Lista teoremi Teoria dei Segnali

Introduzione

1. $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0 e ha potenza media su un intervallo finita, allora ha $\bar{P}$ finita e calcolabile sul periodo:

   Per definizione $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt$. Scegliamo come periodo NT_0, in quanto se $N \to \infty$ vale come $T \to \infty$.

   Quindi $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{NT_0}\displaystyle\int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} |x(t)|^2\, dt$ equivale a N integrali cui si aggiunge un T_0 ogni volta:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\cancel{N}T_0} \cdot \cancel{N}\Big\{ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\, dt\} = \bar{P} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\, dt$$

Segnali periodici a tempo continuo

Serie di Fourier

2. Da forma polare a complessa (o rettangolare)

   la forma polare della serie di Fourier è data da:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_K)$$

$$= A_0 + \cancel{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_K)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_K)}}{\cancel{2}} \to \text{ uso formula di Eulero per il coseno}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j2\pi k f_0 t + \theta_K} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j2\pi k f_0 t + \theta_K} \to \text{ separo le due esponenziali}$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \to \text{ raggruppo le sommatorie}$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \text{ forma complessa della serie di Fourier}$$

3. Come si calcolano i coefficienti X_n?

   Partendo dalla forma complessa, moltiplico a destra e a sinistra per $e^{-j2\pi k f_0 t}$, integrando sul periodo T_0.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

Porto fuori la sommatoria e raccolgo e: per ipotesi la serie converge.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0t}$$

L'integrale al secondo membro viene calcolato per $k \neq n$

$$\rightarrow \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(k-n)f_0t} = \frac{e^{j2\pi(k-n)f_0t}}{j2\pi(k-n)f_0}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} =$$

$$\frac{e^{j\cancel{2}\pi(k-n)\cancel{f_0}\cancel{\frac{T_0}{2}}} - e^{-j\cancel{2}\pi(k-n)\cancel{f_0}\cancel{\frac{T_0}{2}}}}{2j\cdot\pi(k-n)f_0} \rightarrow \text{ uso formula di Eulero per il seno}$$

$$\frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)f_0} = \begin{cases} k = n \rightarrow T_0 \\ k \neq n \rightarrow 0 \end{cases} \rightarrow \text{ sostituiamo questo risultato}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi nf_0t}\,dt = X_nT_0 \Rightarrow X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi nf_0t}\,dt$$

4. Forma rettangolare dalla forma polare

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(2\pi kf_0t + \theta_k)$$

usiamo la formula di addizione $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(\cos(2\pi kf_0)\cos(\theta_k) - \sin(2\pi kf_0)\sin(\theta_k)))$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(2\pi kf_0) - b_k\sin(2\pi kf_0)]$$

sapendo che $a_0 = A_0,\ a_k = A_k\cos(\theta_k),\ b_k = B_k\sin(\theta_k)$.

Abbiamo quindi ottenuto la forma rettangolare della serie di Fourier, dove si nota che un segnale *periodico* $x(t)$ può essere espresso tramite una **somma di seni e coseni**.

Il coefficiente X_n può essere espresso anche come:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)(\cos(2\pi kf_0t) - j\sin(2\pi kf_0t))$$

$$X_k = a_k + jb_k = A_k\cos(\theta_k) + jA_k\sin(\theta_k) = A_ke^{j\theta_k}$$

5. Criterio di Dirichlet (per $x(t)$ periodico):

È una serie di condizioni che se incontrate sono sufficienti per poter sviluppare un dato segnale $x(t)$ in serie di Fourier:

- $x(t)$ deve essere *assolutamente integrabile sul periodo*: ovvero ($\int_{[T_0]} |x(t)|\,dt < \infty$)
- $x(t)$ deve essere *continua* (o avere un numero *finito* di discontinuità di prima specie)
- $x(t)$ deve essere *derivabile sul periodo* T_0, escluso al più un numero finito di punti, dove comunque esiste **finita** sia la derivata destra che la derivata sinistra
  - quest'ultima ipotesi è equivalente a: $x(t)$ presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo La serie **converge** al valore assunto da $x(t)$ dove *continua* e alla semisomma dei limiti sinistro e destro se discontinua.

