

Lista teoremi Teoria dei Segnali

Introduzione

1. $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0 e ha potenza media su un intervallo finita, allora ha \bar{P} finita e calcolabile sul periodo:

Per definizione $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$. Scegliamo come periodo NT_0 , in quanto se $N \rightarrow \infty$ vale come $T \rightarrow \infty$.

Quindi $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |x(t)|^2 dt$ equivale a N integrali cui si aggiunge un T_0 ogni volta:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \cdot \mathcal{N} \left\{ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt \right\} = \bar{P} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Segnali periodici a tempo continuo

Serie di Fourier

2. Da forma polare a complessa (o rettangolare)

la forma polare della serie di Fourier è data da:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_K) \\ &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_K)}}{2} \rightarrow \text{uso formula di Eulero per il coseno} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j2\pi k f_0 t + \theta_K} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j2\pi k f_0 t + \theta_K} \rightarrow \text{separo le due esponenziali} \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \rightarrow \text{raggruppo le sommatorie} \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} \\ &\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \text{ forma complessa della serie di Fourier} \end{aligned}$$

3. Come si calcolano i coefficienti X_n ?

Partendo dalla forma complessa, moltiplico a destra e a sinistra per $e^{-j2\pi k f_0 t}$, integrando sul periodo T_0 .

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Porto fuori la sommatoria e raccolgo e : per ipotesi la serie converge.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

L'integrale al secondo membro viene calcolato per $k \neq n$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{e^{j2\pi(k-n)f_0 t}}{j2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \\ &\frac{e^{j\cancel{2\pi(k-n)f_0 \frac{T_0}{2}}} - e^{-j\cancel{2\pi(k-n)f_0 \frac{T_0}{2}}}{2j \cdot \pi(k-n)f_0} \rightarrow \text{uso formula di Eulero per il seno} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} k=n \rightarrow T_0 \\ k \neq n \rightarrow 0 \end{cases} \rightarrow \text{sostituiamo questo risultato}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0 \Rightarrow X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

4. Forma rettangolare dalla forma polare

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

usiamo la formula di addizione $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (\cos(2\pi k f_0) \cos(\theta_k) - \sin(2\pi k f_0) \sin(\theta_k)))$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0) - b_k \sin(2\pi k f_0)]$$

sapendo che $a_0 = A_0$, $a_k = A_k \cos(\theta_k)$, $b_k = A_k \sin(\theta_k)$.

Abbiamo quindi ottenuto la forma rettangolare della serie di Fourier, dove si nota che un segnale *periodico* $x(t)$ può essere espresso tramite una **somma di seni e coseni**.

Il coefficiente X_n può essere espresso anche come:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) (\cos(2\pi k f_0 t) - j \sin(2\pi k f_0 t))$$

$$X_k = a_k + j b_k = A_k \cos(\theta_k) + j A_k \sin(\theta_k) = A_k e^{j\theta_k}$$

5. Criterio di Dirichlet (per $x(t)$ periodico):

È una serie di condizioni che se incontrate sono sufficienti per poter sviluppare un dato segnale $x(t)$ in serie di Fourier:

- $x(t)$ deve essere *assolutamente integrabile sul periodo*: ovvero $(\int_{[T_0]} |x(t)| dt < \infty)$
- $x(t)$ deve essere *continua* (o avere un numero *finito* di discontinuità di prima specie)
- $x(t)$ deve essere *derivabile sul periodo* T_0 , escluso al più un numero finito di punti, dove comunque esiste **finita** sia la derivata destra che la derivata sinistra
 - quest'ultima ipotesi è equivalente a: $x(t)$ presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo. La serie **converge** al valore assunto da $x(t)$ dove *continua* e alla semisomma dei limiti sinistro e destro se discontinua.

Spettro di un segnale periodico e reale

Proprietà

6. Simmetria Hermitiana dello spettro reale:

I coefficienti X_k sono generalmente quantità complesse del tipo $X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$: X_k può essere rappresentata tramite spettro di ampiezza e spettro di fase, discreti (esiste solo in corrispondenza delle armoniche k)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Analizziamone il coniugato X_k^* :

$$X_k^* = \left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)^* e^{+j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi(-k) f_0 t} dt$$

È da notare come $x(t)^* = x(t)$, dal momento che il segnale $x(t)$ è reale.

