Lista teoremi Teoria dei Segnali

Introduzione

1. $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0 e ha potenza media su un intervallo finita, allora ha $\bar{P}$ finita e calcolabile sul periodo:

   Per definizione $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt$. Scegliamo come periodo NT_0, in quanto se $N \to \infty$ vale come $T \to \infty$.

   Quindi $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{NT_0}\displaystyle\int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |x(t)|^2\, dt$ equivale a N integrali cui si aggiunge un T_0 ogni volta:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\cancel{N}T_0} \cdot \cancel{N}\Big\{ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\, dt\} = \bar{P} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\, dt$$

Segnali periodici a tempo continuo

Serie di Fourier

2. Da forma polare a complessa (o rettangolare)

   la forma polare della serie di Fourier è data da:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_K)$$

$$= A_0 + \cancel{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(2\pi k f_0 t+\theta_K)} + e^{-j(2\pi k f_0 t+\theta_K)}}{\cancel{2}} \to \text{ uso formula di Eulero per il coseno}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(2\pi k f_0 t+\theta_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j(2\pi k f_0 t+\theta_K)} \to \text{ separo le due esponenziali}$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \to \text{ raggruppo le sommatorie e} k \text{ diventa } -k$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\ e^{j2\pi k f_0 t} \text{ forma complessa della serie di Fourier}$$

3. Come si calcolano i coefficienti X_n?

   Partendo dalla forma complessa, moltiplico a destra e a sinistra per $e^{-j2\pi k f_0 t}$, integrando sul periodo T_0.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\ e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

   Porto fuori la sommatoria e raccolgo e: per ipotesi la serie converge.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n) f_0 t}\, dt$$

   L'integrale al secondo membro viene calcolato per $k \neq n$

$$\to \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n) f_0 t} = \frac{e^{j2\pi(k-n) f_0 t}}{j2\pi(k-n) f_0}\Bigg|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} =$$

$$\frac{e^{j\cancel{2}\pi(k-n)\cancel{f_0}\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}} - e^{-j\cancel{2}\pi(k-n)\cancel{f_0}\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}}}{2j \cdot \pi(k-n) f_0} \to \text{ uso formula di Eulero per il seno}$$

$$\frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} k = n \to T_0 \\ k \neq n \to 0 \end{cases} \to \text{ sostituiamo questo risultato}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt = X_n T_0 \Rightarrow X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt$$

N-esimo termine della serie di Fourier

4. Forma rettangolare dalla forma polare

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

usiamo la formula di addizione $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(\cos(2\pi k f_0)\cos(\theta_k) - \sin(2\pi k f_0)\sin(\theta_k)))$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(2\pi k f_0) - b_k \sin(2\pi k f_0)]$$

sapendo che $a_0 = A_0,\ a_k = A_k\cos(\theta_k),\ b_k = B_k\sin(\theta_k)$.

Abbiamo quindi ottenuto la forma rettangolare della serie di Fourier, dove si nota che un segnale *periodico* $x(t)$ può essere espresso tramite una **somma di seni e coseni**.

Il coefficiente X_n può essere espresso anche come:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)(\cos(2\pi k f_0 t) - j\sin(2\pi k f_0 t))$$

$$X_k = a_k + jb_k = A_k\cos(\theta_k) + jA_k\sin(\theta_k) = A_k e^{j\theta_k}$$

5. Criterio di Dirichlet (per $x(t)$ periodico):

   È una serie di condizioni che se incontrate sono sufficienti per poter sviluppare un dato segnale $x(t)$ in serie di Fourier:

   - $x(t)$ deve essere *assolutamente integrabile sul periodo*: ovvero $(\int_{[T_0]}|x(t)|\,dt < \infty)$
   - $x(t)$ deve essere *continua* (o avere un numero *finito* di discontinuità di prima specie)
   - $x(t)$ deve essere *derivabile sul periodo* T_0, escluso al più un numero finito di punti, dove comunque esiste **finita** sia la derivata destra che la derivata sinistra
     - quest'ultima ipotesi è equivalente a: $x(t)$ presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo La serie **converge** al valore assunto da $x(t)$ dove *continua* e alla semisomma dei limiti sinistro e destro se discontinua.

