

Lista teoremi Teoria dei Segnali

Introduzione

1. $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0 e ha potenza media su un intervallo finita, allora ha \bar{P} finita e calcolabile sul periodo:

Per definizione $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$. Scegliamo come periodo NT_0 , in quanto se $N \rightarrow \infty$ vale come $T \rightarrow \infty$.

Quindi $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |x(t)|^2 dt$ equivale a N integrali cui si aggiunge un T_0 ogni volta:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \cdot \mathcal{N} \left\{ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt \right\} = \bar{P} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Segnali periodici a tempo continuo

Serie di Fourier

2. Da forma polare a complessa (o rettangolare)

la forma polare della serie di Fourier è data da:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_K) \\ &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_K)}}{2} \rightarrow \text{uso formula di Eulero per il coseno} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} \rightarrow \text{separo le due esponenziali} \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\theta_K} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j\theta_K} e^{-j2\pi k f_0 t} \rightarrow \text{raggruppo le sommatorie } ek \text{ diventa } -k \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} \\ &\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \text{ forma complessa della serie di Fourier} \end{aligned}$$

3. Come si calcolano i coefficienti X_n ?

Partendo dalla forma complessa, moltiplico a destra e a sinistra per $e^{-j2\pi k f_0 t}$, integrando sul periodo T_0 .

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Porto fuori la sommatoria e raccolgo e : per ipotesi la serie converge.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

L'integrale al secondo membro viene calcolato per $k \neq n$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{e^{j2\pi(k-n)f_0 t}}{j2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \\ &\frac{e^{j\cancel{2\pi(k-n)f_0 \frac{T_0}{2}}} - e^{-j\cancel{2\pi(k-n)f_0 \frac{T_0}{2}}}{2j \cdot \pi(k-n)f_0} \rightarrow \text{uso formula di Eulero per il seno} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} k=n \rightarrow T_0 \\ k \neq n \rightarrow 0 \end{cases} \rightarrow \text{sostituiamo questo risultato}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0 \Rightarrow X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

N-esimo termine della serie di Fourier

4. Forma rettangolare dalla forma polare

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

usiamo la formula di addizione $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (\cos(2\pi k f_0) \cos(\theta_k) - \sin(2\pi k f_0) \sin(\theta_k)))$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0) - b_k \sin(2\pi k f_0)]$$

sapendo che $a_0 = A_0$, $a_k = A_k \cos(\theta_k)$, $b_k = B_k \sin(\theta_k)$.

Abbiamo quindi ottenuto la forma rettangolare della serie di Fourier, dove si nota che un segnale *periodico* $x(t)$ può essere espresso tramite una **somma di seni e coseni**.

Il coefficiente X_n può essere espresso anche come:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) (\cos(2\pi k f_0 t) - j \sin(2\pi k f_0 t))$$

$$X_k = a_k + j b_k = A_k \cos(\theta_k) + j A_k \sin(\theta_k) = A_k e^{j\theta_k}$$

5. Criterio di Dirichlet (per $x(t)$ periodico):

È una serie di condizioni che se incontrate sono sufficienti per poter sviluppare un dato segnale $x(t)$ in serie di Fourier:

- $x(t)$ deve essere *assolutamente integrabile sul periodo*: ovvero $(\int_{[T_0]} |x(t)| dt < \infty)$
- $x(t)$ deve essere *continua* (o avere un numero *finito* di discontinuità di prima specie)
- $x(t)$ deve essere *derivabile sul periodo* T_0 , escluso al più un numero finito di punti, dove comunque esiste **finita** sia la derivata destra che la derivata sinistra
 - quest'ultima ipotesi è equivalente a: $x(t)$ presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo. La serie **converge** al valore assunto da $x(t)$ dove *continua* e alla semisomma dei limiti sinistro e destro se discontinua.

Spettro di un segnale periodico e reale

Proprietà

6. Simmetria Hermitiana dello spettro reale:

I coefficienti X_k sono generalmente quantità complesse del tipo

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

X_k può essere rappresentata tramite spettro di ampiezza e spettro di fase, discreti (esiste solo in corrispondenza delle armoniche k)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Analizziamone il coniugato X_k^* :

$$X_k^* = \left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)^* e^{+j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi(-k) f_0 t} dt$$

È da notare come $x(t)^* = x(t)$, dal momento che il segnale $x(t)$ è reale.

Quindi $X_k^* = X_{-k}$: i coefficienti X_k di un segnale *reale* **godono di simmetria hermitiana**, ossia hanno lo stesso modulo e fase opposta

$$X_{-k} = X_k^* \iff \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| & \text{stesso modulo} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} & \text{fase opposta} \end{cases}$$

In definitiva per un segnale reale:

- lo spettro d'ampiezza è **simmetrico** rispetto a $k \rightarrow$ pari
- lo spettro di fase è **antisimmetrico** rispetto a $k \rightarrow$ dispari

7. Linearità dello spettro reale:

Se $x(t)$ e $y(t)$ sono due segnali con periodo T_0 *reali* allora vale:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \iff Z_k = aX_k + bY_k$$

Somma di *oscillazioni* alle (o con?) le stesse frequenze dei segnali $x(t)$ e $y(t)$.

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (ax(t) + by(t)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{a}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{b}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = aX_k + bY_k \end{aligned}$$

8. Parità e disparità del segnale

- Se $x(t)$ è **pari**, allora il coefficiente $X_k = X_{-k}$; se il segnale è anche **reale** vale $X_k = X_{-k} = X_k^* \iff X_k \in \mathbb{R}$.

$X_k = X_{-k}$ (con un cambio di variabile $\alpha = -t \rightarrow dt = -d\alpha$).

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \iff X_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi (-k) f_0 t} dt$$

Utilizziamo il cambio di variabile

$$\begin{aligned} X_{-k} &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(-\alpha) e^{-j2\pi (-k) f_0 (-\alpha)} d\alpha = -\frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = X_k \end{aligned}$$

dato che il segnale $\in \mathbb{R}$ lo possiamo rappresentare come (perché essendo reale ha fase nulla?):

$$x(t) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}}{2} = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t) \end{aligned}$$

Da ciò deduco che un segnale reale e pari è esprimibile in serie di soli *coseni* (i quali sono a loro volta pari).

Possiamo inoltre scrivere i coefficienti X_k in modo semplificato, data la *parità* del segnale:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{pari}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}} dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{pari}} \cdot \underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}} dt = \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \cos(2\pi k f_0 t) dt - 0 \end{aligned}$$

Integrale di una funzione pari su un intervallo simmetrico.

