QUESITI

Processo WSS

1. Enunciare le proprietà che devono essere soddisfatte affinché un processo aleatorio sia stazionario in senso stretto [**]
2. Enunciare le proprietà che devono essere soddisfatte affinché un processo aleatorio sia stazionario in senso lato
3. Elencare le proprietà che caratterizzano un processo aleatorio stazionario in senso lato (WSS).
4. Cos'è il rumore bianco?[**]
5. Se $x(t)$ è un processo WSS in ingresso ad un sistema SLS con risposta impulsiva $h(t)$, il segnale $y(t)$ ottenuto in uscita è a sua volta un processo WSS? [**]

Trasformata di Fourier per una Sequenza

6. Che significato ha l'espansione della sequenza $x[n]$? [**]
7. Qual è la condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata per sequenze? [**]
8. Cosa s'intende per denormalizzazione e a cosa serve?
9. Enunciare e spiegare il teorema dell'Incremento della TDF per sequenze reali
10. Enunciare e spiegare la condizione di convergenza della Trasformata di Fourier per sequenze (vedi n°7)
11. Sia $x[n] = cos(2\pi 0.1n),\ n \in \mathbb{Z}$. Quale è la sua trasformata di Fourier per sequenze? Giustificare la risposta.
12. Se $x[n]$ ha trasformata di Fourier per sequenze $\overline{X}(F)$, quale sequenza $y[n]$ ha trasformata di Fourier $\overline{Y}(F) = \overline{X}(F - F_0)$? Giustificare la risposta.
13. Calcolare la trasformata di Fourier della sequenza $x[n]$ formata dall'impulso rettangolare discreto, cioè $x[n] = u[n] - u[n - N]$

Campionamento e interpolazione

14. Definizione teorema del campionamento e condizione di Nyquist [**]
15. Cosa si intende per *aliasing*? Come si evita e perché va evitato. [**]
16. Il segnale $x(t) = e^{-t}u(t)$ può essere campionato con assoluta assenza di aliasing? Giustificare la risposta.
17. Data una serie di campioni $x(nT)$ ottenuti campionando il segnale analogico di partenza $x(t)$, scrivere la relazione che lega il segnale ricostruito $\hat{x}(t)$ ai campioni $x(nT)$, nel caso di interpolazione lineare.
18. Dato il segnale campionato $x_c(t)$ ottenuto campionando il segnale analogico di partenza $x(t)$, scrivere la relazione che lega lo spettro di $x_c(t)$ allo spettro di $x(t)$.
19. Differenza tra interpolazione a mantenimento, cardinale (e/o lineare) **
20. Quali sono gli svantaggi e i vantaggi dell'interpolazione a mantenimento? [**]
21. Scrivere l'espressione del segnale interpolato in funzione dei valori della sequenza di campioni nel caso di Interpolazione a mantenimento

Trasformata di Fourier discreta

22. Che differenza troviamo tra una trasformata discreta ed una per sequenze [**]
23. Da quanti campioni non nulli è composta la DFT a 20 campioni del segnale di durata finita $x[n] = cos^2(\frac{2\pi}{10}n)$, $n = 0, 1, ..., 19$? Giustificare la risposta.
24. Scrivere i Teoremi del prodotto e della convoluzione della DFT
25. Enunciare e spiegare la Proprietà di Simmetria della TDF per sequenze reali
26. Scrivere la proprietà di traslazione in frequenza della DFT
27. Enunciare la proprietà di traslazione circolare della Trasformata Discreta di Fourier
28. Enunciare e spiegare la Proprietà di Simmetria della Trasformata Discreta di Fourier per sequenze reali
29. Sia data una sequenza finita $x[n]$, di lunghezza $N = 10$ campioni. Indicando con $X_{10}[k]$ e $X_{20}[k]$ le DFT di $x[n]$ calcolate, rispettivamente, con periodicità $L = 10$ e $L = 20$, quali campioni di $X_{20}[k]$ coincidono con campioni di $X_{10}[k]$? Giustificare la risposta.

