

# Lista teoremi Teoria dei Segnali

## Introduzione

1.  $x(t)$  segnale periodico di periodo  $T_0$  e ha potenza media su un intervallo finita, allora ha  $\bar{P}$  finita e calcolabile sul periodo:

Per definizione  $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$ . Scegliamo come periodo  $NT_0$ , in quanto se  $N \rightarrow \infty$  vale come  $T \rightarrow \infty$ .

Quindi  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |x(t)|^2 dt$  equivale a  $N$  integrali cui si aggiunge un  $T_0$  ogni volta:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \cdot N \left\{ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt \right\} = \bar{P} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

## Segnali periodici a tempo continuo

### Serie di Fourier

2. Da forma polare a complessa (o rettangolare)

la forma polare della serie di Fourier è data da:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_K) \\ &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_K)}}{2} \rightarrow \text{uso formula di Eulero per il coseno} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} \rightarrow \text{separo le due esponenziali} \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\theta_K} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j\theta_K} e^{-j2\pi k f_0 t} \rightarrow \text{raggruppo le sommatorie } ek \text{ diventa } -k \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} \\ &\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \text{ forma complessa della serie di Fourier} \end{aligned}$$

3. Come si calcolano i coefficienti  $X_n$ ?

Partendo dalla forma complessa, moltiplico a destra e a sinistra per  $e^{-j2\pi k f_0 t}$ , integrando sul periodo  $T_0$ .

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Porto fuori la sommatoria e raccolgo  $e$ : per ipotesi la serie converge.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt$$

L'integrale al secondo membro viene calcolato per  $k \neq n$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt = \frac{e^{j2\pi(k-n)f_0 t}}{j2\pi(k-n)f_0} \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \\ &\frac{e^{j\cancel{2\pi(k-n)f_0 \frac{T_0}{2}}} - e^{-j\cancel{2\pi(k-n)f_0 \frac{T_0}{2}}}{2j \cdot \pi(k-n)f_0} \rightarrow \text{uso formula di Eulero per il seno} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} k=n \rightarrow T_0 \\ k \neq n \rightarrow 0 \end{cases} \rightarrow \text{sostituiamo questo risultato}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0 \Rightarrow X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

N-esimo termine della serie di Fourier

4. Forma rettangolare dalla forma polare

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

usiamo la formula di addizione  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (\cos(2\pi k f_0) \cos(\theta_k) - \sin(2\pi k f_0) \sin(\theta_k)))$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0) - b_k \sin(2\pi k f_0)]$$

sapendo che  $a_0 = A_0$ ,  $a_k = A_k \cos(\theta_k)$ ,  $b_k = B_k \sin(\theta_k)$ .

Abbiamo quindi ottenuto la forma rettangolare della serie di Fourier, dove si nota che un segnale *periodico*  $x(t)$  può essere espresso tramite una **somma di seni e coseni**.

Il coefficiente  $X_n$  può essere espresso anche come:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) (\cos(2\pi k f_0 t) - j \sin(2\pi k f_0 t))$$

$$X_k = a_k + j b_k = A_k \cos(\theta_k) + j A_k \sin(\theta_k) = A_k e^{j\theta_k}$$

5. Criterio di Dirichlet (per  $x(t)$  periodico):

È una serie di condizioni che se incontrate sono sufficienti per poter sviluppare un dato segnale  $x(t)$  in serie di Fourier:

- $x(t)$  deve essere *assolutamente integrabile sul periodo*: ovvero  $(\int_{[T_0]} |x(t)| dt < \infty)$
- $x(t)$  deve essere *continua* (o avere un numero *finito* di discontinuità di prima specie)
- $x(t)$  deve essere *derivabile sul periodo*  $T_0$ , escluso al più un numero finito di punti, dove comunque esiste **finita** sia la derivata destra che la derivata sinistra
  - quest'ultima ipotesi è equivalente a:  $x(t)$  presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo. La serie **converge** al valore assunto da  $x(t)$  dove *continua* e alla semisomma dei limiti sinistro e destro se discontinua.

## Spettro di un segnale periodico e reale

### Proprietà

6. Simmetria Hermitiana dello spettro reale:

I coefficienti  $X_k$  sono generalmente quantità complesse del tipo

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

$X_k$  può essere rappresentata tramite spettro di ampiezza e spettro di fase, discreti (esiste solo in corrispondenza delle armoniche  $k$ )

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Analizziamone il coniugato  $X_k^*$ :

$$X_k^* = \left( \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)^* e^{+j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi(-k) f_0 t} dt$$

È da notare come  $x(t)^* = x(t)$ , dal momento che il segnale  $x(t)$  è reale.

Quindi  $X_k^* = X_{-k}$ : i coefficienti  $X_k$  di un segnale *reale* **godono di simmetria hermitiana**, ossia hanno lo stesso modulo e fase opposta

$$X_{-k} = X_k^* \iff \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| & \text{stesso modulo} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} & \text{fase opposta} \end{cases}$$

In definitiva per un segnale reale:

- lo spettro d'ampiezza è **simmetrico** rispetto a  $k \rightarrow$  pari
- lo spettro di fase è **antisimmetrico** rispetto a  $k \rightarrow$  dispari

#### 7. Linearità dello spettro reale:

Se  $x(t)$  e  $y(t)$  sono due segnali con periodo  $T_0$  *reali* allora vale:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \iff Z_k = aX_k + bY_k$$

Somma di *oscillazioni* alle (o con?) le stesse frequenze dei segnali  $x(t)$  e  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (ax(t) + by(t)) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{a}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{b}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = aX_k + bY_k \end{aligned}$$

#### 8. Parità e disparità del segnale

- Se  $x(t)$  è **pari**, allora il coefficiente  $X_k = X_{-k}$ ; se il segnale è anche **reale** vale  $X_k = X_{-k} = X_k^* \iff X_k \in \mathbb{R}$ .

$X_k = X_{-k}$  (con un cambio di variabile  $\alpha = -t \rightarrow dt = -d\alpha$ ).

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \iff X_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi (-k) f_0 t} dt$$

Utilizziamo il cambio di variabile

$$\begin{aligned} X_{-k} &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(-\alpha) e^{-j2\pi (-k) f_0 (-\alpha)} d\alpha = -\frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = X_k \end{aligned}$$

dato che il segnale  $\in \mathbb{R}$  lo possiamo rappresentare come (perché essendo reale ha fase nulla?):

$$x(t) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}}{2} = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t) \end{aligned}$$

Da ciò deduco che un segnale reale e pari è esprimibile in serie di soli *coseni* (i quali sono a loro volta pari).

Possiamo inoltre scrivere i coefficienti  $X_k$  in modo semplificato, data la *parità* del segnale:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{pari}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}} dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{pari}} \cdot \underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}} dt = \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \cos(2\pi k f_0 t) dt - 0 \end{aligned}$$

Integrale di una funzione pari su un intervallo simmetrico.