Spettro di un segnale periodico e reale

Proprietà

6. Simmetria Hermitiana dello spettro reale:

   I coefficienti X_k sono generalmente quantità complesse del tipo

$$X_k = |X_k|e^{j\angle X_k}$$

$X_k$può essere rappresentata tramite spettro di ampiezza e spettro di fase, discreti (esiste solo in corrispondenza delle armoniche k)

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

Analizziamone il coniugato X_k^*:

$$X_k^* = \Big(\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt\Big)^* = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)^* e^{+j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}\,dt$$

È da notare come $x(t)^* = x(t)$, dal momento che il segnale $x(t)$ è reale.

Quindi $X_k^* = X_{-k}$: i coefficienti X_k di un segnale *reale* **godono di simmetria hermitiana**, ossia hanno *lo stesso modulo e fase opposta*

$$X_{-k} = X_k^* \iff \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| & \text{stesso modulo} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} & \text{fase opposta} \end{cases}$$

In definitiva per un segnale reale:

- lo spettro d'ampiezza è **simmetrico** rispetto a $k \to$ pari
- lo spettro di fase è **antisimmetrico** rispetto a $k \to$ dispari

7. Linearità dello spettro reale:

   Se $x(t)$ e $y(t)$ sono due segnali con periodo T_0 *reali* allora vale:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \iff Z_k = aX_k + bY_k$$

   Somma di *oscillazioni* alle (o con?) le stesse frequenze dei segnali $x(t)$ e $y(t)$.

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t)e^{-j2\pi kf_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (ax(t) + by(t))e^{-j2\pi kf_0 t}\,dt$$

$$= \frac{a}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi kf_0 t}\,dt + \frac{b}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)e^{-j2\pi kf_0 t}\,dt = aX_k + bY_k$$

8. Parità e disparità del segnale

   - Se $x(t)$ è **pari**, allora il coefficiente $X_k = X_{-k}$; se il segnale è anche **reale** vale $X_k = X_{-k} = X_k^* \iff X_k \in \mathbb{R}$.

     $X_k = X_{-k}$ (con un cambio di variabile $\alpha = -t \to dt = -\,d\alpha$).

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi kf_0 t}\,dt \iff X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}\,dt$$

     Utilizziamo il cambio di variabile

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(-\alpha)e^{-j2\pi(\cancel{-}(\cancel{-}\alpha))kf_0} -\,d\alpha = -\frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(\alpha)e^{-j2\pi\alpha kf_0}\,d\alpha =$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\alpha)e^{-j2\pi\alpha kf_0}\,d\alpha = X_k$$

     dato che il segnale $\in \mathbb{R}$ lo possiamo rappresentare come (perché essendo reale ha fase nulla?):

$$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi kf_0 t)$$

     Dimostrazione:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi kf_0 t} =$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi kf_0 t} =$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi kf_0 t} =$$

$$= X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{e^{j2\pi kf_0 t} + e^{-j2\pi kf_0 t}}{2} = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi kf_0 t)$$

Da ciò deduco che un segnale reale e pari è esprimibile in serie di soli *coseni* (i quali sono a loro volta pari).

Possiamo inoltre scrivere i coefficienti X_k in modo semplificato, data la *parità* del segnale:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{pari}\cdot\underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{pari}\,dt - \frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{pari}\cdot\underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{dispari}\,dt =$$

$$\frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cdot\cos(2\pi k f_0 t)\,dt - 0$$

Integrale di una funzione pari su un intervallo simmetrico.

