,2; 1,9; 0,9; 14,9;$
2. а) $-56;$ б) $-56;$ в) $56;$
3. а) $-15; -\frac{1}{3}; -21;$
б) $12; 35; \frac{1}{6};$
в) $-\frac{1}{3}; -3; -0,7;$
г) $\frac{2}{7}; 1\frac{22}{27}; 2,7.$

58. Деление на рационални числа. Свойства.

Упражнение

1. а) $0;$ б) $5;$ в) $10;$ г) $-1;$
2. а) $1; -4; 0,8; \frac{1}{3};$
б) $2; -\frac{1}{2}; 2,5; 6;$
в) $-6; 24; -4,8; -2;$
г) $10; -40; 8; 3\frac{1}{3};$
3. а) $-7;$ б) $-7;$
в) $-28;$ г) $11;$
4. а) $2;$ б) $3;$
в) $-0,1;$ г) $-\frac{1}{13};$
5. а) $-7; -3;$ б) $-20; 8;$
в) $-3; -7;$ г) $10; \frac{8}{19}.$

59. Умножение и деление на рационални числа. Упражнение

1. а) $-3;$ б) $-21;$ в) $4;$ г) $31;$
2. а) $10; -20; 3;$
б) $0,4; -0,8; 0,12;$
в) $11; -1; 8,2;$
г) $26; 3,5; 61;$
3. а) $-19;$ б) $-2;$
в) $6;$ г) $-90.$

60. Намиране на неизвестен множител

1. а) $4; -4;$ б) $-4; 4;$
в) $0,4; -0,4;$ г) $-0,4; 0,4;$
2. а) $40; -40;$ б) $-40; 40;$
в) $\frac{3}{7}; -\frac{3}{7};$ г) $-\frac{3}{7}; \frac{3}{7};$
3. а) $21; -21;$ б) $-21; 21;$
в) $7; -7;$ г) $-7; 7;$
4. а) $1,4; -1,4;$ б) $-1,4; 1,4;$
в) $0,8; -0,8;$ г) $-0,8; 0,8;$
5. а) $0,6; -0,6;$
б) $-0,6; 0,6;$
в) $12,5; -12,5;$
г) $-12,5; 12,5;$
6. а) $21; -21;$
б) $-21; 21;$
в) $2,8; -2,8;$
г) $-2,8; 2,8;$

61. Действия с рационални числа. Упражнение

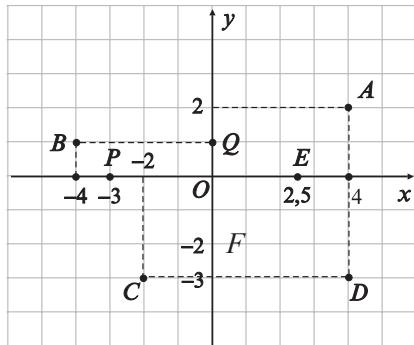
1. а) $-34;$ б) $-63;$
в) $-13,8;$ г) $-8;$
2. а) $-6; -15; -19; -1;$
б) $-10; -16; -13; 10;$
3. а) $-16\frac{1}{3};$ б) $-4\frac{1}{3};$
в) $44;$ г) $-61;$
4. а) $17;$ б) $2;$
5. а) $-17;$ б) $-11;$ в) $-8;$ г) $-6;$
6. а) $-4;$ б) $12;$ в) $9\frac{1}{3}.$

62. Декартова координатна система. Координати на точка

1. $A(4; 2);$ $B(2; 1);$
 $C(0; 2);$ $D(-3; 3);$
 $E(-4; 0);$ $F(-2; -3);$
 $P(0; -2);$ $Q(3; 0);$
2. $A(0; 2);$ $B(3; 2);$
 $M(-3; -2);$ $N(-3; 1);$
а) A и B са на равни разстояния от $Ox;$
б) M и N са на равни разстояния от $Oy;$
в) $|2| = 2$ м. ед.;
г) $|-3| = 3$ м. ед.;
3. $A \rightarrow \text{II кв.};$ $B \rightarrow \text{III кв.};$
 $C \rightarrow \text{I кв.};$ $D \rightarrow \text{II кв.};$
 $E \rightarrow \text{IV кв.};$ $F \rightarrow \text{III кв.}$

63. Декартова координатна система. Упражнение

1.

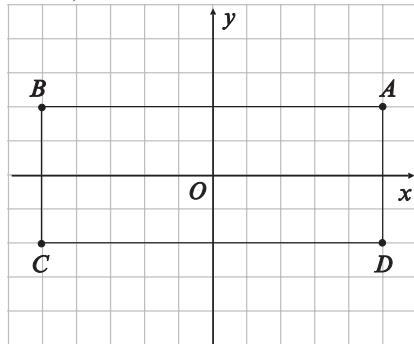


2. $P = 20$ м. ед.; $S = 21$ кв. м. ед.;
3. $S = 21$ кв. м. ед.;
4. $P = 18$ м. ед.; $S = 16$ кв. м. ед.;
5. $P = 34$ м. ед.; $S = 42$ кв. м. ед.

64. Построяване на симетрични точки на дадена точка спрямо началото и осите на координатната система.