- se  $x(t)$  è **dispari**, allora anche i coefficienti  $X_k$  saranno dispari. Inoltre, dato che  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $X_k$  sarà un **immaginario puro**, ed

$$x(t) = 2j \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t) \text{ e } X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

Dimostrazione:

- Dato che  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $X_k$ , allora vale  $X_{-k} = -X_k = X_k^* \Rightarrow X_k^* = -X_k$ , quindi è un immaginario puro!
- Per  $X_k$ :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}} dt - \frac{j}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}} \cdot \underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}} dt = \\ &= -\frac{2j}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

#### • Note varie

- Se  $x(t)$  è pari i suoi coefficienti  $X_k$  sono reali e lo spettro di fase vale 0 o  $\pm\pi$ ; mentre se  $x(t)$  è dispari i suoi coefficienti  $X_k$  sono immaginari puri e lo spettro di ampiezza non viene toccato: un segnale dispari è solo “spostato” nel tempo.
- È da notare come la diversa velocità di un segnale dipenda dal suo andamento temporale: le variazioni brusche comportano la presenza di **armoniche** [1] con  $k$  più elevato per rappresentare la velocità alta(?):
  - \* più il segnale è regolare meno armoniche sono necessarie per “ricreare” il segnale
    - $\frac{1}{k} \rightarrow$  funzioni discontinue: dente di sega ideale, onda quadra, onda quadra “antisimmetrica”, rect
    - $\frac{1}{k^2} \rightarrow$  funzioni continue a derivata discontinua: onda triangolare. [1]: TODO: definire meglio armoniche

## Segnali aperiodici a tempo continuo

### Trasformata continua di Fourier

Una funzione non periodica, definita tra  $-\infty$  e  $\infty$ , può essere rappresentata come **somma di infinite armoniche semplici** di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile con continuità tra  $-\infty$  e  $\infty$

9. Dal segnale periodico al segnale aperiodico...

Partiamo dall'impulso rettangolare *aperiodico*  $\text{rect} \frac{t}{T}$ :

$$x(t) = \text{rect} \frac{t}{T} \rightarrow x_p(t) = \sum \text{rect} \left( \frac{t - nT_0}{T} \right) \text{ treno di impulsi rettangolari}$$

possiamo vedere  $x(t)$  come caso limite di  $x_p(t)$  con periodo  $T_0 \rightarrow \infty$

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t)$$

1. la frequenza diventa infinitesima ( $f_0 = \frac{1}{T_0}$ )
2. si riduce la *distanza tra le armoniche*, ossia si **infittisce** lo spettro;
3.  $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$ , l'ampiezza assume valori *sempre più piccoli*

Usiamo il coefficiente *modificato*  $X(f_0 k) = T_0 X_k$  per ovviare il problema. Riscriviamo  $x_p(t)$  e  $X_k$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k f_0) e^{j2\pi k f_0 t} \cdot f_0 \rightarrow x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df}_{\text{integrale di Fourier}}$$

Le armoniche si *infittiscono talmente tanto* da non essere più distinte ma **continue**.

$$X(k f_0) = T_0 X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \rightarrow X(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt}_{\text{trasformata continua di Fourier}}$$

$X(f)$  è una **funzione complessa della variabile continua**  $f$ , quindi è di spettro continuo.

- Nota: **differenze tra segnali continui periodici e aperiodici**:
  - un segnale *periodico* è rappresentato da componenti sinusoidali a frequenze in relazione **armonica** (multipli di  $f_0$ , frequenza *fondamentale* e ad ampiezza finita).
  - un segnale *aperiodico* è rappresentato con componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima*  $|X(f)| df$  e frequenza  $f$  variabile con continuità su  $\mathbb{R}$ ; è un segnale periodico di periodo illimitato con  $f_0$  infinitesimo. Le armoniche discrete *degenerano* nell'insieme continuo.

#### 10. Criteri di esistenza per la trasformata continua di Fourier (TCF)

1.  $X(f)$  esiste se il segnale  $x(t)$  ha energia finita (condizione “sufficiente”)!
2. Criteri di Dirichlet:
  1. la funzione deve essere assolutamente sommabile:  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$
  2. se in qualunque intervallo finito  $t_1 < t < t_2$  è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie
  3. se in qualunque intervallo finito  $t_1 < t < t_2$  la funzione ha un numero finito di massimi e minimi.

Allora  $x(t)$  è rappresentabile come TCF e

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \begin{cases} x(t) & \text{se continua} \\ \frac{x(t_0^+) - x(t_0^-)}{2} & \text{se discontinua} \end{cases}$$

#### 11. Simmetria Hermitiana della trasformata continua di Fourier

Possiamo rappresentare  $X(f)$  in forma rettangolare:

$$X(f) = Re(f) + j Im(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$\underbrace{Re(f) = Re(-f)}_{\text{pari}} \text{ e } \underbrace{Im(f) = -Im(-f)}_{\text{dispari}} \Rightarrow X(f) = X^*(-f) \text{ simmetria hermitiana}$$

infatti  $X(f) = Re(f) + j Im(f) = Re(-f) + j Im(f) = X^*(-f)$

- lo spettro di ampiezza è quindi *pari* a quello di fase *dispari*.

#### 12. Parità e disparità:

- se un segnale è *reale e pari*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) df = \begin{cases} Re(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \\ Im(f) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow X(f) = Re(f) \rightarrow X(f) = X(-f)$  è reale e pari

- se un segnale è *dispari e reale*

$$X(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = \begin{cases} \text{Re}(f) = 0 \\ \text{Im}(f) = -2 \int_0^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \end{cases}$$

$\rightarrow X(f) = j\text{Im}(f) \rightarrow X(f) = -X(f)$  è immaginaria pura e dispari

## Proprietà della trasformata continua

### 13. Linearità

Dati due segnali  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  con le loro trasformate continue di Fourier  $X_1(f)$  e  $X_2(f)$ , allora se:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \iff X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

con  $a, b$  costanti,  $X_1(f) = \text{TCF}[x_1(t)]$  e  $X_2(f) = \text{TCF}[x_2(t)]$

- Dimostrazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ax_1(t) + bx_2(t)) e^{-j2\pi ft} dt$$

ma sappiamo che l'integrale è *lineare*, quindi

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi ft} dt = aX_1(f) + bX_2(f)$$

### 14. Dualità

se  $x(t) \iff X(f)$ , allora  $X(t) \iff x(-f)$ :

Se la trasformata continua di Fourier passa ad essere un *segnale nel tempo*, allora  $x(-f)$  è la sua trasformata di Fourier. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra la funzione e la sua trasformata.

- Esempio:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \iff \text{sinc}(fT)$$

Ma se nel tempo ho un segnale  $\text{sinc}(bT)$  qual è la sua trasformata?

$T \text{sinc}(Tt) \iff \text{rect}\left(-\frac{f}{T}\right)$  da cui  $\text{sinc}(Bt) \iff \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{t}{B}\right)$ , dove  $B$  indica la banda.

- Dimostrazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \rightarrow x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi ft} dt$$

con uno scambio di variabili  $t$  con  $f$ . Quindi:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Da qui deriviamo che  $x(-f)$  è la trasformata di  $X(t)$

### 15. Ritardo

Sia  $X(f) = \text{TCF}[x(t)]$ : la trasformata di Fourier di  $x(t)$  ritardato nel tempo di una quantità  $t_0$  è pari a:

$$x(t - t_0) \iff X(f) e^{-j2\pi ft_0}$$

- Dimostrazione:

Applichiamo a  $x(t - t_0)$  la definizione di TCF

$$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \text{sostituiamo } \begin{cases} \alpha = t - t_0 \rightarrow t = \alpha + t_0, dt = d\alpha \end{cases}$$

$$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi(\alpha+t_0)f} d\alpha = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = e^{-j2\pi ft_0} X(f)$$

- Esempio:

$$A \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \iff AT \text{sinc}(fT) e^{-j\frac{1}{2}\pi fT}$$

Se  $y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow Y(f) = X(f) e^{-j2\pi f t_0} \Rightarrow$  Un ritardo modifica lo spettro di **fase** ma *non cambia* il suo spettro di ampiezza, in quanto quest'ultimo indica quali componenti sinusoidali sono necessarie per comporre la forma del segnale, mentre lo spettro di fase mi dice con quale *angolo* iniziale devono "partire" le sinusoidi.

Quindi se il segnale si sposta nel tempo, allora le sinusoidi hanno angoli iniziali diversi, ma sono le stesse.

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |e^{-j2\pi f t_0}| = |X(f)|$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f) e^{-j2\pi f t_0} = \angle X(f) + \angle e^{-j2\pi f t_0} = \angle X(f) + \overbrace{-2\pi f t_0}^{=0}$$

NON è una traslazione!

