Exercices

APPRENTISSAGE

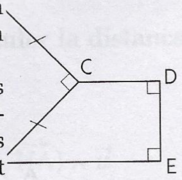
Barycentres

1 **1.** Soit ABCD un tétraèdre, A', B', C' et D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.
Démontrer que les tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont même centre de gravité.
2. Démontrer que deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont même centre de gravité si et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}.$$

2 Soit ABC un triangle et M un point de [BC]. Démontrer que M est le barycentre des points pondérés (B, aire(CAM)) et (C, aire(BAM)).

3 Soit ABCDE un pentagone tel que ACDE est un trapèze rectangle et ABC un triangle isocèle rectangle.
En utilisant les barycentres partiels, construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 6) et (E, 3).



4 Soit ABCDE une pyramide à base ABCD.
Construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1) et (E, 4).

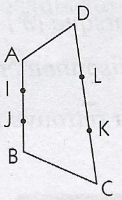
5 Soit ABC un triangle.
1. Construire le point G tel que : $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$.
2. Écrire G comme barycentre des points A, B et C.
3. Pour tout point M, exprimer $\overrightarrow{MG}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$.

6 Soit A et B deux points distincts.
Démontrer que le segment [AB] est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients de même signe.

7 Soit A, B, C trois points non alignés et α, β, γ trois nombres réels tels que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).
1. Démontrer que si $\beta + \gamma = 0$, alors G appartient à la droite parallèle à (BC) passant par A.
2. Soit a un nombre réel non nul. Démontrer que β et γ varient de telle sorte que si $\beta + \gamma = a$, alors G décrit une droite parallèle à (BC).

8 L'espace $\mathscr{E}$ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du barycentre des points pondérés (A, – 2), (B, 1) et (C, 4).

9 Soit ABCD un quadrilatère.
I et J sont les points de [AB] tels que : AI = IJ = JB.
K et L sont les points de [CD] tels que : CK = KL = LD.
On désigne par M, N, O et P les milieux respectifs des segments [AD], [IL], [JK] et [BC].



1. Écrire chacun des points I et J comme barycentre des points A et B.
Écrire chacun des points K et L comme barycentre des points C et D.
2. Démontrer que les points M, N, O et P sont alignés.

10 Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2), (C, 1) et (D, 2).
1. Construire les points K et L tels que :

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{LD} = \vec{0}.$$

2. Démontrer que G est le milieu de [KL].
3. Construire G.

11 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :
- I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC] ;
- K et L les points tels que :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\,;$$

- G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1), (C, 1) et (D, 2).

1. Démontrer que les points I, J et G sont alignés.
Démontrer que les points K, L et G sont alignés.
2. En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

12 Soit ABC un triangle, G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 2). Les droites (BG) et (CG) coupent (AC) et (AB) respectivement en B' et C'.
1. En utilisant les barycentres partiels, démontrer que :

$$2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GC'} = \vec{0}.$$

2. En déduire que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.

13 Soit ABC un triangle. On désigne par :
- A' le barycentre des points pondérés (B, 2) et (C, – 3) ;
- B' le barycentre des points pondérés (C, – 3) et (A, 1).

1. Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont parallèles.
2. Soit C' le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b). Pour quelles valeurs des nombres réels a et b les droites (AA') et (CC') sont-elles parallèles ?

14 Soit ABCD un tétraèdre, G et H les centres de gravité respectifs des triangles ABC et ADC.
Démontrer que les droites (GH) et (BD) sont parallèles.

15 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points I, J et K tels que :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}.$$

2. Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

16 Soit ABC un triangle.
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 3), (B, 4) et (C, 5).
2. Les droites (AG), (BG) et (CG) coupent les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement en I, J et K.
Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que :

$$\overrightarrow{IB} = \alpha\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{JC} = \beta\overrightarrow{JA} \text{ et } \overrightarrow{KA} = \gamma\overrightarrow{KB}.$$

17 Soit ABCD un quadrilatère.
1. Construire les points E, F, I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD},\quad \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{BJ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{CK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

2. Démontrer que les droites (EF), (IK) et (JL) sont concourantes.

18 Soit ABCD un quadrilatère convexe. On désigne par E, F, G et H les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.
Démontrer que les droites (AE), (BF), (CG) et (DH) sont concourantes.