Упражнение

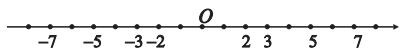
1. а) A и D , B и C – относно оста Ox , A и B , D и C – относно оста Oy ;
б) A и C , B и D .
2. а)



- б) $ABCD$ – правоъгълник
 $P = 28$ м. ед., $S = 40$ кв. м. ед.

65. Обобщение на темата “Рационални числа”

1.



$$-7 < -5 < -3 < -2 < 2 < 3 < 5 < 7;$$

2. а) $7; 3,8; \frac{1}{9}$;
б) $-7; -5\frac{1}{3}; -2; -4,3; -\frac{1}{6}$;
в) $0; -7; -5\frac{1}{3}; -2; -4,3; -\frac{1}{6}$.

- г) $0; 7; 3,8; \frac{1}{9}$;
- д) $-7; -5\frac{1}{3}; -2; -4,3$;
- е) $-4,3; -2; -\frac{1}{6}; 0; \frac{1}{9}; 3,8; 7$.
3. а) $-5; -4; 10; -31$;
б) $-9; -5,2; -1; -11$;
в) $-\frac{5}{8}; 33; \frac{2}{3}; -32\frac{1}{3}$;
4. а) $-14,8$;
б) $-11,2$;
в) $-8\frac{19}{30}$;
г) $-8\frac{61}{70}$.

66. Обобщение на темата “Рационални числа”.

Продължение

1. 5; 1; -3; -7; -11;
а) -6;
б) 8;
в) -15;
г) $-\frac{1}{3}$;
2. а) 1,1; -3,2;
б) $\frac{1}{3}; \frac{1}{6}$;
в) $-51; 9,3$;
г) $7; 11\frac{2}{3}$;
3. а) -26;
б) -11,9;
в) -6;
г) -12;
- 4.

0	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1
$-1\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$

67. Тест върху темата “Рационални числа”

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	Б	2
3	В	2
4	Г	3
5	Г	3
6	А	3
7	В	3

Задача 8

a)	-21	3
б)	7	3

Задача 9

A)	(4)	2
Б)	(1)	2
В)	(3)	2

Задача 10

a) 26 м. ед., б) 42 кв. м. ед.	10
--------------------------------	----

ТЕМА 3. СТЕПЕНУВАНЕ

68. Действие степенуване с естествен степенен показател

1. а) 7^4 ;
б) 3^{20} ;
в) $5,3^{12}$;
г) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$;
2. а) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$;
б) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$;
в) $2 \cdot 2 \dots 2 = 512$;
г) $3,2 \cdot 3,2 \cdot 3,2 = 32,768$;
3. а) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3125}$;
б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{729}$;
4. а) 512;
б) 256;
в) 0,008;
г) 0,64;
д) $\frac{16}{81}$;
е) $\frac{8}{343}$;
5. а) $48 = 2^4 \cdot 3$;
б) $64 = 2^6$;
в) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$;
г) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$;
д) $4410 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2$.

69. Числови изрази, съдържащи степени

1. а) 32;
б) 7;
в) 64;
г) 100;
2. а) 106;
б) 25;
в) 11;
г) 88;
3. а) 11;
б) 630;
в) 5,25;
г) 1;
4. а) 2430;
б) 160;
5. а) $45 > 25$;
б) $61 < 121$.

70. Намиране на неизвестна компонента при действие степенуване

1. а) 81;
б) $\frac{1}{8}$;
в) 0,0016;
г) $3\frac{3}{8}$;
2. а) 4;
б) 4;
в) 5;
г) 3;
д) 5;
3. а) 5;
б) 2;
в) 3;
г) $\frac{1}{3}$;
д) $\frac{2}{3}$;
4. а) 2^{10} ;
б) 5^5 ;
в) 3^7 ;
г) 7^4 ;
5. 1. 2,197;
2. 5;
3. 3;
4. $\frac{1}{5}$;
5. 11;
6. $7\frac{58}{81}$.

71. Умножение на степени с равни основи

- a) 5^{16} ; б) a^{29} ;
в) $0,3^{15}$; г) $(a+x)^{29}$;
д) $2,3^{14}$; е) $(2a)^{20}$;
- a) $2^5 = 32$;
б) $0,1^5 = 0,00001$;
в) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$;
г) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$; д) $3\frac{3}{8}$;
- a) 15; б) 8; в) a^5 ;
г) a^{14} ; д) 8;
- a) 11; б) 9; в) a^{15} ;
г) a^{27} ; д) 10; е) 4;
- a) 2^9 ; б) 2^7 ; в) 2^{10} ;
г) 2^8 ; д) 2^{13} ; е) 2^8 .

72. Деление на степени с равни основи

- a) 49; б) 0,64;
в) $\frac{8}{27}$; г) $1\frac{13}{36}$;
- a) $\frac{1}{9}$; б) $11\frac{1}{9}$;
в) $5\frac{4}{9}$; г) $\frac{9}{49}$;
- a) 4; б) 1; в) 25; г) 7;
- a) 20; б) 60; в) 36; г) 35;
- a) 32; б) 27;
в) $3\frac{3}{8}$; г) 1000;
- a) x^4 ; б) 2^{11} ; в) x^6 ; г) x^{10} ;
- a) 49; б) 121; в) 3; г) 625.