## 16. Cambiamento di scala

Si consideri  $y(t) = x(\alpha t)$ , effettuando un *cambiamento della scala temporale*:

$|\alpha| > 1 \rightarrow$  compressione della scala dei tempi  $\rightarrow$  l'evoluzione è "accelerata"

$|\alpha| < 1 \rightarrow$  dilatazione della scala dei tempi  $\rightarrow$  l'evoluzione è "rallentata"

$\alpha < 0 \rightarrow$  inversione della scala dei tempi

Inoltre vale:

$$x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

• Dimostrazione:

$$\cdot \underline{\alpha > 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt, \text{ ponendo } z = \alpha t \rightarrow t = \frac{z}{\alpha}, dz = \alpha dt \rightarrow dt = \frac{dz}{\alpha}$$

$$\Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha} dz = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}} dz = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$$\cdot \underline{\alpha < 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Leftrightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha} dz = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}} dz = -\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

È da notare come l'inversione dell'integrale nel secondo caso l'abbiamo quando  $t \rightarrow -\infty$ ,  $z \rightarrow +\infty$ . Inoltre abbiamo sostituito  $z = -\alpha t$ .

Quindi una *dilatazione* nel tempo corrisponde ad una *compressione* in frequenza, e **viceversa**

## 17. Modulazione

Dato un segnale  $x(t)$  e la sua trasformata  $X(f)$  allora

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

dove  $X(f - f_0)$  e  $X(f + f_0)$  sono rispettivamente la replica centrata in  $f_0$  e la replica centrata in  $-f_0$ .

• Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{TCF}[x(t) \cos(2\pi f_0 t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [e^{-j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \right] = \\ &= \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \end{aligned}$$

Corollario:  $x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0) \rightarrow$  *traslazione in frequenza*

## 18. Derivazione

Se  $x(t) \rightarrow X(f)$ , allora:

$$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f) = Y(f)$$

Una derivata nel tempo è una *moltiplicazione* in frequenza.

- Dimostrazione:

Deriviamo entrambi i lati di  $x(t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [X(f) e^{j2\pi ft}] df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) (2\pi f) e^{j2\pi ft} df \Rightarrow \text{TCF} \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] = j2\pi f X(f)\end{aligned}$$

Il teorema della derivazione *modifica gli spettri*

$$\begin{aligned}|Y(f)| &= 2\pi f |X(f)| \\ \angle Y(f) &= \angle X(f) + \text{sgn}(f) \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Aumenta proporzionalmente l'ampiezza, esaltando le altre frequenze, e sfasando di  $\pm \frac{\pi}{2}$

#### 19. **Integrazione** (deriva dal teorema di derivazione)

Dato un segnale  $x(t) \Leftrightarrow X(f)$  e un segnale  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$ , allora vale

$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

- Dimostrazione:

Segue dal teorema di derivazione e richiede che  $X(0) = 0$ , al fine di evitare che per  $f \rightarrow 0$ , il rapporto tenda ad infinito.

$$\begin{aligned}X(0) = 0 &\Leftrightarrow X(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^0 dt}_{\text{sottende area nulla}} \Leftrightarrow y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \rightarrow 0 \\ y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \Rightarrow x(t) \frac{d}{dt} y(t) \Rightarrow X(f) = j2\pi f \cdot Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}\end{aligned}$$

Anche l'integrale nel tempo si trasforma in un'operazione algebrica in frequenza: in questo caso però vengono esaltate le componenti a **bassa** frequenza nello spettro del segnale, mentre le alte vengono attenuate; la fase varia sempre di  $\pm \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}|Y(f)| &= \frac{|X(f)|}{2\pi f} \\ \angle Y(f) &= \angle X(f) + \text{sgn}(f) \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Da questo teorema deriva la relazione  $\text{Atri}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$ ;  $\text{Arect}(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow AT \text{sinc}(fT)$

#### 20. **Prodotto**: è il duale della convoluzione

Partendo da due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow X(f) \otimes Y(f)$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\Rightarrow Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{-j2\pi \nu t} d\nu \right] y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) \left[ \int_{t=-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi (f-\nu)t} dt \right] d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(f-\nu) d\nu = \\ &= X(f) \otimes Y(f)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\underset{\text{PRODOTTO}}{x(t) y(t)} \Leftrightarrow \underset{\text{CONVOLUZIONE}}{X(f) \otimes Y(f)} \rightarrow \text{la convoluzione è commutativa}$$

Nota Bene:  $\nu$  è **nu**!



## 21. *Convolutione*

Dati due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  sappiamo che:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \iff X(f) Y(f)$$

- Dimostrazione:

Partiamo sempre dalla definizione di TCF:

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) y(t - \alpha) d\alpha \iff Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(\alpha) y(t - \alpha) d\alpha] e^{-j2\pi f (t - \alpha + \alpha)} dt = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) \underbrace{\left[ \int_{t=-\infty}^{\infty} y(t - \alpha) e^{-j2\pi f (t - \alpha)} dt \right]}_{Y(f)} e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) Y(f) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = X(f) Y(f) \end{aligned}$$

- Nota bene:

– la convoluzione ha proprietà commutativa, associativa e distributiva.

## Trasformata di Fourier generalizzata

### 22. Teorema d'integrazione **completo**:

Vogliamo rimuovere il vincolo (o ipotesi)  $X(0)$  che è alla base dell'applicabilità del teorema d'integrazione "incompleto": ciò viene realizzato utilizzando la delta di Dirac.

Il teorema completo afferma che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \iff Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \cdot X(0)$$

Il nuovo termine rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale!.

- Dimostrazione:

Essendo:

$$\begin{aligned} x(t) \otimes u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) u(t - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \\ u(t) &= \frac{1}{2} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

abbiamo che per la convoluzione  $x(t) \otimes u(t) \iff X(f)U(f)$ :

$$X(f) U(f) = X(f) \left[ \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$$

Questo perché  $\text{TCF}(u(t)) = U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$ ; l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla: rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale, ed è un termine correttivo che rappresenta la funzione impulsiva.

### 23. Teorema della modulazione, alternativa:

- Dimostrazione:

per il teorema del prodotto,

$$\begin{aligned} x(t) \cos(2\pi f_0 t) &\iff X(f) \otimes \left[ \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right] = \\ &= X(f) \otimes \frac{\delta(f - f_0)}{2} + X(f) \otimes \frac{\delta(f + f_0)}{2} \\ \rightarrow X(f) \otimes \delta(f - f_0) &= \int_{\mathbb{R}} X(\alpha) \delta(f - f_0 - \alpha) d\alpha = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha) \delta(\alpha) - (f - f_0) d\alpha = X(f - f_0) \\ x(t) \cos(2\pi f_0 t) &\iff \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \end{aligned}$$

## Periodicizzazione

24. Prima formula della somma di Poisson:

Come rendere un segnale *aperiodico*  $x(t)$  **periodico** di periodo  $T_0$ . Partiamo da  $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$  relazione nel tempo tra periodico e aperiodico

$$\begin{aligned} \rightarrow Y_k &= \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t - nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \text{sostituiamo } \begin{cases} \alpha = t - t_0 \\ t = \alpha + t_0 \\ d\alpha = dt \end{cases} \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 (\alpha + nT_0)} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 nT_0}}_{\text{multiplo di } 2\pi \rightarrow e^0} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} - nT_0}^{\frac{T_0}{2} - nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \underbrace{\frac{1}{T_0} X(k f_0)}_{\text{campionamento in frequenza}} \end{aligned}$$

Si ottiene una relazione detta **campionamento in frequenza**. I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico  $y(t)$  sono, a meno del fattore  $\frac{1}{T_0}$ , i campioni della TCF del *segnale base*  $x(t)$  presi in corrispondenza delle frequenze armoniche  $k f_0$

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

25. Seconda formula della somma di Poisson

Applichiamo alla prima formula di Poisson il teorema della dualità:

$$\begin{aligned} X(t) &\leftrightarrow x(-f) \\ x(t) &\leftrightarrow X(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{+j\frac{2\pi k t}{T_0}} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left(x\left(-\frac{k}{T_0}\right)\right) e^{+j\frac{2\pi k t}{T_0}} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} \text{ cambio di segno all'indice } k \\ \rightarrow T &= \frac{1}{T_0} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(t - \frac{n}{T}\right) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(kT) e^{-j2\pi k t T} \end{aligned}$$

Adesso, dal punto di vista puramente formale, cambiano nome da  $t$  in  $f$ , otteniamo un'espressione, otteniamo un'espressione *duale* rispetto alla prima formula di Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

## Sistemi

26. Teorema di Parseval:

Dato un segnale  $x(t)$  e la sua energia  $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$  (energia finita), possiamo esprimere l'energia  $E_x$  anche in frequenza:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi f t} df \right] dt \\ &= \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[ \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

$E_x$  è l'energia totale, deriva da  $p_x = |x(t)|^2$  potenza istantanea integrata o da  $|X(f)|^2$  detta **densità spettrale**  $E_x(f)$  integrata.