Quindi $X_k^* = X_{-k}$: i coefficienti X_k di un segnale *reale* sono **simmetrici hermitiani**, ossia hanno *lo stesso modulo e fase opposta*

$$X_{-k} = X_k^* \iff \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| & \text{stesso modulo} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} & \text{fase opposta} \end{cases}$$

In definitiva per un segnale reale: - lo spettro d'ampiezza è **simmetrico** rispetto a $k \rightarrow$ pari - lo spettro di fase è **antisimmetrico** rispetto a $k \rightarrow$ dispari

7. Linearità dello spettro reale:

Se $x(t)$ e $y(t)$ sono due segnali con periodo T_0 *reali* allora vale:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \iff Z_k = aX_k + bY_k$$

Somma di *oscillazioni* alle (o con?) le stesse frequenze dei segnali $x(t)$ e $y(t)$.

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (ax(t) + by(t)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{a}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{b}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = aX_k + bY_k \end{aligned}$$

8. Parità e disparità del segnale

- Se $x(t)$ è **pari**, allora il coefficiente $X_k = X_{-k}$; se il segnale è anche **reale** vale $X_k = X_{-k} = X_k^* \iff X_k \in \mathbb{R}$.

$X_k = X_{-k}$ (con un cambio di variabile $\alpha = -t \rightarrow dt = -d\alpha$).

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \iff X_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi(-k) f_0 t} dt$$

Utilizziamo il cambio di variabile

$$\begin{aligned} X_{-k} &= \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(-\alpha) e^{-j2\pi(\cancel{f_0})k f_0} - d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi\alpha k f_0} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi\alpha k f_0} d\alpha = X_k \end{aligned}$$

dato che il segnale $\in \mathbb{R}$ lo possiamo rappresentare come (perché essendo reale ha fase nulla?):

$$x(t) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}}{2} = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t) \end{aligned}$$

Da ciò deduco che un segnale reale e pari è esprimibile in serie di soli *coseni* (i quali sono a loro volta pari).

Possiamo inoltre scrivere i coefficienti X_k in modo semplificato, data la *parità* del segnale:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{pari}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}} dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{pari}} \cdot \underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}} dt = \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \cos(2\pi k f_0 t) dt - 0 \end{aligned}$$

- se $x(t)$ è **dispari**, allora anche i coefficienti X_k saranno dispari. Inoltre, dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k sarà un **immaginario puro**, ed

$$x(t) = 2j \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t) \text{ e } X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

Dimostrazione:

- Dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k , allora vale $X_{-k} = -X_k = X_k^* \Rightarrow X_k^* = -X_k$, quindi è un immaginario puro!
- Per X_k :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}} dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}} \cdot \underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}} dt = \\ &= -\frac{j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

• Note varie

- Se $x(t)$ è pari i suoi coefficienti X_k sono reali e lo spettro di fase vale 0 o $\pm\pi$; mentre se $x(t)$ è dispari i suoi coefficienti X_k sono immaginari puri e lo spettro di ampiezza non viene toccato: un segnale dispari è solo “spostato” nel tempo.
- È da notare come la diversa velocità di un segnale dipenda dal suo andamento temporale: le variazioni brusche comportano la presenza di **armoniche**[1] con k più elevato per rappresentare la velocità alta(?):
 - * più il segnale è regolare meno armoniche sono necessarie per “ricreare” il segnale
 - $\frac{1}{k} \rightarrow$ funzioni discontinue: dente di sega ideale, onda quadra, onda quadra “antisimmetrica”, rect
 - $\frac{1}{k^2} \rightarrow$ funzioni continue a derivata discontinua: onda triangolare. [1]: TODO: definire meglio armoniche

Segnali aperiodici a tempo continuo

Trasformata continua di Fourier

Una funzione non periodica, definita tra $-\infty$ e ∞ , può essere rappresentata come **somma di infinite armoniche semplici** di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile con continuità tra $-\infty$ e ∞