- se $x(t)$ è **dispari**, allora anche i coefficienti X_k saranno dispari. Inoltre, dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k sarà un **immaginario puro**, ed

$$x(t) = 2j \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t) \text{ e } X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

Dimostrazione:

- Dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k , allora vale $X_{-k} = -X_k = X_k^* \Rightarrow X_k^* = -X_k$, quindi è un immaginario puro!
- Per X_k :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}} dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}} \cdot \underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}} dt = \\ &= -\frac{2j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

• Note varie

- Se $x(t)$ è pari i suoi coefficienti X_k sono reali e lo spettro di fase vale 0 o $\pm\pi$; mentre se $x(t)$ è dispari i suoi coefficienti X_k sono immaginari puri e lo spettro di ampiezza non viene toccato: un segnale dispari è solo “spostato” nel tempo.
- È da notare come la diversa velocità di un segnale dipenda dal suo andamento temporale: le variazioni brusche comportano la presenza di **armoniche**[1] con k più elevato per rappresentare la velocità alta(?):
 - * più il segnale è regolare meno armoniche sono necessarie per “ricreare” il segnale
 - $\frac{1}{k} \rightarrow$ funzioni discontinue: dente di sega ideale, onda quadra, onda quadra “antisimmetrica”, rect
 - $\frac{1}{k^2} \rightarrow$ funzioni continue a derivata discontinua: onda triangolare. [1]: TODO: definire meglio armoniche

Segnali aperiodici a tempo continuo

Trasformata continua di Fourier

Una funzione non periodica, definita tra $-\infty$ e ∞ , può essere rappresentata come **somma di infinite armoniche semplici** di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile con continuità tra $-\infty$ e ∞

9. Dal segnale periodico al segnale aperiodico...

Partiamo dall'impulso rettangolare *aperiodico* $\text{rect} \frac{t}{T}$:

$$x(t) = \text{rect} \frac{t}{T} \rightarrow x_p(t) = \sum \text{rect} \left(\frac{t - nT_0}{T} \right) \text{ treno di impulsi rettangolari}$$

possiamo vedere $x(t)$ come caso limite di $x_p(t)$ con periodo $T_0 \rightarrow \infty$

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t)$$

1. la frequenza diventa infinitesima ($f_0 = \frac{1}{T_0}$)
2. si riduce la *distanza tra le armoniche*, ossia si **infittisce** lo spettro;
3. $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$, l'ampiezza assume valori *sempre più piccoli*

Usiamo il coefficiente *modificato* $X(f_0 k) = T_0 X_k$ per ovviare il problema. Riscriviamo $x_p(t)$ e X_k

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t} \cdot f_0 \rightarrow x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df}_{\text{integrale di Fourier}}$$

Le armoniche si *infittiscono talmente tanto* da non essere più distinte ma **continue**.

$$X(k f_0) = T_0 X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \rightarrow X(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt}_{\text{trasformata continua di Fourier}}$$

$X(f)$ è una **funzione complessa della variabile continua** f , quindi è di spettro continuo.

- Nota: **differenze tra segnali continui periodici e aperiodici**:
 - un segnale *periodico* è rappresentato da componenti sinusoidali a frequenze in relazione **armonica** (multipli di f_0 , frequenza *fondamentale* e ad ampiezza finita).
 - un segnale *aperiodico* è rappresentato con componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima* $|X(f)| df$ e frequenza f variabile con continuità su \mathbb{R} ; è un segnale periodico di periodo illimitato con f_0 infinitesimo. Le armoniche discrete *degenerano* nell'insieme continuo.

10. Criteri di esistenza per la trasformata continua di Fourier (TCF)

1. $X(f)$ esiste se il segnale $x(t)$ ha energia finita (condizione “sufficiente”)!
2. Criteri di Dirichlet:
 1. la funzione deve essere assolutamente sommabile: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$
 2. se in qualunque intervallo finito $t_1 < t < t_2$ è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie
 3. se in qualunque intervallo finito $t_1 < t < t_2$ la funzione ha un numero finito di massimi e minimi.

Allora $x(t)$ è rappresentabile come TCF e

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \begin{cases} x(t) & \text{se continua} \\ \frac{x(t_0^+) - x(t_0^-)}{2} & \text{se discontinua} \end{cases}$$

11. Simmetria Hermitiana della trasformata continua di Fourier

Possiamo rappresentare $X(f)$ in forma rettangolare:

$$X(f) = Re(f) + j Im(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$\underbrace{Re(f) = Re(-f)}_{\text{pari}} \text{ e } \underbrace{Im(f) = -Im(-f)}_{\text{dispari}} \Rightarrow X(f) = X^*(-f) \text{ simmetria hermitiana}$$

infatti $X(f) = Re(f) + j Im(f) = Re(-f) + j Im(f) = X^*(-f)$

- lo spettro di ampiezza è quindi *pari* a quello di fase *dispari*.

12. Parità e disparità:

- se un segnale è *reale e pari*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) df = \begin{cases} Re(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \\ Im(f) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow X(f) = Re(f) \rightarrow X(f) = X(-f)$ è reale e pari

- se un segnale è *dispari e reale*

$$X(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = \begin{cases} \text{Re}(f) = 0 \\ \text{Im}(f) = -2 \int_0^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \end{cases}$$

$\rightarrow X(f) = j\text{Im}(f) \rightarrow X(f) = -X(f)$ è immaginaria pura e dispari

Proprietà della trasformata continua

13. Linearità

Dati due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con le loro trasformate continue di Fourier $X_1(f)$ e $X_2(f)$, allora se:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \iff X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

con a, b costanti, $X_1(f) = \text{TCF}[x_1(t)]$ e $X_2(f) = \text{TCF}[x_2(t)]$

- Dimostrazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ax_1(t) + bx_2(t)) e^{-j2\pi ft} dt$$

ma sappiamo che l'integrale è *lineare*, quindi

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi ft} dt = aX_1(f) + bX_2(f)$$

14. Dualità

se $x(t) \iff X(f)$, allora $X(t) \iff x(-f)$:

Se la trasformata continua di Fourier passa ad essere un *segnale nel tempo*, allora $x(-f)$ è la sua trasformata di Fourier. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra la funzione e la sua trasformata.

- Esempio:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \iff \text{sinc}(fT)$$

Ma se nel tempo ho un segnale $\text{sinc}(bT)$ qual è la sua trasformata?

$T \text{sinc}(Tt) \iff \text{rect}\left(-\frac{f}{T}\right)$ da cui $\text{sinc}(Bt) \iff \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{t}{B}\right)$, dove B indica la banda.

- Dimostrazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \rightarrow x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi ft} dt$$

con uno scambio di variabili t con f . Quindi:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Da qui deriviamo che $x(-f)$ è la trasformata di $X(t)$

15. Ritardo

Sia $X(f) = \text{TCF}[x(t)]$: la trasformata di Fourier di $x(t)$ ritardato nel tempo di una quantità t_0 è pari a:

$$x(t - t_0) \iff X(f) e^{-j2\pi ft_0}$$

- Dimostrazione:

Applichiamo a $x(t - t_0)$ la definizione di TCF

$$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \text{sostituiamo } \begin{cases} \alpha = t - t_0 \rightarrow t = \alpha + t_0, dt = d\alpha \end{cases}$$

$$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi(\alpha+t_0)f} d\alpha = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = e^{-j2\pi ft_0} X(f)$$

- Esempio:

$$A \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \iff AT \text{sinc}(fT) e^{-j\frac{1}{2}\pi fT}$$

Se $y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow Y(f) = X(f) e^{-j2\pi f t_0} \Rightarrow$ Un ritardo modifica lo spettro di **fase** ma *non cambia* il suo spettro di ampiezza, in quanto quest'ultimo indica quali componenti sinusoidali sono necessarie per comporre la forma del segnale, mentre lo spettro di fase mi dice con quale *angolo* iniziale devono "partire" le sinusoidi.

Quindi se il segnale si sposta nel tempo, allora le sinusoidi hanno angoli iniziali diversi, ma sono le stesse.

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |e^{-j2\pi f t_0}| = |X(f)|$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f) e^{-j2\pi f t_0} = \angle X(f) + \angle e^{-j2\pi f t_0} = \angle X(f) + \overbrace{-2\pi f t_0}^{=0}$$

NON è una traslazione!