73. Намиране числената стойност на изрази, съдържащи степени

- a) 6; б) 3; в) 3,5; г) 55;
- a) 35; б) 19; в) 72; г) $\frac{8}{9}$;
- a) 3^3 ; б) 3^4 ; в) 3^2 ;
- a) 25; б) $\frac{1}{5}$; в) 5; г) 5;
- a) 30; б) 6; в) $\frac{3}{4}$; г) 60.

74. Степенуване на произведение

- a) $7^3 \cdot a^3$; б) $0,5^4 \cdot b^4$;
в) $\left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot m^5$; г) $5^7 \cdot n^7$;
д) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$; е) $3^6 \cdot a^6 \cdot (b^2)^6$;
- a) $(2 \cdot x)^5$; б) $(3 \cdot x)^3$;

в) $(3 \cdot a)^5$; г) $(5 \cdot b)^3$;

3. а) 1000000; б) $\frac{1}{32}$;

в) 1; г) 64;

4. а) 100; б) 100;

в) $\frac{1}{32}$; г) 128;

5. Увеличава се:

а) 9 пъти; б) 49 пъти;

6. Намалява се:

а) 4 пъти; б) 9 пъти.

75. Степенуване на частно

- а) $\frac{17^{20}}{19^{20}}$; б) $\frac{12^8}{13^8}$;
в) $\frac{1^{11}}{19^{11}}$; г) $\frac{(3.m)^{12}}{5^{12}}$;
- а) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^8$;
в) $\left(\frac{x}{3}\right)^5$; г) $\left(\frac{2.x}{5}\right)^4$;
- а) $\frac{27}{64}$; б) $\frac{36}{a^2}$;
в) $\frac{32.a^5}{b^5}$; г) $\frac{27.a^3}{125.b^5}$;
- а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{256}$;
в) 100000; г) 125;
- а) 128; б) $\frac{1}{32}$;
в) 16; г) 9.

76. Степенуване на степен

- а) 7^{10} ; б) $0,6^{24}$;
в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{12}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$;
- а) 625; б) 729;
в) 1024; г) $\frac{1}{6561}$;
- а) $(7^2)^{20}$; б) $(7^4)^{10}$;
в) $(7^8)^5$; г) $(7^{10})^4$;
- а) 4^{24} ; б) 8^{16} ;
в) 16^{12} ; г) 64^8 ;
- а) 8; б) 3; в) 2; г) $\frac{1}{49}$;
- а) 4; б) 20; в) 9; г) 3.

77. Действия със степени.

Упражнение

- а) 5^{80} ; б) 6^{21} ;
в) a^{20} ; г) $2^7 \cdot a^{21}$;

д) $5^9 \cdot a^{12} \cdot b^{15}$; е) $\frac{3^{35} \cdot a^{10} \cdot b^5}{5^{20}}$;

2. а) $(m \cdot n^2)^2$; б) $(2 \cdot a^2)^6$;

в) $(5 \cdot a^2 \cdot b^4)^3$; г) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^5$;

д) $\left(\frac{3 \cdot a^2 \cdot b^2}{5}\right)^2$; е) $\left(\frac{x^2}{2 \cdot b}\right)^4$;

3. а) 4; б) $\frac{1}{343}$; в) 3; г) 5;

4. а) 3; б) 135; в) 14; г) 27;

5. а) $\frac{x \cdot y}{6}$; б) $2 \cdot a$;

6. а) 8; б) 6; в) 13; г) $3\frac{1}{4}$;

7. а) 3,5; б) $1\frac{1}{14}$;

8. а) $5^{17} : 5^{15} - 2^4 = 9$;
б) $2^6 + 7^{15} : 7^{13} = 113$.

78. Степенуване на рационални числа

1. а) -17; б) $-\frac{3}{8}$;

в) 36; г) $\frac{20}{27}$;

2. а) -24; б) $\frac{1}{2}$;

в) -6,5; г) 5;

3. а) 4; б) -3;

в) 13; г) 32;

4. а) -16; б) 0;

в) $-\frac{5}{8}$; г) $-\frac{3}{8}$;

5. а) 10; б) 26;

в) 110; г) 4.

79. Степен с нулев показател и степен с цял показател

1. а) $285 = 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;

б) $3004 = 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$;

в) $12560 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$;

г) $135,627 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$;

2. а) 92 047; б) 111 000;

в) 504,53; г) 7 407,8;

3. а) 3^{-2} ; б) 5^{-8} ; в) 8^4 ; г) 7^{-1} ;

4. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^8$;

5. а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{25}$;

- в) $\frac{8}{1}; -\frac{8}{1}$; г) $\frac{4}{3}; \frac{9}{4}$;
 6. а) $7^{-1}; 11^{-1}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}; \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$.

80. Степен с цял показател.

Упражнение

- а) 2^5 ; б) 3^2 ; в) -5^{-3} ; г) 7^2 ;
- а) $-\frac{2}{3}$; б) -21 ; в) -2 ; г) $\frac{1}{8}$;
- а) 2^{30} ; б) 3^{-9} ; в) 5^{-14} ; г) 2^2 ;
- $A = 32x^2$
а) 2; б) 12,5;
в) 98; г) 200;
- а) 0,03; б) 0,005;
в) 0,00027; г) 0,0000312.

