Lista teoremi Teoria dei Segnali

Introduzione

1. $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0 e ha potenza media su un intervallo finita, allora ha $\bar{P}$ finita e calcolabile sul periodo:

   Per definizione $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\,dt$. Scegliamo come periodo NT_0, in quanto se $N \to \infty$ vale come $T \to \infty$.

   Quindi $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{NT_0} \displaystyle\int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |x(t)|^2\,dt$ equivale a N integrali cui si aggiunge un T_0 ogni volta:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\cancel{N}T_0} \cdot \cancel{N}\Big\{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\,dt\Big\} = \bar{P} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\,dt$$

Segnali periodici a tempo continuo

Serie di Fourier

2. Da forma polare a complessa (o rettangolare)

   la forma polare della serie di Fourier è data da:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_K)$$

$$= A_0 + \cancel{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(2\pi k f_0 t+\theta_K)} + e^{-j(2\pi k f_0 t+\theta_K)}}{\cancel{2}} \to \text{ uso formula di Eulero per il coseno}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(2\pi k f_0 t+\theta_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j(2\pi k f_0 t+\theta_K)} \to \text{ separo le due esponenziali}$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \to \text{ raggruppo le sommatorie e} k \text{ diventa } -k$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\ e^{j2\pi k f_0 t} \text{ forma complessa della serie di Fourier}$$

3. Come si calcolano i coefficienti X_n?

   Partendo dalla forma complessa, moltiplico a destra e a sinistra per $e^{-j2\pi k f_0 t}$, integrando sul periodo T_0.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\ e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt$$

   Porto fuori la sommatoria e raccolgo e: per ipotesi la serie converge.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t}\,dt$$

   L'integrale al secondo membro viene calcolato per $k \neq n$

$$\to \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} = \frac{e^{j2\pi(k-n)f_0 t}}{j2\pi(k-n)f_0}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} =$$

$$\frac{e^{j\cancel{2}\pi(k-n)\cancel{f_0}\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}} - e^{-j\cancel{2}\pi(k-n)\cancel{f_0}\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}}}{2j\cdot\pi(k-n)f_0} \to \text{ uso formula di Eulero per il seno}$$

$$\frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} k = n \to T_0 \\ k \neq n \to 0 \end{cases} \quad \to \text{ sostituiamo questo risultato}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt = X_n T_0 \Rightarrow X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt$$

N-esimo termine della serie di Fourier

4. Forma rettangolare dalla forma polare

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

usiamo la formula di addizione $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(\cos(2\pi k f_0)\cos(\theta_k) - \sin(2\pi k f_0)\sin(\theta_k)))$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(2\pi k f_0) - b_k\sin(2\pi k f_0)]$$

sapendo che $a_0 = A_0,\ a_k = A_k\cos(\theta_k),\ b_k = B_k\sin(\theta_k)$.

Abbiamo quindi ottenuto la forma rettangolare della serie di Fourier, dove si nota che un segnale *periodico* $x(t)$ può essere espresso tramite una **somma di seni e coseni**.

Il coefficiente X_n può essere espresso anche come:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)(\cos(2\pi k f_0 t) - j\sin(2\pi k f_0 t))$$

$$X_k = a_k + jb_k = A_k\cos(\theta_k) + jA_k\sin(\theta_k) = A_k e^{j\theta_k}$$

5. Criterio di Dirichlet (per $x(t)$ periodico):

   È una serie di condizioni che se incontrate sono sufficienti per poter sviluppare un dato segnale $x(t)$ in serie di Fourier:

   - $x(t)$ deve essere *assolutamente integrabile sul periodo*: ovvero $(\int_{[T_0]} |x(t)|\,dt < \infty)$
   - $x(t)$ deve essere *continua* (o avere un numero *finito* di discontinuità di prima specie)
   - $x(t)$ deve essere *derivabile sul periodo* T_0, escluso al più un numero finito di punti, dove comunque esiste **finita** sia la derivata destra che la derivata sinistra
     - quest'ultima ipotesi è equivalente a: $x(t)$ presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo La serie **converge** al valore assunto da $x(t)$ dove *continua* e alla semisomma dei limiti sinistro e destro se discontinua.

Spettro di un segnale periodico e reale

Proprietà

6. Simmetria Hermitiana dello spettro reale:

   I coefficienti X_k sono generalmente quantità complesse del tipo

$$X_k = |X_k|e^{j\angle X_k}$$

$X_k$può essere rappresentata tramite spettro di ampiezza e spettro di fase, discreti (esiste solo in corrispondenza delle armoniche k)

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Analizziamone il coniugato X_k^*:

$$X_k^* = \Big(\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt\Big)^* = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)^* e^{+j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi(-k) f_0 t}\,dt$$

È da notare come $x(t)^* = x(t)$, dal momento che il segnale $x(t)$ è reale.

Quindi $X_k^* = X_{-k}$: i coefficienti X_k di un segnale *reale* **godono di simmetria hermitiana**, ossia hanno *lo stesso modulo e fase opposta*

$$X_{-k} = X_k^* \iff \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| & \text{stesso modulo} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} & \text{fase opposta} \end{cases}$$

In definitiva per un segnale reale:

- lo spettro d'ampiezza è **simmetrico** rispetto a $k \to$ pari
- lo spettro di fase è **antisimmetrico** rispetto a $k \to$ dispari

7. Linearità dello spettro reale:

   Se $x(t)$ e $y(t)$ sono due segnali con periodo T_0 *reali* allora vale:

   $$z(t) = ax(t) + by(t) \iff Z_k = aX_k + bY_k$$

   Somma di *oscillazioni* alle (o con?) le stesse frequenze dei segnali $x(t)$ e $y(t)$.

   $$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t)e^{-j2\pi kf_0t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (ax(t) + by(t))e^{-j2\pi kf_0t}\,dt$$

   $$= \frac{a}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}\,dt + \frac{b}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)e^{-j2\pi kf_0t}\,dt = aX_k + bY_k$$

8. Parità e disparità del segnale

   - Se $x(t)$ è **pari**, allora il coefficiente $X_k = X_{-k}$; se il segnale è anche **reale** vale $X_k = X_{-k} = X_k^* \iff X_k \in \mathbb{R}$.

     $X_k = X_{-k}$ (con un cambio di variabile $\alpha = -t \to dt = -\,d\alpha$).

     $$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}\,dt \iff X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0t}\,dt$$

     Utilizziamo il cambio di variabile

     $$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(-\alpha)e^{-j2\pi(\cancel{-}(\cancel{-}\alpha))kf_0} - \,d\alpha = -\frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(\alpha)e^{-j2\pi\alpha kf_0}\,d\alpha =$$
     $$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\alpha)e^{-j2\pi\alpha kf_0}\,d\alpha = X_k$$

     dato che il segnale $\in \mathbb{R}$ lo possiamo rappresentare come (perché essendo reale ha fase nulla?):

     $$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k\cos(2\pi kf_0t)$$

     Dimostrazione:

     $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi kf_0t} =$$

     $$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi kf_0t} =$$

     $$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi kf_0t} =$$

     $$= X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{e^{j2\pi kf_0t} + e^{-j2\pi kf_0t}}{2} = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k\cos(2\pi kf_0t)$$

Da ciò deduco che un segnale reale e pari è esprimibile in serie di soli *coseni* (i quali sono a loro volta pari).

Possiamo inoltre scrivere i coefficienti X_k in modo semplificato, data la *parità* del segnale:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{pari}\cdot\underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{pari}\,dt - \frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{pari}\cdot\underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{dispari}\,dt =$$

$$\frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cdot\cos(2\pi k f_0 t)\,dt - 0$$

Integrale di una funzione pari su un intervallo simmetrico.