16. Cambiamento di scala

Si consideri $y(t) = x(\alpha t)$, effettuando un *cambiamento della scala temporale*:

$|\alpha| > 1 \rightarrow$ compressione della scala dei tempi \rightarrow l'evoluzione è "accelerata"

$|\alpha| < 1 \rightarrow$ dilatazione della scala dei tempi \rightarrow l'evoluzione è "rallentata"

$\alpha < 0 \rightarrow$ inversione della scala dei tempi

Inoltre vale:

$$x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

• Dimostrazione:

$$\cdot \underline{\alpha > 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt, \text{ ponendo } z = \alpha t \rightarrow t = \frac{z}{\alpha}, dz = \alpha dt \rightarrow dt = \frac{dz}{\alpha}$$

$$\Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha} dz = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}} dz = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$$\cdot \underline{\alpha < 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha} dz = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}} dz = -\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

È da notare come l'inversione dell'integrale nel secondo caso l'abbiamo quando $t \rightarrow -\infty$, $z \rightarrow +\infty$. Inoltre abbiamo sostituito $z = -\alpha t$.

Quindi una *dilatazione* nel tempo corrisponde ad una *compressione* in frequenza, e **viceversa**

17. Modulazione

Dato un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(f)$ allora

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

dove $X(f - f_0)$ e $X(f + f_0)$ sono rispettivamente la replica centrata in f_0 e la replica centrata in $-f_0$.

• Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{TCF}[x(t) \cos(2\pi f_0 t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [e^{-j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \right] = \\ &= \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \end{aligned}$$

Corollario: $x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0) \rightarrow$ *traslazione in frequenza*

18. Derivazione

Se $x(t) \rightarrow X(f)$, allora:

$$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f) = Y(f)$$

Una derivata nel tempo è una *moltiplicazione* in frequenza.

- Dimostrazione:

Deriviamo entrambi i lati di $x(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [X(f) e^{j2\pi ft}] df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) (2\pi f) e^{j2\pi ft} df \Rightarrow \text{TCF} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = j2\pi f X(f)\end{aligned}$$

Il teorema della derivazione *modifica gli spettri*

$$\begin{aligned}|Y(f)| &= 2\pi f |X(f)| \\ \angle Y(f) &= \angle X(f) + \text{sgn}(f) \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Aumenta proporzionalmente l'ampiezza, esaltando le altre frequenze, e sfasando di $\pm \frac{\pi}{2}$

19. **Integrazione** (deriva dal teorema di derivazione)

Dato un segnale $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ e un segnale $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$, allora vale

$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

- Dimostrazione:

Segue dal teorema di derivazione e richiede che $X(0) = 0$, al fine di evitare che per $f \rightarrow 0$, il rapporto tenda ad infinito.

$$\begin{aligned}X(0) = 0 &\Leftrightarrow X(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^0 dt}_{\text{sottende area nulla}} \Leftrightarrow y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \rightarrow 0 \\ y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Rightarrow x(t) \frac{d}{dt} y(t) \Rightarrow X(f) = j2\pi f \cdot Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}\end{aligned}$$

Anche l'integrale nel tempo si trasforma in un'operazione algebrica in frequenza: in questo caso però vengono esaltate le componenti a **bassa** frequenza nello spettro del segnale, mentre le alte vengono attenuate; la fase varia sempre di $\pm \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}|Y(f)| &= \frac{|X(f)|}{2\pi f} \\ \angle Y(f) &= \angle X(f) + \text{sgn}(f) \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Da questo teorema deriva la relazione $\text{Atri}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$; $\text{Arect}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow AT \text{sinc}(fT)$

20. **Prodotto**: è il duale della convoluzione

Partendo da due segnali $x(t)$ e $y(t)$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow X(f) \otimes Y(f)$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\Rightarrow Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{-j2\pi \nu t} d\nu \right] y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi (f-\nu)t} dt \right] d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(f-\nu) d\nu = \\ &= X(f) \otimes Y(f)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\underset{\text{PRODOTTO}}{x(t) y(t)} \Leftrightarrow \underset{\text{CONVOLUZIONE}}{X(f) \otimes Y(f)} \rightarrow \text{la convoluzione è commutativa}$$

Nota Bene: ν è **nu**!

21. *Convolutione*

Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sappiamo che:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \iff X(f) Y(f)$$

- Dimostrazione:

Partiamo sempre dalla definizione di TCF:

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) y(t - \alpha) d\alpha \iff Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(\alpha) y(t - \alpha) d\alpha] e^{-j2\pi f(t - \alpha + \alpha)} dt = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) \underbrace{\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t - \alpha) e^{-j2\pi f(t - \alpha)} dt \right]}_{Y(f)} e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) Y(f) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = X(f) Y(f) \end{aligned}$$

- Nota bene:

– la convoluzione ha proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Trasformata di Fourier generalizzata

22. Teorema d'integrazione **completo**:

Vogliamo rimuovere il vincolo (o ipotesi) $X(0)$ che è alla base dell'applicabilità del teorema d'integrazione "incompleto": ciò viene realizzato utilizzando la delta di Dirac.

Il teorema completo afferma che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \iff Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \cdot X(0)$$

Il nuovo termine rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale!.

- Dimostrazione:

Essendo:

$$\begin{aligned} x(t) \otimes u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) u(t - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \\ u(t) &= \frac{1}{2} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

abbiamo che per la convoluzione $x(t) \otimes u(t) \iff X(f)U(f)$:

$$X(f) U(f) = X(f) \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$$

Questo perché $\text{TCF}(u(t)) = U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$; l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla: rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale, ed è un termine correttivo che rappresenta la funzione impulsiva.

23. Teorema della modulazione, alternativa:

- Dimostrazione:

per il teorema del prodotto,

$$\begin{aligned} x(t) \cos(2\pi f_0 t) &\iff X(f) \otimes \left[\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right] = \\ &= X(f) \otimes \frac{\delta(f - f_0)}{2} + X(f) \otimes \frac{\delta(f + f_0)}{2} \\ \rightarrow X(f) \otimes \delta(f - f_0) &= \int_{\mathbb{R}} X(\alpha) \delta(f - f_0 - \alpha) d\alpha = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha) \delta(\alpha) - (f - f_0) d\alpha = X(f - f_0) \\ x(t) \cos(2\pi f_0 t) &\iff \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \end{aligned}$$

Periodicizzazione

24. Prima formula della somma di Poisson:

Come rendere un segnale *aperiodico* $x(t)$ **periodico** di periodo T_0 . Partiamo da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$ relazione nel tempo tra periodico e aperiodico

$$\begin{aligned} \rightarrow Y_k &= \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t - nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \text{sostituiamo } \begin{cases} \alpha = t - t_0 \\ t = \alpha + t_0 \\ d\alpha = dt \end{cases} \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 (\alpha + nT_0)} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 nT_0}}_{\text{multiplo di } 2\pi \rightarrow e^0} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \underbrace{\frac{1}{T_0} X(kf_0)}_{\text{campionamento in frequenza}} \end{aligned}$$

Si ottiene una relazione detta **campionamento in frequenza**. I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico $y(t)$ sono, a meno del fattore $\frac{1}{T_0}$, i campioni della TCF del *segnale base* $x(t)$ presi in corrispondenza delle frequenze armoniche kf_0

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

25. Seconda formula della somma di Poisson

Applichiamo alla prima formula di Poisson il teorema della dualità:

$$\begin{aligned} X(t) &\leftrightarrow x(-f) \\ x(t) &\leftrightarrow X(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{+j\frac{2\pi k t}{T_0}} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left(x\left(-\frac{k}{T_0}\right)\right) e^{+j\frac{2\pi k t}{T_0}} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} \text{ cambio di segno all'indice } k \\ \rightarrow T &= \frac{1}{T_0} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(t - \frac{n}{T}\right) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(kT) e^{-j2\pi k t T} \end{aligned}$$

Adesso, dal punto di vista puramente formale, cambiano nome da t in f , otteniamo un'espressione, otteniamo un'espressione *duale* rispetto alla prima formula di Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Sistemi

26. Teorema di Parseval:

Dato un segnale $x(t)$ e la sua energia $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$ (energia finita), possiamo esprimere l'energia E_x anche in frequenza:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi f t} df \right] dt \\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

E_x è l'energia totale, deriva da $p_x = |x(t)|^2$ potenza istantanea integrata o da $|X(f)|^2$ detta **densità spettrale** $E_x(f)$ integrata.