- se $x(t)$ è **dispari**, allora anche i coefficienti X_k saranno dispari. Inoltre, dato che $x(t)\in\mathbb{R}$, X_k sarà un **immaginario puro**, ed

$$x(t) = 2j\sum_{k=1}^{\infty} X_k\sin(2\pi k f_0 t) \text{ e } X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,dt$$

Dimostrazione:

  - Dato che $x(t)\in\mathbb{R}$, X_k, allora vale $X_{-k} = -X_k = X_k^* \Rightarrow X_k^* = -X_k$, quindi è un immaginario puro!
  - Per X_k:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}}\cdot\underbrace{\cos(2\pi k f_0 t)}_{\text{pari}}\,dt - \frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{dispari}}\cdot\underbrace{\sin(2\pi k f_0 t)}_{\text{dispari}}\,dt =$$

$$-\frac{2j}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cdot\sin(2\pi k f_0 t)\,dt$$

- **Note varie**
  - Se $x(t)$ è pari i suoi coefficienti X_k sono reali e lo spettro di fase vale 0 o $\pm\pi$; mentre se $x(t)$ è dispari i suoi coefficienti X_k sono immaginari puri e lo spettro di ampiezza non viene toccato: un segnale dispari è solo "spostato" nel tempo.
  - È da notare come la diversa velocità di un segnale dipenda dal suo andamento temporale: le variazioni brusche comportano la presenza di **armoniche**[^1] con k più elevato per rappresentare la velocimento alta(?):
    * più il segnale è regolare meno armoniche sono necessarie per "ricreare" il segnale
      · $\frac{1}{k}\rightarrow$ funzioni discontinue: dente di sega ideale, onda quadra, onda quadra "antisimmetrica", rect
      · $\frac{1}{k^2}\rightarrow$ funzioni continue a derivata discontinua: onda triangolare. [^1]: TODO: definire meglio armoniche

Segnali aperiodici a tempo continuo

Trasformata continua di Fourier

Una funzione non periodica, definita tra $-\infty$ e ∞, può essere rappresentata come **somma** di **infinite armoniche semplici** di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile con continuità tra $-\infty$ e ∞

9. Dal segnale periodico al segnale aperiodico…

Partiamo dall'impulso rettangolare *aperiodico* rect $\frac{t}{T}$:

$$x(t) = \text{rect}\,\frac{t}{T}\rightarrow x_p(t) = \sum\text{rect}(\frac{t-nT_0}{T})\text{ treno di impulsi rettangolari}$$

possiamo vedere $x(t)$ come caso limite di $x_p(t)$ con periodo $T_0 \to \infty$

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t)$$

1. la frequenza diventa infinitesima ($f_0 = \frac{1}{T_0}$)
2. si riduce la *distanza tra le armoniche*, ossia si **infittisce** lo spettro;
3. $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\ e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$, l'ampiezza assume valori *sempre più piccoli*

Usiamo il coefficiente *modificato* $X(f_0 k) = T_0 X_k$ per ovviare il problema. Riscriviamo $x_p(t)$ e X_k

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\ e^{j2\pi k f_0 t} \cdot f_0 \to x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{j2\pi f t}\, df}_{\text{integrale di Fourier}}$$

Le armoniche si *infittiscono talmente tanto* da non essere più distinte ma **continue**.

$$X(kf_0) = T_0\ X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\ e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \to \underbrace{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{j2\pi f t}\, dt}_{\text{trasformata continua di Fourier}}$$

$X(f)$ è una **funzione complessa della variabile continua** f, quindi è di spettro continuo.

- Nota: **differenze tra segnali continui periodici e aperiodici**:
  - un segnale *periodico* è rappresentato da componenti sinusoidali a frequenze in relazione **armonica** (multipli di f_0, frequenza *fondamentale* e ad ampiezza finita).
  - un segnale *aperiodico* è rappresentato con componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima* $|X(f)|\, df$ e frequenza f variabile con continuità su $\mathbb{R}$; è un segnale periodico di periodo illimitato con f_0 infinitesimo. Le armoniche discrete *degenerano* nell'insieme continuo.

10. Criteri di esistenza per la trasformata continua di Fourier (TCF)
    1. $X(f)$ esiste se il segnale $x(t)$ ha energia finita (condizione "sufficiente")!
    2. Criteri di Dirichlet:
       1. la funzione deve essere assolutamente sommabile: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$
       2. se in qualunque intervallo finito $t_1 < t < t_2$ è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie
       3. se in qualunque intervallo finito $t_1 < t < t_2$ la funzione ha un numero finito di massimi e minimi.