Spettro di un segnale periodico e reale

Proprietà

6. Simmetria Hermitiana dello spettro reale:

   I coefficienti X_k sono generalmente quantità complesse del tipo $X_k = |X_k|e^{j\angle X_k}$: X_k può essere rappresentata tramite spettro di ampiezza e spettro di fase, discreti (esiste solo in corrispondenza delle armoniche k)

   $$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

   Analizziamone il coniugato X_k^*:

   $$X_k^* = \Big(\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt\Big)^* = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)^* e^{+j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}\,dt$$

   È da notare come $x(t)^* = x(t)$, dal momento che il segnale $x(t)$ è reale.

   Quindi $X_k^* = X_{-k}$: i coefficienti X_k di un segnale *reale* sono **simmetrici hermitiani**, ossia hanno *lo stesso modulo e fase opposta*

   $$X_{-k} = X_k^* \Longleftrightarrow \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| \text{ stesso modulo} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \text{ fase opposta} \end{cases}$$

   In definitiva per un segnale reale: - lo spettro d'ampiezza è **simmetrico** rispetto a $k \rightarrow$ pari - lo spettro di fase è **antisimmetrico** rispetto a $k \rightarrow$ dispari

7. Linearità dello spettro reale:

   Se $x(t)$ e $y(t)$ sono due segnali con periodo T_0 *reali* allora vale:

   $$z(t) = ax(t) + by(t) \Longleftrightarrow Z_k = aX_k + bY_k$$

   Somma di *oscillazioni* alle (o con?) le stesse frequenze dei segnali $x(t)$ e $y(t)$.

   $$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (ax(t) + by(t))e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$= \frac{a}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt + \frac{b}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = aX_k + bY_k$$

8. Parità e disparità del segnale

   - Se $x(t)$ è **pari**, allora il coefficiente $X_k = X_{-k}$; se il segnale è anche **reale** vale $X_k = X_{-k} = X_k^* \iff X_k \in \mathbb{R}$.

     $X_k = X_{-k}$ (con un cambio di variabile $\alpha = -t \rightarrow\ dt = -\,d\alpha$).

     $$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt \iff X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi(-k) f_0 t}\,dt$$

     Utilizziamo il cambio di variabile

     $$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(-\alpha)e^{-j2\pi(\cancel{-}(\cancel{-}\alpha))kf_0} - \,d\alpha = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\alpha)e^{-j2\pi\alpha k f_0}\,d\alpha =$$

     $$-\frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(\alpha)e^{-j2\pi\alpha k f_0}\,d\alpha = X_k$$

     dato che il segnale $\in \mathbb{R}$ lo possiamo rappresentare come (perché essendo reale ha fase nulla?):

     $$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t)$$

     Dimostrazione:

     $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} =$$

     $$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} =$$

     $$= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} =$$

     $$= X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}}{2} = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos\left(2\pi k f_0 t\right)$$

     Da ciò deduco che un segnale reale e pari è esprimibile in serie di soli *coseni* (i quali sono a loro volta pari).

Possiamo inoltre scrivere i coefficienti X_k in modo semplificato, data la *parità* del segnale:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{pari}\cdot\underbrace{\cos\left(2\pi k f_0 t\right)}_{pari}\,dt - \frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{x(t)}_{pari}\cdot\underbrace{\sin\left(2\pi k f_0 t\right)}_{dispari}\,dt =$$

$$\frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cdot\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt - 0$$

- se $x(t)$ è **dispari**, allora anche i coefficienti X_k saranno dispari. Inoltre, dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k sarà un **immaginario puro**, ed

  $$x(t) = 2j\sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin\left(2\pi k f_0 t\right) \text{ e } X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,dt$$

  Dimostrazione:

  - Dato che $x(t) \in \mathbb{R}$, X_k, allora vale $X_{-k} = -X_k = X_k^* \Rightarrow X_k^* = -X_k$, quindi è un immaginario puro!
  - Per X_k:

    $$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$$

    $$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underset{dispari}{x(t)}\cdot\underset{pari}{\cos\left(2\pi k f_0 t\right)}\,dt - \frac{j}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underset{dispari}{x(t)}\cdot\underset{dispari}{\sin\left(2\pi k f_0 t\right)}\,dt =$$

    $$-\frac{j}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cdot\sin\left(2\pi k f_0 t\right)dt$$

- **Note varie**
  - Se $x(t)$ è pari i suoi coefficienti X_k sono reali e lo spettro di fase vale 0 o $\pm\pi$; mentre se $x(t)$ è dispari i suoi coefficienti X_k sono immaginari puri e lo spettro di ampiezza non viene toccato: un segnale dispari è solo "spostato" nel tempo.
  - È da notare come la diversa velocità di un segnale dipenda dal suo andamento temporale: le variazioni brusche comportano la presenza di **armoniche**[^1] con k più elevato per rappresentare la velocimento alta(?):
    * più il segnale è regolare meno armoniche sono necessarie per "ricreare" il segnale
      - $\frac{1}{k} \rightarrow$ funzioni discontinue: dente di sega ideale, onda quadra, onda quadra "antisimmetrica", rect
      - $\frac{1}{k^2} \rightarrow$ funzioni continue a derivata discontinua: onda triangolare. [^1]: TODO: definire meglio armoniche

Segnali aperiodici a tempo continuo

Trasformata continua di Fourier

> Una funzione non periodica, definita tra $-\infty$ e ∞, può essere rappresentata come **somma** di **infinite armoniche semplici** di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile con continuità tra $-\infty$ e ∞

9. Dal segnale periodico al segnale aperiodico…

   Partiamo dall'impulso rettangolare *aperiodico* $\mathrm{rect}\,\frac{t}{T}$:

   $$x(t) = \mathrm{rect}\,\frac{t}{T} \rightarrow x_p(t) = \sum \mathrm{rect}(\frac{t - nT_0}{T}) \text{ treno di impulsi rettangolari}$$

   possiamo vedere $x(t)$ come caso limite di $x_p(t)$ con periodo $T_0 \rightarrow \infty$

   $$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t)$$

   1. la frequenza diventa infinitesima $(f_0 = \frac{1}{T_0})$
   2. si riduce la *distanza tra le armoniche*, ossia si **infittisce** lo spettro;
   3. $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{<} \frac{T_0}{2} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$, l'ampiezza assume valori *sempre più piccoli*

   Usiamo il coefficiente *modificato* $X(f_0 k) = T_0 X_k$ per ovviare il problema. Riscriviamo $x_p(t)$ e X_k

   $$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\, e^{j2\pi k f_0 t} \cdot f_0 \rightarrow x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df}_{\text{integrale di Fourier}}$$

   Le armoniche si *infittiscono talmente tanto* da non essere più distinte ma **continue**.

   $$X(kf_0) = T_0\, X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \rightarrow \underbrace{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, dt}_{\text{trasformata continua di Fourier}}$$

   $X(f)$ è una **funzione complessa della variabile continua** f, quindi è di spettro continuo.

   - Nota: **differenze tra segnali continui periodici e aperiodici**:
     - un segnale *periodico* è rappresentato da componenti sinusoidali a frequenze in relazione **armonica** (multipli di f_0, frequenza *fondamentale* e ad ampiezza finita).
     - un segnale *aperiodico* è rappresentato con componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima* $|X(f)|\, df$ e frequenza f variabile con continuità su $\mathbb{R}$; è un segnale periodico di periodo illimitato con f_0 infinitesimo. Le armoniche discrete *degenerano* nell'insieme continuo.

10. Criteri di esistenza per la trasformata continua di Fourier (TCF)

    1. $X(f)$ esiste se il segnale $x(t)$

2. Criteri di Dirichlet:
   1. la funzione deve essere assolutamente sommabile: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$
   2. se in qualunque intervallo finito (t_1, t_2) è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie
   3. se in qualunque intervallo finito (t_1, t_2) la funzione ha un numero finito di massimi e minimi.