## 27. Teorema di Wiener-Khinchin

Siamo la densità spettrale di potenza:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

e la funzione *densità spettrale di potenza*

$$S_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}(f)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|^2}{T}$$

con  $E_{x_T}(f)$  densità di energia del segnale *troncato* nell'intervallo  $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

Definiamo **funzione di autocorrelazione**  $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau) dt$  ossia il segnale moltiplicato per una sua replica *ritardata*. Indica “quanto il segnale somiglia alla sua replica ritardata”: più  $x(t)$  è compatta meno somiglierà e meno varrà  $R_x(\tau)$

Il teorema afferma che la densità spettrale di energia di un segnale coincide con la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso:

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad \underbrace{\equiv}_{R_x(\tau) \text{ è pari}} \quad 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) R_x(\tau) d\tau$$

- Dimostrazione:

Partiamo dalla definizione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(\alpha-t) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(-(t-\alpha)) d\alpha = x(\tau) \otimes x(-\tau) = \\ R_x(\tau) &= x(\tau) \otimes x(-\tau) \iff X(f) X(-f) = X(f) X^*(-f) = |X(f)|^2 = E_x(f) \end{aligned}$$

## Secondo Parziale

### Processi aleatori analogici

1. Un processo aleatorio WSS  $X(t)$  filtrato da un SLS è all'uscita un nuovo processo  $Y(t)$  WSS.

Per far sì che accada il processo  $y(t)$  deve avere:

1. Media costante;
  2. L'autocorrelazione funzione solo di  $\tau$
- Dimostrazione:
    - 1.

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E[x(t) \otimes h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot x(t - \alpha) d\alpha\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) E[x(t - \alpha)] d\alpha \\ &= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha = m_X H(0) = \text{costante} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} R_{yy}(t_1, t_2) &= \begin{cases} t_1 = t \\ t_2 = t + \tau \rightarrow \tau = t_2 - t_1 \end{cases} \rightarrow \text{cambio di variabile} \\ R_{yy}(t, t + \tau) &= E[y(t) \cdot y(t + \tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) x(t + \tau - \beta) d\beta\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) x(t - \alpha) x(t + \tau - \beta) d\alpha d\beta\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) E[x(t - \alpha) x(t + \tau - \beta)] d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_{xx}(\tau - \beta + \alpha) d\alpha d\beta \\ &\rightarrow R_{yy}(t, t + \tau) = R_{yy}(\tau) \end{aligned}$$

Quindi il processo  $y(t)$  è WSS.

### Segnali a tempo discreto aperiodici

2. Trasformata di Fourier per sequenze (definizione, periodo 1, denormalizzazione);

Data la sequenza *aperiodica*  $x[n]$  **discreta**:

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} \longrightarrow f = F \cdot F_c = \frac{F}{T} = \text{Hz} \longrightarrow \bar{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi n F}$$

$\bar{X}(F)$  è **completamente nota** se conosco il suo andamento in un intervallo delle frequenze *normalizzate* di ampiezza unitaria:  $F \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$   
Intervallo base

- Periodica di periodo 1:

$$\begin{aligned} \bar{X}(F + 1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n (F+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n F} \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1 \text{ (n intero)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n F} = \\ &= \bar{X}(F) \end{aligned}$$

- Denormalizzazione:

Necessaria in quanto se la sequenza  $x[n]$  deriva da un'operazione di campionamento, la frequenza normalizzata **non permette** di stabilire un legame con la frequenza (espressa in Hz) delle componenti nella trasformata del segnale analogico di partenza.

Se  $T$  è il periodo di campionamento,  $\Rightarrow f \triangleq \frac{F}{T} = F \cdot f_c$  in Hz. Sostituendo ottengo  $F = fT$  in Hz

$$\text{TFS}[X[n]] = \bar{X}(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T}$$

$f$  continua in  $\left[-\frac{1}{2T}; \frac{1}{2T}\right] \rightarrow \bar{X}(f)$  continua. Posso introdurre il *modulo*  $\bar{A}(f) = |\bar{X}(f)|$  e lo *spettro di fase*  $\bar{\theta}(f) = \angle \bar{X}(f)$ .

$X(f)$  è periodica di periodo pari a  $f_c = \frac{1}{T} \Rightarrow \bar{X}(f + \frac{1}{T}) = \sum x[n] e^{-j2\pi n f T} \cdot \underbrace{e^{j2\pi n \frac{1}{T} T}}_{=1} = \bar{X}(f)$

3. Relazione tra definizione di antitrasformata e trasformata; Criterio di convergenza per TFS (solo definizione).

$$x[n] = \text{ITFS}[\bar{X}(f)] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \bar{X}(f) &\triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi m f T} \rightarrow \begin{array}{l} \text{moltiplico per osc.ni} \\ \text{complesse alla frequenza } f \text{ e integro} \end{array} \\ \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi m f T} e^{j2\pi n f T} df = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT} df \\ \text{Studiamo } \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT} df &\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{T} & : m = n \rightarrow \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} 1 \cdot df = \frac{1}{T} \\ 0 & : m \neq n \rightarrow m - n = k \rightarrow \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi k f T} df = 0 \end{cases} \\ \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT} df = \frac{1}{T} x[n] \\ \Rightarrow x[n] &= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df \end{aligned}$$

Nota bene: nell'ultima sommatoria ho tutti elementi pari a 0, tranne il caso  $m = n \rightarrow \frac{1}{T}$

- Criterio di convergenza:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < +\infty \Rightarrow \exists \text{ TFS}$$

Un criterio di convergenza per l'esistenza della trasformata è la **assoluta sommabilità** della frequenza.

## Teoremi

4. Teorema di Linearità;

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow \bar{X}(f) = a\bar{X}_1(f) + b\bar{X}_2(f)$$

5. Teorema del Ritardo;

Sia  $x[n]$  una sequenza.

$$x[n-k] \Leftrightarrow \bar{X}(f) \cdot e^{-j2\pi k f T}$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{TFS}[x[n-k]] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-k] e^{-j2\pi m f T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi(m+k)fT} = e^{-j2\pi k f T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi m f T} = \\ &= \bar{X}(f) e^{-j2\pi k f T} \end{aligned}$$

6. Teorema della Modulazione;

$$x[n] \cdot e^{j2\pi n f_0 T} \Leftrightarrow \bar{X}(f - f_0)$$

- Dimostrazione:

$$\text{TFS} \left[ x[n] e^{j2\pi n f_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} \cdot e^{j2\pi n f_0 T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n (f-f_0) T} = \bar{X}(f-f_0)$$

7. Teorema della Somma di Convoluzione;

Sia  $s[n]$  la sequenza discreta *somma di convoluzione* tra le sequenze aperiodiche  $x[n]$  e  $y[n]$ .

$$s[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] x[n-k]$$

Gode delle stesse proprietà del caso continuo.

$$\Rightarrow \bar{S}(f) = \bar{X}(f) \cdot \bar{Y}(f)$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \bar{S}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{-j2\pi n f T}}_{\text{ritardo}} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] \bar{Y}(f) e^{-j2\pi k f T} = \bar{Y}(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi k f T} = \bar{Y}(f) \bar{X}(f) \end{aligned}$$