    Allora $x(t)$ è rappresentabile come TCF e

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{j2\pi f T}\, df = \begin{cases} x(t) & \text{se continua} \\ \frac{x(t_0^+) - x(t_0^-)}{2} & \text{se discontinua} \end{cases}$$

11. Simmetria Hermitiana della trasformata continua di Fourier

    Possiamo rappresentare $X(f)$ in forma rettangolare:

$$X(f) = Re(f) + Im(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\, dt$$

$$\underbrace{Re(f) = Re(-f)}_{\text{pari}} \text{ e } \underbrace{Im(f) = -Im(-f)}_{\text{dispari}} \Longrightarrow X(f) = X^*(-f) \text{ simmetria hermitiana}$$

    infatti $X(f) = Re(f) + jIm(f) = Re(-f) + jIm(f) = X^*(-f)$

    - lo spettro di ampiezza è quindi *pari* a quello di fase dispari.

12. Parità e disparità:

    - se un segnale è *reale e pari*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\, df = \begin{cases} Re(f) = 2\int_0^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\, dt \\ Im(f) = 0 \end{cases}$$

      $\rightarrow X(f) = Re(f) \rightarrow X(f) = X(-f)$ è reale e pari
    - se un segnale è *dispari e reale*

$$X(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\, dt = \begin{cases} Re(f) = 0 \\ Im(f) = -2\int_0^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft) \end{cases}$$

      $\rightarrow X(f) = jIm(f) \rightarrow X(f) = -X(f)$ è immaginaria pura e dispari

Proprietà della trasformata continua

13. **Linearità**

    Dati due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con le loro trasformate continue di Fourier $X_1(f)$ e $X_2(f)$, allora se:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

    con a, b costanti, $X_1(f) = \text{TCF}[x_1(t)]$ e $X_2(f) = \text{TCF}[x_2(t)]$

    - Dimostrazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ax_1(t) + bx_2(t))\ e^{-j2\pi ft}\, dt$$

      ma sappiamo che l'integrale è *lineare*, quindi

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\ e^{-j2\pi ft}\, dt + b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\ e^{-j2\pi ft}\, dt = aX_1(f) + bX_2(f)$$

14. **Dualità**

    se $x(t) \Longleftrightarrow X(f)$, allora $X(t) \Longleftrightarrow x(-f)$:

    Se la trasformata continua di Fourier passa ad essere un *segnale nel tempo*, allora $x(-f)$ è la sua trasformata di Fourier. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra la funzione e la sua trasformata.

    - Esempio:

$$\text{rect}(\frac{t}{T}) \Longleftrightarrow \text{sinc}(fT)$$

      Ma se nel tempo ho un segnale $\text{sinc}(bT)$ qual è la sua trasformata?

      $T\,\text{sinc}(Tt) \Longleftrightarrow \text{rect}(-\frac{f}{T})$ da cui $\text{sinc}(Bt) \Longleftrightarrow \frac{1}{B}\,\text{rect}(\frac{t}{B})$, dove B indica la banda.
    - Dimostrazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}\, df \rightarrow x(f)\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\ e^{j2\pi ft}\, dt$$

      con uno scambio di variabili t con f. Quindi:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} < S - Del > Xx(t)\ e^{-j2\pi fT}\, dt$$

      Da qui deriviamo che $x(-f)$ è la trasformata di $X(t)$

15. **Ritardo**

Sia $X(f) = \text{TCF}[x(t)]$: la trasformata di Fourier di $x(t)$ ritardato nel tempo di una quantità t_0 è pari a:

$$x(t-t_0) \Longleftrightarrow X(f)\ e^{-j2\pi f t_0}$$

- Dimostrazione:

Applichiamo a $x(t-t_0)$ la definizione di TCF

$$x(t-t_0) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\ e^{-j2\pi f t}\, dt = \Big| \alpha = t - t_0 \rightarrow t = \alpha + t_0$$

$$x(t-t_0) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi(\alpha+t_0)f}\, d\alpha = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\ e^{-j2\pi f \alpha} = e^{-j2\pi f t_0}\ X(f)$$