- se $x(t)$ è **dispari**, allora anche i coefficienti X_k saranno dispari. Inoltre, dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k sarà un **immaginario puro**, ed

$$x(t) = 2j\sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t) \text{ e } X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,dt$$

  Dimostrazione:

  - Dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k, allora vale $X_{-k} = -X_k = X_k^* \Rightarrow X_k^* = -X_k$, quindi è un immaginario puro!
  - Per X_k:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}}\cdot\underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}}\,dt - \frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}}\cdot\underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}}\,dt =$$

$$-\frac{2j}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cdot\sin(2\pi k f_0 t)\,dt$$

- **Note varie**
  - Se $x(t)$ è pari i suoi coefficienti X_k sono reali e lo spettro di fase vale 0 o $\pm\pi$; mentre se $x(t)$ è dispari i suoi coefficienti X_k sono immaginari puri e lo spettro di ampiezza non viene toccato: un segnale dispari è solo "spostato" nel tempo.
  - È da notare come la diversa velocità di un segnale dipenda dal suo andamento temporale: le variazioni brusche comportano la presenza di **armoniche**[^1] con k più elevato per rappresentare la velocimento alta(?):
    - più il segnale è regolare meno armoniche sono necessarie per "ricreare" il segnale
      - $\frac{1}{k} \rightarrow$ funzioni discontinue: dente di sega ideale, onda quadra, onda quadra "antisimmetrica", rect
      - $\frac{1}{k^2} \rightarrow$ funzioni continue a derivata discontinua: onda triangolare. [^1]: TODO: definire meglio armoniche

Segnali aperiodici a tempo continuo

Trasformata continua di Fourier

Una funzione non periodica, definita tra $-\infty$ e ∞, può essere rappresentata come **somma** di **infinite armoniche semplici** di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile con continuità tra $-\infty$ e ∞

9. Dal segnale periodico al segnale aperiodico…

Partiamo dall'impulso rettangolare *aperiodico* rect $\frac{t}{T}$:

$$x(t) = \text{rect}\,\frac{t}{T} \rightarrow x_p(t) = \sum \text{rect}(\frac{t - nT_0}{T}) \text{ treno di impulsi rettangolari}$$

possiamo vedere $x(t)$ come caso limite di $x_p(t)$ con periodo $T_0 \to \infty$

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t)$$

1. la frequenza diventa infinitesima ($f_0 = \frac{1}{T_0}$)
2. si riduce la *distanza tra le armoniche*, ossia si **infittisce** lo spettro;
3. $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\ e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$, l'ampiezza assume valori *sempre più piccoli*

Usiamo il coefficiente *modificato* $X(f_0 k) = T_0 X_k$ per ovviare il problema. Riscriviamo $x_p(t)$ e X_k

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\ e^{j2\pi k f_0 t} \cdot f_0 \to x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{j2\pi f t}\, df}_{\text{integrale di Fourier}}$$

Le armoniche si *infittiscono talmente tanto* da non essere più distinte ma **continue**.

$$X(kf_0) = T_0\ X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\ e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \to \underbrace{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{j2\pi f t}\, dt}_{\text{trasformata continua di Fourier}}$$

$X(f)$ è una **funzione complessa della variabile continua** f, quindi è di spettro continuo.

- Nota: **differenze tra segnali continui periodici e aperiodici**:
  - un segnale *periodico* è rappresentato da componenti sinusoidali a frequenze in relazione **armonica** (multipli di f_0, frequenza *fondamentale* e ad ampiezza finita).
  - un segnale *aperiodico* è rappresentato con componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima* $|X(f)|\, df$ e frequenza f variabile con continuità su $\mathbb{R}$; è un segnale periodico di periodo illimitato con f_0 infinitesimo. Le armoniche discrete *degenerano* nell'insieme continuo.

10. Criteri di esistenza per la trasformata continua di Fourier (TCF)
    1. $X(f)$ esiste se il segnale $x(t)$ ha energia finita (condizione "sufficiente")!
    2. Criteri di Dirichlet:
       1. la funzione deve essere assolutamente sommabile: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$
       2. se in qualunque intervallo finito $t_1 < t < t_2$ è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie
       3. se in qualunque intervallo finito $t_1 < t < t_2$ la funzione ha un numero finito di massimi e minimi.

    Allora $x(t)$ è rappresentabile come TCF e

    $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{j2\pi f t}\, df = \begin{cases} x(t) & \text{se continua} \\ \frac{x(t_0^+) - x(t_0^-)}{2} & \text{se discontinua} \end{cases}$$

11. Simmetria Hermitiana della trasformata continua di Fourier

    Possiamo rappresentare $X(f)$ in forma rettangolare:

    $$X(f) = Re(f) + Im(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t)\, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t)\, dt$$

    $$\underbrace{Re(f) = Re(-f)}_{\text{pari}} \text{ e } \underbrace{Im(f) = -Im(-f)}_{\text{dispari}} \Longrightarrow X(f) = X^*(-f) \text{ simmetria hermitiana}$$

    infatti $X(f) = Re(f) + jIm(f) = Re(-f) + jIm(f) = X^*(-f)$

    - lo spettro di ampiezza è quindi *pari* a quello di fase dispari.

12. Parità e disparità:
    - se un segnale è *reale e pari*

    $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t)\, df = \begin{cases} Re(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t)\, dt \\ Im(f) = 0 \end{cases}$$

    $\to X(f) = Re(f) \to X(f) = X(-f)$ è reale e pari

- se un segnale è *dispari e reale*

$$X(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt = \begin{cases} Re(f) = 0 \\ Im(f) = -2\int_0^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft) \end{cases}$$

$\rightarrow X(f) = jIm(f) \rightarrow X(f) = -X(f)$ è immaginaria pura e dispari

Proprietà della trasformata continua

13. **Linearità**

Dati due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con le loro trasformate continue di Fourier $X_1(f)$ e $X_2(f)$, allora se:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \iff X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

con a, b costanti, $X_1(f) = \text{TCF}[x_1(t)]$ e $X_2(f) = \text{TCF}[x_2(t)]$

- Dimostrazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ax_1(t) + bx_2(t))\ e^{-j2\pi ft}\,dt$$

ma sappiamo che l'integrale è *lineare*, quindi

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\ e^{-j2\pi ft}\,dt + b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\ e^{-j2\pi ft}\,dt = aX_1(f) + bX_2(f)$$

14. **Dualità**

se $x(t) \iff X(f)$, allora $X(t) \iff x(-f)$:

Se la trasformata continua di Fourier passa ad essere un *segnale nel tempo*, allora $x(-f)$ è la sua trasformata di Fourier. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra la funzione e la sua trasformata.

- Esempio:

$$\text{rect}(\frac{t}{T}) \iff \text{sinc}(fT)$$

Ma se nel tempo ho un segnale $\text{sinc}(bT)$ qual è la sua trasformata?

$T\,\text{sinc}(Tt) \iff \text{rect}(-\frac{f}{T})$ da cui $\text{sinc}(Bt) \iff \frac{1}{B}\,\text{rect}(\frac{t}{B})$, dove B indica la banda.

- Dimostrazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}\,df \rightarrow x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\ e^{j2\pi ft}\,dt$$

con uno scambio di variabili t con f. Quindi:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} < S - Del > Xx(t)\ e^{-j2\pi ft}\,dt$$

Da qui deriviamo che $x(-f)$ è la trasformata di $X(t)$

15. **Ritardo**

Sia $X(f) = \text{TCF}[x(t)]$: la trasformata di Fourier di $x(t)$ ritardato nel tempo di una quantità t_0 è pari a:

$$x(t - t_0) \iff X(f)\ e^{-j2\pi ft_0}$$

- Dimostrazione:

Applichiamo a $x(t - t_0)$ la definizione di TCF

$$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)\ e^{-j2\pi ft}\,dt = \text{ sostituiamo } \begin{cases} \alpha = t - t_0 \rightarrow t = \alpha + t_0,\ dt = \ d\alpha \end{cases}$$

$$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)e^{-j2\pi(\alpha+t_0)f}\,d\alpha = e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\ e^{-j2\pi f\alpha} = e^{-j2\pi ft_0}\ X(f)$$

- Esempio:

$$A\,\text{rect}(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}) \iff AT\,\text{sinc}(fT)e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}$$

Se $y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow Y(f) = X(f)\ e^{-j2pift_0} \Rightarrow$ Un ritardo modifica lo spettro di **fase** ma *non cambia* il suo spettro di ampiezza, in quanto quest'ultimo di indica quali componenti sinusoidali sono necessarie per comporre la forma del segnale, mentre lo spettro di fase mi dice con quale *angolo* iniziale devono "partire" le sinusoidi.

Quindi se il segnale si sposta nel tempo, allora le sinusoidi hanno angoli iniziali diversi, ma sono le stesse.