81. Стандартен запис на число

- а) 10^4 ; б) 10^7 ; в) 10^2 ; г) 10^8 ;
- а) $4 \cdot 10^3$; б) $5 \cdot 10^4$;
в) $9 \cdot 10^5$; г) $8 \cdot 10^6$;
- а) $3,4 \cdot 10^2$; б) $2,8 \cdot 10^4$;
в) $3,5 \cdot 10^7$; г) $4,2 \cdot 10^5$;
- а) $2,56 \cdot 10^4$; б) $3,87 \cdot 10^5$;
в) $1,375 \cdot 10^7$; г) $3,108 \cdot 10^8$;
- а) $5,3 \cdot 10^6$; б) $2,7 \cdot 10^3$;
в) $1,25 \cdot 10^7$; г) $2,58 \cdot 10^6$;
- а) 5000; б) 230000;
в) 8000000; г) 92000000;
- а) 42500; б) 38100000;
в) 103000; г) 50420;
- а) $3,4 \cdot 10^{-4}$; б) $2,3 \cdot 10^{-3}$;
в) $3,78 \cdot 10^{-6}$; г) $5,6 \cdot 10^{-7}$.

82. Питагорова теорема – приложение на степените

- а) $a = 12$ см; б) $c = 20$ см
в) $h_c = 9,6$ см;
- а) 48 кв. м. ед.; б) 32 м. ед.;
в) 9,6 м. ед.;
- а) 64 кв. м. ед.; б) 34 м. ед.;
- а) 30 кв. м. ед.; б) 30 м. ед.

83. Питагорова теорема.

Упражнение

- а) 72 кв. м. ед.;
б) $AB = 10$ м. ед., $BC = 5$ м. ед.;
в) 28 м. ед.;
- а) 108 кв. м. ед.; б) 58 м. ед.

84. Обобщение на темата “Степенуване”

- а) 3; б) 0; в) 5; г) 2;
- а) 108; б) $\frac{4}{9}$;

- а) 25; б) 160; в) 42; г) $\frac{1}{5}$;
- а) 8; б) 31; в) 3; г) 4;
- а) $7 \cdot 10^7$; б) $2,5 \cdot 10^4$;
в) $5,21 \cdot 10^8$; г) $6,32 \cdot 10^{11}$;
- а) 15; б) 5; в) 1; г) 3;
- а) 3^{11} ; б) $\frac{1}{2}$; в) 16; г) 3^{50} ;
- а) 0,25; б) 1; в) 3; г) 2;
- а) $2^2 + x^2$; б) $(2 + x)^2$;
в) $3^3 + a^3$; г) $(3 + a)^3$.

85. Тест върху темата “Степенуване”.

Задача №	Отговор	Точки
1	Б	2
2	В	2
3	Г	2
4	А	3
5	Б	3
6	В	3
7	А	3
Задача 8		
а)	32	3
б)	4	3
Задача 9		
А)	(3)	2
Б)	(4)	2
В)	(2)	2
Задача 10		
$A = -3xy$, $x = 3$, $y = -\frac{1}{9}$		10
$A = 1$		

ТЕМА 4. УРАВНЕНИЯ

86. Числови равенства.

Свойства

- а) $9x$; б) $9x$; в) $14x$; г) $8x$;
- а) $4x$; б) $-3x$; в) $2x$; г) $-8x$;
- а) $8x$; б) $-2x$; в) x ; г) $-x$.

87. Уравнение от вида

$ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

- а) 4; б) -5 ; в) 6; г) -2 ;
- а) 0,4; б) $-1,2$; в) 2,5; г) $-2,1$;
- а) 7; б) -8 ; в) 5; г) -2 ;
- а) 4,5; б) $\frac{2}{3}$; в) $-4,5$; г) $-\frac{1}{3}$;
- а) 6; б) $9\frac{1}{3}$; в) $-13,5$; г) $5\frac{1}{3}$.

88. Решаване на уравнения от вида $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).

Упражнение

- а) 6,5; б) $-4,2$;
в) $2\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$;
- а) 3,1; б) $-2,6$;
в) 0,8; г) $-1,5$;
- а) 15; б) -7 ;
в) 5; г) -20 ;
- а) 4,5; б) $-2\frac{2}{3}$;
в) 0,4; г) $\frac{3}{4}$;
- 9; 6. 42.

89. Правила за решаване на уравнение

- 3; 2. -3;
- 8; 4. 4;
- 21; 6. 45;
- 8; 8. 3.

90. Решаване на уравнения.

Упражнение 1

- а) 3; б) 4; в) 5; г) 6;
- а) 5; б) 7; в) -5 ; г) -3 ;
- а) -2 ; б) 2; в) 3; г) 1;
- а) -3 ; б) 3; в) 2; г) 3;
- а) 6; б) 1; в) 9; г) -2 .

91. Решаване на уравнения.

Упражнение 2

- 21; 2. 2,5;
- 4; 4. $-1,25$;
- $-10\frac{2}{7}$; 6. $-2\frac{4}{7}$;
- | | |
|---|---|
| A | 2 |
| B | 3 |

92. Моделиране с уравнения от вида $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

- 1,40 лв.;
- 1,20 лв.
- 42 kg;
- 44, 45, 46 и 47.