8. Teorema del Prodotto;

$$p[n] = x[n] \cdot y[n] \Leftrightarrow \bar{P}(f) = \bar{X}(f) \otimes \bar{Y}(f)$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \bar{P}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) e^{j2\pi n \alpha T} d\alpha \right]}_{\text{antitrasformata di } \bar{X}(f)} y[n] e^{-j2\pi n f T} = \\ &= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j2\pi n (f-\alpha) T}}_{\text{dalla modulazione } \rightarrow \bar{Y}(f-\alpha)} d\alpha = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) \bar{Y}(f-\alpha) d\alpha \\ &\Rightarrow \bar{P}(f) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(\alpha) \bar{Y}(f-\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Questa è la **convoluzione ciclica o periodica**. L' integrale viene calcolato su un singolo periodo e il risultato è diviso per l'ampiezza del periodo  $\frac{1}{T}$

9. Teorema dell'Incremento;

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{x(nT) - x(nT-T)}{T} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T}, \text{ con } x[n] \triangleq x(nT)$$

Si introduce l'operatore **incremento**  $\Delta x[n] \triangleq x[n] - x[n-1]$

Usando il *teorema del ritardo* per ottenere la trasformata:

$$\Delta x[n] \Leftrightarrow \bar{X}(f) - \bar{X}(f) e^{-j2\pi f T} = \bar{X}(f) (1 - e^{-j2\pi f T})$$

È l'analogo del teorema di derivazione: approssima la derivata del rapporto incrementale.

10. Teorema della Sequenza Somma.

Consideriamo la sequenza somma  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ . Dal teorema dell'incremento otteniamo la sua trasformata in sequenza:

$$\bar{Y}(f) = \frac{\bar{X}(f)}{1 - e^{-j2\pi f T}}$$

purché  $\bar{X}(0) = 0$ .

- Dimostrazione:

$z[n] = \Delta y[n] \iff \bar{Z}(f) = \bar{Y}(f)[1 - e^{-j2\pi fT}]$  dal teorema dell'incremento

$$\text{però } \Delta y[n] = y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n]$$

$$\text{quindi } \bar{X}(f) = \bar{Y}(f)[1 - e^{-j2\pi fT}] \rightarrow \bar{Y}(f) = \frac{\bar{X}(f)}{1 - e^{-j2\pi fT}}$$

## Campionamento:

11. Teorema del campionamento (“risultato” dell’interpolazione cardinale);

Un segnale il cui spettro è *limitato* nella banda  $B$  può essere ricostruito a partire dai propri campioni, **purché**  $f_c \geq 2B$

$p(t)$  è un impulso “diverso” per generalizzare l’operazione d’interpolazione, anche al fine di evitare le discontinuità che lo stesso impulso  $p(t)$  introduce nell’interpolazione a mantenimento.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] p(t - nT), \text{ scegliendo } p(t) = \text{sinc}\left(\frac{f}{T}\right) \Rightarrow P(f) = T \text{rect}(fT)$$

$$\hat{X}(f) = P(f) \bar{X}(f) = T \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = X(f)$$

ricampionando il segnale  
interpolato al generico istante  $t = kT$

$$\hat{x}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{kT - nT}{T}\right), \text{ ma } \text{sinc}(k - n) = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & k = n \end{cases}$$

$$\text{Quindi: } \hat{x}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \underbrace{\delta[k - n]}_{1 \text{ sse } n=k} = x[k] = x(kT)$$

Il segnale di partenza coincide con il segnale interpolato.

12. Relazione tra TCF e TFS.

Sappiamo che nel dominio “temporale” è valida la relazione  $x[n] = x(nT)$ : vogliamo trovare una relazione simile anche dal punto di vista frequenziale:

$$\begin{aligned} \bar{X}(f) &\triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi n f T} = \boxed{\text{Sapendo che: } x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{j2\pi \alpha n T} d\alpha} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{-j2\pi \alpha n T} d\alpha \cdot e^{-j2\pi n f T} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n (f - \alpha) T} d\alpha \end{aligned}$$

ma il segnale *pettine di Dirac* è esprimibile in serie di Fourier con coefficienti pari a  $\frac{1}{T}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi k t}{T}} \\ &\quad \text{Trasformata di Fourier } \updownarrow \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f T} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \alpha - \frac{k}{T}\right) d\alpha = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \delta\left(f - \alpha - \frac{k}{T}\right) d\alpha =$$

$$= \delta \text{ è pari } = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \delta\left(\alpha - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) d\alpha = \text{prodotto tra } X(\alpha) \text{ e Dirac centrato in } f - \frac{k}{T}$$

$$= \text{per la proprietà campionatrice della delta di Dirac} \rightarrow \bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Quindi questa relazione dimostra che la trasformata di Fourier di una sequenza ottenuta per campionamento si può ricavare come *periodicizzazione* della trasformata del segnale analogico di partenza, con un periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento  $\frac{1}{T}$ !

### Segnali a tempo discreto periodici

13. Trasformata discreta di Fourier (definizione);

Supponiamo  $x[n]$  periodica di periodo  $N_0$

$$x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} ; \quad \bar{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}}$$

antitrasformata discreta di Fourier      Trasformata discreta di Fourier

14. La trasformata di una sequenza periodica è essa stessa periodica (stesso periodo  $N_0$ );

$$\bar{X}_{k+N_0} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j2\pi(k+N_0)\frac{n}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j2\pi k\frac{n}{N_0}} e^{-j2\pi n} = \bar{X}_k$$

15. La relazione di sintesi di una TDF discende da quella di analisi;

$$x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} \Rightarrow \bar{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}}$$

Moltiplichiamo per  $e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}}$  con  $(0 \leq m \leq N_0 - 1)$  ed effettuiamo una somma sul periodo ( $n$ )

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} =$$

Sviluppando il secondo membro:  $\frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}}$

La seconda sommatoria si sviluppa come :

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \left( e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N_0}} \right)^n = \begin{cases} \frac{1 - e^{j2\pi(k-m)}}{1 - e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N_0}}} = 0 & k \neq m \\ \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} 1 = N_0 & k = m \end{cases}$$

ovvero:  $\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \begin{cases} N_0 & \text{per } k=m \\ 0 & \text{per } k \neq m \end{cases} = \delta[k-m]N_0$

$$= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}} e^{j\frac{2\pi nk}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \delta[k-m]N_0 = \cancel{N_0} \bar{X}_m$$

per sostituzione infine:  $\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}} = \bar{X}_m$

### Proprietà:

Notazione:  $\text{DFT}_{N_0} \{x[n]\} = \bar{X}_k$ , con  $0 \leq n, k \leq N_0 - 1$

16. Proprietà di Linearità;

$$\text{DFT}_{N_0} \{ax[n] + by[n]\} = a\bar{X}_k + b\bar{Y}_k$$

17. Proprietà di Traslazione Circolare;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[n - n_0]\} = \bar{X}_k e^{-j\frac{2\pi kn_0}{N_0}}$$



- Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\text{DFT}_{N_0} \{x[n - n_0]\} &= \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n - n_0] e^{-j2\pi \frac{n}{N_0} k} = \boxed{\begin{array}{c} \text{cambio di variabile} \\ p = n - n_0 \\ n = p + n_0 \end{array}} \\
&= \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{(p+n_0)k}{N_0}} = \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{pk}{N_0}} e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} = \\
&= e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{pk}{N_0}} = e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} \sum_{p=0}^{N_0-1} x[p] e^{-j2\pi \frac{pk}{N_0}} \\
\text{DFT}_{N_0} \{x[n - n_0]\} &= e^{-j2\pi \frac{n_0 k}{N_0}} \cdot \bar{X}_k
\end{aligned}$$

Si dice traslazione **circolare** in quanto, osservando la periodicit  della sequenza originale e di quella traslata,   possibile notare come i campioni che “escono” a destra dell’intervallo rientrano alla sinistra dell’intervallo stesso.