- Esempio:

$$A\,\text{rect}(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}) \Longleftrightarrow AT\,\text{sinc}(fT) e^{-j\cancel{2}\pi f \frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}}$$

Se $y(t) = x(t-t_0) \Rightarrow Y(f) = X(f)\ e^{-j2pift_0} \Rightarrow$ Un ritardo modifica lo spettro di **fase** ma *non cambia* il suo spettro di ampiezza, in quanto quest'ultimo di indica quali componenti sinusoidali sono necessarie per comporre la forma del segnale, mentre lo spettro di fase mi dice con quale *angolo* iniziale devono "partire" le sinusoidi.

Quindi se il segnale si sposta nel tempo, allora le sinusoidi hanno angoli iniziali diversi, ma sono le stesse.

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |e^{-j2\pi f t_0}| = |X(f)|$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f)\ e^{-j2pift_0} = \angle X(f) + \angle e^{-j2pift_0} = \underbrace{\angle X(f) - \overbrace{2\pi f t_0}^{=0}}_{\underline{\text{NON}} \text{ è una traslazione!}}$$

16. **Cambiamento di scala**

Si consideri $y(t) = x(\alpha t)$, effettuando un *cambiamento della scala temporale*:

$$\begin{aligned} |\alpha| > 1 \ &\rightarrow\ \text{compressione della scala dei tempi} \rightarrow\ \text{l'evoluzione è "accelerata"} \\ |\alpha| < 1 \ &\rightarrow\ \text{dilatazione della scala dei tempi} \rightarrow\ \text{l'evoluzione è "rallentata"} \\ \alpha < 0 \ &\rightarrow\ \text{inversione della scala dei tempi} \end{aligned}$$

Inoltre vale:

$$x(\alpha t) \Longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} x(\frac{f}{\alpha})$$

- Dimostrazione:

$$\cdot\ \ \underline{\alpha > 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t}\, dt,\ \text{ponendo } z = \alpha t \rightarrow t = \frac{z}{\alpha},\ dz = \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha}\, dz = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}\, dz = \frac{1}{\alpha} X(\frac{f}{\alpha})$$

$$\cdot\ \ \underline{\alpha < 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}}{\alpha}\, dz = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(z) e^{-j2\pi f \frac{z}{\alpha}}\, dz = -\frac{1}{\alpha} X(\frac{f}{\alpha})$$

È da notare come l'inversione dell'integrale nel secondo caso l'abbiamo quando $t \rightarrow -\infty,\ z \rightarrow +\infty$. Inoltre abbiamo sostituito $z = -\alpha t$.

Quindi una *dilatazione* nel tempo corrisponde ad una *compressione* in frequenza, e **viceversa**

17. **Modulazione**

Dato un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(f)$ allora

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \iff \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

dove $X(f-f_0)$ e $X(f+f_0)$ sono rispettivamente la replica centrata in f_0 e la replica centrata in $-f_0$.

- Dimostrazione:

$$\text{TCF}[x(t)\cos(2\pi f_0 t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi ft}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)[e^{-j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}]e^{-j2\pi ft}\,dt =$$
$$\frac{1}{2}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f+f_0)t}\,dt\Big] =$$
$$\frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

Corollario: $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \iff X(f-f_0)$

18. **Derivazione**

Se $x(t) \to X(f)$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \iff j2\pi f \cdot X(f) = Y(f)$$

Una derivata nel tempo è una *moltiplicazione* in frequenza.

- Dimostrazione:

Deriviamo entrambi i lati di $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[X(f)e^{j2\pi ft}\Big]\,df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j2\pi ft}\,df =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)(2\pi f)e^{j2\pi ft}\,df \Longrightarrow [\text{TCF}]\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = j2\pi f X(f)$$

Il teorema della derivazione *modifica gli spettri*

$$|Y(f)| = 2\pi f|X(f)| \underline{/Y(f)} = \underline{/X(f)} + \text{sgn}(f)\frac{\pi}{2}$$

Aumenta proporzionalmente l'ampiezza, esaltando le altre frequenze, e sfasando di $\pm\frac{\pi}{2}$