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |e^{-j2\pi f t_0}| = |X(f)|$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f)\ e^{-j2pift_0} = \angle X(f) + \angle e^{-j2pift_0} = \underbrace{\angle X(f) - \overbrace{2\pi f t_0}^{=0}}_{\text{\underline{NON} è una traslazione!}}$$

16. **Cambiamento di scala**

    Si consideri $y(t) = x(\alpha t)$, effettuando un *cambiamento della scala temporale*:

    $$\begin{gathered} |\alpha| > 1 \ \rightarrow\ \text{compressione della scala dei tempi} \rightarrow\ \text{l'evoluzione è "accelerata"} \\ |\alpha| < 1 \ \rightarrow\ \text{dilatazione della scala dei tempi} \rightarrow\ \text{l'evoluzione è "rallentata"} \\ \alpha < 0 \ \rightarrow\ \text{inversione della scala dei tempi} \end{gathered}$$

    Inoltre vale:

    $$x(\alpha t) \Longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X(\frac{f}{\alpha})$$

    - Dimostrazione:

      $$\cdot\ \ \underline{\alpha > 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t}\, dt, \text{ ponendo } z = \alpha t \rightarrow t = \frac{z}{\alpha},\ dz = \alpha\, dt \rightarrow\ dt = \frac{dz}{\alpha}$$

      $$\Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha}\, dz = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}\, dz = \frac{1}{\alpha} X(\frac{f}{\alpha})$$

      $$\cdot\ \ \underline{\alpha < 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha}\, dz = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}\, dz = -\frac{1}{\alpha} X(\frac{f}{\alpha})$$

      È da notare come l'inversione dell'integrale nel secondo caso l'abbiamo quando $t \rightarrow -\infty,\ z \rightarrow +\infty$. Inoltre abbiamo sostituito $z = -\alpha t$.

    Quindi una *dilatazione* nel tempo corrisponde ad una *compressione* in frequenza, e **viceversa**

17. **Modulazione**

    Dato un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(f)$ allora

    $$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

    dove $X(f - f_0)$ e $X(f + f_0)$ sono rispettivamente la replica centrata in f_0 e la replica centrata in $-f_0$.

    - Dimostrazione:

      $$\begin{gathered} \text{TCF}[x(t) \cos(2\pi f_0 t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t}\, dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [e^{-j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] e^{-j2\pi f t}\, dt = \\ \frac{1}{2} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi (f - f_0) t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi (f + f_0) t}\, dt \Big] = \\ \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2} \end{gathered}$$

      Corollario: $x(t) e^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow X(f - f_0) \rightarrow$ *traslazione in frequenza*

18. **Derivazione**

    Se $x(t) \rightarrow X(f)$, allora:

    $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \Longleftrightarrow j2\pi f \cdot X(f) = Y(f)$$

    Una derivata nel tempo è una *moltiplicazione* in frequenza.

- Dimostrazione:

Deriviamo entrambi i lati di $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[X(f)e^{j2\pi ft}\Big]\,df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j2\pi ft}\,df =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)(2\pi f)e^{j2\pi ft}\,df \Longrightarrow \mathrm{TCF}\Big[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Big] = j2\pi f X(f)$$

Il teorema della derivazione *modifica gli spettri*

$$|Y(f)| = 2\pi f|X(f)|$$
$$\underline{/Y(f)} = \underline{/X(f)} + \mathrm{sgn}(f)\frac{\pi}{2}$$

Aumenta proporzionalmente l'ampiezza, esaltando le altre frequenze, e sfasando di $\pm\frac{\pi}{2}$

19. **Integrazione** (deriva dal teorema di derivazione)

Dato un segnale $x(t) \Longleftrightarrow X(f)$ e un segnale $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha$, allora vale

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha \Longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

- Dimostrazione:

Segue dal teorema di derivazione e richiede che $X(0) = 0$, al fine di evitare che per $f \to 0$, il rapporto tenda ad infinito.

$$X(0) = 0 \longleftrightarrow X(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{0}\,dt}_{\text{sottende area } \textbf{nulla}} \longleftrightarrow y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = X(0) \to 0$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha \Rightarrow x(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \Rightarrow X(f) = j2\pi f\cdot Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Anche l'integrale nel tempo si trasforma in un'operazione algebrica in frequenza: in questo caso però vengono esaltate le componenti a **bassa** frequenza nello spettro del segnale, mentre le alte vengono attenuate; la fase varia sempre di $\pm\frac{\pi}{2}$

$$|Y(f)| = \frac{|X(f)|}{2\pi f}$$
$$\underline{/Y(f)} = \underline{/X(f)} + \mathrm{sgn}(f)\frac{\pi}{2}$$

Da questo teorema deriva la relazione $A\mathrm{tri}(\frac{t}{T}) \Longleftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$; $A\,\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) \Longleftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

20. **Prodotto**: è il duale della convoluzione

Partendo da due segnali $x(t)$ e $y(t)$

$$z(t) = x(t)\cdot y(t) \Longleftrightarrow X(f)\otimes Y(f)$$

- Dimostrazione:

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ y(t)\ e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{t=-\infty}^{\infty}\Big[\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{-j2\pi\nu t}\,d\nu\Big]y(t)\ e^{-j2\pi ft}\,dt =$$
$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)\Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t)\ e^{-j2\pi(f-\nu)t}\,dt\Big]\,d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)Y(f-\nu)\,d\nu =$$
$$X(f)\otimes Y(f)$$

Quindi:

$$\underset{PRODOTTO}{x(t)\ y(t)} \Longleftrightarrow \underset{CONVOLUZIONE}{X(f)\otimes Y(f)} \to \text{ la convoluzione è } \textit{commutativa}$$

Nota Bene: ν è **nu**!

21. ***Convoluzione***

Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sappiamo che:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \Longleftrightarrow X(f)\ Y(f)$$

- Dimostrazione:

  Partiamo sempre dalla definizione di TCF:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) y(t-\alpha)\, d\alpha \Longleftrightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\ e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[x(\alpha) y(t-\alpha)\, d\alpha\Big] e^{-j2\pi f(t-\alpha+\alpha)}\, dt =$$

$$\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) \underbrace{\Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi f(t-\alpha)}\, dt\Big]}_{Y(f)} e^{-j2\pi f\alpha}\, d\alpha =$$

$$\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha)\ Y(f)\ e^{-j2\pi f\alpha}\, d\alpha = X(f)\ Y(f)$$

- Nota bene:
  - la convoluzione ha proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Trasformata di Fourier generalizzata

22. Teorema d'integrazione **completo**:

Vogliamo rimuovere il vincolo (o ipotesi) $X(0)$ che è alla base dell'applicabilità del teorema d'integrazione "incompleto": ciò viene realizzato utilizzando la delta di Dirac.

Il teorema completo afferma che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \Longleftrightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \cdot X(0)$$

Il nuovo termine rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale!.

- Dimostrazione:

  Essendo:

$$x(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\ u(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) + \frac{1}{2}$$

  abbiamo che per la convoluzione $x(t) \otimes u(t) \Longleftrightarrow X(f)U(f)$:

$$X(f)\ U(f) = X(f)\Big[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}\Big] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

  Questo perché $\mathrm{TCF}(u(t)) = U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$; l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla: rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale, ed è un termine correttivo che rappresenta la funzione impulsiva.

23. Teorema della modulazione, alternativa:

- Dimostrazione:

  per il teorema del prodotto,

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow X(f) \otimes \Big[\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}\Big] =$$

$$X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)}{2} + X(f) \otimes \frac{\delta(f+f_0)}{2}$$

$$\to X(f) \otimes \delta(f-f_0) = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha)\delta(f-f_0-\alpha)\, d\alpha = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha)\delta(\alpha) - (f-f_0)\, d\alpha = X(f-f_0)$$

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

Periodicizzazione

24. Prima formula della somma di Poisson:

    Come rendere un segnale *aperiodico* $x(t)$ **periodico** di periodo T_0. Partiamo da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} = x(t-nT_0)$ relazione nel tempo tra periodico e aperiodico

$$\rightarrow Y_k = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \quad \text{sostituiamo} \begin{cases} \alpha = t - t_0 \\ t = \alpha - t_0 \\ d\alpha = dt \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha)\ e^{-j2\pi k f_0 (\alpha + nT_0)}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k \cancel{f_0} n \cancel{T_0}}}_{\text{multiplo di } 2\pi \rightarrow e^0}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha)\ e^{-j2\pi k f_0 \alpha}\, d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\ e^{-j2\pi k f_0 \alpha}\, d\alpha = \underbrace{\frac{1}{T_0} X(kf_0)}_{\text{campionamento in frequenza}}$$

    Si ottiene una relazione detta **campionamento in frequenza**. I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico $y(t)$ sono, a meno del fattore $\frac{1}{T_0}$, i campioni della TCF del *segnale base* $x(t)$ presi in corrispondenza delle frequenze armoniche kf_0

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(\frac{k}{T_0})\ e^{+j2\pi k t f_0}$$

25. Seconda formula della somma di Poisson

    Applichiamo alla prima formula di Poisson il teorema della dualità:

$$X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$
$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(\frac{k}{T_0})\ e^{+\frac{j2\pi k t}{T_0}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} (x(-\frac{k}{T_0}))\ e^{+\frac{j2\pi k t}{T_0}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(\frac{k}{T_0})\ e^{-\frac{j2\pi k t}{T_0}} \text{ cambio di segno all'indice k}$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t - \frac{n}{T}) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(kT)\ e^{-j2\pi k t T}$$

    Adesso, dal punto di vista puramente formale, cambiano nome da t in f, otteniamo un'espressione, otteniamo un'espressione *duale* rispetto alla prima formula di Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

Sistemi

26. Teorema di Parseval:

Dato un segnale $x(t)$ e la sua energia $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < +\infty$ (energia finita), possiamo esprimere l'energia E_x *anche in frequenza*:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ x^*\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Big[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi f t}\, df \Big]\, dt$$

$$\int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f) \Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \Big]\, df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

E_x è l'energia totale, deriva da $p_x = |x(t)|^2$ potenza istantanea integrata o da $|X(f)|^2$ detta **densità spettrale** $E_x(f)$ integrata.