9. Dal segnale periodico al segnale aperiodico...

Partiamo dall'impulso rettangolare *aperiodico* $\text{rect} \frac{t}{T}$:

$$x(t) = \text{rect} \frac{t}{T} \rightarrow x_p(t) = \sum \text{rect} \left(\frac{t - nT_0}{T} \right) \text{ treno di impulsi rettangolari}$$

possiamo vedere $x(t)$ come caso limite di $x_p(t)$ con periodo $T_0 \rightarrow \infty$

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t)$$

1. la frequenza diventa infinitesima ($f_0 = \frac{1}{T_0}$)
2. si riduce la *distanza tra le armoniche*, ossia si **infittisce** lo spettro;
3. $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$, l'ampiezza assume valori *sempre più piccoli*

Usiamo il coefficiente *modificato* $X(f_0 k) = T_0 X_k$ per ovviare il problema. Riscriviamo $x_p(t)$ e X_k

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t} \cdot f_0 \rightarrow x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df}_{\text{integrale di Fourier}}$$

Le armoniche si *infittiscono talmente tanto* da non essere più distinte ma **continue**.

$$X(k f_0) = T_0 X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \rightarrow X(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} dt}_{\text{trasformata continua di Fourier}}$$

$X(f)$ è una **funzione complessa della variabile continua** f , quindi è di spettro continuo.

- Nota: **differenze tra segnali continui periodici e aperiodici**:
 - un segnale *periodico* è rappresentato da componenti sinusoidali a frequenze in relazione **armonica** (multipli di f_0 , frequenza *fondamentale* e ad ampiezza finita).
 - un segnale *aperiodico* è rappresentato con componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima* $|X(f)| df$ e frequenza f variabile con continuità su \mathbb{R} ; è un segnale periodico di periodo illimitato con f_0 infinitesimo. Le armoniche discrete *degenerano* nell'insieme continuo.

10. Criteri di esistenza per la trasformata continua di Fourier (TCF)

1. $X(f)$ esiste se il segnale $x(t)$
2. Criteri di Dirichlet:
 1. la funzione deve essere assolutamente sommabile: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$
 2. se in qualunque intervallo finito (t_1, t_2) è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie
 3. se in qualunque intervallo finito (t_1, t_2) la funzione ha un numero finito di massimi e minimi.

Allora $x(t)$ è rappresentabile come TCF e

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \begin{cases} x(t) & \text{se continua} \\ \frac{x(t_0^+) - x(t_0^-)}{2} & \text{se discontinua} \end{cases}$$

11. Simmetria Hermitiana della trasformata continua di Fourier

Possiamo rappresentare $X(f)$ in forma rettangolare:

$$X(f) = Re(f) + jIm(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$\underset{\text{pari}}{Re(f) = Re(-f)} \text{ e } \underset{\text{dispari}}{Im(f) = -Im(-f)} \Rightarrow X(f) = X^*(-f) \text{ simmetria hermitiana}$$

infatti $X(f) = Re(f) + jIm(f) = Re(-f) + jIm(f) = X^*(-f)$

- lo spettro di ampiezza è quindi *pari* a quello di fase *dispari*.

12. Parità e disparità:

- se un segnale è *reale e pari*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt = \begin{cases} Re(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \\ Im(f) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow X(f) = Re(f) \rightarrow X(f) = X(-f)$ è reale e pari

- se un segnale è *dispari e reale*

$$X(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt = \begin{cases} Re(f) = 0 \\ Im(f) = -2 \int_0^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt \end{cases}$$

$\rightarrow X(f) = jIm(f) \rightarrow X(f) = -X(-f)$ è immaginaria pura e dispari

Proprietà della trasformata continua

13. Linearità

Dati due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con le loro trasformate continue di Fourier $X_1(f)$ e $X_2(f)$, allora se:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \iff X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

con a, b costanti, $X_1(f) = \text{TCF}[x_1(t)]$ e $X_2(f) = \text{TCF}[x_2(t)]$

- Dimostrazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ax_1(t) + bx_2(t)) e^{-j2\pi ft} dt$$

ma sappiamo che l'integrale è *lineare*, quindi

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi ft} dt = aX_1(f) + bX_2(f)$$

14. Dualità

se $x(t) \iff X(f)$, allora $X(t) \iff x(-f)$:

Se la trasformata continua di Fourier passa ad essere un *segnale nel tempo*, allora $x(-f)$ è la sua trasformata di Fourier. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra la funzione e la sua trasformata.