19 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :
• I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD] ;
• G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, ABD et ABC.
En utilisant les barycentres partiels, démontrer que les sept droites (AG_1), (BG_2), (CG_3), (DG_4), (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

Lignes de niveau

20 Soit ABCD un carré.
1. Écrire A comme barycentre des points B, C et D.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0.$$

21 Soit ABCD un carré.
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et (C, 1).
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

22 Soit ABC un triangle.
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1), (B, – 1) et (C, 1).
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

a) Vérifier que B appartient à (Γ).
b) Déterminer et construire (Γ).

23 Soit ABC un triangle tel que : AB = 7, BC = 4 et AC = 5. On désigne par I le milieu du segment [BC].
1. En utilisant le théorème de la médiane, calculer AI.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58$.
(On pourra développer $2MA^2 - MB^2 - MC^2$ par rapport à I).
3. On désigne par D le barycentre des points pondérés (A, – 1), (B, 1) et (C, 1).
a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$.

24 Soit A et B deux points distincts d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O tels que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{2\pi}{3}$.
Les tangentes à ($\mathscr{C}$) en A et B se coupent en C.
Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

25 Soit A et B deux points distincts, (Δ) et (Δ') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \vec{u}}) = (\widehat{\overrightarrow{MB}, \vec{v}}).$$

26 Soit ABC un triangle isocèle en A, (Δ) une droite variable passant par A et C' l'image de C par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
1. Déterminer le lieu de C' lorsque (Δ) varie.
2. Soit M le point d'intersection, s'il existe, des droites (BC') et (Δ).
Déterminer le lieu de M lorsque (Δ) varie.

27 Soit A et B deux points distincts d'un cercle ($\mathscr{C}$).
À tout point M de ($\mathscr{C}$), distinct de A et B, on associe le point P de la demi-droite opposée à [MA) tel que :

$$MP = MB.$$

Déterminer le lieu de P lorsque M décrit le cercle ($\mathscr{C}$) privé des points A et B.

Produit vectoriel

28 Soit ABCDEFGH un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base directe de $\mathscr{W}$.
Préciser si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte.
a) $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{GC})$ *b)* $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CD})$
c) $(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CD})$ *d)* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{HE})$.

29 Soit ABCDEFGH un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.
Déterminer les vecteurs :
a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{HD}$ *b)* $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{EF}$ *c)* $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{DC}$.

30 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre de gravité G.
Calculer en fonction de a :

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|,\quad \|\overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GC}\| \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{BC}\|.$$

31 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que I est le milieu du segment [BC] et AB = AC = a.
Calculer en fonction de a :

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|,\ \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\|,\ \|\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{BC}\| \text{ et } \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AI}\|.$$

32 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
On pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.
Calculer en fonction de $\vec{w}$:
a) $\vec{u} \wedge (2\vec{u} + \vec{v})$ *b)* $(3\vec{u} - \vec{v}) \wedge \vec{v}$
c) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (2\vec{u} - \vec{v})$ *d)* $5\vec{v} \wedge (3\vec{u} + \vec{v})$.

33 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.
Dans chacun des cas suivants, démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée et préciser si elle est directe ou indirecte.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

34 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$.

a) $\vec{u} = \frac{1}{9}(\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k})$, $\vec{v} = \frac{1}{9}(-4\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k})$

b) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

35 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, vérifier que les points A, B et C définissent un plan dont on déterminera une équation.

a) $A\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\ 5\\ -1\end{pmatrix}$.