27. Teorema di Wiener-Khinchin

Siamo la densità spettrale di potenza:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

e la funzione *densità spettrale di potenza*

$$S_x(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}(f)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{|x(t)|^2}{T}$$

con $E_{x_T}(f)$ densità di energia del segnale *troncato* nell'intervallo $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

Definiamo **funzione di autocorrelazione** $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)\, dt$ ossia il segnale moltiplicato per una sua replica *ritardata*. Indica "quanto il segnale somiglia alla sua replica ritardata": più $x(t)$ è compatta meno somiglierà e meno varrà $R_x(\tau)$

Il teorema afferma che la densità spettrale di energia di un segnale coincide con la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso:

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f t}\, d\tau \underbrace{=}_{R_x(\tau) \text{ è pari})} 2\int_{0}^{\infty} \cos(2\pi f \tau) R_x(\tau)\, d\tau$$

- Dimostrazione:

Partiamo dalla definizione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(\alpha - t)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(-(t-\alpha))\, d\alpha = x(\tau) \otimes x(-\tau) =$$
$$R_x(\tau) = x(\tau) \otimes x(-\tau) \Longleftrightarrow X(f)\ X(-f) = X(f)\ X^*(-f) = |X(f)|^2 = E_x(f)$$

Secondo Parziale

Processi aleatori analogici

1. Un processo aleatorio WSS $X(t)$ filtrato da un SLS è all'uscita un nuovo processo $Y(t)$ WSS.

   Per far sì che accada il processo $y(t)$ deve avere:

   1. Media costante;
   2. L'autocorrelazione funzione solo di τ

   - Dimostrazione:
     1.
$$
\begin{aligned}
E[y(t)] = E[x(t) \otimes h(t)] = E\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \cdot x(t-\alpha)\, d\alpha\Big] &== \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\ E[x(t-\alpha)]\, d\alpha \\
= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, d\alpha = m_X\ H(0) = \text{ costante}
\end{aligned}
$$
     2.
$$
\begin{aligned}
R_{yy}(t_1, t_2) &= \begin{cases} t_1 = t \\ t_2 = t + \tau \to \tau \quad = t_2 - t_1 \end{cases} \to \text{ cambio di variabile} \\
R_{yy}(t, t+\tau) &= E[y(t) \cdot y(t+\tau)] = E\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\ x(t-\alpha)\, d\,\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)\ x(t+\tau-\beta) d\,\beta\Big] \\
&= E\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\ h(\beta)\ x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)\, d\alpha\, d\beta\Big] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\ h(\beta)\ E\Big[x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)\Big]\, d\alpha\, d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\ h(\beta)\ R_{xx}(\tau-\beta+\alpha)\, d\alpha\, d\beta \\
&\to R_{yy}(t, t+\tau) = R_{yy(\tau)}
\end{aligned}
$$

   Quindi il processo $y(t)$ è WSS.

Segnali a tempo discreto aperiodici

2. Trasformata di Fourier per sequenze (definizione, periodo 1, denormalizzazione);

   Data la sequenza *aperiodica* $x[n]$ **discreta**:

$$
\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{-j2\pi nfT} \Longrightarrow f = F \cdot F_c = \frac{F}{T} = \text{Hz} \longrightarrow \overline{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{j2\pi nF}
$$

   $\overline{X}(F)$ è **completamente nota** se conosco il suo andamento in un intervallo delle frequenze *normalizzate* di ampiezza unitaria: $\underbrace{F \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}_{\text{Intervallo base}}$

   - Periodica di periodo 1:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}(F+1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{-j2\pi n(F+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi nF} \underbrace{\cancel{e^{-j2\pi n}}}_{=1 \text{ (n intero)}} == \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi nF} = \\
&= \overline{X}(F)
\end{aligned}
$$

   - *Denormalizzazione*:

   Necessaria in quanto se la sequenza $x[n]$ deriva da un'operazione di campionamento, la frequenza normalizzata **non permette** di stabilire un legame con la frequenza (espressa in Hz) delle componenti nella trasformata del segnale analogico di partenza.

   Se T è il periodo di campionamento, $\Rightarrow f \triangleq \frac{F}{T} = F \cdot f_c$ in Hz. Sostituendo ottengo $F = fT$ in Hz

$$
\text{TFS}\Big[X[n]\Big] = \overline{X}(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi nfT}
$$

f continua in $\left[-\frac{1}{2T};\frac{1}{2T}\right] \rightarrow \overline{X}(f)$ continua. Posso introdurre il *modulo* $\overline{A}(f) = |\overline{X}(f)|$ e lo *spettro di fase* $\overline{\theta}(f) = \angle\overline{X}(f)$.

$X(f)$ è periodica di periodo pari a $f_c = \frac{1}{T} \Rightarrow \overline{X}(f+\frac{1}{T}) = \sum x[n]e^{-j2\pi nFT} \cdot \underbrace{\cancel{e^{2\pi n \frac{1}{T} T}}}_{=1} = \overline{X}(f)$

3. Relazione tra definizione di antitrasformata e trasformata; Criterio di convergenza per TFS (solo definizione).

$$x[n] = \text{ITFS}\left[\overline{X}(f)\right] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(f)\; e^{j2\pi nfT}\,df$$

- Dimostrazione:

$$\overline{X}(f) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\; e^{-j2\pi mfT} \rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{moltiplico per osc.ni} \\ \text{complesse alla frequenza } f \text{ e integro}\end{array}$$

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(f)\; e^{j2\pi nfT}\,df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\; e^{-j2\pi mfT}\; e^{j2\pi nfT}\,df =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT}\,df$$

$$\text{Studiamo } \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT}\,df \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{T} & : \; m=n \rightarrow \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} 1\cdot\,df = \frac{1}{T} \\ 0 & : \; m\neq n \rightarrow m-n=k \rightarrow \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi kfT} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(f)\; e^{-j2\pi nfT}\,df = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{-j2\pi(m-n)fT}\,df = \frac{1}{T}x[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(f)\; e^{j2\pi nfT}$$

Nota bene: nell'ultima sommatoria ho tutti elementi pari a 0, tranne il caso $m = n \rightarrow \frac{1}{T}$

- Criterio di convergenza:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big|x[n]\Big| < +\infty \Rightarrow \exists \text{ TFS}$$

Un criterio di convergenza per l'esistenza della trasformata è la **assoluta sommabilità** della frequenza.