Allora $x(t)$ è rappresentabile come TCF e

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi fT}\, df = \begin{cases} x(t) \text{ se continua} \\ \frac{x(t_0^+) - x(t_0^-)}{2} \text{ se discontinua} \end{cases}$$

11. Simmetria Hermitiana della trasformata continua di Fourier

    Possiamo rappresentare $X(f)$ in forma rettangolare:

    $$X(f) = Re(f) + Im(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft)\, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft)\, dt$$

    $$\underbrace{Re(f) = Re(-f)}_{pari} \text{ e } \underbrace{Im(f) = -Im(-f)}_{dispari} \Longrightarrow X(f) = X^*(-f) \text{ simmetria hermitiana}$$

    infatti $X(f) = Re(f) + jIm(f) = Re(-f) + jIm(f) = X^*(-f)$

    - lo spettro di ampiezza è quindi *pari* a quello di fase dispari.

12. Parità e disparità:

    - se un segnale è *reale e pari*

    $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft)\, df = \begin{cases} Re(f) = 2\int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft)\, dt \\ Im(f) = 0 \end{cases}$$

    $\to X(f) = Re(f) \to X(f) = X(-f)$ è reale e pari
    - se un segnale è *dispari e reale*

    $$X(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft)\, dt = \begin{cases} Re(f) = 0 \\ Im(f) = -2\int_0^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) \end{cases}$$

    $\to X(f) = jIm(f) \to X(f) = -X(f)$ è immaginaria pura e dispari

Proprietà della trasformata continua

13. **Linearità**

    Dati due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con le loro trasformate continue di Fourier $X_1(f)$ e $X_2(f)$, allora se:

    $$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

    con a, b costanti, $X_1(f) = \text{TCF}[x_1(t)]$ e $X_2(f) = \text{TCF}[x_2(t)]$

- Dimostrazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (ax_1(t) + bx_2(t))\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

  ma sappiamo che l'integrale è *lineare*, quindi

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt + b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = aX_1(f) + bX_2(f)$$

14. **Dualità**

    se $x(t) \iff X(f)$, allora $X(t) \iff x(-f)$:

    Se la trasformata continua di Fourier passa ad essere un *segnale nel tempo*, allora $x(-f)$ è la sua trasformata di Fourier. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra la funzione e la sua trasformata.

    - Esempio:

    $$\mathrm{rect}(\frac{t}{T})\, \mathrm{sinc}(fT)$$

      Ma se nel tempo ho un segnale $\mathrm{sinc}(bT)$ qual è la sua trasformata?

      $T\,\mathrm{sinc}(Tt) \iff \mathrm{rect}(-\frac{f}{T})$ da cui $\mathrm{sinc}(Bt) \iff \frac{1}{B}\,\mathrm{rect}(\frac{t}{B})$, dove B indica la banda.

    - Dimostrazione:

    $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{j2\pi ft}\, dt$$

      con uno scambio di variabili t con f. Quindi:

    $$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi fT}\, dt$$

      Da qui deriviamo che $x(-f)$ è la trasformata di $X(t)$

15. **Ritardo**

    Sia $X(f) = \text{TCF}[x(t)]$: la trasformata di Fourier di $x(t)$ ritardato nel tempo di una quantità t_0 è pari a:

    $$x(t - t_0) \iff X(f)\, e^{-j2\pi ft_0}$$

    - Dimostrazione:

    Applichiamo a $x(t - t_0)$ la definizione di TCF

    $$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \Big|\alpha = t - t_0 \to t = \alpha + t_0$$

    $$x(t - t_0) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha + t_0) e^{-j2\pi(\alpha + t_0)f}\, d\alpha = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f\alpha} = e^{-j2\pi ft_0}\, X(f)$$

    - Esempio:

    $$A\,\mathrm{rect}(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}) \iff AT\,\mathrm{sinc}(fT) e^{-j\cancel{2}\pi f \frac{T}{\cancel{2}}}$$

Se $y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow Y(f) = X(f)\, e^{-j2pift_0} \Rightarrow$ Un ritardo modifica lo spettro di **fase** ma *non cambia* il suo spettro di ampiezza, in quanto quest'ultimo di indica quali componenti sinusoidali sono necessarie per comporre la forma del segnale, mentre lo spettro di fase mi dice con quale *angolo* iniziale devono "partire" le sinusoidi.