36 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur de la droite d'intersection des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

a) $(\mathscr{P}) : 2x + y - z = 0$ et $(\mathscr{P}') = x - 3y + 2z + 4 = 0$.

b) $(\mathscr{P}) : x - y + z - 5 = 0$ et $(\mathscr{P}') = x + y - z + 7 = 0$.

37 Le théorème des sinus
Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$.

1. Démontrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.
2. En déduire que : $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{CA}{\sin\widehat{CBA}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$.

38 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

39 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$. On désigne par I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et par J le barycentre des points pondérés (B, 1), (C, 3).
Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}.$$

40 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \vec{0}$.

Application
Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B, C et D sont coplanaires.

a) $A\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\ 6\\ 2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -6\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$

b) $A\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$

c) $A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

41 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit les points $A\begin{pmatrix}-4\\ 6\\ -1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Dans le plan (ABC), soit I le milieu de [AC] et D l'image de B par s_I. Préciser la nature du quadrilatère ABDC et calculer son aire.

42 1. Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$ et M un point quelconque.
a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ tel que :
$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$$
est indépendant du point M.
b) Interpréter géométriquement $\|\vec{u}\|$.
2. Étudier le cas où A, B et C sont alignés.

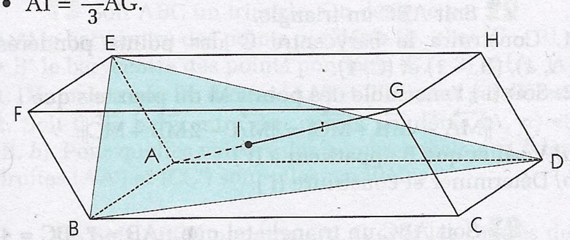
43 Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$ et I le milieu de [BC].
Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}.$$

44 Soit A et B deux points de l'espace orienté $\mathscr{E}$ tels que : AB = 6.
Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 24.$$
(On pourra utiliser l'interprétation géométrique de $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|$.)

APPROFONDISSEMENT

45 Soit ABCDEFGH un pavé.
Démontrer que la diagonale (AG) est sécante avec le plan (BDE) en un point I tel que :

- I est le centre de gravité du triangle BDE ;
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

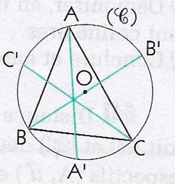


46 Soit ABC un triangle isocèle tel que :
$$BC = 2, \quad AC = AB = 3.$$
On désigne par A' le milieu du segment [BC] et H l'orthocentre de ABC.

1. Démontrer que : $\cos\widehat{BAC} = \frac{7}{9}$.
2. Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
a) Calculer $\dfrac{B'A}{B'C}$.

b) Déterminer deux nombres réels α et γ tels que B' est le barycentre des points pondérés (A, α) et (C, γ).
3. En déduire trois nombres réels a, b et c tels que H est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

47 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O. On désigne par :
- A' le milieu de l'arc de corde [BC], ne contenant pas A,
- B' le milieu de l'arc de corde [CA], ne contenant pas B,
- C' le milieu de l'arc de corde [AB], ne contenant pas C.



Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

48 Soit ABC un triangle.
P, Q et R sont des points distincts de A, B et C, appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB).
1. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles CPQ, AQR et BRP passent par un même point I.
2. Démontrer que A, B, C et I sont cocycliques si et seulement si P, Q et R sont alignés.

49 Soit ABCD un losange de centre O tel que :
$$OB = 2OA.$$
1. Démontrer que le barycentre des points pondérés (B, 2), (C, $-$ 1) et (D, 1) est le milieu du segment [AB].
2. Soit k un nombre réel.
a) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des barycentres G_k des points pondérés (A, k), (B, 2), (C, $k-1$) et (D, $1-2k$).
b) Préciser la valeur de k pour laquelle G_k est un point de la droite (AC).
3. Déterminer et construire :
a) l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ sont colinéaires ;
b) l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ ont la même norme.