Teoremi

4. Teorema di Linearità;

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow \overline{X}(f) = a\overline{X_1}(f) + b\overline{X_2}(f)$$

5. Teorema del Ritardo;

Sia $x[n]$ una sequenza.

$$x[n-k] \Longleftrightarrow \overline{X}(f)\cdot e^{-j2\pi kfT}$$

- Dimostrazione:

$$\text{TFS}[x[n-k]] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-k]\; e^{-j2\pi nfT} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\; e^{-j2\pi(m+k)fT} = e^{-j2\pi kfT}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\; e^{-j2\pi mfT} =$$
$$= \overline{X}(f)e^{-j2\pi kfT}$$

6. Teorema della Modulazione;

$$x[n]\cdot e^{j2\pi nf_0 t} \Longleftrightarrow \overline{X}(f-f_0)$$

- Dimostrazione:

$$\text{TFS}\left[x[n]e^{j2\pi n f_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{-j2\pi n f T} \cdot e^{j2\pi n f_0 T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{-j2\pi n (f-f_0) T} = \overline{X}(f-f_0)$$

7. Teorema della Somma di Convoluzione;

   Sia $s[n]$ la sequenza discreta *somma di convoluzione* tra le sequenze aperiodiche $x[n]$ e $y[n]$.

$$s[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]\ x[n-k]$$

   Gode delle stesse proprietà del caso continuo.

$$\Rightarrow \overline{S}(f) = \overline{X}(f) \cdot \overline{Y}(f)$$

   - Dimostrazione:

$$\overline{S}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ y[n-k] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]\ e^{-j2\pi n f T}}_{\text{ritardo}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] \overline{Y}(f)\ e^{-j2\pi k f T} = \overline{Y}(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi k f T} = \overline{Y}(f)\ \overline{X}(f)$$

8. Teorema del Prodotto;

$$p[n] = x[n] \cdot y[n] \Longleftrightarrow \overline{P}(f) = \overline{X}(f) \otimes \overline{Y}(f)$$

   - Dimostrazione:

$$\overline{P}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n]\ e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ y[n]\ e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(\alpha)\ e^{j2\pi n \alpha T}\, d\alpha\right]}_{\text{antitrasformata di } \overline{X}(f)} y[n]\ e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(\alpha) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\ e^{-j2\pi n (f-\alpha) T}}_{\text{dalla modulazione } \to \overline{Y}(f-\alpha)} d\alpha = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(\alpha) \overline{Y}(f-\alpha)\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \overline{P}(f) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(\alpha) \overline{Y}(f-\alpha)\, d\alpha$$

   Questa è la **convoluzione ciclica o periodica**. L' integrale viene calcolato su un singolo periodo e il risultato è diviso per l'ampiezza del periodo $\frac{1}{T}$

9. Teorema dell'Incremento;

$$\left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=nT} \cong \frac{x(nT) - x(nT-T)}{T} = \frac{x[n]-x[n-1]}{T},\ \text{con } x[n] \triangleq x(nT)$$

   Si introduce l'operatore **incremento** $\Delta x[n] \triangleq x[n] - x[n-1]$
   Usando il *teorema del ritardo* per ottenere la trasformata:

$$\Delta x[n] \Longleftrightarrow \overline{X}(f) - \overline{X}(f)\ e^{-j2\pi f T} = \overline{X}(f)\ (1 - e^{-j2\pi f T})$$

   È l'analogo del teorema di derivazione: approssima la derivata del rapporto incrementale.

10. Teorema della Sequenza Somma.

    Consideriamo la sequenza somma $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$. Dal teorema dell'incremento otteniamo la sua trasformata in sequenza:

$$\overline{Y}(f) = \frac{\overline{X}(f)}{1 - e^{-j2\pi f T}}$$

    purché $\overline{X}(0) = 0$.

- Dimostrazione:

$$z[n] = \Delta y[n] \iff \overline{Z}(f) = \overline{Y}(f)[1 - e^{-j2\pi fT}] \text{ dal teorema dell'incremento}$$

$$\text{però } \Delta y[n] = y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n]$$

$$\text{quindi } \overline{X}(f) = \overline{Y}(f)[1 - e^{-j2\pi fT}] \to \overline{Y}(f) = \frac{\overline{X}(f)}{1 - e^{-j2\pi fT}}$$

Campionamento:

11. Teorema del campionamento ("risultato" dell'interpolazione cardinale);

    Un segnale il cui spettro è *limitato* nella banda B può essere ricostruito a partire dai propri campioni, **purché** $f_c \geq 2B$

    $p(t)$ è un impulso "diverso" per generalizzare l'operazione d'interpolazione, anche al fine di evitare le discontinuità che lo stesso impulso $p(t)$ introduce nell'interpolazione a mantenimento.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\; p(t - nT), \text{ scegliendo } p(t) = \text{sinc}\left(\frac{f}{T}\right) \Rightarrow P(f) = T\,\text{rect}(fT)$$

$$\hat{X}(f) = P(f)\;\overline{X}(f) = \cancel{T}\,\text{rect}\left(fT\right)\frac{1}{\cancel{T}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$= X(f) \to \text{ molto importante!}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ricampionando il segnale}\\ \text{interpolato al generico istante } t = kT\end{array}}$$

$$\hat{x}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\;\text{sinc}\left(\frac{kT - nT}{T}\right), \text{ ma sinc}(k - n) = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & k = n \end{cases}$$

$$\text{Quindi: } \hat{x}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\;\underbrace{\delta[k-n]}_{1 \text{ sse } n=k} = x[k] = x(kT)$$

Il segnale di partenza coincide con il segnale interpolato.

12. Relazione tra TCF e TFS.

    Sappiamo che nel dominio "temporale" è valida la relazione $x[n] = x(nT)$: vogliamo trovare una relazione simile anche dal punto di vista frequenziale:

$$\overline{X}(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\; e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\; e^{-j2\pi nfT} = \boxed{\text{Sapendo che: } x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{j2\pi\alpha nT}\, d\alpha}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)\; e^{-j2\pi\alpha nT}\, d\alpha \cdot e^{-j2\pi nfT} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n(f-\alpha)T}\, d\alpha$$

ma il segnale *pettine di Dirac* è esprimibile in serie di Fourier con coefficienti pari a $\frac{1}{T}$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \\ \text{Trasformata di Fourier} \updownarrow \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nfT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T})\end{array}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \alpha - \frac{k}{T})\, d\alpha = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)\delta(f - \alpha - \frac{k}{T})\, d\alpha =$$

$$= \delta \text{ è pari } = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)\delta\Big(\alpha - (f - \frac{k}{T})\Big)\, d\alpha = \text{ prodotto tra } X(\alpha) \text{ e Dirac centrato in } f - \frac{k}{T}$$

$$= \text{per la proprietà campionatrice della delta di Dirac } \longrightarrow \overline{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

Quindi questa relazione dimostra che la trasformata di Fourier di una sequenza ottenuta per campionamento si può ricavare come *periodicizzazione* della trasformata del segnale analogico di partenza, con un periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento $\frac{1}{T}$!

Segnali a tempo discreto periodici

13. Trasformata discreta di Fourier (definizione);

    Supponiamo $x[n]$ periodica di periodo N_0

$$\underbrace{x[n] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k \; e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}}}_{\text{antitrasformata discreta di Fourier}} \;\; ; \;\; \underbrace{\overline{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \; e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}}}_{\text{Trasformata discreta di Fourier}}$$

14. La trasformata di una sequenza periodica è essa stessa periodica (stesso periodo N_0);

$$\overline{X}_{k+N_0} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j2\pi(k+N_0)\frac{n}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j2\pi k\frac{n}{N_0}} \; e^{-j2\pi n} = \overline{X}_k$$

15. La relazione di sintesi di una TDF discende da quella di analisi;

$$x[n] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k \; e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} \Rightarrow \overline{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}}$$

Moltiplichiamo per $e^{-j\frac{2\pi nm}{N_0}}$ con $(0 \leq m \leq N_0 - 1)$ ed effettuiamo una somma sul periodo (n)

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi mn}{N_0}} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} =$$

Sviluppando il secondo membro: $\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}}$

La seconda sommatoria si sviluppa come :

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1}\left(e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N_0}}\right)^n = \begin{cases} \dfrac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N_0}}} = 0 & k \neq m \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} 1 = N_0 & k = m \end{cases}$$

ovvero: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi n(k-m)}{N_0}} = \begin{cases} \mathrm{N_0} & \text{per n=m} \\ 0 & \text{per} \neq \text{m} \end{cases} = \delta[k-m]N_0$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k e^{-j\frac{2\pi mn}{N_0}} \; e^{j\frac{2\pi nk}{N_0}} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k \; \delta[k-m]N_0 = \frac{\cancel{N_0}}{\cancel{N_0}}\overline{X}_m$$

per sostituzione infine: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nm}{N_0}} = \overline{X}_m$

Proprietà:

Notazione: $\mathrm{DFT}_{N_0}\left\{x[n]\right\} = \overline{X}_k$, con $0 \leq n, k \leq N_0 - 1$

16. Proprietà di Linearità;

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\left\{ax[n] + by[n]\right\} = a\overline{X}_k + b\overline{Y}_k$$

17. Proprietà di Traslazione Circolare;

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\left\{x[n-n_0]\right\} = \overline{X}_k \; e^{-\frac{j2\pi kn_0}{N_0}}$$

- Dimostrazione:

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x[n-n_0]\Big\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n-n_0]\ e^{-j2\pi\frac{n}{N_0}k} = \boxed{\begin{array}{c}\text{cambio di variabile}\\ p=n-n_0\\ n=p+n_0\end{array}}$$

$$= \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p]\ e^{-j\frac{2\pi(p+n_0)k}{N_0}} = \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p]\ e^{-j\frac{2\pi kp}{N_0}}\ e^{-j\frac{2\pi n_0 k}{N_0}} =$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k n_0}{N_0}} \sum_{p=-n_0}^{N_0-1-n_0} x[p]\ e^{-j\frac{2\pi kp}{N_0}} = e^{-j\frac{2\pi k n_0}{N_0}} \sum_{p=0}^{N_0-1} x[p]\ e^{-j\frac{2\pi kp}{N_0}}$$

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x[n-n_0]\Big\} = e^{-j\frac{2\pi k n_0}{N_0}} \cdot \overline{X}_k$$

Si dice traslazione **circolare** in quanto, osservando la periodicità della sequenza originale e di quella traslata, è possibile notare come i campioni che "escono" a destra dell'intervallo rientrano alla sinistra dell'intervallo stesso.

