11 de outubro de 2016

Fórmulas FNC e FND

Uma fórmula FNC F sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é a conjunção de disjunções de literais (uma das variáveis ou a tua negação).

$$F = C_1 \wedge \cdots \wedge C_s$$

Onde cada cláusula C_i é a disjunção de literais e s é o tamanho de F.
Se cada clásula tem no máximo k literais então dizemos que F tem largura k e dizemos que F é uma k-FNC.

Fórmulas FNC e FND

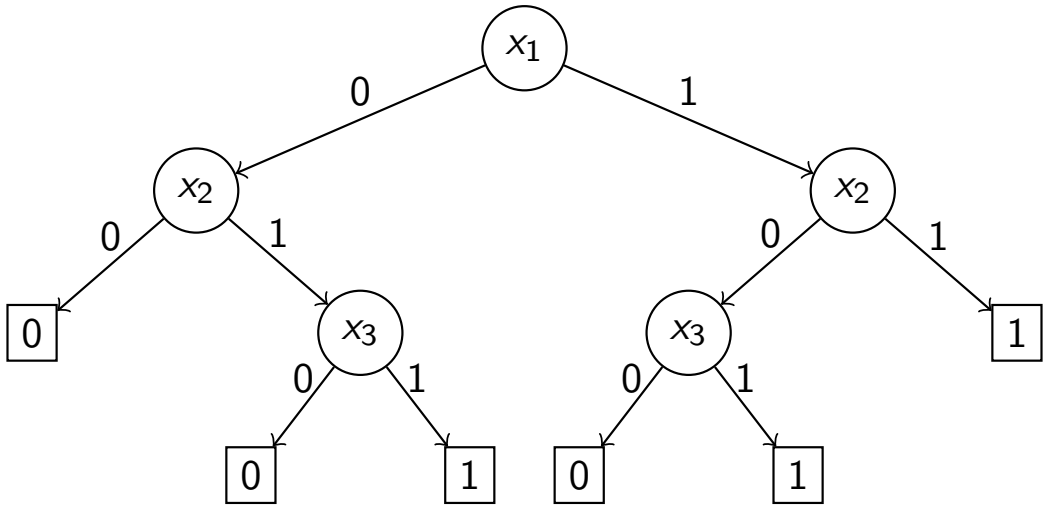
Uma fórmula FND F por outro lado é a disjunção de conjuções de literais.

$$F = T_1 \vee \cdots \vee T_s$$

Onde cada termo T_i é a conjunção de literais e s é o tamanho de F.
De novo, se cada termo tem no máximo k literais então F tem largura k e F é uma k-FND.

Árvores de decisão

Uma árvore de decisão é algo como a imagem abaixo:



- Cada nodo leva o label de uma das variáveis.
- Começando do nodo mais alto, o algoritmo ramifica para a direita ou à esquerda dependendo do valor da variável lida.
- As folhas guardam o valor da função em cada entrada que chega nela.

Árvores de decisão

Denotamos a sáida de uma árvore de decisão T sobre a entrada x por $T(x)$. Se f é tal que $f(x) = T(x)$ para todos os x então dizemos que T computa a função f.

- Por exemplo, a árvore de decisão do slide anterior computa a função que Majority_3, que é 1 se e somente se o número de 1s na entrada é pelo menos 2.

O tamanho de T é o número de folhas e tua profundidade é o maior camnho do nodo mais alto até uma das folhas.

- A árvore do slide anterior tem tamanho 6 e profundidade 3.