93. Текстови задачи, които се решават с уравнения от вида $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

- 6;
- 132 и 134;
- 35, 37 и 39;
- 48;
- 77;

6. Ани – 12 год.;
Влади – 15 год.;
майка им – 36 год.

94. Практически задачи, които се решават с уравнения

1. 16 маси и 32 стола;
2. 3 kg; 3. 45 задачи;
4. 4 часа; 5. 3 часа.

95. Решаване на текстови задачи от движение

1. $V_{\text{камyon}} = 60 \text{ km/h}$,
 $V_{\text{лека кола}} = 80 \text{ km/h}$;
2. $1\frac{1}{2} h$;
3. $V_{\text{камyon}} = 60 \text{ km/h}$,
 $V_{\text{лека кола}} = 80 \text{ km/h}$;
4. а) 2 часа; б) 190 km;
5. 60 km.

96. Обобщение на темата “Уравнения”

1. 8; 2. 3; 3. -4; 4. 2;
5. -1; 6. -3; 7. 5; 8. 1;
9. 4.

97. Тест върху темата “Уравнения”

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	Г	2
3	Б	2
4	В	3
5	Г	3
6	В	3
7	В	3
Задача 8		
(А)	(3)	3
(Б)	(5)	3
Задача 9		
(1)	ДА	2
(2)	ДА	2
(3)	НЕ	2
Задача 10		
$x = -6$, $y = -3$, $A = 24$		10

ТЕМА 5. ПРОПОРЦИИ

98. Отношение. Пропорция

1. а) $\frac{5}{4}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{4}{3}$;

2.

$a:b$	3:2	8:3	6:1	1:5	1:1	2:3
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

3. $5 : 2$;

4. а) $\frac{10}{15} = \frac{4}{6}$; б) $\frac{4}{8} = \frac{15}{30}$;

в) $\frac{8}{12} = \frac{10}{15}$; г) $\frac{7}{21} \neq \frac{9}{12}$.

5. а) да; б) не; в) да; г) да.

99. Пропорционалност.

Коефициент на пропорционалност

1. $P = 3 \cdot a$

a	0,8	2,3	5,6	12	20,3
P	2,4	6,9	16,8	36	60,9

2. а) $Z = 1,4 \cdot x$

x	2	2,3	3	4,5	7	12
Z	2,80	3,22	4,20	6,30	9,80	16,80

3. а) $y = 11,2$; б) $x = 83,2$;

4. а) 0,40 лв.; б) 5,12 лв.;
в) 13,600 kg;

100. Основно свойство на пропорциите

1. а) да; б) да; в) да; г) да.
2. а) 1; б) 3; в) 0,32; г) 4;
3. а) $3\frac{1}{3}$; б) 9; в) 2; г) $6\frac{2}{3}$;
4. а) $x = y = 3\frac{8}{9}$; б) $x = y = 6,3$;
5. а) $x = 2$, $y = 3$; б) $x = 5$, $y = 8$;
в) $x = 6$, $y = 5$; г) $x = 6$, $y = 14$.

102. Приложение на пропорциите

1. 280 kg; 2. 600 kg;
3. $\approx 6,92 \approx 7$ kg; 4. 120 cm^2 ;
5. 56 cm; 6. 19 cm;
7. 60 m; 8. 27 km.

103. Отношението а : б : с.

Упражнение

1. $a = 30 \text{ cm}$; $b = 25 \text{ cm}$;
2. $S = 260\pi \text{ cm}^2$; $S_1 = 360\pi \text{ cm}^2$;
3. 400 лв.; 800 лв.; 1200 лв.;
4. 36 kg чушки;
12 kg патладжан;
5. 1,5 kg синя; 3 kg жълта;
4,5 kg червена боя;
6. $r = 12 \text{ cm}$; $l = 15 \text{ cm}$;
 $S = 180\pi \text{ cm}^2$; $S_1 = 324\pi \text{ cm}^2$;
 $V = 432\pi \text{ cm}^3$.

104. Права пропорционалност

1.

l	4	1,5	3	10	4,1	3,5	11,1	150
$U = 2l$	8	3	6	20	8,2	7	22,2	300

2.

x	-5	-3	-1	0	1	3	5
$y = -3x$	15	9	3	0	-3	-9	-15

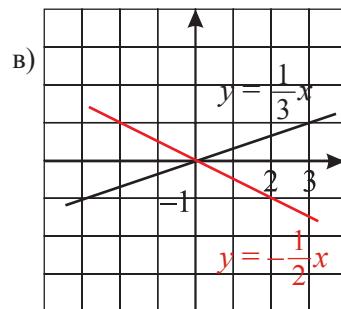
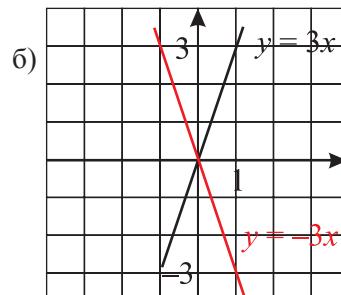
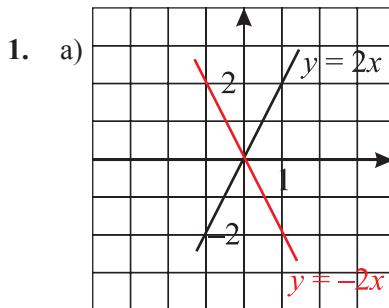
3. $y = 2,54x$;