18. Proprietà di Traslazione In Frequenza;

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x[n]\ e^{-j\frac{2\pi k_0 n}{N_0}}\Big\} = \overline{X}_{k-k_0}$$

19. Proprietà di Inversione Temporale;

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x[-n]\Big\} = \overline{X}_{-k} = \overline{X}_{N_0-k}$$

- Dimostrazione:

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x[-n]\Big\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[-n]\ e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[N_0-n]\ e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{cambio di variabile}\\ p=N_0-n\\ n=N_0-p\end{array}}$$

$$= \sum_{p=1}^{N_0} x[p]\ e^{-j\frac{2\pi k(N_0-p)}{N_0}} = \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1} \sum_{p=0}^{N_0-1} x[p]\ e^{-j\frac{2\pi(-k)p}{N_0}} = \overline{X}_{-k} = \overline{X}_{N_0-k}$$

dove nel primo passaggio, abbiamo usato la periodicità della sequenza x[n] e nel penultimo passaggio, per cambiare gli indici della sommatoria, abbiamo usato le proprietà di periodicità della sequenza e della funzione esponenziale, come già visto.

20. Proprietà di coniugazione;

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x^*[n]\Big\} = \overline{X}^*_{-k} = \overline{X}^*_{N_0-k}$$

21. Simmetria per sequenze reali (pari e dispari);

Per una sequenza reale $x[n]$ abbiamo:

$$\mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x[n]\Big\} = \mathrm{DFT}_{N_0}\Big\{x^*[n]\Big\} \to \overline{X}_k = \overline{X}^*_{-k} = \overline{X}^*_{N_0-k}$$

da cui derivano le proprietà di simmetria per il modulo e per la fase:

$$\left|\overline{X}_k\right| = \left|\overline{X}_{-k}\right| = \left|\overline{X}_{N_0-k}\right|$$
$$\angle\overline{X}_k = -\angle\overline{X}_{-k} = -\angle\overline{X}_{N_0-k}$$

Tali relazioni implicano che il modulo della sequenza $X[k]$ è simmetrico rispetto al valore $k=\frac{N}{2}$, mentre la fase è antisimmetrica rispetto a tale valore.

- per sequenze di lunghezza **pari**, il centro di simmetria coincide con un campione della sequenza;
- per sequenze di lunghezza **dispari**, invece, il centro di simmetria coincide con un punto equidistante tra due campioni.

22. Teorema di Parseval per sequenze;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\ y^*[n] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \overline{X}_k\ \overline{Y}_k^* \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N_0-1} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \left|\overline{X}_k\right|^2 \end{cases}$$

- Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\ y^*[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\left(\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}\overline{Y}_k^*\ e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}}\right)^* = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}\overline{Y}_k\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\ e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1}\overline{X}_k\ \overline{Y}_k^*$$

  - Ponendo $x[n] = y[n]$ si ottiene la seconda relazione.

  L'energia si mantiene nei domini.

23. Teorema del Prodotto;

Consideriamo adesso la sequenza (periodica) $p[n]$ data dal *prodotto* fra la sequenza $x[n]$ e la sequenza $y[n]$ entrambe periodiche di periodo N_0

$$p[n] = x[n]\ y[n]$$

e calcoliamone la trasformata discreta di Fourier:

$$\overline{P}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} p[n]\ e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\ y[n] e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1}\frac{1}{N_0}\sum_{m=0}^{N_0-1}\overline{X}_m\ e^{j2\pi\frac{nm}{N_0}}\cdot y[n]\ e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}}$$

Dove $x[n]$ è stata scomposta in serie discreta di Fourier. Inoltre è stata utilizzata una variabile "muta" m nell'antitrasformata per non creare ambiguità con la variabile k, da cui dipende la trasformata.

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}\sum_{m=0}^{N_0-1}\overline{X}_m\ e^{j2\pi\frac{nm}{N_0}}\cdot y[n] e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}}$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie otteniamo:

$$\overline{P}_k = \sum_{m=0}^{N_0-1}\overline{X}_m\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} y[n]\ e^{-j2\pi\frac{n(k-m)}{N_0}} = \frac{1}{N_0}\sum_{m=0}^{N_0-1}\overline{X}_m\ \overline{Y}_{k-m} =$$
$$= \frac{1}{N_0}\cdot\overline{X}_k\otimes\overline{Y}_k$$

La convoluzione tra le due trasformate discrete è una somma di convoluzione **ciclica** tra le due sequenze periodiche $\overline{X}_k$ e $\overline{Y}_k$ in ambito *frequenziale*. In conclusione:

$$p[n] = x[n]\ y[n] \Longleftrightarrow \overline{P}_k = \frac{1}{N_0}\cdot\overline{X}_k\otimes\overline{Y}_k$$

24. Teorema della Convoluzione (+ relazioni tra convoluzione lineare e circolare).

Consideriamo ora la sequenza $z[n]$ come somma di convoluzione ciclica o circolare tra le due sequenze $x[n]$ e $y[n]$, periodiche di periodo N_0

$$z[n] = x[n]\otimes y[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m]\ y[n-m] = \sum_{m=0}^{N_0-1} y[m]\ x[n-m]$$

La somma di convoluzione gode di tutte le proprietà citate per la somma di convoluzione tra sequenze periodiche.
Calcoliamo la trasformata discreta di $z[n]$:

$$\overline{Z}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} z[n]\ e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1}\sum_{m=0}^{N_0-1} x[m]\ y[n-m] e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}} = \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m]\sum_{n=0}^{N_0-1} y[n-m] e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}} =$$
$$= \sum_{m=0}^{N_0-1} x[m]\ \overline{Y}_k\ e^{-j2\pi\frac{mk}{N_0}} = \overline{Y}_k\sum_{m=0}^{N_0-1} x[m]\ e^{-j2\pi\frac{mk}{N_0}} =$$
$$= \overline{X}_k\cdot\overline{Y}_k$$

Quindi:

$$x[n]\otimes y[n] \Longleftrightarrow \overline{X}_k\cdot\overline{Y}_k$$

- Relazioni tra convoluzione lineare e circolare (per due sequenze di lunghezza finita):

  Siano $x[n]$ e $h[n]$ due sequenze di lunghezza L e M: il "supporto" sul quale le sequenze hanno campioni *non nulli* è $[0, L-1]$ e $[0, M-1]$.

  - La convoluzione *lineare* è ottenuta dalla relazione:

  $$y_l[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ h[n-k]$$

    dove le sequenze sono considerate **aperiodiche** e $y_l[n]$ ha una lunghezza *finita* e pari a $L+M-1$ campioni, considerando il "supporto" dove le sequenze hanno campioni non nulli. Vi è quindi una *sovrapposizione* tra campioni non nulli delle due sequenze in $[0, L+M-2]$
  - La convoluzione *circolare* invece, a causa della diversa lunghezza delle due sequenze, richiede di fissare un **periodo comune** N, per eseguire l'**estensione periodica** delle sequenze: l'unico vincolo da porre diventa quindi $N \geq \max(L, M)$, appendendo quindi in fondo alle sequenze un numero di zeri (pari a $N-L$ o $N-M$) prima di estendere periodicamente le due sequenze. La convoluzione circolare è data da:

  $$y_c[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\ h[n-k]$$

Generale:

25. Fast Fourier Transform (FFT).

    Supponiamo di avere in memoria un numero N_0 di valori della sequenza periodica $x[n]$ e calcoliamone numericamente la trasformata discreta:

$$\overline{X}_k = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{-j\frac{1\pi kn}{N_0}} = \left\{ x[0] \cdot e^{-j0} + x[1] \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N_0}} + x[2] \cdot e^{-j\frac{2\pi 2k}{N_0}} + \cdots + x[N_0-1] \cdot e^{-j\frac{2\pi(N_0-1)k}{N_0}} \right\}$$