27. Teorema di Wiener-Khinchin

Siamo la densità spettrale di potenza:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

e la funzione *densità spettrale di potenza*

$$S_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}(f)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|^2}{T}$$

con $E_{x_T}(f)$ densità di energia del segnale *troncato* nell'intervallo $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

Definiamo **funzione di autocorrelazione** $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau) dt$ ossia il segnale moltiplicato per una sua replica *ritardata*. Indica “quanto il segnale somiglia alla sua replica ritardata”: più $x(t)$ è compatta meno somiglierà e meno varrà $R_x(\tau)$

Il teorema afferma che la densità spettrale di energia di un segnale coincide con la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso:

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad \underbrace{\equiv}_{R_x(\tau) \text{ è pari}} \quad 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) R_x(\tau) d\tau$$

- Dimostrazione:

Partiamo dalla definizione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(\alpha-t) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(-(t-\alpha)) d\alpha = x(\tau) \otimes x(-\tau) = \\ R_x(\tau) &= x(\tau) \otimes x(-\tau) \iff X(f) X(-f) = X(f) X^*(-f) = |X(f)|^2 = E_x(f) \end{aligned}$$

Secondo Parziale

Processi aleatori analogici

1. Un processo aleatorio WSS $X(t)$ filtrato da un SLS è all'uscita un nuovo processo $Y(t)$ WSS.

Per far sì che accada il processo $y(t)$ deve avere:

1. Media costante;
 2. L'autocorrelazione funzione solo di τ
- Dimostrazione:
 - 1.

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E[x(t) \otimes h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot x(t - \alpha) d\alpha\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) E[x(t - \alpha)] d\alpha \\ &= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha = m_X H(0) = \text{costante} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} R_{yy}(t_1, t_2) &= \begin{cases} t_1 = t \\ t_2 = t + \tau \rightarrow \tau = t_2 - t_1 \end{cases} \rightarrow \text{cambio di variabile} \\ R_{yy}(t, t + \tau) &= E[y(t) \cdot y(t + \tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) x(t + \tau - \beta) d\beta\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) x(t - \alpha) x(t + \tau - \beta) d\alpha d\beta\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) E[x(t - \alpha) x(t + \tau - \beta)] d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_{xx}(\tau - \beta + \alpha) d\alpha d\beta \\ &\rightarrow R_{yy}(t, t + \tau) = R_{yy}(\tau) \end{aligned}$$

Quindi il processo $y(t)$ è WSS.

Segnali a tempo discreto aperiodici

2. Trasformata di Fourier per sequenze (definizione, periodo 1, denormalizzazione);

Data la sequenza *aperiodica* $x[n]$ **discreta**:

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} \longrightarrow f = F \cdot F_c = \frac{F}{T} = \text{Hz} \longrightarrow \bar{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi n F}$$

$\bar{X}(F)$ è **completamente nota** se conosco il suo andamento in un intervallo delle frequenze *normalizzate* di ampiezza unitaria: $\underbrace{F \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}_{\text{Intervallo base}}$

- Periodica di periodo 1:

$$\begin{aligned} \bar{X}(F + 1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n (F+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n F} \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1 \text{ (n intero)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n F} = \\ &= \bar{X}(F) \end{aligned}$$

- Denormalizzazione:

Necessaria in quanto se la sequenza $x[n]$ deriva da un'operazione di campionamento, la frequenza normalizzata **non permette** di stabilire un legame con la frequenza (espressa in Hz) delle componenti nella trasformata del segnale analogico di partenza.

Se T è il periodo di campionamento, $\Rightarrow f \triangleq \frac{F}{T} = F \cdot f_c$ in Hz. Sostituendo ottengo $F = fT$ in Hz

$$\text{TFS}[X[n]] = \bar{X}(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T}$$

f continua in $\left[-\frac{1}{2T}; \frac{1}{2T}\right] \rightarrow \bar{X}(f)$ continua. Posso introdurre il *modulo* $\bar{A}(f) = |\bar{X}(f)|$ e lo *spettro di fase* $\bar{\theta}(f) = \angle \bar{X}(f)$.

$X(f)$ è periodica di periodo pari a $f_c = \frac{1}{T} \Rightarrow \bar{X}(f + \frac{1}{T}) = \sum x[n] e^{-j2\pi n f T} \cdot \underbrace{e^{j2\pi n \frac{1}{T} T}}_{=1} = \bar{X}(f)$

3. Relazione tra definizione di antitrasformata e trasformata; Criterio di convergenza per TFS (solo definizione).

$$x[n] = \text{ITFS}[\bar{X}(f)] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \bar{X}(f) &\triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi m f T} \rightarrow \begin{array}{l} \text{moltiplico per osc.ni} \\ \text{complesse alla frequenza } f \text{ e integro} \end{array} \\ \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi m f T} e^{j2\pi n f T} df = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT} df \\ \text{Studiamo } \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT} df &\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{T} & : m = n \rightarrow \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} 1 \cdot df = \frac{1}{T} \\ 0 & : m \neq n \rightarrow m - n = k \rightarrow \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi k f T} df = 0 \end{cases} \\ \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT} df = \frac{1}{T} x[n] \\ \Rightarrow x[n] &= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df \end{aligned}$$

Nota bene: nell'ultima sommatoria ho tutti elementi pari a 0, tranne il caso $m = n \rightarrow \frac{1}{T}$

- Criterio di convergenza:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < +\infty \Rightarrow \exists \text{ TFS}$$

Un criterio di convergenza per l'esistenza della trasformata è la **assoluta sommabilità** della frequenza.

Teoremi

4. Teorema di Linearità;

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow \bar{X}(f) = a\bar{X}_1(f) + b\bar{X}_2(f)$$

5. Teorema del Ritardo;

Sia $x[n]$ una sequenza.

$$x[n-k] \Leftrightarrow \bar{X}(f) \cdot e^{-j2\pi k f T}$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{TFS}[x[n-k]] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-k] e^{-j2\pi m f T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi(m+k)fT} = e^{-j2\pi k f T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi m f T} = \\ &= \bar{X}(f) e^{-j2\pi k f T} \end{aligned}$$

6. Teorema della Modulazione;

$$x[n] \cdot e^{j2\pi n f_0 T} \Leftrightarrow \bar{X}(f - f_0)$$

- Dimostrazione:

$$\text{TFS} \left[x[n] e^{j2\pi n f_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} \cdot e^{j2\pi n f_0 T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n (f-f_0) T} = \bar{X}(f-f_0)$$

7. Teorema della Somma di Convoluzione;

Sia $s[n]$ la sequenza discreta *somma di convoluzione* tra le sequenze aperiodiche $x[n]$ e $y[n]$.

$$s[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] x[n-k]$$

Gode delle stesse proprietà del caso continuo.

$$\Rightarrow \bar{S}(f) = \bar{X}(f) \cdot \bar{Y}(f)$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \bar{S}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{-j2\pi n f T}}_{\text{ritardo}} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] \bar{Y}(f) e^{-j2\pi k f T} = \bar{Y}(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi k f T} = \bar{Y}(f) \bar{X}(f) \end{aligned}$$