Sistemi LTI discreti

30. Scrivere la risposta impulsiva di un sistema discreto che implementa una finestra mobile
31. Scrivere la risposta impulsiva di un sistema discreto che implementa un accumulatore o integratore numerico
32. Descrivere un filtro discreto a media mobile
33. Descrivere il filtro detto accumulatore o integratore numerico
34. Descrivere il filtro derivatore numerico o operatore

35. Giustificare la seguente affermazione: “Un sistema LTI è stabile se la sua funzione di trasferimento ha una regione di convergenza che include la circonferenza unitaria del piano z”. *.
36. Si supponga di voler usare un algoritmo di convoluzione veloce per eseguire il filtraggio di un segnale con un sistema LTI di tipo FIR, avente una risposta impulsiva lunga $N = 200$ campioni. Misurando la complessità in termini di moltiplicazioni reali per campione di uscita, è più conveniente usare (per il calcolo della convoluzione circolare) una FFT con periodicità $L = 2048$ oppure una con periodicità $L = 512$? Giustificare la risposta.
37. In uno schema di convoluzione veloce, quante moltiplicazioni reali per campione di uscita devono essere effettuate? Giustificare la risposta
38. Spiegare la differenza tra sistemi lineari e stazionari a tempo discreto di tipo FIR e di tipo IIR.

Quantizzazione

39. Spiegare la differenza tra un quantizzatore uniforme (a passo Δ e a B bit) di tipo midtread e uno di tipo midrise
40. Dato un quantizzatore uniforme, scrivere le relazioni che permettono di trovare il valore quantizzato $\widehat{x}(nT)$ a partire dal campione $x(nT)$ nel caso dell’operazione di arrotondamento e di troncamento
41. Enunciare le ipotesi che usualmente vengono assunte per il rumore di quantizzazione.
42. Giustificare la seguente affermazione: “Quantizzando un segnale sinusoidale di ampiezza unitaria con un convertitore analogico-digitale avente B bit di quantizzazione e dinamica $[-1, 1]$ si ottiene un rapporto segnale-rumore 0 (espresso in dB) dato da $SNR \approx 6.02B + 1.76$”.

Sistemi di comunicazione digitale

43. Spiegare il ruolo svolto dal codificatore di canale in un sistema di comunicazione digitale
44. Spiegare il ruolo svolto da un codificatore di sorgente nella catena di trasmissione digitale.
45. Spiegare il ruolo svolto da un modulatore digitale nella catena di trasmissione digitale.
46. Come ridurre gli effetti del rumore?
47. Descrivere gli schemi di base di modulazione digitale utilizzati in un sistema di comunicazione
48. Spiegare quali sono le tecniche multiplex utilizzate in un sistema di trasmissione digitale

DIMOSTRAZIONI

1. Enunciare e dimostrare il Teorema del prodotto della TDF di una sequenza
2. Mostrare come la TDF di una sequenza ottenuta per campionamento si ricava come periodicizzazione della TDF del segnale di partenza [**]
3. Enunciare e dimostrare la relazione che esiste tra la trasformata di Fourier di una sequenza $x[n]$ ottenuta per campionamento di un segnale continuo $x(t)$, e la Trasformata di Fourier di $x(t)$ stesso
4. Dimostrare che dalla relazione di antitrasformata discreta di Fourier discende la relazione di trasformata discreta di Fourier
5. Enunciare e dimostrare il Teorema della convoluzione della Trasformata discreta di Fourier
6. Enunciare e dimostrare il teorema di Parseval nella sua forma valida per sequenze aperiodiche e relative trasformate di Fourier per sequenze.
7. Dimostrare che, data una sequenza $x[n]$ di N campioni, definendo la sequenza DFT mediante la formula

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

allora la sequenza $x[n]$ è ricavabile da

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[K] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

8. Enunciare e dimostrare la relazione tra le trasformate di Fourier della sequenza somma $y[n]$ di una sequenza data $x[n]$, e la Trasformata di $x[n]$ stessa [***]
9. Enunciare e dimostrare la relazione che esiste tra la trasformata di Fourier di una sequenza $x[n]$ ottenuta per campionamento di un segnale continuo $x(t)$, e la Trasformata di Fourier di $x(t)$ stesso

10. Calcolare i parametri della densità di probabilità dell'ampiezza dell'errore di quantizzazione nei casi di arrotondamento e di troncamento

NOTA BENE: con [**] si intendono domande aggiunte da me! con [***] si intende una domanda spostata dai quesiti alle dimostrazioni

RISPOSTE QUESITI

1. Un processo aleatorio x è detto stazionario se la sua *funzione di autocorrelazione* $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1), X(t_2)]$ dipende solo dalla distanza (o *lag*) tra i campioni e **non** dai singoli istanti t_1 e t_2. - Un processo aleatorio è stazionario in senso stretto (SSS) se tutte le sue proprietà statistiche rimangono invariate nel tempo. Ovvero se la densità di probabilità rispetto ai singoli campioni, sia quella congiunta rispetto a più campioni non sono alterate da una transazione solidale nel tempo applicata agli indici dei campioni. Va verificato per tutti gli ordini i con $i = 0, \dots, \infty$

$$f_x(x,t) = f_x(x, t + \Delta t)$$

$$f_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2, t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2)...$$