Quindi se il segnale si sposta nel tempo, allora le sinusoidi hanno angoli iniziali diversi, ma sono le stesse.

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |e^{-j2\pi ft_0}| = |X(f)|$$

$$\underline{/Y(f)} = \underline{/X(f)\, e^{-j2pift_0}} = \underline{/X(f)} + \underline{/e^{-j2pift_0}} = \underbrace{\underline{/X(f)} - \overbrace{2\pi ft_0}^{=0}}_{\text{\underline{NON} è una traslazione!}}$$

16. **Cambiamento di scala**

    Si consideri $y(t) = x(\alpha t)$, effettuando un *cambiamento della scala temporale*:

$$|\alpha| > 1 \rightarrow \text{ compressione della scala dei tempi } \rightarrow \text{ l'evoluzione è "accelerata"}$$
$$|\alpha| > 1 \rightarrow \text{ dilatazione della scala dei tempi } \rightarrow \text{ l'evoluzione è "rallentata"}$$
$$|\alpha| < 0 \rightarrow \text{ inversione della scala dei tempi}$$

    Inoltre vale:

$$x(\alpha t) \Longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} x(\frac{f}{\alpha})$$

    - Dimostrazione:

$$\cdot\ \underline{\alpha > 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi ft}\, dt, \text{ ponendo } z = \alpha t \rightarrow t = \frac{z}{\alpha},\ dz = \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(z)e^{-j2\pi f\frac{z}{\alpha}}}{\alpha}\, dz = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} x(z)e^{-j2\pi f\frac{z}{\alpha}}\, dz = \frac{1}{\alpha} X(\frac{f}{\alpha})$$

$$\cdot\ \underline{\alpha < 0} \Rightarrow x(\alpha t) \Longleftrightarrow \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x(z)e^{-j2\pi f\frac{z}{\alpha}}}{\alpha}\, dz = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} x(z)e^{-j2\pi f\frac{z}{\alpha}}\, dz = -\frac{1}{\alpha} X(\frac{f}{\alpha})$$

      È da notare come l'inversione dell'integrale nel secondo caso l'abbiamo quando $t \rightarrow -\infty,\ z \rightarrow +\infty$. Inoltre abbiamo sostituito $z = -\alpha t$.

    Quindi una *dilatazione* nel tempo corrisponde ad una *compressione* in frequenza, e **viceversa**

17. **Modulazione**

    Dato un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(f)$ allora

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Longleftrightarrow \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

    dove $X(f - f_0)$ e $X(f + f_0)$ sono rispettivamente la replica centrata in f_0 e la replica centrata in $-f_0$.

    - Dimostrazione:

$$\text{TCF}[x(t)\cos(2\pi f_0 t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi ft}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)[e^{-j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}]e^{-j2\pi f t}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f+f_0)t}\,dt\Big] = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$$

Corollario: $x(t)e^{j2\pi f_o t} \iff X(f-f_0)$

18. **Derivazione**

Se $x(t) \to X(f)$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \iff j2\pi f \cdot X(f) = Y(f)$$

Una derivata nel tempo è una *moltiplicazione* in frequenza.

- Dimostrazione:

Deriviamo entrambi i lati di $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[X(f)e^{j2\pi ft}\Big]\,df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j2\pi ft}\,df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)(2\pi f)e^{j2\pi ft}\,df \Longrightarrow \text{[TCF]}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = j2\pi f X(f)$$

Il teorema della derivazione *modifica gli spettri*

$$|Y(f)| = 2\pi f|X(f)| \underline{/Y(f)} = \underline{/X(f)} + \mathrm{sgn}(f)\frac{\pi}{2}$$

Aumenta proporzionalmente l'ampiezza, esaltando le altre frequenze, e sfasando di $\pm\frac{\pi}{2}$

19. **Integrazione** (deriva dal teorema di derivazione)

Dato un segnale $x(t) \iff X(f)$ e un segnale $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha$, allora vale