Vogliamo quindi determinare il numero di *operazioni necessarie* sia per la trasformata che per l'antitrasformata (ignorando il fattore di scala $\frac{1}{N_0}$):

$$x[n] = \overline{X}_0 \cdot e^{j0} + \overline{X}_1 \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N_0}} + \overline{X}_2 \cdot e^{j\frac{2\pi 2k}{N_0}} + \cdots + \overline{X}_{N_0-1} \cdot e^{j\frac{2\pi(N_0-1)k}{N_0}}$$

Supponiamo quindi di avere valori *complessi* $z = a + jb$, ma **precalcolati**, ovvero già in memoria. Per il calcolo di un *singolo campione* $X[k]$ è necessario eseguire N_0 moltiplicazioni complesse e $N_0 - 1$ addizioni complesse, le quali sono tradotte dai calcolatori in operazioni nel campo reale, eseguendole tra le parti reali e immaginari dei numeri complessi coinvolti:

- per eseguire un'addizione complessa è necessario eseguire 2 addizioni reali: $(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$
- per eseguire una moltiplicazione complessa è necessario eseguire 4 moltiplicazioni reali e 2 addizioni reali, $(a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$.

Quindi per un singolo campione $X[k]$ sono necessarie N_0 moltiplicazioni complesse e $N_0 - 1$ somme complesse. Inoltre, per ogni valore di k sono necessarie $8N_0 - 2$ operazioni reali, e dato che la sequenza è composta da N_0 valori la complessità diventa **quadratica**:

$$(8N_0 - 2)N_0 = 8N_0^2 - 2N_0 \approx 8N_0^2$$

Per velocizzare i calcoli è stato quindi introdotto l'algoritmo **Fast Fourier Transform** o FFT, il quale viene applicato se N_0 *è una potenza del* $2 \to N_0 = 2^M$

$$\overline{X}_k = \sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m]\ e^{-j\frac{2\pi(2m)k}{N_0}} + \sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m+1]\ e^{-j\frac{2\pi(2m-1)k}{N_0}} =$$

$$= \overbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m]\ e^{-j\frac{2\pi mk}{\frac{N_0}{2}}}}^{\overline{P}_k} + e^{-j\frac{2\pi k}{\frac{N_0}{2}}} \cdot \overbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N_0}{2}-1} x[2m+1]\ e^{-j\frac{2\pi mk}{\frac{N_0}{2}}}}^{\overline{D}_k}$$

con $k = 0, \dots, N_0 - 1$. $\overline{P}_k$ è la trasformata ottenuta dai $\frac{N_0}{2}$ campioni di *indice pari* di $x[n]$, mentre $\overline{D}_k$ indica la trasformata della sequenza ottenuta dai $\frac{N_0}{2}$ campioni di *indice dispari* Questa scomposizione è ricorsiva dell'ordine, in quanto la trasformata di ordine N_0 è espressa come combinazione lineare di due trasformate di ordine $\frac{N_0}{2}$: questo concetto può essere esteso al numero di operazioni N_{FFT}:

$$N_{FFT}(N_0) = N_{FFT}(\frac{N_0}{2}) + N_{FFT}(\frac{N_0}{2}) + 6N_0 + 2N_0$$

tenendo conto che per ogni k (dei coefficienti dispari) è necessario moltiplicare D_k per un esponenziale complesso (precalcolato, 6 operazioni reali) e poi sommare con P_k (2 operazioni reali).

Il procedimento viene poi ripetuto ricorsivamente. Infine, iterando la formula:

$$N_{FFT}(N_0) = 6N_0 + 8N_0 \log_2 N_0 \approx 8N_0 \log_2 N_0$$

la complessità risulta **logaritmica**! Ad esempio, con $N_0 = 1024$

$$\frac{N_{TDF}(N_0)}{N_{FFT}(N_0)} = \frac{8N_0^{\cancel{2}}}{\cancel{8N_0} \log_2 N_0} = \frac{N_0}{\log_2 N_0} \approx 100$$

Il vantaggio conseguito dall'utilizzo di FFT al posto della trasformata classica aumenta al crescere di N_0

Sistemi monodimensionali a tempo discreto

$$y[n] = \mathrm{T}\Big[x[m], n\Big] = \mathrm{T}\Big[x[n]\Big]$$

Proprietà dei sistemi;

26. SLS a tempo discreto: risposta impulsiva.

$$h[n] = \mathrm{T}\Big[\delta[n]\Big]$$

Nota $h[n]$:

$$\begin{aligned} y[n] = \mathrm{T}\Big[x[n]\Big] &= \mathrm{T}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ \delta[n-k]\Big] = \text{per la linearità} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathrm{T}\Big[\delta[n-k]\Big] = \text{per la stazionarietà:} \ \rightarrow \Big\{\ \mathrm{T}\Big[\delta[n-k]\Big] = h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ h[n-k] = x[n] \otimes h[n] \end{aligned}$$

Quindi l'uscita è una *somma di convoluzione* tra la sequenza in ingresso e la risposta impulsiva del sistema stesso!

Un sistema lineare e stazionario (SLS) può essere:

- FIR (Finite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva è costituita da un **numero finito di campioni**;
- IIR (Infinite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva è costituita da un numero **infinito** di campioni.

È possibile dimostrare come la *condizione necessaria e sufficiente* per la stabilità in senso BIBO di un SLS è l'**'assoluta sommabilità** della sua risposta impulsiva:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big|h[k]\Big| < \infty$$

Da ciò deriviamo che

- i sistemi FIR sono stabili: la sommatoria diventa una somma *finita* di quantità *limitate*;
- mentre i sistemi IIR non lo sono sempre. Diventa necessario controllare la validità della seguente condizione:
  - **sequenza causale**:
    un SLS è causale se e solo se la sua risposta impulsiva è una sequenza causale, cioè:

$$h[n] = 0 \text{ se } n < 0, \text{ ovvero } h[n] = h[n]\ u[n]$$

Proprietà:

27. Sistemi a cascata e in parallelo;

    - In un sistema a **cascata** l'ordine degli stessi può essere variato senza alterare l'uscita:

    $$h[n] = h_1[n] \otimes h_2[n] \rightarrow y[n] = x[n] \otimes \Big(h_1[n] \otimes h_2[n]\Big)$$

    Questo per la proprietà commutativa del prodotto di concoluzione discreta.

    - Due sistemi **in parallelo**:

    $$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \rightarrow y[n] = x[n] \otimes \Big[h_1[n] + h_2[n]\Big]$$

28. Risposta in frequenza;

    1. La risposta in frequenza di un SLS a tempo discreto è la **trasformata di Fourier** della risposta impulsiva $h[n]$ del sistema stesso

    $$\overline{H}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\ e^{-j2\pi nfT}$$

    2. Inoltre $\overline{H}(f)$ è pari al rapporto tra le trasformate $\overline{Y}(f)$ e $\overline{X}(f)$ rispettivamente della sequenza in uscita $y[n]$ e in ingresso $x[n]$:

    $$\overline{H}(f) = \frac{\overline{Y}(f)}{\overline{X}(f)}$$

    3. La risposta in frequenza è data dal rapporto fra la sequenza di uscita y[n] e quella di ingresso x[n] quando x[n] è una oscillazione complessa alla frequenza f:

    $$\overline{H}(f) = \frac{y[n]}{x[n]}\bigg|_{x[n]=e^{j2\pi nfT}}$$

    È possibile inoltre definire, data la risposta in frequenza $\overline{H}(f)$, la *risposta in ampiezza* $\overline{A}(f) = |\overline{H}(f)|$, la quale determina la **selettività** di un SLS e la sua *risposta in fase* $\overline{\theta}(f) = \angle\overline{H}(f)$

29. Filtri a tempo discreto.

    La **condizione di non distorsione** viene riformulata come segue:

    $$y[n] = Kx[n - n_0]$$

    K ed n_0 rappresentano rispettivamente il guadagno ed il ritardo del sistema. Nel dominio della frequenza, questa condizione si traduce nei due seguenti requisiti per la risposta in ampiezza e la risposta in fase:

    $$\overline{A}(f) = K, \quad \overline{\theta}(f) = -2\pi f n_0 T$$

    È sufficiente che queste condizioni siano verificate nell'ambito della banda del segnale per garantire assenza di distorsioni

    Le caratteristiche di selettività di un filtro a tempo discreto con risposta in frequenza (che è una funzione periodica di periodo 1/T) sono determinate dall'andamento della sua risposta in ampiezza in un solo periodo della funzione (as esempio $\Big[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\Big]$).