2. Un processo aleatorio è stazionario in senso lato (WSS):
   - la sua media e la sua varianza rimangono costanti nel tempo $\rightarrow E[x(t)] = m_x(t) = m_x$
   - la sua funzione di autocorrelazione dipende solo dallo scarto temporale e non dal tempo assoluto (funzione solo dello scarto τ). $\rightarrow R_{xx}(t, t+\tau) = R_{xx}(\tau)$

3. Le proprietà che caratterizzano un processo aleatorio WSS includono:
   - $R_x(\tau) = R_x(-\tau) \rightarrow$ la funzione di autocorrelazione è una funzione pari
   - $R_x(0) = E[X^2(t)] = P_x \geq 0 \rightarrow$ potenza costante
   - $|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \rightarrow$ la funzione di autocorrelazione ha il proprio massimo in $\tau = 0$

4. Il rumore bianco è un tipo di segnale casuale che ha una potenza spettrale costante in tutto lo spettro di frequenze. Questo significa che tutte le frequenze sono presenti con la stessa intensità. Inoltre il rumore/processo bianco $w(t)$ ha campioni incorrelati
   - $R_{ww}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau),\ \tau \neq 0$
   - $E[w(t)] = 0$
   - $S_{ww}(f) = \mathcal{F}\{\frac{N_0}{2}\} = \frac{N_0}{2} \rightarrow$ Potenza **infinita** $\rightarrow$ densità spettrale di potenza
   - Nota: si chiama bianco in quanto possedendo nello spettro *tutte* componenti non nulle, si trova una similitudine con il colore bianco nello spettro dei colori

5. Sapendo che $y(t) = x(t) \otimes h(t)$

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= E[x(t) \otimes h(t)] = E[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)E[x(t-\alpha)]d\alpha = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)d\alpha = \\
&= m_x \cdot H(0) \\
R_y(t_1, t_2) &= E[y(t_1), y(t_2)] \rightarrow R_y(t, t-\tau) = E[y(t)y(t-\tau)] \rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes (\tau)h(\tau)h(-\tau) = \ S_y(\tau) \\
&= S_x(f) \cdot H(f) \cdot H(-f) = S_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(-f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2
\end{aligned}$$

   Quindi è nuovamente un processo WSS

Risposte tdf sequenze aperiodiche

6. Il segnale $x[n]$ viene espresso mediante la somma di molti termini $\overline{X}(f)$ i quali, al variare della frequenza f hanno un peso diverso (in ampiezza e in fase). A differenza di un segnale analogico, per esprimere una sequenza in ambito frequenziale sono **sufficienti** le sole componenti con frequenze comprese tra $[\frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ (ciò è giustificato dalla periodicità della trasformata di Fourier per sequenze)

7. La condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata per sequenze è che la sequenza sia ***assolutamente sommabile***, ovvero la somma dei valori assoluti dei suoi elementi sia finita.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < +\infty \rightarrow |\overline{X}(f)| < +\infty$$

$$|\overline{X}(f)| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{-j2\pi nfT}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]\ e^{-j2\pi nfT}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$$

8. La denormalizzazione è necessaria quando la sequenza $x[n]$ deriva da un'operazione di campionamento: in questo caso la frequenza F_0 ($= \frac{F}{F_c}$ dove F è la frequenza e F_c è la frequenza di campionamento) non permette di stabilire un legame *immediato* con la frequenza espressa in Hz (e quindi **non** adimensionale) delle componenti nella trasformata del segnale analogico di partenza. Quindi se T = al periodo di campionamento e $f = \frac{F}{T} = F \cdot F_c \rightarrow F = fT$ in Hz.

9. Il teorema dell'Incremento della Trasformata di Fourier per sequenze per sequenze reali afferma che l'incremento di una sequenza nel dominio del tempo corrisponde a una modulazione nel dominio della frequenza.

10. La condizione di convergenza della Trasformata di Fourier per sequenze è che la sequenza sia assolutamente sommabile, ovvero la somma dei valori assoluti dei suoi elementi sia finita.