19. **Integrazione** (deriva dal teorema di derivazione)

    Dato un segnale $x(t) \iff X(f)$ e un segnale $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$, allora vale

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \iff \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

    - Dimostrazione:

    Segue dal teorema di derivazione e richiede che $X(0) = 0$, al fine di evitare che per $f \to 0$, il rapporto tenda ad infinito.

$$X(0) = 0 \longleftrightarrow X(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\; e^{0}\, dt}_{\text{sottende area } \textbf{nulla}} \longleftrightarrow y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = X(0) \to 0$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \Rightarrow x(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \Rightarrow X(f) = j2\pi f \cdot Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

    Anche l'integrale nel tempo si trasforma in un'operazione algebrica in frequenza: in questo caso però vengono esaltate le componenti a **bassa** frequenza nello spettro del segnale, mentre le alte vengono attenuate; la fase varia sempre di $\pm\frac{\pi}{2}$

$$|Y(f)| = \frac{|X(f)|}{2\pi f} \angle Y(f) = \angle X(f) + \operatorname{sgn}(f)\frac{\pi}{2}$$

    Da questo teorema deriva la relazione $A\mathrm{tri}(\frac{t}{T}) \iff AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$; $A\,\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) \iff AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

20. **Prodotto**: è il duale della convoluzione

    Partendo da due segnali $x(t)$ e $y(t)$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \iff X(f) \otimes Y(f)$$

    - Dimostrazione:

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\; y(t)\; e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \Big[\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{-j2\pi\nu t}\, d\nu\Big] y(t)\; e^{-j2\pi f t}\, dt =$$
$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)\Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t)\; e^{-j2\pi(f-\nu)t}\, dt\Big]\, d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)Y(t-\nu)\, d\nu =$$
$$X(f) \otimes Y(f)$$

    Quindi:

$$\underset{PRODOTTO}{x(t)\; y(t)} \iff \underset{CONVOLUZIONE}{X(f) \otimes Y(f)} \;\to\; \text{la convoluzione è } \textit{commutativa}$$

21. ***Convoluzione***

    Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sappiamo che:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \iff X(f)\; Y(f)$$

    - Dimostrazione:

      Partiamo sempre dalla definizione di TCF:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)y(t-\alpha)\, d\alpha \iff Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\; e^{-j2\pi f t}\, dt =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[x(\alpha)y(t-\alpha)\, d\alpha\Big] e^{-j2\pi f(t-\alpha+\alpha)}\, dt =$$
$$\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha) \underbrace{\Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t-\alpha)e^{-j2\pi f(t-\alpha)}\, dt\Big]}_{Y(f)} e^{-j2\pi f\alpha}\, d\alpha =$$
$$\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha)\; Y(f)\; e^{-j2\pi f\alpha}\, d\alpha = X(f)\; Y(f)$$

    - Nota bene:
      - la convoluzione ha proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Trasformata di Fourier generalizzata

22. Teorema d'integrazione **completo**:

    Vogliamo rimuovere il vincolo (o ipotesi) $X(0)$ che è alla base dell'applicabilità del teorema d'integrazione "incompleto": ciò viene realizzato utilizzando la delta di Dirac.

    Il teorema completo afferma che:

    $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \Longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \cdot X(0)$$

    Il nuovo termine rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale!.

    - Dimostrazione:

      Essendo:

      $$x(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\ u(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$

      abbiamo che per la convoluzione $x(t) \otimes u(t) \Longleftrightarrow X(f)U(f)$:

      $$X(f)\ U(f) = X(f)\Big[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}\Big] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

      Questo perché $\mathrm{TCF}(u(t)) = U(f) = \frac{1}{j2\pi f}$; l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla: rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale, ed è un termine correttivo che rappresenta la funzione impulsiva.