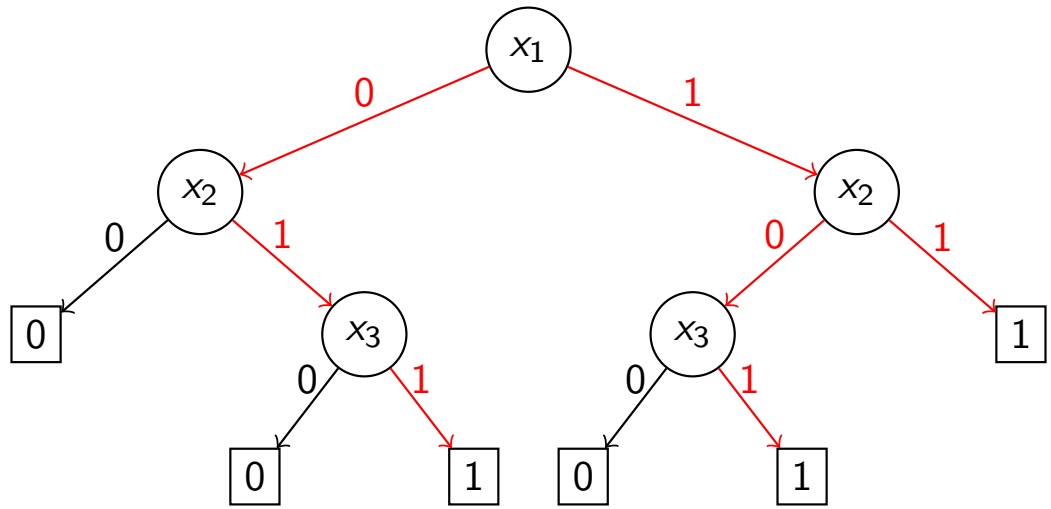
Árvores de decisão

É importante notar que árvores de decisão são mais fracas do que fórmulas FNC (FND).

- Se T é uma árvore de decisão de tamanho s e profundidade d então existe uma fórmula FND (FNC) F tal que $F(x) = T(x)$, para todos x, de tamanho $\leq s$ e largura $\leq d$.
  - FND: Cada caminho P da árvore tal que $T(P) = 1$ define uma cláusula.
  - FNC: Cada caminho P da árvore tal que $T(P) = 0$ define um termo.

Árvores de decisão

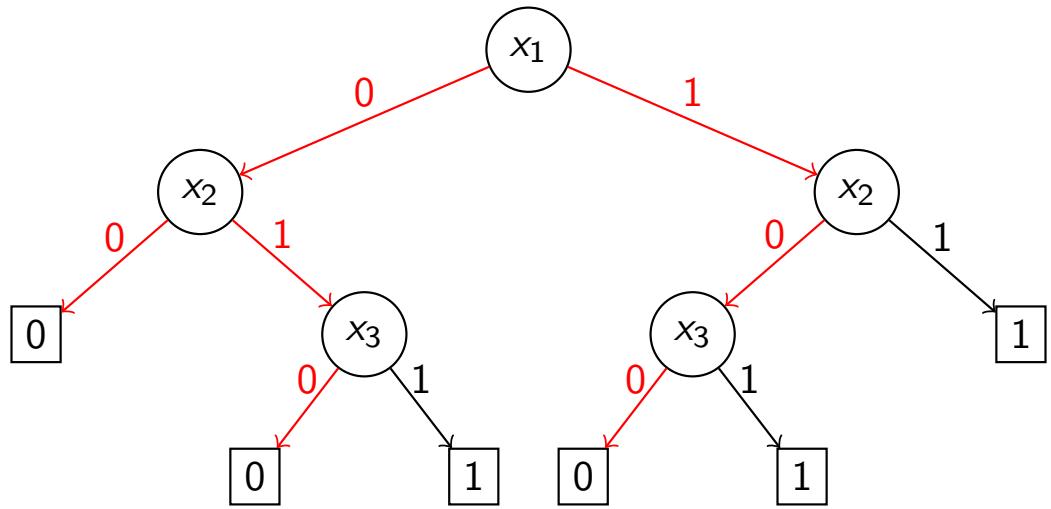
É importante notar que árvores de decisão são mais fracas do que fórmulas FNC (FND).