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha \iff \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

- Dimostrazione:

Segue dal teorema di derivazione e richiede che $X(0) = 0$, al fine di evitare che per $f \to 0$, il rapporto tenda ad infinito.

$$X(0) = 0 \longleftrightarrow X(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^0\,dt}_{\text{sottende area }\textbf{nulla}} \longleftrightarrow y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = X(0) \to 0$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha \Rightarrow x(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \Rightarrow X(f) = j2\pi f \cdot Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Anche l'integrale nel tempo si trasforma in un'operazione algebrica in frequenza: in questo caso però vengono esaltate le componenti a **bassa** frequenza nello spettro del segnale, mentre le alte vengono attenuate; la fase varia sempre di $\pm\frac{\pi}{2}$

$$|Y(f)| = \frac{|X(f)|}{2\pi f} \underline{/Y(f)} = \underline{/X(f)} + \text{sgn}(f)\frac{\pi}{2}$$

Da questo teorema deriva la relazione $A\text{tri}(\frac{t}{T}) \iff AT\,\text{sinc}^2(fT);\ A\,\text{rect}(\frac{t}{T}) \iff AT\,\text{sinc}(fT)$

20. **Prodotto**: è il duale della convoluzione

    Partendo da due segnali $x(t)$ e $y(t)$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \iff X(f) \otimes Y(f)$$

- Dimostrazione:

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \Big[\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{-j2\pi\nu t}\,d\nu\Big] y(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt =$$
$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)\Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t)\,e^{-j2\pi(f-\nu)t}\,dt\Big]\,d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} X(\nu)Y(t-\nu)\,d\nu =$$
$$X(f) \otimes Y(f)$$

  Quindi:

$$\underset{PRODOTTO}{x(t)\,y(t)} \iff \underset{CONVOLUZIONE}{X(f) \otimes Y(f)} \rightarrow \text{ la convoluzione è } \textit{commutativa}$$

21. ***Convoluzione***

    Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sappiamo che:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \iff X(f)\,Y(f)$$

- Dimostrazione:

  Partiamo sempre dalla definizione di TCF:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)y(t-\alpha)\,d\alpha \iff Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[x(\alpha)y(t-\alpha)\,d\alpha\Big] e^{-j2\pi f(t-\alpha+\alpha)}\,dt =$$
$$\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,\underbrace{\Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} y(t-\alpha)e^{-j2\pi f(t-\alpha)}\,dt\Big]}_{Y(f)}\,e^{-j2\pi f\alpha}\,d\alpha =$$
$$\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,Y(f)\,e^{-j2\pi f\alpha}\,d\alpha = X(f)\,Y(f)$$

- Nota bene:
  - la convoluzione ha proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Trasformata di Fourier generalizzata

22. Teorema d'integrazione **completo**:

    Vogliamo rimuovere il vincolo (o ipotesi) $X(0)$ che è alla base dell'applicabilità del teorema d'integrazione "incompleto": ciò viene realizzato utilizzando la delta di Dirac.

    Il teorema completo afferma che:

    $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \iff \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \cdot X(0)$$

    Il nuovo termine rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale!.

    - Dimostrazione:

      Essendo:

      $$x(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, u(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$

      abbiamo che per la convoluzione $x(t) \otimes u(t) \iff X(f)U(f)$:

      $$X(f)\, U(f) = X(f)\Big[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}\Big] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

      Questo perché TCF$(u(t)) = U(f) = \frac{1}{j2\pi f}$; l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla: rende conto dell'eventuale valor medio diverso da zero del segnale, ed è un termine correttivo che rappresenta la funzione impulsiva.