11. Dagli appunti del Prof. Argenti (lezione 02/05/22):

    $x[n] = \cos(2\pi 0.1n)$ è un segnale sinusoidale di durata infinita alla frequenza normalizzata $F_0 = 0,1 = \frac{1}{10}, |F_0| < \frac{1}{2}$. È una sequenza **non** assolutamente sommabile, ma riusciamo ad ottenere la sua TFS mediante segnali impulsivi (δ di Dirac):

$$\begin{aligned} x[n] = \cos(2\pi 0.1n) \longleftrightarrow \overline{X}(f) &= \frac{1}{2}\Big[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)\Big] = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\delta\Big(F - \frac{1}{10}\Big) + \delta\Big(F + \frac{1}{10}\Big)\Big] \end{aligned}$$

    Si può dimostrare utilizzando la trasformata *inversa*:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overline{X}(f)\ e^{j2\pi nF}\, df &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\Big[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)\Big]\ e^{j2\pi nF}\ \ df = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\Big[\delta\Big(F - \frac{1}{10}\Big) + \delta\Big(F + \frac{1}{10}\Big)\Big]\ e^{j2\pi nF}\ \ df = \\ &= \frac{1}{2}(e^{j2\pi \frac{1}{10}} + e^{-j2\pi \frac{1}{10}}) = \\ &= \cos(\frac{2\pi n}{10}) = \cos(2\pi 0.1n) \end{aligned}$$

    Nel caso generale in cui sia richiesta la TFS di un coseno $\cos(2\pi n f_0 T)$ è necessario utilizzare:

$$\overline{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\Big(f - \frac{k}{T}\Big)$$

    Dalla trasformata della sequenza costante, dal teorema del campionamento e dal teorema della modulazione:

$$e^{j2\pi n f_0 T} \Leftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\Big(f - \frac{k}{T}\Big)$$
$$\overline{X}(f) = \frac{1}{2T}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Big(f - f_0 - \frac{k}{T}\Big) + \sum_{k=-infty}^{\infty} \delta\Big(f + f_0 - \frac{k}{T}\Big)\Big]$$

12. Se $x[n]$ ha trasformata di Fourier per sequenze $X(F)$, allora la sequenza $y[n]$ con TDF $Y(F) = X(F - F_0)$ è data da $y[n] = x[n]e^{j2\pi F_0 n}$. Questo è dovuto alla proprietà di traslazione in frequenza della trasformata di Fourier, che afferma che la traslazione di una funzione nel dominio della frequenza corrisponde a una modulazione esponenziale nel dominio del tempo.

13. La trasformata di Fourier della sequenza $x[n] = u[n] - u[n - N]$, dove $u[n]$ è la funzione gradino unitario, è data da:

$$\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u[n] - u[n - N])e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j2\pi fT})^n =$$

    si applica la serie geometrica, con $q = e^{-j2\alpha}$

$$= \frac{1 - e^{-j2\pi N\alpha}}{1 - e^{-j2\pi\alpha}} = \frac{e^{j\alpha N}}{e^{j\alpha}} \cdot \frac{e^{j\alpha N} - e^{-j\alpha N}}{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}} = e^{j\alpha(N-1)} \cdot \frac{sen(\alpha N)}{sen(\alpha)} = e^{-j\pi(N-1)fT} \cdot \frac{sen(N\pi fT)}{sen(\pi fT)}$$

Risposte campionamento e interpolazione

14. "Un segnale il cui spettro è **limitato** nella banda B può essere ricostruito esattamente dai propri campioni, purché la frequenza di campionamento non sia inferiore a $2B$". La condizione di Nyquist: "Una volta fissata B la frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T} \geq 2B, \rightarrow T \leq \frac{1}{2B}$

15. L'aliasing è un effetto indesiderato che si verifica quando *non viene rispettata* la frequenza di Nyquist ($f_c < 2B$). Può essere evitato campionando il segnale a una frequenza almeno doppia della banda. L'aliasing va evitato perché introduce distorsioni nel segnale ricostruito dal momento che le repliche, a causa della loro sovrapposizione si sommano, rendendo impossibile una ricostruzione **fedele** del segnale originale.

16. Il segnale $x(t) = e^{-t}u(t)$ può essere campionato senza aliasing solo se la frequenza di campionamento è infinita. Questo perché il segnale ha componenti di frequenza che si estendono all'infinito, quindi non esiste una frequenza di Nyquist finita che possa essere utilizzata per campionare il segnale senza aliasing.