23. Teorema della modulazione, alternativa:

    - Dimostrazione:

      per il teorema del prodotto,

      $$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow X(f) \otimes \Big[\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}\Big] =$$

      $$X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)}{2} + X(f) \otimes \frac{\delta(f+f_0)}{2}$$

      $$\to X(f) \otimes \delta(f-f_0) = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha)\delta(f-f_0-\alpha)\, d\alpha = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha)\delta(\alpha) - (f-f_0)\, d\alpha = X(f-f_0)$$

      $$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$

Periodicizzazione

24. Prima formula della somma di Poisson:

    Come rendere un segnale *aperiodico* $x(t)$ **periodico** di periodo T_0. Partiamo da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} = x(t-nT_0)$ relazione nel tempo tra periodico e aperiodico

    $$\to Y_k = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

    $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \qquad \text{sostituiamo} \begin{cases} \alpha = t - t_0 \\ t = \alpha - t_0 \\ d\alpha = dt \end{cases}$$

    $$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha)\ e^{-j2\pi k f_0(\alpha + nT_0)}\, d\alpha =$$

    $$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k \cancel{f_0} n \cancel{T_0}}}_{\text{multiplo di } 2\pi \to e^0}\ d\alpha =$$

    $$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha)\ e^{-j2\pi k f_0 \alpha}\, d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\ e^{-j2\pi k f_0 \alpha}\, d\alpha = \underbrace{\frac{1}{T_0} X(k f_0)}_{\text{campionamento in frequenza}}$$

Si ottiene una relazione detta **campionamento in frequenza**. I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico $y(t)$ sono, a meno del fattore $\frac{1}{T_0}$, i campioni della TCF del *segnale base* $x(t)$ presi in corrispondenza delle frequenze armoniche kf_0

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(\frac{k}{T_0})\ e^{+j2\pi ktf_0}$$

25. Seconda formula della somma di Poisson

    Applichiamo alla prima formula di Poisson il teorema della dualità:

$$X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$
$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(\frac{k}{T_0})\ e^{+\frac{j2\pi kt}{T_0}}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} (x(-\frac{k}{T_0}))\ e^{+\frac{j2\pi kt}{T_0}}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(\frac{k}{T_0})\ e^{-\frac{j2\pi kt}{T_0}} \text{ cambio di segno all'indice k}$$
$$\rightarrow T = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t-\frac{n}{T}) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(kT)\ e^{-j2\pi ktT}$$

Adesso, dal punto di vista puramente formale, cambiano nome da t in f, otteniamo un'espressione, otteniamo un'espressione *duale* rispetto alla prima formula di Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi fT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-\frac{k}{T})$$

Sistemi

26. Teorema di Parseval:

Dato un segnale $x(t)$ e la sua energia $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < +\infty$ (energia finita), possiamo esprimere l'energia E_x *anche in frequenza*:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ x^*\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Big[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft}\, df \Big]\, dt$$
$$\int_{f=-\infty}^{\infty} X^\star(f) \Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt \Big]\, df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

E_x è l'energia totale, deriva da $p_x = |x(t)|^2$ potenza istantanea integrata o da $|X(f)|^2$ detta **densità spettrale** $E_x(f)$ integrata.

27. Teorema di Wiener-Khinchin

Siamo la densità spettrale di potenza:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

e la funzione *densità spettrale di potenza*

$$S_x(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}(f)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{|x(t)|^2}{T}$$

con $E_{x_T}(f)$ densità di energia del segnale *troncato* nell'intervallo $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

Definiamo **funzione di autocorrelazione** $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)\,dt$ ossia il segnale moltiplicato per una sua replica *ritardata*. Indica "quanto il segnale somiglia alla sua replica ritardata": più $x(t)$ è compatta meno somiglierà e meno varrà $R_x(\tau)$

Il teorema afferma che la densità spettrale di energia di un segnale coincide con la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso:

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi ft}\,d\tau \underbrace{=}_{R_x(\tau)\text{ è pari)}} 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau)R_x(\tau)\,d\tau$$

- Dimostrazione:

Partiamo dalla definizione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(\alpha-t)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(-(t-\alpha))\,d\alpha = x(\tau)\otimes x(-\tau) =$$
$$R_x(\tau) = x(\tau)\otimes x(-\tau) \Longleftrightarrow X(f)\ X(-f) = X(f)\ X^*(-f) = |X(f)|^2 = E_x(f)$$