23. Teorema della modulazione, alternativa:

    - Dimostrazione:

      per il teorema del prodotto,

      $$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \iff X(f) \otimes \Big[\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}\Big] =$$
      $$X(f) \otimes \frac{\delta(f-f_0)}{2} + X(f) \otimes \frac{\delta(f+f_0)}{2}$$
      $$\to X(f) \otimes \delta(f-f_0) = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha)\delta(f-f_0-\alpha)\, d\alpha = \int_{\mathbb{R}} X(\alpha)\delta(\alpha) - (f-f_0)\, d\alpha = X(f-f_0)$$
      $$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \iff \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$

Periodicizzazione

24. Prima formula della somma di Poisson:

    Come rendere un segnale *aperiodico* $x(t)$ **periodico** di periodo T_0. Partiamo da $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} = x(t - nT_0)$

relazione nel tempo tra periodico e aperiodico

$$\rightarrow Y_k = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \begin{Bmatrix} \alpha = t - t_0 \\ t = \alpha - t_0 \\ d\alpha = dt \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha)\, e^{-j2\pi k f_0 (\alpha + nT_0)}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha) e^{-j2\pi k f_0 \alpha} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k \cancel{f_0} n \cancel{T_0}}}_{\text{multiplo di } 2\pi \rightarrow e^0}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T}{2}-nT_0}^{\frac{T}{2}-nT_0} x(\alpha)\, e^{-j2\pi k f_0 \alpha}\, d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi k f_0 \alpha}\, d\alpha = \underbrace{\frac{1}{T_0} X(kf_0)}_{\text{campionamento in frequenza}}$$

Si ottiene una relazione detta **campionamento in frequenza**. I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico $y(t)$ sono, a meno del fattore $\frac{1}{T_0}$, i campioni della TCF del *segnale base* $x(t)$ presi in corrispondenza delle frequenze armoniche kf_0

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(\frac{k}{T_0})\, e^{+j2\pi k t f_0}$$

25. Seconda formula della somma di Poisson

    Applichiamo alla prima formula di Poisson il teorema della dualità:

$$X(t) \longleftrightarrow x(-f) x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(\frac{k}{T_0})\, e^{+\frac{j2\pi k t}{T_0}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} (X(-\frac{k}{T_0}))\, e^{+\frac{j2\pi k t}{T_0}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(\frac{k}{T_0})\, e^{-\frac{j2\pi k t}{T_0}} \text{ cambio di segno all'indice k}$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t - \frac{n}{T}) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} x(kT)\, e^{-j2\pi k t f T}$$

Adesso, dal punto di vista puramente formale, cambiano nome da t in f, otteniamo un'espressione, otteniamo un'espressione *duale* rispetto alla prima formula di Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

Sistemi

26. Teorema di Parseval:

Dato un segnale $x(t)$ e la sua energia $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt < +\infty$ (energia finita), possiamo esprimere l'energia E_x *anche in frequenza*:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x^*\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\Big[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft}\,df\Big]\,dt$$
$$\int_{f=-\infty}^{\infty} X^\star(f)\Big[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt\Big]\,df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df$$

E_x è l'energia totale, deriva da $p_x = |x(t)|^2$ potenza istantanea integrata o da $|X(f)|^2$ detta **densità spettrale** $E_x(f)$ integrata.

27. Teorema di Wiener-Khinchin

Siamo la densità spettrale di potenza:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$$

e la funzione *densità spettrale di potenza*

$$S_x(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{\text{Ext(f)}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{|x(t)|^2}{T}$$

con Ext(f) densità di energia del segnale *troncato* nell'intervallo $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

Definiamo **funzione di autocorrelazione** $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)\,dt$ ossia il segnale moltiplicato per una sua replica *ritardata*. Indica "quanto il segnale somiglia alla sua replica ritardata": più $x(t)$ è compatta meno somiglierà e meno varrà $R_x(\tau)$

Il teorema afferma che la densità spettrale di energia di un segnale coincide con la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso:

$$E_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi ft}\,d\tau \underbrace{=}_{R_x(\tau)\text{ è pari)}} 2\int_{0}^{\infty} \cos(2\pi f\tau)R_x(\tau)\,d\tau$$

- Dimostrazione:

Partiamo dalla definizione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(\alpha - t)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x(-(t-\alpha))\,d\alpha = x(\tau)\otimes x(-\tau) =$$
$$R_x(\tau) = x(\tau)\otimes x(-\tau) \Longleftrightarrow X(f)\,X(-f) = X(f)\,X^*(-f) = |X(f)|^2 = E_x(f)$$