50 Soit ABC un triangle équilatéral tel que :
$$AB = a \ (a > 0).$$
1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$.
2. *a)* Construire le barycentre G des points pondérés (A, $-$ 1), (B, 4) et (C, 1).
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

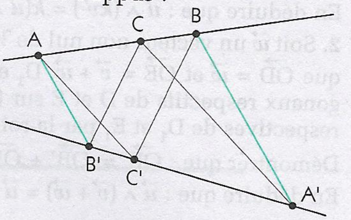
51 Soit ABCD un tétraèdre.
1. Construire les centres de gravité respectifs I, J et K des faces ABC, ACD et ADB.
2. Démontrer que les plans (BCD) et (IJK) sont parallèles.
3. On désigne par :
- G et H les centres de gravité respectifs des triangles BCD et IJK ;
- O le centre de gravité de ABCD.

Démontrer que les points A, H, O et G sont alignés.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GH}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AO}$.
4. Déterminer quatre nombres réels a, b, c et d tels que H est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d).

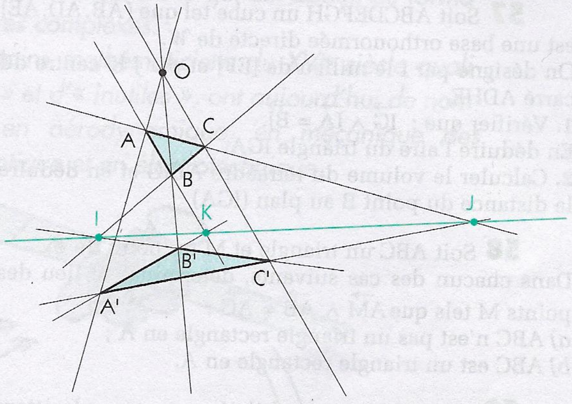
52 Le théorème de Pappus
1. Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' trois points alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$.
Vérifier la relation :
$$\overrightarrow{B'A} \wedge \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'B} \wedge \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{AC'} = \vec{0}.$$
2. En déduire le théorème de Pappus :

si $\begin{cases} \text{A, B, C alignés} \\ \text{A', B', C' alignés} \\ \text{(BC') // (B'C)} \\ \text{(AC') // (A'C)} \end{cases}$

alors (AB') // (A'B).



53 Le théorème de Desargues
Soit deux triangles ABC et A'B'C' du plan tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point O.
On suppose que :
- les droites (BC) et (B'C') sont sécantes en un point I,
- les droites (CA) et (C'A') sont sécantes en un point J,
- les droites (AB) et (A'B') sont sécantes en un point K.



Démontrer que les points I, J et K sont alignés.
(On pourra considérer O comme barycentre des points A et A', des points B et B', des points C et C'.)

54 Soit A, B, C trois points non alignés et α, β, γ trois nombres réels tels que :
- les points pondérés (A, α), (B, β), (C, γ) admettent un barycentre G ;
- les points pondérés (A, $-\alpha$), (B, β), (C, γ) admettent un barycentre G_1 ;
- les points pondérés (A, α), (B, $-\beta$), (C, γ) admettent un barycentre G_2 ;
- les points pondérés (A, α), (B, β), (C, $-\gamma$) admettent un barycentre G_3.

1. Démontrer que les droites (AG_1), (BG_2) et (CG_3) concourent en G.
2. Démontrer que les droites (G_2G_3), (G_3G_1) et (G_1G_2) passent respectivement par A, B et C.

55 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$, O un point quelconque de $\mathscr{E}$, A et B les points tels que :
$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$
1. On désigne par ($\mathscr{P}$) le plan orthogonal à (OA) en O, par B_1 le projeté orthogonal de B sur ($\mathscr{P}$) et par B' l'image de B_1 par la rotation r dans ($\mathscr{P}$) de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
[($\mathscr{P}$) est orienté par le choix du vecteur normal $\vec{u}$.]