8. Teorema del Prodotto;

$$p[n] = x[n] \cdot y[n] \Leftrightarrow \bar{P}(f) = \bar{X}(f) \otimes \bar{Y}(f)$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \bar{P}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) e^{j2\pi n \alpha T} d\alpha \right]}_{\text{antitrasformata di } \bar{X}(f)} y[n] e^{-j2\pi n f T} = \\ &= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j2\pi n (f-\alpha) T}}_{\text{dalla modulazione } \rightarrow \bar{Y}(f-\alpha)} d\alpha = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) \bar{Y}(f-\alpha) d\alpha \\ &\Rightarrow \bar{P}(f) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) \bar{Y}(f-\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Questa è la **convoluzione ciclica o periodica**. L' integrale viene calcolato su un singolo periodo e il risultato è diviso per l'ampiezza del periodo $\frac{1}{T}$

9. Teorema dell'Incremento;

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{x(nT) - x(nT-T)}{T} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T}, \text{ con } x[n] \triangleq x(nT)$$

Si introduce l'operatore **incremento** $\Delta x[n] \triangleq x[n] - x[n-1]$

Usando il *teorema del ritardo* per ottenere la trasformata:

$$\Delta x[n] \Leftrightarrow \bar{X}(f) - \bar{X}(f) e^{-j2\pi f T} = \bar{X}(f) (1 - e^{-j2\pi f T})$$

È l'analogo del teorema di derivazione: approssima la derivata del rapporto incrementale.

10. Teorema della Sequenza Somma.

Consideriamo la sequenza somma $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$. Dal teorema dell'incremento otteniamo la sua trasformata in sequenza:

$$\bar{Y}(f) = \frac{\bar{X}(f)}{1 - e^{-j2\pi f T}}$$

purché $\bar{X}(0) = 0$.

- Dimostrazione:

$z[n] = \Delta y[n] \iff \bar{Z}(f) = \bar{Y}(f)[1 - e^{-j2\pi fT}]$ dal teorema dell'incremento

$$\text{però } \Delta y[n] = y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n]$$

$$\text{quindi } \bar{X}(f) = \bar{Y}(f)[1 - e^{-j2\pi fT}] \rightarrow \bar{Y}(f) = \frac{\bar{X}(f)}{1 - e^{-j2\pi fT}}$$

Campionamento:

11. Teorema del campionamento (“risultato” dell’interpolazione cardinale);

Un segnale il cui spettro è *limitato* nella banda B può essere ricostruito a partire dai propri campioni, **purché** $f_c \geq 2B$

$p(t)$ è un impulso “diverso” per generalizzare l’operazione d’interpolazione, anche al fine di evitare le discontinuità che lo stesso impulso $p(t)$ introduce nell’interpolazione a mantenimento.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] p(t - nT), \text{ scegliendo } p(t) = \text{sinc}\left(\frac{f}{T}\right) \Rightarrow P(f) = T \text{rect}(fT)$$

$$\hat{X}(f) = P(f) \bar{X}(f) = T \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = X(f)$$

ricampionando il segnale
interpolato al generico istante $t = kT$

$$\hat{x}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{kT - nT}{T}\right), \text{ ma } \text{sinc}(k - n) = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & k = n \end{cases}$$

$$\text{Quindi: } \hat{x}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \underbrace{\delta[k - n]}_{1 \text{ sse } n=k} = x[k] = x(kT)$$

Il segnale di partenza coincide con il segnale interpolato.

12. Relazione tra TCF e TFS.

Sappiamo che nel dominio “temporale” è valida la relazione $x[n] = x(nT)$: vogliamo trovare una relazione simile anche dal punto di vista frequenziale:

$$\begin{aligned} \bar{X}(f) &\triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi n f T} = \boxed{\text{Sapendo che: } x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{j2\pi \alpha n T} d\alpha} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{-j2\pi \alpha n T} d\alpha \cdot e^{-j2\pi n f T} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n (f - \alpha) T} d\alpha \end{aligned}$$

ma il segnale *pettine di Dirac* è esprimibile in serie di Fourier con coefficienti pari a $\frac{1}{T}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi k t}{T}} \\ &\quad \text{Trasformata di Fourier } \updownarrow \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f T} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \alpha - \frac{k}{T}\right) d\alpha = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \delta\left(f - \alpha - \frac{k}{T}\right) d\alpha =$$

$$= \delta \text{ è pari } = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \delta\left(\alpha - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) d\alpha = \text{prodotto tra } X(\alpha) \text{ e Dirac centrato in } f - \frac{k}{T}$$

$$= \text{per la proprietà campionatrice della delta di Dirac} \rightarrow \bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Quindi questa relazione dimostra che la trasformata di Fourier di una sequenza ottenuta per campionamento si può ricavare come *periodicizzazione* della trasformata del segnale analogico di partenza, con un periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento $\frac{1}{T}$!

Segnali a tempo discreto periodici

13. Trasformata discreta di Fourier (definizione);

Supponiamo $x[n]$ periodica di periodo N_0

$$x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} ; \quad \bar{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}}$$

antitrasformata discreta di Fourier Trasformata discreta di Fourier

14. La trasformata di una sequenza periodica è essa stessa periodica (stesso periodo N_0);

$$\bar{X}_{k+N_0} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j2\pi(k+N_0)\frac{n}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j2\pi k\frac{n}{N_0}} e^{-j2\pi n} = \bar{X}_k$$

15. La relazione di sintesi di una TDF discende da quella di analisi;

$$x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} \Rightarrow \bar{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}}$$

Moltiplichiamo per $e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}}$ con $(0 \leq m \leq N_0 - 1)$ ed effettuiamo una somma sul periodo (n)

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} =$$

Sviluppando il secondo membro: $\frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}}$

La seconda sommatoria si sviluppa come :

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \left(e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N_0}} \right)^n = \begin{cases} \frac{1 - e^{j2\pi(k-m)}}{1 - e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N_0}}} = 0 & k \neq m \\ \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} 1 = N_0 & k = m \end{cases}$$

ovvero: $\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \begin{cases} N_0 & \text{per } k=m \\ 0 & \text{per } k \neq m \end{cases} = \delta[k-m]N_0$

$$= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}} e^{j\frac{2\pi nk}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \delta[k-m]N_0 = \cancel{N_0} \bar{X}_m$$

per sostituzione infine: $\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}} = \bar{X}_m$

Proprietà:

Notazione: $\text{DFT}_{N_0} \{x[n]\} = \bar{X}_k$, con $0 \leq n, k \leq N_0 - 1$

16. Proprietà di Linearità;

$$\text{DFT}_{N_0} \{ax[n] + by[n]\} = a\bar{X}_k + b\bar{Y}_k$$

17. Proprietà di Traslazione Circolare;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[n - n_0]\} = \bar{X}_k e^{-j\frac{2\pi kn_0}{N_0}}$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\text{DFT}_{N_0} \{x[n - n_0]\} &= \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n - n_0] e^{-j2\pi \frac{n}{N_0} k} = \boxed{\begin{array}{c} \text{cambio di variabile} \\ p = n - n_0 \\ n = p + n_0 \end{array}} \\
&= \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{(p+n_0)k}{N_0}} = \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{pk}{N_0}} e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} = \\
&= e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{pk}{N_0}} = e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} \sum_{p=0}^{N_0-1} x[p] e^{-j2\pi \frac{pk}{N_0}} \\
\text{DFT}_{N_0} \{x[n - n_0]\} &= e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} \cdot \bar{X}_k
\end{aligned}$$

Si dice traslazione **circolare** in quanto, osservando la periodicit  della sequenza originale e di quella traslata,   possibile notare come i campioni che “escono” a destra dell’intervallo rientrano alla sinistra dell’intervallo stesso.

