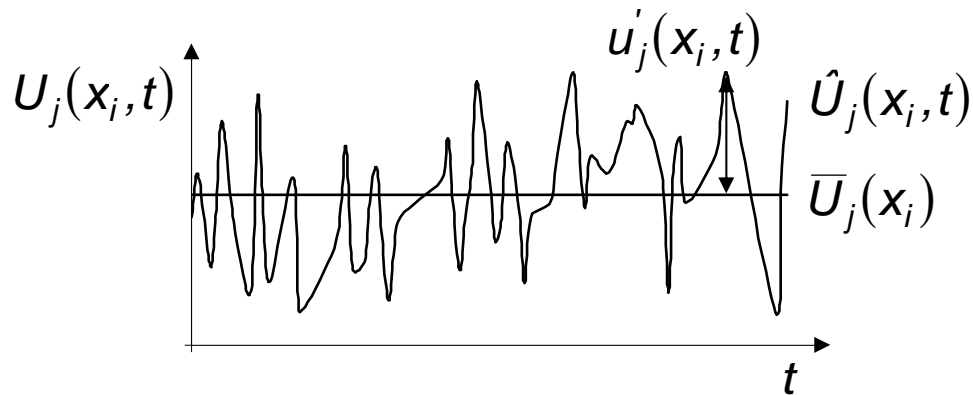


Reynoldssche Mittelung



Reynoldssche Dekomposition

$$\hat{U}_j(x_i, t) = \bar{U}_j(x_i) + u'_j(x_i, t)$$

$$\text{mit } \bar{U}_j(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}_j(x_i, t) dt$$

zeitgemittelte Kontinuitätsgleichung für mittleres Strömungsfeld

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} = 0$$

zeitgemittelte Navier-Stokes-Gleichung
(RANS = Reynolds Averaged Navier Stokes)

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{U}_i \bar{U}_j)}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_i^2} + \rho g_j - \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(\overline{u'_i u'_j})}$$

Reynoldsscher Spannungstensor

Schließungsproblem

Reynoldsscher Spannungstensor

$$\overline{u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} \overline{u_1'^2} & \overline{u'_1 u'_2} & \overline{u'_1 u'_3} \\ \overline{u'_2 u'_1} & \overline{u_2'^2} & \overline{u'_2 u'_3} \\ \overline{u'_3 u'_1} & \overline{u'_3 u'_2} & \overline{u_3'^2} \end{bmatrix}$$

symmetrischer Tensor $\overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_j u'_i}$

Einführung 6 neuer Unbekannter

Folgerung

10 unabhängige Variablen: $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3, \overline{P}, \overline{u'_1 u'_1}, \overline{u'_1 u'_2}, \overline{u'_1 u'_3}, \overline{u'_2 u'_1}, \overline{u'_2 u'_2}, \overline{u'_3 u'_3}$

4 unabhängige Gleichungen: 1 x Kontinuität + 3 x Impuls



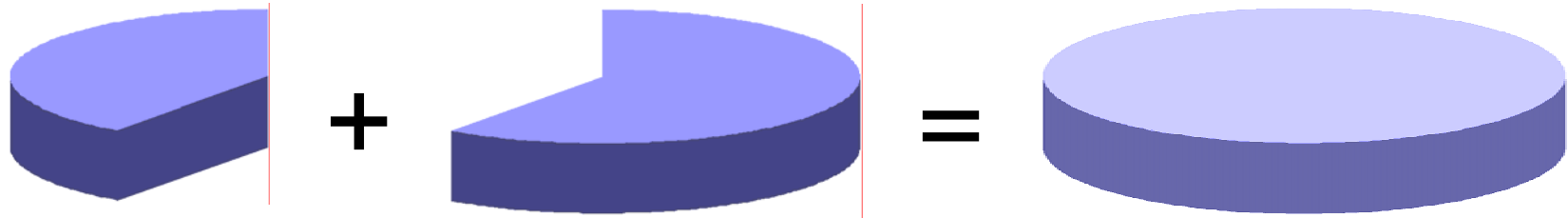
das Gleichungssystem ist nicht geschlossen!

Turbulenzmodellierung

zeitgemittelte
Gleichungen

Modellierung

Reynolds-gemitteltes
Schließungsmodell



10 Variablen
4 Gleichungen
(nicht geschlossen)

Zusätzliche Gleichungen
für $\overline{u_i u_j}$

geschlossen!