    Le basse frequenze sono sempre prossime alla frequenza nulla, mentre le alte sono comunque prossime al limite superiore dell'intervallo, ovvero $\frac{1}{2T}$:

    - **passa basso**

    $$h_{\text{LP}}[n] = 2BT\,\text{sinc}(2nBT) \Longleftrightarrow \overline{H}_{\text{LP}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} T \cdot \text{rect}\left(\frac{f - \frac{k}{T}}{2B}\right)$$

    - **passa alto**

    $$h_{\text{HP}}[n] = \delta[n] - 2BT\,\text{sinc}(2nBT) \Longleftrightarrow \overline{H}_{\text{HP}}(f) = 1 - \overline{H}_{\text{LP}}(f)$$

    I filtri ideali **non sono causali!**

Quantizzazione (per alcune di queste domande guardare quesiti)

30. Formule e definizioni (passo, dinamica D, bit B, fattore di scala A...);

    L'operazione di quantizzazione rende **discreta** l'ampiezza dei campioni associando loro un valore di ampiezza scelto da un insieme finito di possibili *valori* (detti livelli di quantizzazione: essi sono i "rappresentanti" di intervalli di quantizzazione contigui: gli estremi di questi intervalli sono detti "soglie").

    $$\hat{x}(nT) = \mathrm{Q}\Big[x(nT)\Big]$$

    La quantizzazione è un'operazione *lossy*, in quanto essendo un'operazione irreversibile, una volta quantizzato il segnale l'informazione originale non potrà essere più recuperata, commettendo un errore

    $$e(nT) = \hat{x}(nT) - x(nT)$$

    Per effettuare l'operazione di quantizzazione dividiamo l'intervallo di variazione di ampiezza dei suoi campioni in intervalli di quantizzazione contigui (x_i, x_{i+1}), dove gli estremi rappresentano le *soglie* di quantizzazione.

    Al momento della progettazione del quantizzatore sono fissate sia le soglie che i livelli!

    L'operazione quindi consiste nel **selezionare l'intervallo più corretto per ogni campione** $x(nt)$ e associare al suo interno un valore $\hat{x}_i$ detto *livello* dell'intervallo selezionato.

    - "Definizioni":
      - **Passo**: indicato con Δ, rappresenta la distanza tra livelli (e soglie) di quantizzazione.
      - **bit**: indicato con B, serve a determinare il numero di possibili livelli di quantizzazione, rappresentati con notazione binaria, pari a 2^B
      - **dinamica**: indicata con D rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di valori che i livelli di quantizzazione riescono a coprire.
    - Quantizzatori uniformi

      Ottenuti imponendo una distanza costante tra le soglie e i livelli (Δ costante).

      Per avere una *buona rappresentazione del segnale*, la dinamica $D \approx$ **intervallo variazione ampiezza dei campioni**!

      $$D > X_{\max} - X_{\min}$$

      In un processo *aleatorio gaussiano*, i cui campioni seguono la distribuzione di probabilità Gaussiana (quindi con un intervallo di variazione *illimitato*), si rende necessario ipotizzare un intervallo di variazione dei campioni **finito** e di dimensione tale da rendere *minima* la probabilità che esca da tale intervallo (**overflow**). Considerando il caso di valor medio *nullo*:

      $$E\Big[f(x)\Big] = 0 \rightarrow \text{gli intervalli sono: } \begin{cases} [-3\sigma, 3\sigma] & \approx 95,45\% \\ [-4\sigma, 4\sigma] & \approx 99,73\% \end{cases} \rightarrow \Delta > 8\sigma$$

      Per far sì che il passo non sia né eccessivamente grande (livelli di quantizzazione usati molto minori rispetto a quelli a disposizione), né troppo piccolo (commessi errori rilevanti (di overflow), quando si quantizzano campioni al di fuori della dinamica del quantizzatore) Δ, D, B sono legati secondo:

      $$\Delta = \frac{D}{2^B}$$

31. Tipologie di quantizzatori (midrise, midtread, arrotondamento e troncamento);

    Vedi risposte 33, 34 quesiti

32. Errore di quantizzazione e modello;

    L'errore di quantizzazione può essere visto come una sequenza che *si somma* (modello additivo) al segnale campionato:

    $$e(nT) = \hat{x}(nt) - x(nT) \Rightarrow \hat{x}(nT) = e(nT) + x(nT)$$

    Modelliamo quindi $e(nT)$ come un processo aleatorio, indicandolo come **rumore di quantizzazione** e con le seguenti ipotesi:

1. $e(nT)$ sia un processo stazionario in senso lato: quindi media, potenza e varianza *costanti* e **non** dipendono da n (distanza tra i campioni);
2. che la densità di probabilità dell'**ampiezza dell'errore di quantizzazione** sia di tipo **uniforme**, permettendo di valutare tali costanti distinguendo i casi di quantizzazione per troncamento e per arrotondamento:
   - densità probabilità errore troncamento:

$$P_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\Delta < e \leq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \rightarrow E\Big[e(nT)\Big] = 0 = E\Big[e^2(nT)\Big] = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$E[e(nT)] = \int_{-\Delta}^{0} e\ p_e(e)\, de = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{e^2}{2}\Bigg|_{-\Delta}^{0} = -\frac{\Delta}{2}$$

$$E[e^2(nT)] = \int_{-\Delta}^{0} e^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{3} = \frac{1}{\Delta}\frac{e^3}{3}\Bigg|_{-\Delta}^{0}$$

$$\sigma_e^2 = E[(e(nT) - E[e(nT)])^2] = E[e^2(nT)] - \Big(E[e(nT)]\Big)^2 =$$

$$= \int_{-\Delta}^{0} \left(e + \frac{\Delta}{2}\right)^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{12}$$

   - densità errore arrotondamento:

$$p_e(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} < e \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$$E[e(nT)] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e\ p_e(e)\, de = \frac{1}{\Delta}\frac{e^2}{2}\Bigg|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = 0$$

$$E[e^2(nT)] = \sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2\ p_e(e)\, de = \frac{1}{\Delta}\frac{e^3}{3}\Bigg|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

3. $\{e(nT)\}$ incorrelato con processo $\{x(nT)\}$;

   $E\Big[\{x(nT)\}\{e(nT)\}\Big] = E\Big[\{x(nT)\}\Big] \cdot E\Big[\{e(nT)\}\Big]$
4. I campioni del processo $\{e(nT)\}$ sono **incorrelati** tra loro;

   Per la quantizzazione con troncamento si ha:

$$E\Big[e(nT)\ e\Big((n+m)T\Big)\Big] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \frac{\Delta^2}{3} & m = 0 \\ \\ E[e(nT)]E\Big[e\Big((n+m)T\Big)\Big] = \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta^2}{4} & m \neq 0, \end{cases}$$

   mentre per la quantizzazione con arrotondamento abbiamo

$$E\Big[e(nT)e\Big((n+m)T\Big)\Big] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} & m = 0 \\ \\ 0 & m \neq 0. \end{cases}$$

   In questo caso, l'errore di quantizzazione è un **processo bianco**.

33. Definizione Signal To Noise Ratio (SNR) e formule.

    È il rapporto tra la *potenza del segnale* e la *potenza dell'errore di quantizzazione*:

$$\text{SNR}_q = \frac{S}{\sigma_e^2}$$

Ciò vale con l'ipotesi di un quantizzatore che utilizzi l'arrotondamento. S rappresenta la potenza del segnale (è necessario conoscerla oltre ai parametri del quantizzatore)... e $\Delta = \frac{D}{2^B}$:

$$\mathrm{SNR}_q = \frac{S}{\sigma_e^2} = \frac{S}{\frac{1}{12}\Delta^2} = \frac{S}{\frac{1}{12}(\frac{D}{2^B})^2} = \frac{12 \cdot S \cdot 2^{2B}}{D^2}$$

Esprimendo SNR_q in scala logaritmica

$$\begin{aligned}\mathrm{SNR}_{q,\mathrm{dB}} &= 10\log_{10} SNR_{\mathrm{q}} = 10\log_{10}\left(\frac{12 \cdot S \cdot 2^{2B}}{D^2}\right) \\ &= (20\log_{10} 2)B + 10\log_{\mathbf{10}}\left(\frac{12S}{D^2}\right) \\ &\approx 6.02B + 10\log_{10}\left(\frac{12S}{D^2}\right)\ \mathrm{dB}.\end{aligned}$$