18. Propriet  di Traslazione In Frequenza;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[n] e^{-j2\pi \frac{k_0 n}{N_0}}\} = \bar{X}_{k-k_0}$$

19. Propriet  di Inversione Temporale;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[-n]\} = \bar{X}_{-k} = \bar{X}_{N_0-k}$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\text{DFT}_{N_0} \{x[-n]\} &= \sum_{n=0}^{N_0-1} x[-n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[N_0 - n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{cambio di variabile} \\ p = N_0 - n \\ n = N_0 - p \end{array}} \\
&= \sum_{p=1}^{N_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{k(N_0-p)}{N_0}} = \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1} \sum_{p=0}^{N_0-1} x[p] e^{-j2\pi \frac{kp}{N_0}} = \bar{X}_{-k} = \bar{X}_{N_0-k}
\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio, abbiamo usato la periodicit  della sequenza $x[n]$ e nel penultimo passaggio, per cambiare gli indici della sommatoria, abbiamo usato le propriet  di periodicit  della sequenza e della funzione esponenziale, come gi  visto.

20. Propriet  di coniugazione;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x^*[n]\} = \bar{X}_{-k}^* = \bar{X}_{N_0-k}^*$$

21. Simmetria per sequenze reali (pari e dispari);

Per una sequenza reale $x[n]$ abbiamo:

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[n]\} = \text{DFT}_{N_0} \{x^*[n]\} \rightarrow \bar{X}_k = \bar{X}_{-k}^* = \bar{X}_{N_0-k}^*$$

da cui derivano le propriet  di simmetria per il modulo e per la fase:

$$\begin{aligned}
|\bar{X}_k| &= |\bar{X}_{-k}| = |\bar{X}_{N_0-k}| \\
\angle \bar{X}_k &= -\angle \bar{X}_{-k} = -\angle \bar{X}_{N_0-k}
\end{aligned}$$

Tali relazioni implicano che il modulo della sequenza $X[k]$   simmetrico rispetto al valore $k = \frac{N}{2}$, mentre la fase   antisimmetrica rispetto a tale valore.

- per sequenze di lunghezza **pari**, il centro di simmetria coincide con un campione della sequenza;
- per sequenze di lunghezza **dispari**, invece, il centro di simmetria coincide con un punto equidistante tra due campioni.

22. Teorema di Parseval per sequenze;

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] y^*[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \bar{Y}_k^* \\ \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} |\bar{X}_k|^2 \end{cases}$$

• Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] y^*[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \left(\frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{Y}_k^* e^{j2\pi \frac{kn}{N_0}} \right)^* = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{Y}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \bar{Y}_k^*$$

– Ponendo $x[n] = y[n]$ si ottiene la seconda relazione.

L'energia si mantiene nei domini.

23. Teorema del Prodotto;

Consideriamo adesso la sequenza (periodica) $p[n]$ data dal *prodotto* fra la sequenza $x[n]$ e la sequenza $y[n]$ entrambe periodiche di periodo N_0

$$p[n] = x[n] y[n]$$

e calcoliamone la trasformata discreta di Fourier:

$$\bar{P}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} p[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] y[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{1}{N_0} \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m e^{j2\pi \frac{nm}{N_0}} \cdot y[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}}$$

Dove $x[n]$ è stata scomposta in serie discreta di Fourier. Inoltre è stata utilizzata una variabile “muta” m nell'antitrasformata per non creare ambiguità con la variabile k , da cui dipende la trasformata.

$$= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m e^{j2\pi \frac{nm}{N_0}} \cdot y[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}}$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie otteniamo:

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} y[n] e^{-j2\pi \frac{n(k-m)}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m \bar{Y}_{k-m} = \\ &= \frac{1}{N_0} \cdot \bar{X}_k \otimes \bar{Y}_k \end{aligned}$$

La convoluzione tra le due trasformate discrete è una somma di convoluzione **ciclica** tra le due sequenze periodiche \bar{X}_k e \bar{Y}_k in ambito *frequenziale*. In conclusione:

$$p[n] = x[n] y[n] \iff \bar{P}_k = \frac{1}{N_0} \cdot \bar{X}_k \otimes \bar{Y}_k$$

24. Teorema della Convoluzione (+ relazioni tra convoluzione lineare e circolare).

Consideriamo ora la sequenza $z[n]$ come somma di convoluzione ciclica o circolare tra le due sequenze $x[n]$ e $y[n]$, periodiche di periodo N_0

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] y[n-m] = \sum_{m=0}^{N_0-1} y[m] x[n-m]$$

La somma di convoluzione gode di tutte le proprietà citate per la somma di convoluzione tra sequenze periodiche.

Calcoliamo la trasformata discreta di $z[n]$:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_k &= \sum_{n=0}^{N_0-1} z[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] y[n-m] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] \sum_{n=0}^{N_0-1} y[n-m] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \\ &= \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] \bar{Y}_k e^{-j2\pi \frac{mk}{N_0}} = \bar{Y}_k \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] e^{-j2\pi \frac{mk}{N_0}} = \\ &= \bar{X}_k \cdot \bar{Y}_k \end{aligned}$$

Quindi:

$$x[n] \otimes y[n] \iff \bar{X}_k \cdot \bar{Y}_k$$

- Relazioni tra convoluzione lineare e circolare (per due sequenze di lunghezza finita):

Siano $x[n]$ e $h[n]$ due sequenze di lunghezza L e M : il “supporto” sul quale le sequenze hanno campioni *non nulli* è $[0, L-1]$ e $[0, M-1]$.

- La convoluzione *lineare* è ottenuta dalla relazione:

$$y_l[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

dove le sequenze sono considerate **aperiodiche** e $y_l[n]$ ha una lunghezza *finita* e pari a $L+M-1$ campioni, considerando il “supporto” dove le sequenze hanno campioni non nulli. Vi è quindi una *sovrapposizione* tra campioni non nulli delle due sequenze in $[0, L+M-2]$

- La convoluzione *circolare* invece, a causa della diversa lunghezza delle due sequenze, richiede di fissare un **periodo comune** N , per eseguire l'**estensione periodica** delle sequenze: l'unico vincolo da porre diventa quindi $N \geq \max(L, M)$, appendendo quindi in fondo alle sequenze un numero di zeri (pari a $N-L$ o $N-M$) prima di estendere periodicamente le due sequenze. La convoluzione circolare è data da:

$$y_c[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[n-k]$$

Generale:

25. Fast Fourier Transform (FFT).

Supponiamo di avere in memoria un numero N_0 di valori della sequenza periodica $x[n]$ e calcoliamone numericamente la trasformata discreta:

$$\bar{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \left\{ x[0] \cdot e^{-j0} + x[1] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N_0}} + x[2] \cdot e^{-j\frac{2\pi 2k}{N_0}} + \dots + x[N_0-1] \cdot e^{-j\frac{2\pi(N_0-1)k}{N_0}} \right\}$$

Vogliamo quindi determinare il numero di *operazioni necessarie* sia per la trasformata che per l'antitrasformata (ignorando il fattore di scala $\frac{1}{N_0}$):

$$x[n] = \bar{X}_0 \cdot e^{j0} + \bar{X}_1 \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N_0}} + \bar{X}_2 \cdot e^{j\frac{2\pi 2k}{N_0}} + \dots + \bar{X}_{N_0-1} \cdot e^{j\frac{2\pi(N_0-1)k}{N_0}}$$

Supponiamo quindi di avere valori *complessi* $z = a + jb$, ma **precalcolati**, ovvero già in memoria. Per il calcolo di un *singolo campione* $X[k]$ è necessario eseguire N_0 moltiplicazioni complesse e $N_0 - 1$ addizioni complesse, le quali sono tradotte dai calcolatori in operazioni nel campo reale, eseguendole tra le parti reali e immaginari dei numeri complessi coinvolti:

- per eseguire un'addizione complessa è necessario eseguire 2 addizioni reali: $(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$
- per eseguire una moltiplicazione complessa è necessario eseguire 4 moltiplicazioni reali e 2 addizioni reali, $(a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$.