Wirbelviskositätsmodell

Reynoldsches Spannungsmodell

PDF Modell

(probability density function)

Komplexität
↓
Genauigkeit

Wirbelviskosität

Boussinesqsche Näherung

Molekularer Impulstransport

$$\bar{\tau}_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = -\rho \nu \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right)$$

ν : Viskosität

Turbulenter Impulstransport

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = \tau_{ij}^T = -\rho \nu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right)$$

ν_T : Wirbelviskosität / turbulente Viskosität

Wirbelviskositätsmodelle I

Wirbelviskosität

$$\nu_T = c_\mu u_c l_c$$

c_μ : Konstante

u_c : charakteristische Geschwindigkeit des turbulenten Impulstransports

l_c : charakteristische Länge des turbulenten Impulstransports

Folgerung

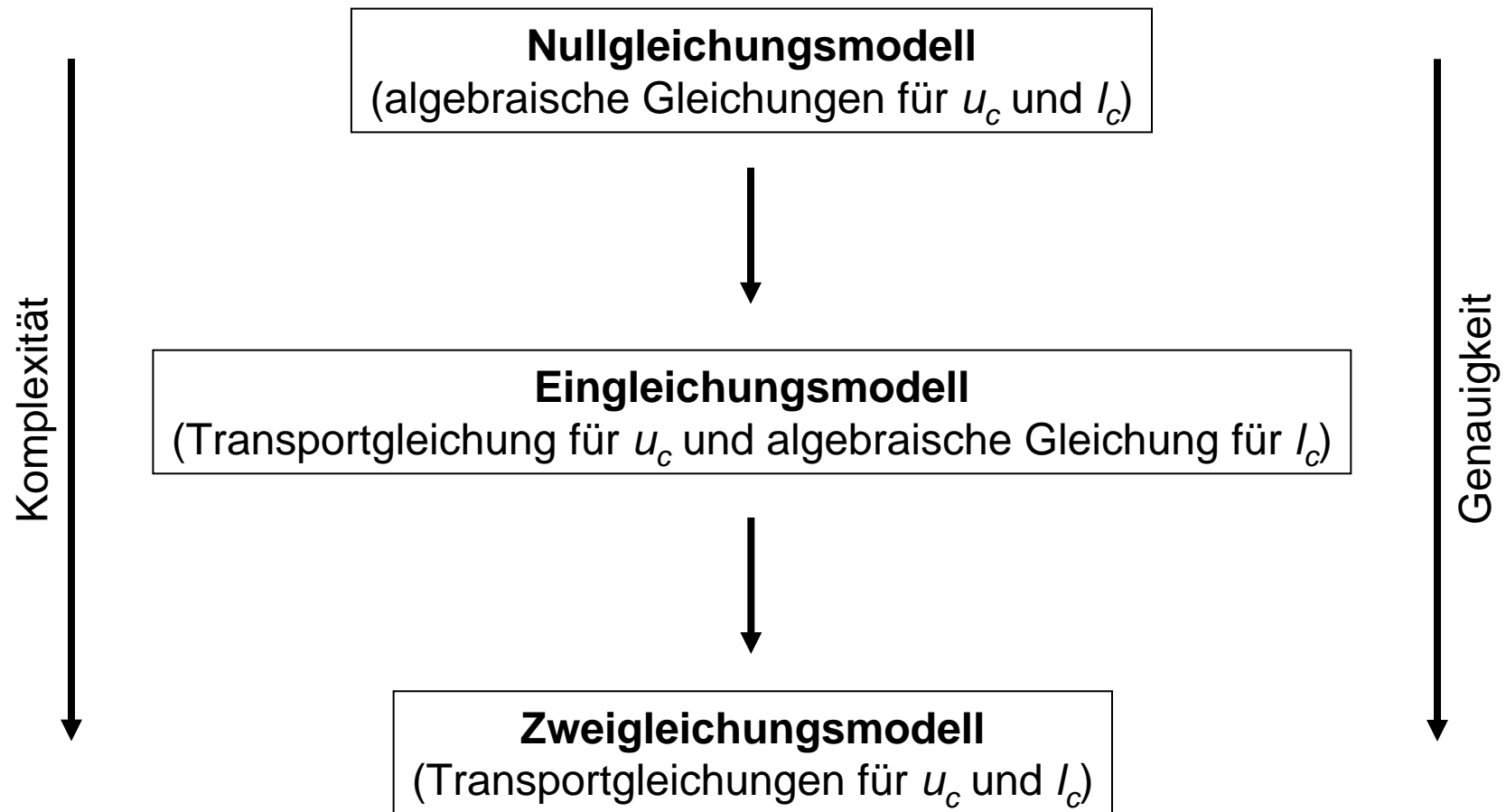
7 unabhängige Variablen: $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, \bar{P}, \nu_T, u_c, l_c$

5 unabhängige Gleichungen: 1 x Kontinuität + 3 x Impuls + 1 x Wirbelviskosität



die Wirbelviskositätsmodelle sind nicht geschlossen
bis u_c und l_c festgelegt sind!

Wirbelviskositätsmodelle II



Numerische Methoden

Methode	DNS Direkte Numerische Simulation	RANS	LES Large Eddy Simulation
Gleichungen	Navier-Stokes	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes	gefilterte Navier-Stokes
Modellierung	0%	100%	0-100%
Rechenzeit	extrem hoch	niedrig	mittel
Genauigkeit	exakt	normal	mittel
Re	niedrig	hoch	hoch
Anwendung	Validierung und Kalibrierung von Turbulenzmodellen	am meisten genutzte Näherung für CFD	noch in der Erforschung