18. Propriet  di Traslazione In Frequenza;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[n] e^{-j2\pi \frac{k_0 n}{N_0}}\} = \bar{X}_{k-k_0}$$

19. Propriet  di Inversione Temporale;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[-n]\} = \bar{X}_{-k} = \bar{X}_{N_0-k}$$

- Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\text{DFT}_{N_0} \{x[-n]\} &= \sum_{n=0}^{N_0-1} x[-n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[N_0 - n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{cambio di variabile} \\ p = N_0 - n \\ n = N_0 - p \end{array}} \\
&= \sum_{p=1}^{N_0} x[p] e^{-j2\pi \frac{k(N_0-p)}{N_0}} = \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1} \sum_{p=0}^{N_0-1} x[p] e^{-j2\pi \frac{kp}{N_0}} = \bar{X}_{-k} = \bar{X}_{N_0-k}
\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio, abbiamo usato la periodicit  della sequenza  $x[n]$  e nel penultimo passaggio, per cambiare gli indici della sommatoria, abbiamo usato le propriet  di periodicit  della sequenza e della funzione esponenziale, come gi  visto.

20. Propriet  di coniugazione;

$$\text{DFT}_{N_0} \{x^*[n]\} = \bar{X}_{-k}^* = \bar{X}_{N_0-k}^*$$

21. Simmetria per sequenze reali (pari e dispari);

Per una sequenza reale  $x[n]$  abbiamo:

$$\text{DFT}_{N_0} \{x[n]\} = \text{DFT}_{N_0} \{x^*[n]\} \rightarrow \bar{X}_k = \bar{X}_{-k}^* = \bar{X}_{N_0-k}^*$$

da cui derivano le propriet  di simmetria per il modulo e per la fase:

$$\begin{aligned}
|\bar{X}_k| &= |\bar{X}_{-k}| = |\bar{X}_{N_0-k}| \\
\angle \bar{X}_k &= -\angle \bar{X}_{-k} = -\angle \bar{X}_{N_0-k}
\end{aligned}$$

Tali relazioni implicano che il modulo della sequenza  $X[k]$    simmetrico rispetto al valore  $k = \frac{N}{2}$ , mentre la fase   antisimmetrica rispetto a tale valore.

- per sequenze di lunghezza **pari**, il centro di simmetria coincide con un campione della sequenza;
- per sequenze di lunghezza **dispari**, invece, il centro di simmetria coincide con un punto equidistante tra due campioni.

22. Teorema di Parseval per sequenze;

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] y^*[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \bar{Y}_k^* \\ \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} |\bar{X}_k|^2 \end{cases}$$

• Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] y^*[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \left( \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{Y}_k^* e^{j2\pi \frac{kn}{N_0}} \right)^* = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{Y}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k \bar{Y}_k^*$$

– Ponendo  $x[n] = y[n]$  si ottiene la seconda relazione.

L'energia si mantiene nei domini.

23. Teorema del Prodotto;

Consideriamo adesso la sequenza (periodica)  $p[n]$  data dal *prodotto* fra la sequenza  $x[n]$  e la sequenza  $y[n]$  entrambe periodiche di periodo  $N_0$

$$p[n] = x[n] y[n]$$

e calcoliamone la trasformata discreta di Fourier:

$$\bar{P}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} p[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] y[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{1}{N_0} \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m e^{j2\pi \frac{nm}{N_0}} \cdot y[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}}$$

Dove  $x[n]$  è stata scomposta in serie discreta di Fourier. Inoltre è stata utilizzata una variabile “muta”  $m$  nell'antitrasformata per non creare ambiguità con la variabile  $k$ , da cui dipende la trasformata.

$$= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m e^{j2\pi \frac{nm}{N_0}} \cdot y[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}}$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie otteniamo:

$$\begin{aligned} \bar{P}_k &= \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} y[n] e^{-j2\pi \frac{n(k-m)}{N_0}} = \frac{1}{N_0} \sum_{m=0}^{N_0-1} \bar{X}_m \bar{Y}_{k-m} = \\ &= \frac{1}{N_0} \cdot \bar{X}_k \otimes \bar{Y}_k \end{aligned}$$

La convoluzione tra le due trasformate discrete è una somma di convoluzione **ciclica** tra le due sequenze periodiche  $\bar{X}_k$  e  $\bar{Y}_k$  in ambito *frequenziale*. In conclusione:

$$p[n] = x[n] y[n] \iff \bar{P}_k = \frac{1}{N_0} \cdot \bar{X}_k \otimes \bar{Y}_k$$

24. Teorema della Convoluzione (+ relazioni tra convoluzione lineare e circolare).

Consideriamo ora la sequenza  $z[n]$  come somma di convoluzione ciclica o circolare tra le due sequenze  $x[n]$  e  $y[n]$ , periodiche di periodo  $N_0$

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] y[n-m] = \sum_{m=0}^{N_0-1} y[m] x[n-m]$$

La somma di convoluzione gode di tutte le proprietà citate per la somma di convoluzione tra sequenze periodiche.

Calcoliamo la trasformata discreta di  $z[n]$ :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_k &= \sum_{n=0}^{N_0-1} z[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] y[n-m] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] \sum_{n=0}^{N_0-1} y[n-m] e^{-j2\pi \frac{nk}{N_0}} = \\ &= \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] \bar{Y}_k e^{-j2\pi \frac{mk}{N_0}} = \bar{Y}_k \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m] e^{-j2\pi \frac{mk}{N_0}} = \\ &= \bar{X}_k \cdot \bar{Y}_k \end{aligned}$$

Quindi:

$$x[n] \otimes y[n] \iff \bar{X}_k \cdot \bar{Y}_k$$

- Relazioni tra convoluzione lineare e circolare (per due sequenze di lunghezza finita):

Siano  $x[n]$  e  $h[n]$  due sequenze di lunghezza  $L$  e  $M$ : il “supporto” sul quale le sequenze hanno campioni *non nulli* è  $[0, L-1]$  e  $[0, M-1]$ .

- La convoluzione *lineare* è ottenuta dalla relazione:

$$y_l[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

dove le sequenze sono considerate **aperiodiche** e  $y_l[n]$  ha una lunghezza *finita* e pari a  $L+M-1$  campioni, considerando il “supporto” dove le sequenze hanno campioni non nulli. Vi è quindi una *sovrapposizione* tra campioni non nulli delle due sequenze in  $[0, L+M-2]$

- La convoluzione *circolare* invece, a causa della diversa lunghezza delle due sequenze, richiede di fissare un **periodo comune**  $N$ , per eseguire l'**estensione periodica** delle sequenze: l'unico vincolo da porre diventa quindi  $N \geq \max(L, M)$ , appendendo quindi in fondo alle sequenze un numero di zeri (pari a  $N-L$  o  $N-M$ ) prima di estendere periodicamente le due sequenze. La convoluzione circolare è data da:

$$y_c[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[n-k]$$

## Generale:

### 25. Fast Fourier Transform (FFT).

Supponiamo di avere in memoria un numero  $N_0$  di valori della sequenza periodica  $x[n]$  e calcoliamone numericamente la trasformata discreta:

$$\bar{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \left\{ x[0] \cdot e^{-j0} + x[1] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N_0}} + x[2] \cdot e^{-j\frac{2\pi 2k}{N_0}} + \dots + x[N_0-1] \cdot e^{-j\frac{2\pi(N_0-1)k}{N_0}} \right\}$$

Vogliamo quindi determinare il numero di *operazioni necessarie* sia per la trasformata che per l'antitrasformata (ignorando il fattore di scala  $\frac{1}{N_0}$ ):

$$x[n] = \bar{X}_0 \cdot e^{j0} + \bar{X}_1 \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N_0}} + \bar{X}_2 \cdot e^{j\frac{2\pi 2k}{N_0}} + \dots + \bar{X}_{N_0-1} \cdot e^{j\frac{2\pi(N_0-1)k}{N_0}}$$

Supponiamo quindi di avere valori *complessi*  $z = a + jb$ , ma **precalcolati**, ovvero già in memoria. Per il calcolo di un *singolo campione*  $X[k]$  è necessario eseguire  $N_0$  moltiplicazioni complesse e  $N_0 - 1$  addizioni complesse, le quali sono tradotte dai calcolatori in operazioni nel campo reale, eseguendole tra le parti reali e immaginari dei numeri complessi coinvolti:

- per eseguire un'addizione complessa è necessario eseguire 2 addizioni reali:  $(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$
- per eseguire una moltiplicazione complessa è necessario eseguire 4 moltiplicazioni reali e 2 addizioni reali,  $(a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$ .