Quindi per un singolo campione $X[k]$ sono necessarie N_0 moltiplicazioni complesse e $N_0 - 1$ somme complesse. Inoltre, per ogni valore di k sono necessarie $8N_0 - 2$ operazioni reali, e dato che la sequenza è composta da N_0 valori la complessità diventa **quadratica**:

$$(8N_0 - 2)N_0 = 8N_0^2 - 2N_0 \approx 8N_0^2$$

Per velocizzare i calcoli è stato quindi introdotto l'algoritmo **Fast Fourier Transform** o FFT, il quale viene applicato se N_0 è una *potenza del 2* $\rightarrow N_0 = 2^M$

$$\begin{aligned} \bar{X}_k &= \sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m] e^{-j\frac{2\pi(2m)k}{N_0}} + \sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m+1] e^{-j\frac{2\pi(2m+1)k}{N_0}} = \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m] e^{-j\frac{2\pi mk}{N_0}}}_{\bar{P}_k} + e^{-j\frac{2\pi k}{N_0}} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m+1] e^{-j\frac{2\pi mk}{N_0}}}_{\bar{D}_k} \end{aligned}$$

con $k = 0, \dots, N_0 - 1$. \overline{P}_k è la trasformata ottenuta dai $\frac{N_0}{2}$ campioni di *indice pari* di $x[n]$, mentre \overline{D}_k indica la trasformata della sequenza ottenuta dai $\frac{N_0}{2}$ campioni di *indice dispari*. Questa scomposizione è ricorsiva dell'ordine, in quanto la trasformata di ordine N_0 è espressa come combinazione lineare di due trasformate di ordine $\frac{N_0}{2}$: questo concetto può essere esteso al numero di operazioni N_{FFT} :

$$N_{FFT}(N_0) = N_{FFT}\left(\frac{N_0}{2}\right) + N_{FFT}\left(\frac{N_0}{2}\right) + 6N_0 + 2N_0$$

tenendo conto che per ogni k (dei coefficienti dispari) è necessario moltiplicare D_k per un esponenziale complesso (precalcolato, 6 operazioni reali) e poi sommare con P_k (2 operazioni reali).

Il procedimento viene poi ripetuto ricorsivamente. Infine, iterando la formula:

$$N_{FFT}(N_0) = 6N_0 + 8N_0 \log_2 N_0 \approx 8N_0 \log_2 N_0$$

la complessità risulta **logaritmica**! Ad esempio, con $N_0 = 1024$

$$\frac{N_{TDF}(N_0)}{N_{FFT}(N_0)} = \frac{8N_0^2}{8N_0 \log_2 N_0} = \frac{N_0}{\log_2 N_0} \approx 100$$

Il vantaggio conseguito dall'utilizzo di FFT al posto della trasformata classica aumenta al crescere di N_0

Sistemi monodimensionali a tempo discreto

$$y[n] = T[x[m], n] = T[x[n]]$$

Proprietà dei sistemi;

26. SLS a tempo discreto: risposta impulsiva.

$$h[n] = T[\delta[n]]$$

Nota $h[n]$:

$$\begin{aligned} y[n] &= T[x[n]] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\right] = \text{per la linearità} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T[\delta[n-k]] = \text{per la stazionarietà: } \rightarrow \left\{ T[\delta[n-k]] = h[n-k] \right. \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] \otimes h[n] \end{aligned}$$

Quindi l'uscita è una *somma di convoluzione* tra la sequenza in ingresso e la risposta impulsiva del sistema stesso!

Un sistema lineare e stazionario (SLS) può essere:

- FIR (Finite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva è costituita da un **numero finito di campioni**;
- IIR (Infinite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva è costituita da un numero **infinito** di campioni.

È possibile dimostrare come la *condizione necessaria e sufficiente* per la stabilità in senso BIBO di un SLS è l'**assoluta sommabilità** della sua risposta impulsiva:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Da ciò deriviamo che

- i sistemi FIR sono stabili: la sommatoria diventa una somma *finita* di quantità *limitate*;
- mentre i sistemi IIR non lo sono sempre. Diventa necessario controllare la validità della seguente condizione:

– **sequenza causale**:

un SLS è causale se e solo se la sua risposta impulsiva è una sequenza causale, cioè:

$$h[n] = 0 \text{ se } n < 0, \text{ ovvero } h[n] = h[n] u[n]$$

Proprietà:

27. Sistemi a cascata e in parallelo;

- In un sistema a **cascata** l'ordine degli stessi può essere variato senza alterare l'uscita:

$$h[n] = h_1[n] \otimes h_2[n] \rightarrow y[n] = x[n] \otimes (h_1[n] \otimes h_2[n])$$

Questo per la proprietà commutativa del prodotto di convoluzione discreta.

- Due sistemi **in parallelo**:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \rightarrow y[n] = x[n] \otimes [h_1[n] + h_2[n]]$$

28. Risposta in frequenza;

1. La risposta in frequenza di un SLS a tempo discreto è la **trasformata di Fourier** della risposta impulsiva $h[n]$ del sistema stesso

$$\bar{H}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi n f T}$$

2. Inoltre $\bar{H}(f)$ è pari al rapporto tra le trasformate $\bar{Y}(f)$ e $\bar{X}(f)$ rispettivamente della sequenza in uscita $y[n]$ e in ingresso $x[n]$:

$$\bar{H}(f) = \frac{\bar{Y}(f)}{\bar{X}(f)}$$

3. La risposta in frequenza è data dal rapporto fra la sequenza di uscita $y[n]$ e quella di ingresso $x[n]$ quando $x[n]$ è una oscillazione complessa alla frequenza f :

$$\bar{H}(f) = \left. \frac{y[n]}{x[n]} \right|_{x[n]=e^{j2\pi n f T}}$$

È possibile inoltre definire, data la risposta in frequenza $\bar{H}(f)$, la *risposta in ampiezza* $\bar{A}(f) = |\bar{H}(f)|$, la quale determina la **selettività** di un SLS e la sua *risposta in fase* $\bar{\theta}(f) = \angle \bar{H}(f)$

29. Filtri a tempo discreto.

La **condizione di non distorsione** viene riformulata come segue:

$$y[n] = Kx[n - n_0]$$

K ed n_0 rappresentano rispettivamente il guadagno ed il ritardo del sistema. Nel dominio della frequenza, questa condizione si traduce nei due seguenti requisiti per la risposta in ampiezza e la risposta in fase:

$$\bar{A}(f) = K, \quad \bar{\theta}(f) = -2\pi f n_0 T$$

È sufficiente che queste condizioni siano verificate nell'ambito della banda del segnale per garantire assenza di distorsioni

Le caratteristiche di selettività di un filtro a tempo discreto con risposta in frequenza (che è una funzione periodica di periodo $1/T$) sono determinate dall'andamento della sua risposta in ampiezza in un solo periodo della funzione (as esempio $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$).