17. $x(nT) = x[n]$ ottenuti da: $\hat{x}(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot tri(\frac{t-nT}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](1-\frac{|t|}{T})rect(\frac{t}{2T})$

18. $\overline{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-\frac{k}{T})$

19.
    - L'interpolazione a mantenimento, o interpolazione a gradino, è un metodo di interpolazione che mantiene l'n-esimo valore della sequenza $x[n]$ a partire dall'istante nT fino a $nT+1$. Successivamente sarà mantenuto $x[n+1]$ e così via
      $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot p(t-nT)$, con $p(t) = rect(\frac{t-\frac{T}{2}}{T})$.
    - L'interpolazione cardinale, o sinc, utilizza come impulso $p(t)$ una funzione sinc per interpolare tra i campioni: $\rightarrow p(t) = sinc(\frac{t}{T}) \rightarrow \hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot sinc(\frac{t-nT}{T})$. Rispetto alla interpolazione a mantenimento introduce meno discontinuità, ma nella realtà non è applicabile, dal momento che sono necessari un numero infinito di termini, dal fatto che non è **causale** e a causa della impossibilità di ricostruire un segnale rect in frequenza;
    - L'interpolazione lineare utilizza un'impulso triangolare, in modo tale che la risultante sia una spezzata che unisce i vertici dei triangoli: $p(t) = tri(\frac{t}{T}) \rightarrow \hat{x}(t) = \sum_n x[n]tri(\frac{t-nT}{T})$
        - L'interpolazione a mantenimento è la più semplice, ma può introdurre distorsioni significative. L'interpolazione cardinale può fornire risultati più accurati, ma è computazionalmente più intensiva.

20. L'interpolazione a mantenimento ha il vantaggio di essere semplice da implementare e di essere computazionalmente efficiente. Tuttavia, il segnale interpolato **non è limitato in banda**: in questo modo sono introdotte delle componenti frequenziali non presenti nel segnale analogico $x(t)$. Derivano dalla presenza di repliche dello spettro del segnale a cavallo dei multipli delle frequenze di campionamento (sono dette *immagini*). Inoltre anche all'interno della cosiddetta banda "utile" (intervallo base $f \in [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$) il segnale $x(t)$ viene distorto in ampiezza (i due spettri sono legati dalla seguente relazione: $\hat{X}(f) = \frac{P(f)X(f)}{T} = X(f)sinc(fT)e^{-j\pi fT}$). Bisogna notare come sia possibile ridurre la presenza di immagini utilizzando un filtro "*anti-immagine*" all'uscita dell'interpolatore: corrisponde ad un filtro passa-basso di banda B, che elimina le immagini dallo spettro del segnale interpolato.

21. $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot p(t-nT)$, con $p(t) = rect(\frac{t-\frac{T}{2}}{T})$

Risposte TDF discreta

22. La differenza tra una trasformata discreta e una per sequenze risiede nel fatto che la trasformata discreta è definita solo per un numero finito di punti, mentre la trasformata per sequenze può essere definita per sequenze infinite. Inoltre, la trasformata discreta assume che il segnale sia periodico, mentre la trasformata per sequenze non fa questa assunzione (?).

23.

$$x[n] = \cos^2(\frac{2\pi n}{10}),\ n = 0, \cdots, 19$$
$$x[n] = \frac{1}{2}[1+\cos(2\frac{2\pi n}{10})] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\frac{j2\pi 4n}{20}} + \frac{1}{4}e^{\frac{-j2\pi 4n}{20}}$$
$$x[k] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{19} e^{\frac{-j2\pi kn}{20}} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{19} e^{\frac{-j2\pi(k-4)n}{20}} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{19} e^{\frac{-j2\pi(k+4)n}{20}} = x_1[k] + x_2[k] + x_3[k]$$

$$x_1[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 & \text{per } m = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad x_2[k] = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 & \text{per } m = 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$x_3[k] = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 & \text{per } m = 16 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad x[k] = \begin{cases} 10 & \text{per } m = 0 \\ 5 & \text{per } m = 4, 16 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

24. Il Teorema del prodotto per la DFT afferma che la DFT del prodotto di due sequenze è uguale alla convoluzione circolare delle DFT delle due sequenze. Il Teorema della convoluzione per la DFT afferma che la DFT della convoluzione di due sequenze è uguale al prodotto delle DFT delle due sequenze.

25. La Proprietà di Simmetria della Trasformata di Fourier per sequenze reali afferma che lo spettro di una sequenza reale è simmetrico rispetto all'origine. Questo significa che la parte positiva dello spettro è l'immagine speculare della parte negativa.

26. La proprietà di traslazione in frequenza della DFT afferma che la DFT di una sequenza moltiplicata per un'onda esponenziale complessa è uguale alla DFT della sequenza originale spostata in frequenza.

27. La proprietà di traslazione circolare della Trasformata Discreta di Fourier afferma che la DFT di una sequenza traslata circolarmente è uguale alla DFT della sequenza originale moltiplicata per un'onda esponenziale complessa.