4.

x	1	2	3	4
$y = 1,6093x$	1,609	3,219	4,828	6,347

x	1	2	3	4
$y = 1,6214x$	1,621	1,243	1,864	2,486

105. Права пропорционалност. Графика



106. Обратна пропорционалност. Графика

1. а) $y = 3 \cdot \frac{1}{x}$ или $x \cdot y = 3$

x	0,2	0,1	1	2	2,5	3	6
y	15	30	3	1,5	1,2	1	1/2

6) $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$ или $x \cdot y = \frac{1}{3}$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	1,5	2	3	6
y	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2. а) $k = 2$, $y = 2 \cdot \frac{1}{x}$ или $x \cdot y = 2$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

б) $k = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$ или $x \cdot y = \frac{1}{3}$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	6	9	12
y	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{36}$

3. $b = 192 \cdot \frac{1}{a}$ или $a \cdot b = 192$

a	96	48	24	12	8	6	4	2	1
b	2	4	8	16	24	32	48	96	192

109. Обобщение на темата "Пропорции"

- а) 2; б) 1; в) 15; г) 45;
- а) 28; б) 6; в) 3,9; г) 2,5;
- а) $x = 20$, $y = 6$;
б) $x = 7$, $y = 6$;
в) $x = 4$, $y = 8$;
г) $x = 2$, $y = 7$;
- $a = 20$ cm; $b = 12$ cm;
 $S = 240$ cm²;
- $a = 10$ cm; $b = 24$ cm;
 $c = 26$ cm; $P = 60$ cm;
 $S = 120$ cm².
- а) висше – 225 сл.
средно – 150 сл.
основно – 75 сл.



- а) праскови – 2,4 kg,
ябълки – 1,8 kg,
дюли – 1,2 kg,
тиква – 0,6 kg, захар – 3 kg;

б) грозде – 8 kg,
praskovi – 6,4 kg,
ябълки – 4,8 kg,
дюли – 3,2 kg,
тиква – 1,6 kg.

110. Тест върху темата "Пропорции"

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	В	2
3	Б	2
4	Г	3
5	Г	3
6	А	3
7	В	3

Задача 8

- | | | |
|----|----|---|
| а) | 54 | 3 |
| б) | 84 | 3 |

Задача 9

- | | | |
|-----|-----|---|
| (1) | 40 | 2 |
| (2) | 150 | 2 |
| (3) | 28 | 2 |

Задача 10

- | | |
|-----|----|
| 168 | 10 |
|-----|----|

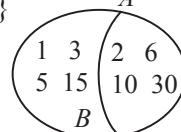
ТЕМА 6. ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

111. Множества. Елементи

- $A = \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$;
- $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 10;
- $-7 \in C$, $2 \in C$, $11 \in C$, $77 \in C$, $-3 \in C$, $3 \in C$;
- $-4 \notin D$, $-3 \notin D$, $0 \notin D$, $2 \notin D$, $4 \in D$;
- а) крайно; б) безкрайно;
в) крайно.

112. Множества. Подмножства

- $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
 $B = \{1, 3, 5, 15\}$
 $B \subset A$;
- а) $B = \{3, 6, 9\}$; $B \subset A$
б) $C = \{12, 15, 18, 21, 24, 27\}$;
 $C \subset A$;



- а) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$;

$$B \subset A$$

- б) $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$;

$$C \subset A$$

- а) $B = \{25, 30, 35\}$; $B \subset A$

$$\text{б) } C = \{21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}; C \subset A;$$

- а) $\{3\}, \{6\}, \{9\}$;

$$\text{б) } \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{6, 9\};$$

- а) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$;

$$\text{б) } \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

113. Множества и операции с тях. Графично представяне на множества

- а) $A \cap B = \{2, 6\}$;

$$\text{б) } A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\};$$

- а) $A \cap B = \{3, 7, 9\} = A$;

$$\text{б) } A \cup B = \{2, 3, 4, 7, 9, 11\} = B;$$

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

- а) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$;

$$\text{б) } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14\};$$

- а) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;

$$B = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$A \cap B = \{1, 3\};$$

$$\text{б) } 3; HOD(12, 15)$$

- а) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$;

$$B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$$

$$A \cap B = \{12, 24\};$$

$$\text{б) } 12; HOK(3, 4);$$

115. Вероятност на случайно събитие като отношение на възможности

- $\frac{1}{6}$;
- $\frac{1}{2}$;
- $\frac{1}{2}$;

- $\frac{1}{3}$;
- $\frac{1}{2}$;
- $\frac{2}{5}$;

- $\frac{47}{50} = 0,94$.

116. Вероятност на случайно събитие. Упражнение

- $\frac{17}{25} = 0,68$;
- $\frac{13}{20} = 0,65$;

- а) $\frac{2}{5}$;
- б) $\frac{3}{5}$;
- в) $\frac{11}{50} = 0,22$;

- а) $\frac{3}{10}$;
- б) $\frac{2}{5}$;
- в) $\frac{3}{5}$;

5. а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{1}{9}$.