- Esempio:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{sinc}(fT)$$

Ma se nel tempo ho un segnale $\text{sinc}(bT)$ qual è la sua trasformata?

$T \text{sinc}(Tt) \iff \text{rect}\left(-\frac{f}{T}\right)$ da cui $\text{sinc}(Bt) \iff \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$, dove B indica la banda.

- Dimostrazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi ft} dt$$

con uno scambio di variabili t con f . Quindi:

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Da qui deriviamo che $x(-f)$ è la trasformata di $X(t)$

15. Ritardo

Sia $X(f) = \text{TCF}[x(t)]$: la trasformata di Fourier di $x(t)$ ritardato nel tempo di una quantità t_0 è pari a:

$$x(t - t_0) \iff X(f) e^{-j2\pi ft_0}$$

- Dimostrazione:

Applichiamo a $x(t - t_0)$ la definizione di TCF

$$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f(\alpha + t_0)} d\alpha$$

$$= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = e^{-j2\pi ft_0} X(f)$$

- Esempio:

$$A \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \iff AT \text{sinc}(fT) e^{-j\frac{1}{2}\pi fT}$$

Se $y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow Y(f) = X(f) e^{-j2\pi ft_0} \Rightarrow$ Un ritardo modifica lo spettro di **fase** ma *non cambia* il suo spettro di ampiezza, in quanto quest'ultimo indica quali componenti sinusoidali sono necessarie per comporre la forma del segnale, mentre lo spettro di fase mi dice con quale *angolo* iniziale devono "partire" le sinusoidi.

Quindi se il segnale si sposta nel tempo, allora le sinusoidi hanno angoli iniziali diversi, ma sono le stesse.

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |e^{-j2\pi f t_0}| = |X(f)|$$

$$\underline{\angle Y(f)} = \underline{\angle X(f)} \underline{\angle e^{-j2\pi f t_0}} = \underline{\angle X(f)} + \underline{\angle e^{-j2\pi f t_0}} = \underline{\angle X(f)} - \overbrace{2\pi f t_0}^{=0}$$

NON è una traslazione!

16. Cambiamento di scala

Si consideri $y(t) = x(\alpha t)$, effettuando un *cambiamento della scala temporale*:

$$\begin{aligned} |\alpha| > 1 &\rightarrow \text{compressione della scala dei tempi} \rightarrow \text{l'evoluzione è "accelerata"} \\ |\alpha| > 1 &\rightarrow \text{dilatazione della scala dei tempi} \rightarrow \text{l'evoluzione è "rallentata"} \\ |\alpha| < 0 &\rightarrow \text{inversione della scala dei tempi} \end{aligned}$$

Inoltre vale:

$$x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} x\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

• Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \cdot \underline{\alpha > 0} &\Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt, \text{ ponendo } z = \alpha t \rightarrow t = \frac{z}{\alpha}, dz = \alpha dt \\ &\Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha} dz = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}} dz = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \\ \cdot \underline{\alpha < 0} &\Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha} dz = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}} dz = -\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

È da notare come l'inversione dell'integrale nel secondo caso l'abbiamo quando $t \rightarrow -\infty$, $z \rightarrow +\infty$. Inoltre abbiamo sostituito $z = -\alpha t$.

Quindi una *dilatazione* nel tempo corrisponde ad una *compressione* in frequenza, e **viceversa**

17. Modulazione

Dato un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(f)$ allora

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

dove $X(f - f_0)$ e $X(f + f_0)$ sono rispettivamente la replica centrata in f_0 e la replica centrata in $-f_0$.

• Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{TCF}[x(t) \cos(2\pi f_0 t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [e^{-j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \right] = \\ &= \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Corollario: } x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0)$$

18. Derivazione

Se $x(t) \rightarrow X(f)$, allora:

$$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f) = Y(f)$$

Una derivata nel tempo è una *moltiplicazione* in frequenza.

• Dimostrazione:

Deriviamo entrambi i lati di $x(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [X(f) e^{j2\pi ft}] df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) (2\pi f) e^{j2\pi ft} df \Rightarrow [\text{TCF}] \frac{dx(t)}{dt} = j2\pi f X(f)\end{aligned}$$

Il teorema della derivazione *modifica gli spettri*

$$|Y(f)| = 2\pi f |X(f)| \quad \angle Y(f) = \angle X(f) + \text{sgn}(f) \frac{\pi}{2}$$

Aumenta proporzionalmente l'ampiezza, esaltando le altre frequenze, e sfasando di $\pm \frac{\pi}{2}$

19. **Integrazione** (deriva dal teorema di derivazione)

Dato un segnale $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ e un segnale $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$, allora vale

$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

• Dimostrazione:

Segue dal teorema di derivazione e richiede che $X(0) = 0$, al fine di evitare che per $f \rightarrow 0$, il rapporto tenda ad infinito.

$$X(0) = 0 \Leftrightarrow X(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^0 dt}_{\text{sottende area nulla}} \Leftrightarrow y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \rightarrow 0$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Rightarrow x(t) \frac{d}{dt} y(t) \Rightarrow X(f) = j2\pi f \cdot Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Anche l'integrale nel tempo si trasforma in un'operazione algebrica in frequenza: in questo caso però vengono esaltate le componenti a **bassa** frequenza nello spettro del segnale, mentre le alte vengono attenuate; la fase varia sempre di $\pm \frac{\pi}{2}$

$$|Y(f)| = \frac{|X(f)|}{2\pi f} \quad \angle Y(f) = \angle X(f) + \text{sgn}(f) \frac{\pi}{2}$$

Da questo teorema deriva la relazione $\text{Atri}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$; $A \text{rect}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow AT \text{sinc}(fT)$

20. **Prodotto**: è il duale della convoluzione

Partendo da due segnali $x(t)$ e $y(t)$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow X(f) \otimes Y(f)$$

• Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\Rightarrow Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{-j2\pi \nu t} d\nu \right] y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi (f-\nu)t} dt \right] d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(f-\nu) d\nu = \\ &= X(f) \otimes Y(f)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{array}{ccc} x(t) y(t) & \Leftrightarrow & X(f) \otimes Y(f) \rightarrow \text{la convoluzione è commutativa} \\ \text{PRODOTTO} & & \text{CONVOLUZIONE} \end{array}$$

21. **Convoluzione**

Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sappiamo che:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X(f) Y(f)$$

- Dimostrazione:

Partiamo sempre dalla definizione di TCF:

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) y(t - \alpha) d\alpha \Leftrightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(\alpha) y(t - \alpha) d\alpha] e^{-j2\pi f(t - \alpha + \alpha)} dt = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) \underbrace{\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t - \alpha) e^{-j2\pi f(t - \alpha)} dt \right]}_{Y(f)} e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) Y(f) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = X(f) Y(f) \end{aligned}$$

- Nota bene:

– la convoluzione ha proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Trasformata di Fourier generalizzata

22. Teorema d'integrazione **completo**:

Vogliamo rimuovere il vincolo (o ipotesi) $X(0)$ che è alla base dell'applicabilità del teorema d'integrazione "incompleto": ciò viene realizzato utilizzando la delta di Dirac.

Il teorema completo afferma che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \cdot X(0)$$

Il nuovo termine rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale!.

- Dimostrazione:

Essendo:

$$x(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) u(t - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$$

abbiamo che per la convoluzione $x(t) \otimes u(t) \Leftrightarrow X(f)U(f)$:

$$X(f) U(f) = X(f) \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$$

Questo perché $\text{TCF}(u(t)) = U(f) = \frac{1}{j2\pi f}$; l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla: rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale, ed è un termine correttivo che rappresenta la funzione impulsiva.