Quindi per un singolo campione  $X[k]$  sono necessarie  $N_0$  moltiplicazioni complesse e  $N_0 - 1$  somme complesse. Inoltre, per ogni valore di  $k$  sono necessarie  $8N_0 - 2$  operazioni reali, e dato che la sequenza è composta da  $N_0$  valori la complessità diventa **quadratica**:

$$(8N_0 - 2)N_0 = 8N_0^2 - 2N_0 \approx 8N_0^2$$

Per velocizzare i calcoli è stato quindi introdotto l'algoritmo **Fast Fourier Transform** o FFT, il quale viene applicato se  $N_0$  è una *potenza del 2*  $\rightarrow N_0 = 2^M$

$$\begin{aligned} \bar{X}_k &= \sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m] e^{-j\frac{2\pi(2m)k}{N_0}} + \sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m+1] e^{-j\frac{2\pi(2m+1)k}{N_0}} = \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m] e^{-j\frac{2\pi mk}{N_0}}}_{\bar{P}_k} + e^{-j\frac{2\pi k}{N_0}} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m+1] e^{-j\frac{2\pi mk}{N_0}}}_{\bar{D}_k} \end{aligned}$$

con  $k = 0, \dots, N_0 - 1$ .  $\overline{P}_k$  è la trasformata ottenuta dai  $\frac{N_0}{2}$  campioni di *indice pari* di  $x[n]$ , mentre  $\overline{D}_k$  indica la trasformata della sequenza ottenuta dai  $\frac{N_0}{2}$  campioni di *indice dispari*. Questa scomposizione è ricorsiva dell'ordine, in quanto la trasformata di ordine  $N_0$  è espressa come combinazione lineare di due trasformate di ordine  $\frac{N_0}{2}$ : questo concetto può essere esteso al numero di operazioni  $N_{FFT}$ :

$$N_{FFT}(N_0) = N_{FFT}\left(\frac{N_0}{2}\right) + N_{FFT}\left(\frac{N_0}{2}\right) + 6N_0 + 2N_0$$

tenendo conto che per ogni  $k$  (dei coefficienti dispari) è necessario moltiplicare  $D_k$  per un esponenziale complesso (precalcolato, 6 operazioni reali) e poi sommare con  $P_k$  (2 operazioni reali).

Il procedimento viene poi ripetuto ricorsivamente. Infine, iterando la formula:

$$N_{FFT}(N_0) = 6N_0 + 8N_0 \log_2 N_0 \approx 8N_0 \log_2 N_0$$

la complessità risulta **logaritmica**! Ad esempio, con  $N_0 = 1024$

$$\frac{N_{TDF}(N_0)}{N_{FFT}(N_0)} = \frac{8N_0^2}{8N_0 \log_2 N_0} = \frac{N_0}{\log_2 N_0} \approx 100$$

Il vantaggio conseguito dall'utilizzo di FFT al posto della trasformata classica aumenta al crescere di  $N_0$

## Sistemi monodimensionali a tempo discreto

$$y[n] = T[x[m], n] = T[x[n]]$$

### Proprietà dei sistemi;

26. SLS a tempo discreto: risposta impulsiva.

$$h[n] = T[\delta[n]]$$

Nota  $h[n]$ :

$$\begin{aligned} y[n] &= T[x[n]] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\right] = \text{per la linearità} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T[\delta[n-k]] = \text{per la stazionarietà: } \rightarrow \left\{ T[\delta[n-k]] = h[n-k] \right. \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] \otimes h[n] \end{aligned}$$

Quindi l'uscita è una *somma di convoluzione* tra la sequenza in ingresso e la risposta impulsiva del sistema stesso!

Un sistema lineare e stazionario (SLS) può essere:

- FIR (Finite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva è costituita da un **numero finito di campioni**;
- IIR (Infinite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva è costituita da un numero **infinito** di campioni.

È possibile dimostrare come la *condizione necessaria e sufficiente* per la stabilità in senso BIBO di un SLS è l'**assoluta sommabilità** della sua risposta impulsiva:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Da ciò deriviamo che

- i sistemi FIR sono stabili: la sommatoria diventa una somma *finita* di quantità *limitate*;
- mentre i sistemi IIR non lo sono sempre. Diventa necessario controllare la validità della seguente condizione:

– **sequenza causale**:

un SLS è causale se e solo se la sua risposta impulsiva è una sequenza causale, cioè:

$$h[n] = 0 \text{ se } n < 0, \text{ ovvero } h[n] = h[n] u[n]$$

## Proprietà:

27. Sistemi a cascata e in parallelo;

- In un sistema a **cascata** l'ordine degli stessi può essere variato senza alterare l'uscita:

$$h[n] = h_1[n] \otimes h_2[n] \rightarrow y[n] = x[n] \otimes (h_1[n] \otimes h_2[n])$$

Questo per la proprietà commutativa del prodotto di convoluzione discreta.

- Due sistemi **in parallelo**:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \rightarrow y[n] = x[n] \otimes [h_1[n] + h_2[n]]$$

28. Risposta in frequenza;

1. La risposta in frequenza di un SLS a tempo discreto è la **trasformata di Fourier** della risposta impulsiva  $h[n]$  del sistema stesso

$$\overline{H}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi n f T}$$

2. Inoltre  $\overline{H}(f)$  è pari al rapporto tra le trasformate  $\overline{Y}(f)$  e  $\overline{X}(f)$  rispettivamente della sequenza in uscita  $y[n]$  e in ingresso  $x[n]$ :

$$\overline{H}(f) = \frac{\overline{Y}(f)}{\overline{X}(f)}$$

3. La risposta in frequenza è data dal rapporto fra la sequenza di uscita  $y[n]$  e quella di ingresso  $x[n]$  quando  $x[n]$  è una oscillazione complessa alla frequenza  $f$ :

$$\overline{H}(f) = \left. \frac{y[n]}{x[n]} \right|_{x[n]=e^{j2\pi n f T}}$$

È possibile inoltre definire, data la risposta in frequenza  $\overline{H}(f)$ , la *risposta in ampiezza*  $\overline{A}(f) = |\overline{H}(f)|$ , la quale determina la **selettività** di un SLS e la sua *risposta in fase*  $\overline{\theta}(f) = \angle \overline{H}(f)$

29. Filtri a tempo discreto.

La **condizione di non distorsione** viene riformulata come segue:

$$y[n] = Kx[n - n_0]$$

$K$  ed  $n_0$  rappresentano rispettivamente il guadagno ed il ritardo del sistema. Nel dominio della frequenza, questa condizione si traduce nei due seguenti requisiti per la risposta in ampiezza e la risposta in fase:

$$\overline{A}(f) = K, \quad \overline{\theta}(f) = -2\pi f n_0 T$$

È sufficiente che queste condizioni siano verificate nell'ambito della banda del segnale per garantire assenza di distorsioni

Le caratteristiche di selettività di un filtro a tempo discreto con risposta in frequenza (che è una funzione periodica di periodo  $1/T$ ) sono determinate dall'andamento della sua risposta in ampiezza in un solo periodo della funzione (as esempio  $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$ ).