117. Описание на данни – средноаритметично

1. 99 ст. 2. 16 000 лв.

121. Обобщение на темата „Елементи от вероятности и статистика”

1. $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}, 11$

2. а) $A \cap B = \{2, 4, 8\}$;

б) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 13\}$;

3. $A = \{76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84\}$

$B = \{20, 40, 60, 80\}$

а) $A \cap B = \{80\}$;

б) $A \cup B = \{20, 40, 60, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84\}$

4. а) грешно; б) вярно;

в) вярно; г) грешно;

д) вярно; е) вярно;

5. $\frac{2}{3}$; 6. $\frac{1}{2}$; 7. $\frac{2}{5}$; 8. $\frac{4}{5}$;

9. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{3}{5}$;

10. $P(\text{по-голямо от } 25) = \frac{25}{50}$

$P(\text{по-малко от } 25) = \frac{24}{50}$

$\frac{25}{50} > \frac{24}{50}$

По-вероятно е да се падне по-голямо от 25 число.

11. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{9}$;

12. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$;

13. 5,10; 14. 5,22; 15. 300 000 km.

ИЗХОДНО НИВО

122. Ръбести тела (преговор)

1. $S = 2450 \text{ cm}^2; S_1 = 3038 \text{ cm}^2; V = 10290 \text{ cm}^3$;

2. $V = 360 \text{ cm}^3$;

3. $S = 540 \text{ cm}^2; S_1 = 961,2 \text{ cm}^2$;

4. $S_1 = 360 \text{ cm}^2; V = 400 \text{ cm}^3$;

5. $S = 904,8 \text{ cm}^2; S_1 = 1252,8 \text{ cm}^2$;

6. 132 cm; 7. 21 cm; 8. 972 cm²;

9. $S_1 = 96 \text{ cm}^2; V = 48 \text{ cm}^3$;

Упътване: $b : h = 3 : 2 = 6 : 4$;

$h : k = 4 : 5$. Тогава $b : h : k = 6 : 4 : 5$.

10. а) $S_1 = 2800 \text{ cm}^2; V = 9600 \text{ cm}^3$;

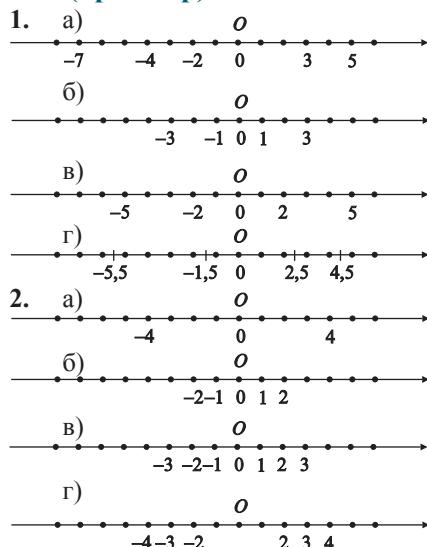
б) $S_1 = 6300 \text{ cm}^2; V = 32400 \text{ cm}^3$.

Тест върху темата „Ръбести тела”

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	Г	2
4	А	3
5	Г	3
6	В	3
7	А	3
Задача 8		
a)	72 cm^3	3
б)	288 cm^3	3
Задача 9		
a)	390 cm^2	2
б)	458 cm^2	2
в)	510 cm^3	2
Задача 10		
	285 cm^3	10

124. Рационални числа

(преговор)



3.

a	-11	-6	-3,4	$-2\frac{1}{3}$	-0,8
$-a$	11	6	3,4	$2\frac{1}{3}$	0,8
$ a $	11	6	3,4	$2\frac{1}{3}$	0,8
$- a $	11	6	3,4	$2\frac{1}{3}$	0,8

a	0	$\frac{1}{7}$	2,5	7	13
$-a$	0	$-\frac{1}{7}$	-2,5	-7	-13
$ a $	0	$\frac{1}{7}$	2,5	7	13
$- a $	0	$\frac{1}{7}$	2,5	7	13

4. а) $A_2(5; -3)$;

б) $A_3(5; 3)$;

в) $A_4(-5; 3)$;

г) $P = 32$ м. ед.;

$S = 60$ кв. м. ед.;

5. -32; +16; -8; 4; -2; 1;

а) -32; б) -32;

в) -32; г) -21;

6. а) 3; 5;

б) -7; -7;

7. а) 4; б) -10;

в) 20;

8. а) 30; б) 6;

9. а) -8; б) -5;

в) 5; г) 2,5;

10. а) -17; б) 6;

в) -4; г) 6.

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	В	2
4	Г	3
5	В	3
6	Б	3
7	А	3
Задача 8		
a)	$96\pi \text{ cm}^3$	3
б)	$128\pi \text{ cm}^3$	3
Задача 9		
a)	24 cm^2	2
б)	10 cm	2
в)	$96\pi \text{ cm}^2$	2
Задача 10		
$S = 252\pi \text{ cm}^2$		
$V = 576\pi \text{ cm}^3$		10

**Тест върху темата
“Рационални числа”**

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	В	2
3	А	2
4	Б	3
5	А	3
6	Б	3
7	Г	3
Задача 8		
а)	27	3
б)	23	3
Задача 9		
(А)	(3)	2
(Б)	(2)	2
(В)	(4)	2
Задача 10		
а) 14 кв. м. ед.		10
б) 16 м. ед.		