Le basse frequenze sono sempre prossime alla frequenza nulla, mentre le alte sono comunque prossime al limite superiore dell'intervallo, ovvero $\frac{1}{2T}$:

- **passa basso**

$$h_{LP}[n] = 2BT \operatorname{sinc}(2nBT) \Leftrightarrow \bar{H}_{LP} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f - \frac{k}{T}}{2B}\right)$$

- **passa alto**

$$h_{HP}[n] = \delta[n] - 2BT \operatorname{sinc}(2nBT) \Leftrightarrow \bar{H}_{HP}(f) = 1 - \bar{H}_{LP}(f)$$

I filtri ideali **non sono causali!**

Quantizzazione (per alcune di queste domande guardare quesiti)

30. Formule e definizioni (passo, dinamica D, bit B, fattore di scala A...);

L'operazione di quantizzazione rende **discreta** l'ampiezza dei campioni associando loro un valore di ampiezza scelto da un insieme finito di possibili *valori* (detti livelli di quantizzazione: essi sono i "rappresentanti" di intervalli di quantizzazione contigui: gli estremi di questi intervalli sono detti "soglie").

$$\hat{x}(nT) = Q[x(nT)]$$

La quantizzazione è un'operazione *lossy*, in quanto essendo un'operazione irreversibile, una volta quantizzato il segnale l'informazione originale non potrà essere più recuperata, commettendo un errore

$$e(nT) = \hat{x}(nT) - x(nT)$$

Per effettuare l'operazione di quantizzazione dividiamo l'intervallo di variazione di ampiezza dei suoi campioni in intervalli di quantizzazione contigui (x_i, x_{i+1}) , dove gli estremi rappresentano le *soglie* di quantizzazione.

Al momento della progettazione del quantizzatore sono fissate sia le soglie che i livelli!

L'operazione quindi consiste nel **selezionare l'intervallo più corretto per ogni campione** $x(nt)$ e associare al suo interno un valore \hat{x}_i detto *livello* dell'intervallo selezionato.

- "Definizioni":
 - **Passo**: indicato con Δ , rappresenta la distanza tra livelli (e soglie) di quantizzazione.
 - **bit**: indicato con B , serve a determinare il numero di possibili livelli di quantizzazione, rappresentati con notazione binaria, pari a 2^B
 - **dinamica**: indicata con D rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di valori che i livelli di quantizzazione riescono a coprire.
- Quantizzatori uniformi

Ottenuti imponendo una distanza costante tra le soglie e i livelli (Δ costante).

Per avere una *buona rappresentazione del segnale*, la dinamica $D \approx$ **intervallo variazione ampiezza dei campioni!**

$$D > X_{\max} - X_{\min}$$

In un processo *aleatorio gaussiano*, i cui campioni seguono la distribuzione di probabilità Gaussiana (quindi con un intervallo di variazione *illimitato*), si rende necessario ipotizzare un intervallo di variazione dei campioni **finito** e di dimensione tale da rendere *minima* la probabilità che esca da tale intervallo (**overflow**). Considerando il caso di valor medio *nullo*:

$$E[f(x)] = 0 \rightarrow \text{gli intervalli sono: } \begin{cases} [-3\sigma, 3\sigma] & \approx 95,45\% \\ [-4\sigma, 4\sigma] & \approx 99,73\% \end{cases} \rightarrow \Delta > 8\sigma$$

Per far sì che il passo non sia né eccessivamente grande (livelli di quantizzazione usati molto minori rispetto a quelli a disposizione), né troppo piccolo (commessi errori rilevanti (di overflow), quando si quantizzano campioni al di fuori della dinamica del quantizzatore) Δ, D, B sono legati secondo:

$$\Delta = \frac{D}{2^B}$$

31. Tipologie di quantizzatori (midrise, midtread, arrotondamento e troncamento);

Vedi risposte 33, 34 quesiti

32. Errore di quantizzazione e modello;

L'errore di quantizzazione può essere visto come una sequenza che *si somma* (modello additivo) al segnale campionato:

$$e(nT) = \hat{x}(nt) - x(nT) \Rightarrow \hat{x}(nT) = e(nT) + x(nT)$$

Modelliamo quindi $e(nT)$ come un processo aleatorio, indicandolo come **rumore di quantizzazione** e con le seguenti ipotesi:

1. $e(nT)$ sia un processo stazionario in senso lato: quindi media, potenza e varianza *costanti* e **non** dipendono da n (distanza tra i campioni);
2. che la densità di probabilità dell'**ampiezza dell'errore di quantizzazione** sia di tipo **uniforme**, permettendo di valutare tali costanti distinguendo i casi di quantizzazione per troncamento e per arrotondamento:

- densità probabilità errore troncamento:

$$\begin{aligned}
 P_e(e) &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\Delta < e \leq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \rightarrow E[e(nT)] = 0 = E[e^2(nT)] = \frac{\Delta^2}{12} \\
 E[e(nT)] &= \int_{-\Delta}^0 e p_e(e) de = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{e^2}{2} \Big|_{-\Delta}^0 = -\frac{\Delta}{2} \\
 E[e^2(nT)] &= \int_{-\Delta}^0 e^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{3} = \frac{1}{\Delta} \frac{e^3}{3} \Big|_{-\Delta}^0 \\
 \sigma_e^2 &= E[(e(nT) - E[e(nT)])^2] = E[e^2(nT)] - (E[e(nT)])^2 = \\
 &= \int_{-\Delta}^0 \left(e + \frac{\Delta}{2}\right)^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{12}
 \end{aligned}$$

- densità errore arrotondamento:

$$\begin{aligned}
 p_e(e) &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} < e \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \\
 E[e(nT)] &= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e p_e(e) de = \frac{1}{\Delta} \frac{e^2}{2} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = 0 \\
 E[e^2(nT)] &= \sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 p_e(e) de = \frac{1}{\Delta} \frac{e^3}{3} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}
 \end{aligned}$$

3. $\{e(nT)\}$ incorrelato con processo $\{x(nT)\}$;

$$E[\{x(nT)\}\{e(nT)\}] = E[\{x(nT)\}] \cdot E[\{e(nT)\}]$$

4. I campioni del processo $\{e(nT)\}$ sono **incorrelati** tra loro;

Per la quantizzazione con troncamento si ha:

$$E[e(nT) e((n+m)T)] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \frac{\Delta^2}{3} & m = 0 \\ E[e(nT)]E[e((n+m)T)] = \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta^2}{4} & m \neq 0, \end{cases}$$

mentre per la quantizzazione con arrotondamento abbiamo

$$E[e(nT)e((n+m)T)] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} & m = 0 \\ 0 & m \neq 0. \end{cases}$$

In questo caso, l'errore di quantizzazione è un **processo bianco**.

33. Definizione Signal To Noise Ratio (SNR) e formule.

È il rapporto tra la *potenza del segnale* e la *potenza dell'errore di quantizzazione*:

$$\text{SNR}_q = \frac{S}{\sigma_e^2}$$

Ciò vale con l'ipotesi di un quantizzatore che utilizzi l'arrotondamento. S rappresenta la potenza del segnale (è necessario conoscerla oltre ai parametri del quantizzatore)... e $\Delta = \frac{D}{2^B}$:

$$\text{SNR}_q = \frac{S}{\sigma_e^2} = \frac{S}{\frac{1}{12}\Delta^2} = \frac{S}{\frac{1}{12}\left(\frac{D}{2^B}\right)^2} = \frac{12 \cdot S \cdot 2^{2B}}{D^2}$$

Esprimendo SNR_q in scala logaritmica

$$\begin{aligned}\text{SNR}_{q,\text{dB}} &= 10 \log_{10} \text{SNR}_q = 10 \log_{10} \left(\frac{12 \cdot S \cdot 2^{2B}}{D^2} \right) \\ &= (20 \log_{10} 2)B + 10 \log_{10} \left(\frac{12S}{D^2} \right) \\ &\approx 6.02B + 10 \log_{10} \left(\frac{12S}{D^2} \right) \text{ dB}.\end{aligned}$$