$$F = (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

Árvores de decisão

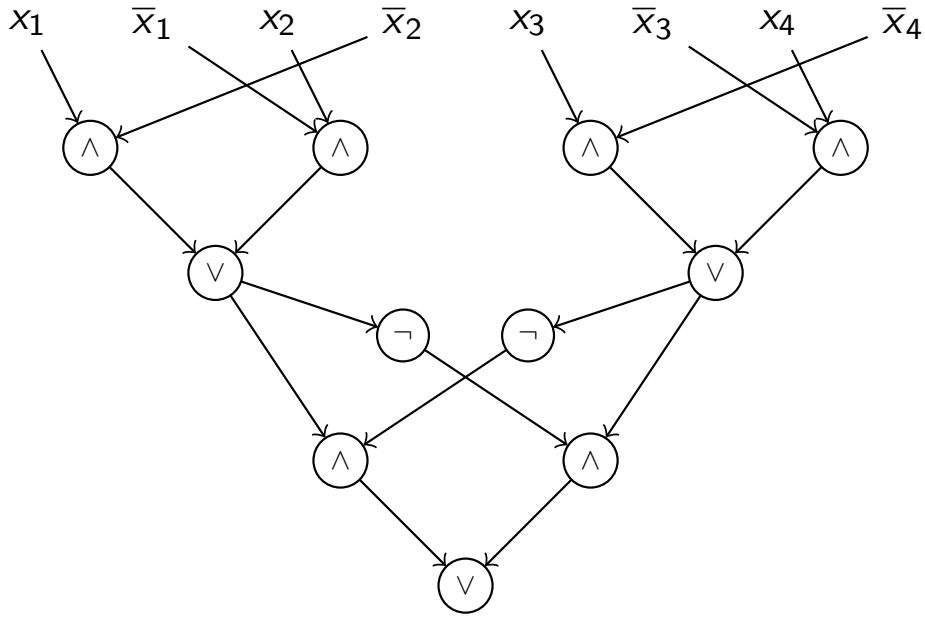
É importante notar que árvores de decisão são mais fracas do que fórmulas FNC (FND).



$$F = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Circuitos

Um circuito Booleano é composto de portas lógicas computando uma das funções em $\{\wedge, \vee, \neg)$ e fios ligando estas portas lógicas como mosta a figura abaixo:



Este circuitos tem 4 variáveis de entrada (sem contar a negação de cada variável). Todos circuitos tem uma única porta lógica no nível mais alto, o valor desta porta lógica é a saída do circuito.

Circuitos

Nós dizemos que um circuito C com n variáveis de entrada computa $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ se $C(x) = f(x)$, para todos $x \in \{0,1\}^n$.

- O circuito do slide anterior computa a função Parity_4.
  - $\text{Parity}_4(x) = 1$ se e somente se $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 1 \pmod 2$.

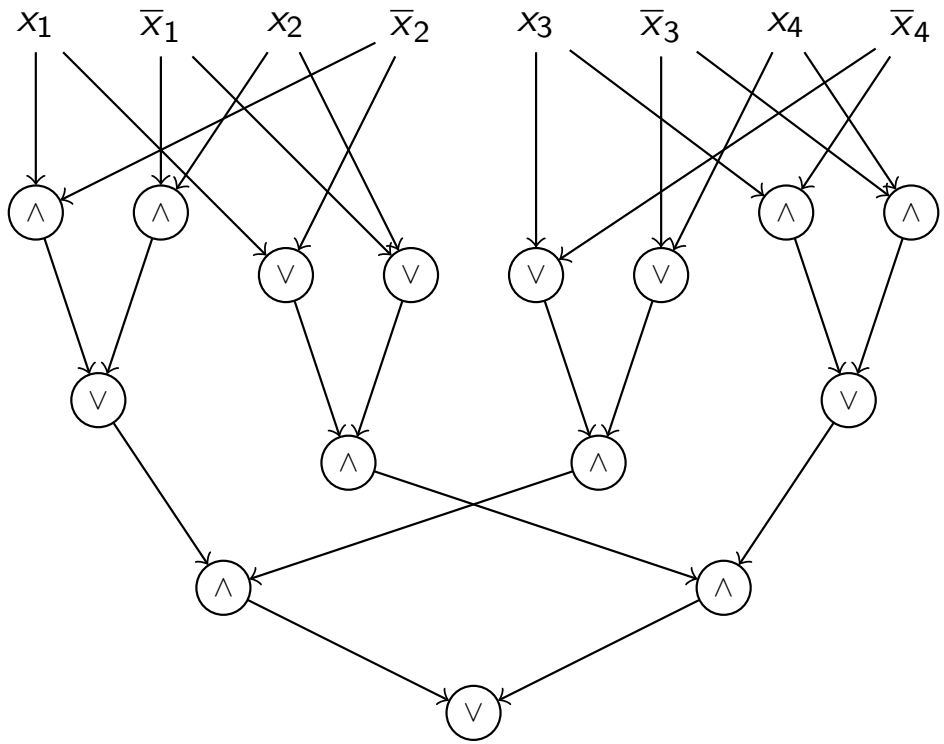
O tamanho de um circuito é o número de portas lógicas e a tua profundidade é o tamanho do maior caminho de uma variável de entrada até a porda de saída.

- O nosso circuito para $Parity_4$ tem tamanho 11 e profundidade 4.
- Em geral, Parity_n tem um circuito de tamanho $\mathcal{O}(n)$ e profundidade $\mathcal{O}(\log n)$.