125. Степенуване (преговор)

- $40 = 2^3 \cdot 5^1$; $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$;
 $160 = 2^5 \cdot 5^1$; $175 = 5^2 \cdot 7^1$;
 $704 = 2^6 \cdot 11^1$;
- $a) x = 72$; $b) x = 42$;
- $a) -13$; $b) 23$; $c) 3,6$; $d) 1\frac{1}{3}$;
- $a) -6$; $b) 21$; $c) -\frac{3}{40}$;
- $a) 2$; $b) 18$; $c) 5$;
- $a) 1$; $b) 28$; $c) 10$;
- $a) n = 2$; $b) n = 5$;
 $c) n = 4$; $d) n = 4$.

Тест върху темата “Степенуване”

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	Б	2
3	Г	2
4	Г	3
5	А	3
6	Б	3
7	Б	3
Задача 8		
а)	5 см	3
б)	13 см	3
Задача 9		
(А)	(4)	2
(Б)	(1)	2
(В)	(3)	2
Задача 10		
9		10

126. Уравнения (преговор)

- $a) 3$; $b) 10$; $c) -4$; $d) -2$;
- $a) 1$; $b) -17$; $c) 27$; $d) 22,5$;
- $a) -10,5$; $b) -2\frac{1}{3}$;
 $c) 10$; $d) -14$;
- $a) -3\frac{1}{3}$; $b) \frac{11}{13}$;
 $c) 0,3$; $d) 3$;
- 48 ; 144 ;
- 40 зайци; 30 кокошки;
- $V_{\text{авт.}} = 90 \text{ km/h}$; $V_{\text{кам.}} = 60 \text{ km/h}$;
- в 11 часа и 12 минути;
- за 6 часа;
- 20 дивана и 100 легла.

**Тест върху темата
“Уравнения”**

Задача №	Отговор	Точки
1	А	2
2	Б	2
3	Г	2
4	Б	3
5	Г	3
6	В	3
7	Г	3
Задача 8		
а)	19 лв.	3
б)	31 лв.	3
Задача 9		
(А)	(3)	2
(Б)	(1)	2
(В)	(4)	2
Задача 10		
$x = -1$; $y = -2$; $A = 6$		10

127. Пропорции (преговор)

- $a) 5,25$; $b) 3\frac{1}{3}$;
 $c) 20$; $d) 33$;
- $a) 1,5$; $b) 4$;
 $c) 8,4$; $d) 15$;
- $a) x = 4$, $y = 4,5$;
 $b) x = 6$, $y = 10$;
- $a) x = 8$, $y = 4$;
 $b) x = 6$, $y = 18$;
- 10 см; 24 см; 26 см;
 $S = 120 \text{ cm}^2$;
- 400 лв.; 600 лв.; 800 лв.;
1000 лв.;
- 2250 чифта; 900 чифта;
- 140 уч.; 100 уч.; 60 уч.;

- $a) 16 \text{ см}$; 28 см ; 36 см ; 40 см ;
 $b) 12 \text{ см}$; 21 см ; 27 см ; 30 см ;
 $c) 24 \text{ см}$; 42 см ; 54 см ; 60 см ;
 $d) 120 \text{ см}$; 210 см ; 270 см ;
300 см;

$$10. V : V_1 = 12 : 1$$

11. 4707 €; 6276 €; 10460 €.

**Тест върху темата
“Пропорции”**

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	Г	2
3	Б	2
4	Б	3
5	Б	3
6	Б	3
7	В	3
Задача 8		
а)	16 см	3
б)	70 см	3
Задача 9		
а)	48	2
б)	72	2
в)	204	2
Задача 10		
	21	10

129. Изходно ниво

Примерен тест № 1

Задача №	Отговор	Точки
1	Г	2
2	Г	2
3	Б	2
4	А	3
5	В	3
6	Б	3
7	А	3
Задача 8		
а)	36	3
б)	26	3
Задача 9		
(А)	(1)	2
(Б)	(4)	2
(В)	(3)	2
Задача 10		
$A = -8x^3y^2$		
$x = -\frac{1}{8}$, $y = 8$, $A = 1$		10

Примерен тест № 2

Задача №	Отговор	Точки
1	В	2
2	Г	2
3	Г	2
4	В	3
5	Г	3
6	Г	3
7	А	3
Задача 8		
a)	72	3
б)	36	3
Задача 9		
(А)	(3)	2
(Б)	(2)	2
(В)	(4)	2
Задача 10		
$A = -2xy^2$ $x = \frac{1}{2}, y = -3, A = -9$		10

МАТЕМАТИКА 6. КЛАС

Здравка Крумова Паскалева, Мая Събчева Алашка,
Райна Милкова Алашка

Редактор и коректор Юлиана Христова Дамянова

Художник на корицата Емил Генков Христов

Графичен дизайн Ангелина Владиславова Аврамова

Първо издание 2017 г.

Формат: 60/90/8; Печатни коли: 35

Издателство “АРХИМЕД 2” ЕООД

тел./факс: 963 28 90, GSM: 0898 670 640, 0898 670 647

www.arhimedbg.com

Печат: “Алианс принт” – София