Le basse frequenze sono sempre prossime alla frequenza nulla, mentre le alte sono comunque prossime al limite superiore dell'intervallo, ovvero  $\frac{1}{2T}$ :

- **passa basso**

$$h_{LP}[n] = 2BT \operatorname{sinc}(2nBT) \Leftrightarrow \overline{H}_{LP} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f - \frac{k}{T}}{2B}\right)$$

- **passa alto**

$$h_{HP}[n] = \delta[n] - 2BT \operatorname{sinc}(2nBT) \Leftrightarrow \overline{H}_{HP}(f) = 1 - \overline{H}_{LP}(f)$$

I filtri ideali **non sono causali!**

## Quantizzazione (per alcune di queste domande guardare quesiti)

30. Formule e definizioni (passo, dinamica D, bit B, fattore di scala A...);

L'operazione di quantizzazione rende **discreta** l'ampiezza dei campioni associando loro un valore di ampiezza scelto da un insieme finito di possibili *valori* (detti livelli di quantizzazione: essi sono i "rappresentanti" di intervalli di quantizzazione contigui: gli estremi di questi intervalli sono detti "soglie").

$$\hat{x}(nT) = Q[x(nT)]$$

La quantizzazione è un'operazione *lossy*, in quanto essendo un'operazione irreversibile, una volta quantizzato il segnale l'informazione originale non potrà essere più recuperata, commettendo un errore

$$e(nT) = \hat{x}(nT) - x(nT)$$

Per effettuare l'operazione di quantizzazione dividiamo l'intervallo di variazione di ampiezza dei suoi campioni in intervalli di quantizzazione contigui  $(x_i, x_{i+1})$ , dove gli estremi rappresentano le *soglie* di quantizzazione.

Al momento della progettazione del quantizzatore sono fissate sia le soglie che i livelli!

L'operazione quindi consiste nel **selezionare l'intervallo più corretto per ogni campione  $x(nt)$**  e associare al suo interno un valore  $\hat{x}_i$  detto *livello* dell'intervallo selezionato.

- "Definizioni":
  - **Passo**: indicato con  $\Delta$ , rappresenta la distanza tra livelli di quantizzazione.
  - **bit**: indicato con  $B$ , serve a determinare il numero di possibili livelli di quantizzazione, rappresentati con notazione binaria, pari a  $2^B$
  - **dinamica**: indicata con  $D$  rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di valori che i livelli di quantizzazione riescono a coprire.
- Quantizzatori uniformi

Ottenuti imponendo una distanza costante tra le soglie e i livelli ( $\Delta$  costante).

Per avere una *buona rappresentazione del segnale*, la dinamica  $D \approx$  **intervallo variazione ampiezza dei campioni!**

$$D > X_{\max} - X_{\min}$$

In un processo *aleatorio gaussiano*, i cui campioni seguono la distribuzione di probabilità Gaussiana (quindi con un intervallo di variazione *illimitato*), si rende necessario ipotizzare un intervallo di variazione dei campioni **finito** e di dimensione tale da rendere *minima* la probabilità che esca da tale intervallo (**overflow**). Considerando il caso di valor medio *nullo*:

$$E[f(x)] = 0 \rightarrow \text{gli intervalli sono: } \begin{cases} [-3\sigma, 3\sigma] & \approx 95,45\% \\ [-4\sigma, 4\sigma] & \approx 99,73\% \end{cases} \rightarrow \Delta > 8\sigma$$

Per far sì che il passo non sia né eccessivamente grande (livelli di quantizzazione usati molto minori rispetto a quelli a disposizione), né troppo piccolo (commessi errori rilevanti (di overflow), quando si quantizzano campioni al di fuori della dinamica del quantizzatore)  $\Delta, D, B$  sono legati secondo:

$$\Delta = \frac{D}{2^B}$$

31. Tipologie di quantizzatori (midrise, midtread, arrotondamento e troncamento);

Vedi risposte 33, 34 quesiti

32. Errore di quantizzazione e modello;

L'errore di quantizzazione può essere visto come una sequenza che *si somma* (modello additivo) al segnale campionato:

$$e(nT) = \hat{x}(nt) - x(nT) \Rightarrow \hat{x}(nT) = e(nT) + x(nT)$$

Modelliamo quindi  $e(nT)$  come un processo aleatorio, indicandolo come **rumore di quantizzazione** e con le seguenti ipotesi:

1.  $e(nT)$  sia un processo stazionario in senso lato: quindi media, potenza e varianza *costanti* e non dipendono da  $n$  (distanza tra i campioni);
2. che la densità di probabilità dell'**ampiezza dell'errore di quantizzazione** sia di tipo **uniforme**, permettendo di valutare tali costanti distinguendo i casi di quantizzazione per troncamento e per arrotondamento: - densità probabilità errore troncamento:

$$P_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} < e \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \rightarrow E[e(nT)] = 0 = E[e^2(nT)] = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$E[e(nT)] = \int_{-\Delta}^0 e p_e(e) de = -\frac{\Delta}{2}, \quad = \quad \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{e^2}{2} \Big|_{-\Delta}^0$$

$$E[e^2(nT)] = \int_{-\Delta}^0 e^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{3}, \quad = \quad \frac{1}{\Delta} \frac{e^3}{3} \Big|_{-\Delta}^0$$

$$\sigma_e^2 = E[(e(nT) - E[e(nT)])^2] = \int_{-\Delta}^0 \left(e + \frac{\Delta}{2}\right)^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{12} = E[e^2] - E[e]^2$$

- densità errore arrotondamento:

$$p_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} < e \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$$E[e(nT)] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e p_e(e) de = 0, \quad = \frac{1}{\Delta} \frac{e^2}{2} \Big|_{-\Delta/\ell}^{\Delta/2}$$

$$E[e^2(nT)] = \sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{12}. \quad = \quad \frac{1}{\Delta} \frac{e^3}{3} \Big|_{-\Delta/\ell}^{\Delta/2}$$

3.  $\{e(nT)\}$  incorrelato con processo  $\{x(nT)\}$ ;
4. I campioni del processo  $\{e(nT)\}$  sono **incorrelati** tra loro;

Per la quantizzazione con troncamento si ha:

$$E[e(nT) e((n+m)T)] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \frac{\Delta^2}{3} & m = 0 \\ E[e(nT)] E[e((n+m)T)] = \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta^2}{4} & m \neq 0, \end{cases}$$

mentre per la quantizzazione con arrotondamento abbiamo

$$E[e(nT) e((n+m)T)] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} & m = 0 \\ 0 & m \neq 0. \end{cases}$$

In questo caso, l'errore di quantizzazione è un **processo bianco**.

### 33. Definizione Signal To Noise Ratio (SNR) e formule.

È il rapporto tra la *potenza del segnale* e la *potenza dell'errore di quantizzazione*:

$$\text{SNR}_q = \frac{S}{\sigma_e^2}$$

Ciò vale con l'ipotesi di un quantizzatore che utilizzi l'arrotondamento.  $S$  rappresenta la potenza del segnale (è necessario conoscerla oltre ai parametri del quantizzatore)... e  $\Delta = \frac{D}{2^B}$ :

$$\text{SNR}_q = \frac{S}{\sigma_e^2} = \frac{S}{\frac{1}{12} \Delta^2} = \frac{S}{\frac{1}{12} \left(\frac{D}{2^B}\right)^2} = \frac{12 \cdot S \cdot 2^{2B}}{D^2}$$

Esprimendo  $\text{SNR}_q$  in scala logaritmica

$$\begin{aligned}\text{SNR}_{\text{qdB}} &= 10 \log_{10} \text{SNR}_q = 10 \log_{10} \left( \frac{12 \cdot S \cdot 2^{2B}}{D^2} \right) \\ &= (20 \log_{10} 2)B + 10 \log_{10} \left( \frac{12S}{D^2} \right) \\ &\approx 6.02B + 10 \log_{10} \left( \frac{12S}{D^2} \right) \text{ dB}.\end{aligned}$$