Circuitos

Pela lei de De Morgan nós podemos empurrar as portas $\neg$ para as variáveis de entrada.

- Se o circuito original tinha tamanho S então o circuito resultante tem tamanho $\leq 2S$.



O circuito acima também computa Parity_4 e tem tamanho 15.

Complexidade de circuitos

Dada uma função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ nós queremos saber qual é o menor circuito que computa f.

- Seja $\mathscr{C}$ o conjunto de circuitos que computam f.
- $\text{Size}(f) = \min_{C \in \mathscr{C}}\{|C|\}$.

Se $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ então temos que definir uma sequência de circuitos $\{C_n\}_{n \geq 1}$ onde cada C_n computa f restrita à strings de tamanho n.

- $\text{Size}(f) = \mathcal{O}(g)$ se existem constantes c e n_0 tal que $|C_n| \leq cg(n)$, para todos $n \geq n_0$.
- Como já comentamos, $\text{Size}(\text{Parity}) = \mathcal{O}(n)$.

Complexidade de circuitos: P/poly

Algumas classes de complexidade de circuitos:

- P/poly : circuitos de tamanho polinomial.
  - Contém toda a classe P.
  - Contém todas as linguagens unárias.
    - Logo contém alguns problemas indecidíveis.
  - A tua versão (P-)uniforme (ou logspace-uniforme) coincide com a classe P.

Complexidade de circuitos: P/poly

- Problema em aberto: NP $\subseteq$ P/poly?
  - NP $\not\subseteq$ P/poly implicaria em P $\neq$ NP.
  - Teorema de Karp-Lipton: NP $\subseteq$ P/poly $\Rightarrow$ PH $= \Sigma_2^p$.
- Problema em aberto: Existe, para todo $k \geq 1$, uma linguagem em P que não admite circuitos de tamanho n^k?
  - Suponha que P $\neq$ NP, isto é verdade porque a classe NP não admite circuitos pequenos ou é porque circuitos para problemas em P são pequenos demais?

Complexidade de circuitos: NC e AC

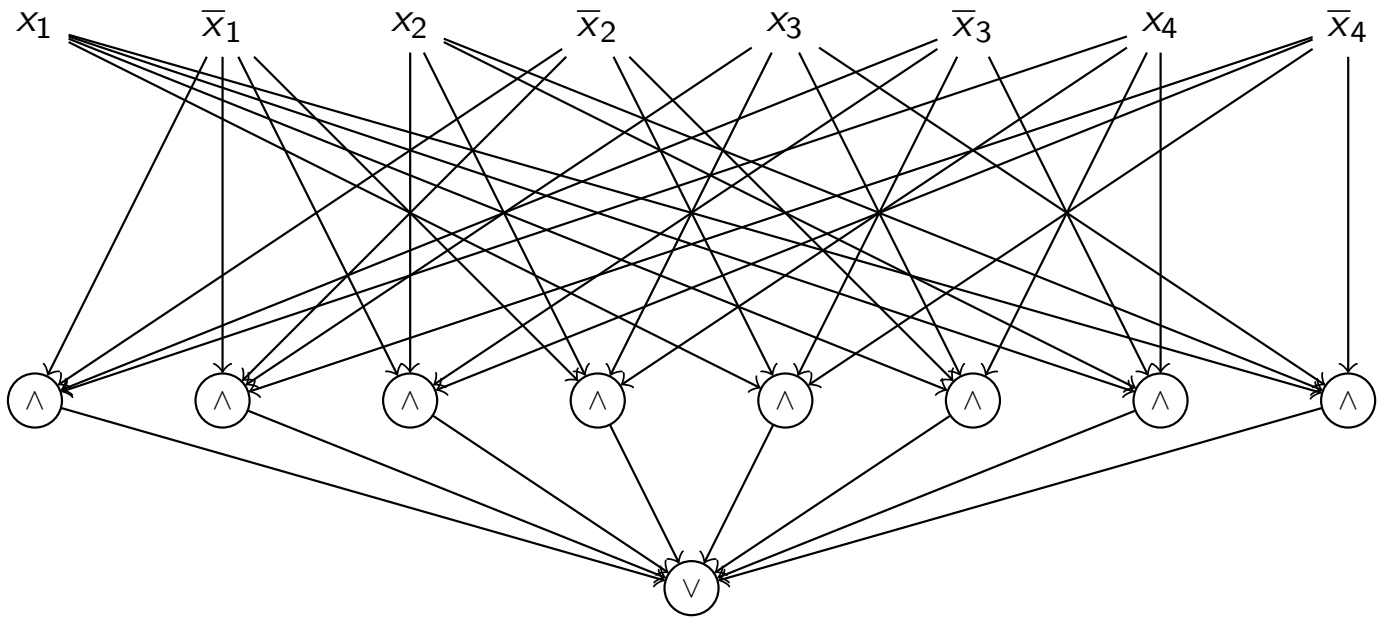
Algumas classes de complexidade de circuitos:

- NC^i: circuitos de tamanho polinomial e profundidade $\log^i n$.
- $\mathrm{NC} = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{NC}^i$.
  - Exemplo: computar a determinante de uma matriz está em NC.
- AC^i: circuitos de tamanho polinomial, profundidade $\log^i n$ e fan-in arbitrário.
- $\mathrm{AC} = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{AC}^i$.
- $\mathrm{NC}^0 \subseteq \mathrm{AC}^0 \subseteq \mathrm{NC}^1 \subseteq \mathrm{AC}^1 \subseteq \cdots \Rightarrow \mathrm{NC} = \mathrm{AC}$.

Complexidade de circuitos: NC e AC

Um circuito AC^0 é qualquer circuito com fn-in arbitrário e que alterna portas $\vee$ e portas $\wedge$.

- Por exemplo, o seguite circuito é um circuito AC^0 para Parity_4.



- Todas fórmulas FNC e FND são circuitos AC^0.

Tribes

A função $\text{Tribes}_{w,s} : \{0,1\}^{ws} \to \{0,1\}$ é definida da seguinte forma:

$$\text{Tribes}_{w,s}(x) = \bigvee_{i=1}^{s} (x_{1,i} \wedge x_{2,i} \wedge \cdots \wedge x_{w,i}).$$

Onde as variáveis são indexadas por $(i,j) \in [w] \times [s]$.

- $\text{Tribes}_{w,s}$ é trivialmente computável por um circuito FND de tamanho $s+1$.
- Toda árvore de decisão que computa $\text{Tribes}_{w,s}$ tem que ter profundidade ws — $\text{Tribes}_{w,s}$ é evasiva.

Tribes_n

Nós estamos mais interessados na seguinte escolha de parâmetros:

- Para cada $w \geq 1$, escolhemos s o maior inteiro tal que

$$(1 - 2^{-w})^s = \Pr[\text{Tribes}_{w,s}(x) = 0] \geq 1/2.$$

- $n = ws$.

Desta forma temos que Tribes_n é uma função "imparcial", os valores 1 e 0 aparece com basicamente a mesma probabilidade. Também temos que

- $s = \Theta(\frac{n}{\log n})$.
- $w = \log n - \log\log n - o(1)$.

Na verdade, $s \approx 2^w ln(2)$ e portanto $(1 - 2^{-w})^s \to 1/2$ com $w \to \infty$.

Teorema de Baker-Gill-Solovay

O teorema de Baker-Gill-Solovay diz que existem oráculos A e B tais que

- $\mathrm{P}^A = \mathrm{NP}^A$.
- $\mathrm{P}^B \neq \mathrm{NP}^B$.

Nós podemos provar que existe B tal que $\mathrm{P}^B \neq \mathrm{NP}^B$ (a parte não-trivial do teorema) usando o fato que a função Tribes_n é evasiva.