28. Per una sequenza reale $x[n]$ abbiamo:

$$\text{DFT}_{N_0}\left\{x[n]\right\} = \text{DFT}_{N_0}\left\{x^*[n]\right\} \to \overline{X}_k = \overline{X}^*_{-k} = \overline{X}^*_{N_0-k}$$

da cui derivano le proprietà di simmetria per il modulo e per la fase:

$$\left|\overline{X}_k\right| = \left|\overline{X}_{N_0-k}\right|$$
$$\angle\overline{X}_k = -\angle\overline{X}_{-k}$$

Tali relazioni implicano che il modulo della sequenza $X[k]$ è simmetrico rispetto al valore $k = \frac{N_0}{2}$, mentre la fase è antisimmetrica rispetto a tale valore.

- per sequenze di lunghezza **pari**, il centro di simmetria coincide con un campione della sequenza;
- per sequenze di lunghezza **dispari**, invece, il centro di simmetria coincide con un punto equidistante tra due campioni.

29. $x[n]$ sequenza di 10 campioni (per esempio posti ad 1)
$X_{10}[k] \to$ DFT con periodicità 10
$X_{20}[k] \to$ DFT con periodicità 20

$$x_{10}[n] = x[n], \quad x_{20}[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \dots, 9 \\ 0 & n = 10, \dots, 19 \end{cases}$$

$$X_{10}[k] = \sum_{n=0}^{9} x[n]$$

$$X_{20}[k] = \sum_{n=0}^{19} x[n] \cdot e^{\frac{-j2\pi nk}{20}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{9} x[n] e^{\frac{-j2\pi nk}{20}}$$

$$X_{20}[2k] = \sum_{n=0}^{9} x[n] e^{\frac{-2\pi n \cdot \cancel{2}k}{\cancel{20}10}} == \sum_{n=0}^{9} x[n] e^{\frac{-j2\pi nk}{10}} =$$

$$= X_{10}[K]$$

Quindi corrispondono i campioni **pari** delle sequenze!

Risposte sistemi

30. $h(n) = \frac{1}{N}(u[n] - u[n-N])$

31. Ha una risposta impulsiva uguale alla funzione gradino unitario, cioè $h(n) = u(n)$

32. Un filtro a media mobile prende in ingresso un numero N di campioni della sequenza d'ingresso, calcolandone la media aritmetica degli ultimi N valori, a partire dall'istante n^* verso tempi decrescenti, producendo un valore $y[n^*]$ in uscita. Il nome media mobile deriva dalla traslazione in avanti di un "passo", al fine di ottenere il valore $y[n^* + 1]$ (la media viene ricalcolata!)

33. Il filtro accumulatore numerico è un sistema che somma di tutti i campioni arrivati al suo ingresso fino all'istante n. Ha un risposta impulsiva uguale alla funzione gradino unitario, cioè $h(n) = u(n)$. Quindi:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ u[n-k] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \\ u[n-k] &= 1 \text{ sse } n \geq k \end{aligned}$$

Il sistema è *instabile*, ma l'uscita non è sempre illimitata: ad esempio esistono ingressi limitati (ad esempio segnali sinusoidali) per i quali l'uscita sarà comunque limitata.

34. Il filtro derivatore numerico o operatore differenza, e opera la differenza tra due campioni adiacenti. La sua risposta impulsiva è pari a:

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \text{ oppure } h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ h[n-k] = x[n] - x[n-1],\ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ h[n-k] = x[n+1] - x[n]$$

Il primo è causale, il secondo no!

35. Domanda sulla trasformata z, da non considerare

36. ~~In uno schema di convoluzione veloce, il numero di moltiplicazioni reali per campione di uscita dipende dalla lunghezza del segnale e dalla lunghezza della risposta impulsiva del sistema. In generale, la convoluzione veloce richiede meno moltiplicazioni rispetto alla convoluzione diretta, ma il numero esatto dipende dai dettagli dell'implementazione dell'algoritmo FFT utilizzato per calcolare la convoluzione(?).~~

37.

38. Un sistema SLS FIR (Finite Impulse Response) ha la sua risposta impulsiva costituita da un numero finito di campioni, mentre un sistema SLS è IIR (Infinite Impulse Response) se la sua risposta impulsiva è costituita da un numero infinito di campioni.