23. Teorema della modulazione, alternativa:

- Dimostrazione:

per il teorema del prodotto,

$$\begin{aligned} x(t) \cos(2\pi f_0 t) &\Leftrightarrow X(f) \otimes \left[\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right] = \\ &= X(f) \otimes \frac{\delta(f - f_0)}{2} + X(f) \otimes \frac{\delta(f + f_0)}{2} \\ \rightarrow X(f) \otimes \delta(f - f_0) &= \int_{\mathbb{R}} X(\alpha) \delta(f - f_0 - \alpha) d\alpha = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha) \delta(\alpha - (f - f_0)) d\alpha = X(f - f_0) \\ x(t) \cos(2\pi f_0 t) &\Leftrightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \end{aligned}$$

Periodicizzazione

24. Prima formula della somma di Poisson:

Come rendere un segnale *aperiodico* $x(t)$ **periodico** di periodo T_0 . Partiamo da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$ relazione nel tempo tra periodico e aperiodico

$$\begin{aligned} \rightarrow Y_k &= \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t - nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \left\{ \begin{array}{l} \alpha = t - t_0 \\ t = \alpha - t_0 \\ d\alpha = dt \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 (\alpha + nT_0)} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 nT_0}}_{\text{multiplo di } 2\pi \rightarrow e^0} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \underbrace{\frac{1}{T_0} X(kf_0)}_{\text{campionamento in frequenza}} \end{aligned}$$

Si ottiene una relazione detta **campionamento in frequenza**. I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico $y(t)$ sono, a meno del fattore $\frac{1}{T_0}$, i campioni della TCF del *segnale base* $x(t)$ presi in corrispondenza delle frequenze armoniche kf_0

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi k t f_0}$$

25. Seconda formula della somma di Poisson

Applichiamo alla prima formula di Poisson il teorema della dualità:

$$\begin{aligned} X(t) &\leftrightarrow x(-f)x(t) \leftrightarrow X(f) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{+j\frac{2\pi k t}{T_0}} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left(X\left(-\frac{k}{T_0}\right)\right) e^{+j\frac{2\pi k t}{T_0}} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} \text{ cambio di segno all'indice } k \\ \rightarrow T &= \frac{1}{T_0} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(t - \frac{n}{T}\right) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(kT) e^{-j2\pi k t f T} \end{aligned}$$

Adesso, dal punto di vista puramente formale, cambiano nome da t in f , otteniamo un'espressione, otteniamo un'espressione *duale* rispetto alla prima formula di Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Sistemi

26. Teorema di Parseval:

Dato un segnale $x(t)$ e la sua energia $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$ (energia finita), possiamo esprimere l'energia E_x anche in frequenza:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi f t} df \right] dt \\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

E_x è l'energia totale, deriva da $p_x = |x(t)|^2$ potenza istantanea integrata o da $|X(f)|^2$ detta **densità spettrale** $E_x(f)$ integrata.

27. Teorema di Wiener-Khinchin

Siamo la densità spettrale di potenza:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

e la funzione *densità spettrale di potenza*

$$S_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{Ext}(f)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|^2}{T}$$

con $\text{Ext}(f)$ densità di energia del segnale *troncato* nell'intervallo $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

Definiamo **funzione di autocorrelazione** $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau) dt$ ossia il segnale moltiplicato per una sua replica *ritardata*. Indica “quanto il segnale somiglia alla sua replica ritardata”: più $x(t)$ è compatta meno somiglierà e meno varrà $R_x(\tau)$

Il teorema afferma che la densità spettrale di energia di un segnale coincide con la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso:

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \underset{R_x(\tau) \text{ è pari}}{\equiv} 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) R_x(\tau) d\tau$$

- Dimostrazione:

Partiamo dalla definizione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(\alpha-t) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(-(t-\alpha)) d\alpha = x(\tau) \otimes x(-\tau) = \\ R_x(\tau) &= x(\tau) \otimes x(-\tau) \iff X(f) X(-f) = X(f) X^*(-f) = |X(f)|^2 = E_x(f) \end{aligned}$$