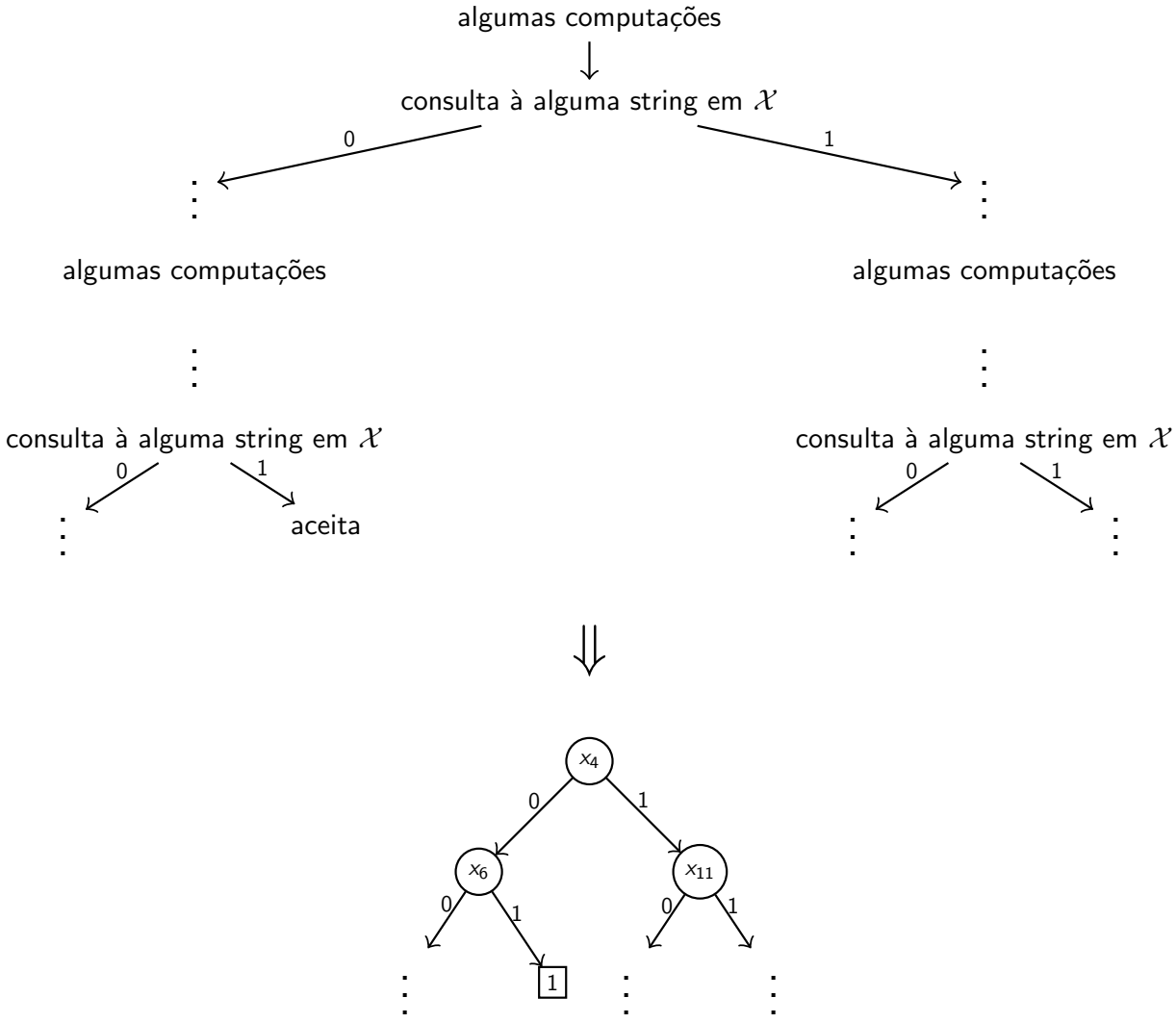
Teorema de Baker-Gill-Solovay - Prova

Seja M uma máquina de Turing de tempo polinomial que tem uma fita de oráculo e $x \in \{0,1\}^*$. Nós consideramos o seguinte:

- $\mathcal{X}$ um subconjunto finito de $\{0,1\}^*$.
- $A \subseteq \{0,1\}^* \setminus \mathcal{X}$ um oráculo.
- $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}$ uma árvore de decisão que recebe a string característica de um oráculo subconjunto de $\mathcal{X}$.
  - A string característica de $B \subseteq \mathcal{X}$ é a string x_B que é 1 no i-ésimo bit se a i-ésima string em $\mathcal{X}$ (sobre alguma enumeração das strings binárias) está em B.
- $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}(x_B) = 1 \iff M^{A \cup B}(x) = 1$.

Teorema de Baker-Gill-Solovay - Prova

Se M é uma máquina de Turing de tempo polinomial e $x \in \{0,1\}^*$.



Teorema de Baker-Gill-Solovay - Prova

No caso especial em que $\mathcal{X} = \{0,1\}^n$, $n = |x|$.

- $T_{M^A,x}^{\{0,1\}^n}$ tem profundidade polilogarítmica (o que é $\ll n$).
- Pois se M roda em tempo $\leq n^c$ então M faz no máximo n^c consultas ao oráculo.
- $n^c = \text{polylog}(2^n)$.