    Inoltre, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità in senso BIBO di un SLS è la assoluta sommabilità della sua risposta impulsiva:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[k] \right| < +\infty$$

    I sistemi di tipo IIR, invece, non sono sempre stabili: per essi, è necessario controllare la validità o meno della condizione:

    un SLS è causale se e solo se la sua risposta impulsiva è una sequenza causale:

$$h[n] = 0 \text{ se } n < 0, \text{ ovvero } h[n] = h[n] \cdot u[n]$$

39. Un quantizzatore uniforme è ottenuto imponendo una distanza costante tra le soglie e i livelli di quantizzazione (quindi il *passo* Δ è costante $\rightarrow x_{i+1} - x_i = \Delta;\ \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i = \Delta$). Per quanto riguarda la "scelta" dei livelli di quantizzazione nei quantizzatori uniformi si distinguono i:

    - Midtread: i livelli di quantizzazione si estendono su un intervallo approssimativamente *simmetrico*, dal momento che i livelli sono un numero *pari* ed è incluso lo 0

$$\rightarrow \{\hat{x}_i : i = 0, \_, 2^B - 1\} = \{-2^{B-1}\Delta, \cdots, -\Delta, 0, \Delta, \cdots, (2^{B-1} - 1)\Delta\}$$

- Midrise: in questo caso i livelli coprono un intervallo **esattamente simmetrico** rispetto all'origine, tuttavia il valore 0 **non** è compreso nell'insieme (il passo è Δ e parto da $\frac{\Delta}{2}$):

$$\rightarrow \{\hat{x}_i : i = 0, \_, 2^B - 1\} = \{-(2^{B-1} - \frac{1}{2})\Delta, \cdots, -\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}, \cdots, (2^{B-1} - \frac{1}{2})\Delta\}$$

40. In un quantizzatore uniforme, in base alla scelta della regola di associazione tra $x(nT) \leftrightarrow \hat{x}(nT)$ si può usare:

    - arrotondamento: dove ad $x(nT)$ viene associato il livello $\hat{x}_i$ più vicino. Inoltre le soglie di quantizzazione risultano essere posizionate nel *punto medio* tra i due livelli di quantizzazione. La relazione che permette di trovare il valore quantizzato $\hat{x}(nT)$ a partire dal campione $x(nT)$ è:

    $$\hat{x}(nT) = \{\hat{x}_i : i = arg\ min_k(|x(nT) = \hat{x}_k|\}$$

    L'errore è $0 \leq |e(nT)| \leq \frac{\Delta}{2}$

    - troncamento: ad $x(nT)$ viene associato il livello $\hat{x}_i$ più vicino tra tutti quelli minori o uguali a $x(nT)$. Le soglie di quantizzazione coincidono con i livelli di quantizzazione. La relazione che permette di trovare il valore quantizzato $\hat{x}(nT)$ a partire dal campione $x(nT)$:

    $$\hat{x}(nT) = \{\hat{x}_i : i = arg\ max_k(\hat{x}_k \text{ con } \hat{x}_k \leq x(nT))\}$$

    L'errore è $0 \leq |e(nT)| < \Delta$

41. Il rumore di quantizzazione $e(nT)$ è l'errore introdotto dal processo di quantizzazione, modellato come processo aleatorio *additivo*: $\hat{x}(nT) = x(nT) + e(nT)$. Le ipotesi usualmente assunte per il rumore di quantizzazione sono:

    - $e(nT)$ sia un processo stazionario in senso lato: quindi media, potenza e varianza *costanti* e non dipendono da n;
    - che la densità di probabilità di $e(nT)$ sia di tipo **uniforme**, permettendo di valutare tali costanti.
    - $\{e(nT)\}$ incorrelato con processo $\{x(nT)\}$
    - I campioni del processo $\{e(nT)\}$ sono **incorrelati** tra loro

42. Dal momento che l'escursione (pari a due volte l'ampiezza della sinusoide fratto la dinamica del quantizzatore $= \frac{1}{\Delta}$) è pari ad 1 (viene quindi occupata tutta la dinamica), la dinamica $D = 2$ e la potenza sarà $S = \frac{1}{2}$ allora $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{12} = \frac{4}{2^{2B}} = \frac{1}{3}2^{-2B} \rightarrow SNR_q = \frac{S}{\sigma_e^2} = \frac{3}{2}2^{2B} \rightarrow SNR = 6.02B + 1.76dB$

Risposte sistemi digitali

43. Il codificatore di canale in un sistema di comunicazione digitale introduce (in modo *controllato*) una **ridondanza** nella sequenza di informazioni binarie. In questo modo il ricevitore può utilizzare questa ridondanza per **attenuare e/o correggere** gli effetti negativi dovuti al rumore o alle interferenze incontrate nella trasmissione del segnale, riducendo quindi la probabilità d'errore dei bit di "informazione". In questo modo viene aumentata l'affidabilità e migliorata la fedeltà del segnale.
    Ci sono due strategie per impiegare i codici a controllo di errore: - rivelare gli errori, per poi richiedere una ritrasmissione - correggere gli errori, non richiedendo eventualmente una ritrasmissione Può essere implementata con una:

    - codici a blocchi (n/k): Il messaggio è diviso in blocchi di k simboli, a cui vengono associate parole di codice formate da $n = k + q$ simboli. Si introducono quindi q bit di ridondanza.
        - codice a ripetizione: consiste nel ripetere una cifra binaria per m volte ($m > 0$). Se viene riscontrato un errore vi è una decisione "a maggioranza" (se errori $< \frac{N}{2}$). Tuttavia vi è un numero elevato di bit da trasmettere.
        - codifica "non banale" (controllo di parità): vengono mappati k bit (alla volta) di una sequenza di n bit ($k < n$) andando a creare una **parola in codice**. Il suo funzionamento si basa su una combinazione di k bit di dati e $(n - k)$ bit di parità, che vengono calcolati in modo da rendere rilevabili e correggibili determinati tipi di errori. In questo caso vi è una ridondanza pari a $\frac{n}{k}$

44. Il codificatore di sorgente in un sistema di comunicazione digitale è il primo blocco del trasmettitore. Si occupa del processo di conversione di una sequenza analogica o digitale in una sequenza di bit (questo processo è detto **codifica di sorgente o compressione dei dati**). Volendo *minimizzare* il numero di bit utilizzati, con la compressione è possibile rappresentare una data quantità di informazioni con un numero di bit *minore* rispetto alla rappresentazione originale.

45. Un modulatore digitale in un sistema di comunicazione digitale è l'interfaccia per il canale di comunicazione. Sceglie la forma d'onda più adatta alla trasmissione sul canale selezionato, in quanto è necessario spostare l'intervallo di frequenze in banda base (ovvero dalle frequenze "originali") in altri intervalli più adatti.
Per modulazione s'intende il processo mediante il quale alcune caratteristiche di una portante vengono variate in accordo con un'onda modulante (segnale).

    La modulazione può essere:

    - binaria: la sequenza viene trasmessa un bit alla volta, con un bit-rate costante e pari a R bit al secondo; $\begin{cases} 0 \rightarrow & \delta_0(t) \\ 1 \rightarrow & \delta_1(t) \end{cases} \rightarrow$ durata della forma d'onda : $\frac{1}{R} s$
    - in alternativa il modulatore può trasmettere b bits alla volta, utilizzando $M = 2^b$ forme d'onda **distinte** $s_i(t), i : 0, \_, M-1$. Ovvero, viene utilizzata una forma d'onda per ognuna delle 2^b possibili sequenze di bit possibili.

46. Gli effetti del rumore possono essere ridotti aumentando la potenza del segnale trasmesso (limite nell'attrezzatura) (?)

47. Vedi sottopunti 45.

48. L'operazione con cui diversi segnali sono trasmessi sullo stesso canale (cavo, fibra, radio,...) senza interferenze è chiamata multiplexing dei segnali e l'apparato che effettua tale operazione multiplex. Un multiplex riceve N segnali distinti $s_1(t), s_2(t), ..., s_N(t)$ e li invia su un unico canale utilizzando opportune regole (o tecniche multiplex). Il segnale in uscita è una combinazione degli N segnali in ingresso, da cui possiamo ricavare nuovamente i segnali in ingresso con un'operazione di multiplexing

    - multiplex a **divisione di frequenze** (o FDM - Frequency Division Multiplex):

      Se in ingresso al sistema abbiamo N segnali con lo spettro diverso da zero nell'intervallo $(0, B)$, in frequenza l'i-esimo segnale viene shiftato di una frequenza $f_i = f_1 + iB$.

      Il canale di comunicazione in uscita, utilizzando per trasmettere il segnale $y(t)$, deve avere una larghezza di banda NB. I singoli segnali sono recuperabili senza distorsioni da $y(t)$ poiché occupano zone di frequenza diverse!

    - multiplex a **divisione di tempo** (o TDM - Time Division Multiplex):

      I diversi segnali si differenziano sostanzialmente per l'intervallo di tempo utilizzato per la trasmissione. Se abbiamo N segnali da trasmettere in un intervallo di tempo τ, ad ognuno di essi viene assegnato un proprio sotto intervallo: ciò vale anche negli intervalli successivi.

      L'intervallo τ è denominato *frame* ed il suo valore varia nell'ordine di centinaia-decine di millisecondi.