工科数学分析下-Cheatsheet

Leo

2024 年 3 月 12 日

目录

1 多元函数微分学及其应用

1.1 n 维欧氏空间中的点集

1.1.1 定义与概念

定义与概念 1.1 (点列极限). 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得 $\forall k > N$, 恒有 $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}|| < \epsilon$，则称点列的极限存在，记为

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \tag{1}$$

定义与概念 1.2. 欧氏空间的点与点集：

1. 聚点：有非自身的点列趋近于它的点
2. 导集 A'：聚点的集合
3. 闭包 $\bar{A}$: 点集与导集之并
4. 孤立点：在点集里但不在导集里
5. 闭集：自身包含导集的点集
6. 开球、邻域:$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R} | \quad ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta\}$
7. 闭球：开球与其边界之并

定义与概念 1.3. 1. 内点与内部 $intA(A^{\circ})$: 存在小邻域含于 A

2. 外部 $extA$: 存在小邻域与 A 相离
3. 边界 ∂A: 对任意小邻域，既有属于 A 的部分，又有不属于 A 的部分
4. 开集：只有内点的点集
5. 紧集：有界闭集
6. 连通集：任意两点之间可以用有限条线段相连
7. 区域：连通的开集

1.1.2 定理

定理与结论 1.4 (点列收敛 $\iff$ 各分量收敛).

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \iff \forall i = 1, 2, ...n, \text{都有} \lim_{k \to \infty} x_{k,i} = a_i \tag{2}$$

定理与结论 1.5 (收敛的必要条件). 极限唯一；数列有界；保持线性（内积和求极限可交换）

定理与结论 1.6. 有界点列必有收敛子列

定理与结论 1.7 (Cauchy 收敛原理). 点列收敛 $\iff$ $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得 $\forall k > N$ 及 $p \in \mathbf{N}_+$ 恒有 $||\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k|| < \epsilon$

定理与结论 1.8. 是聚点 $\Longleftrightarrow$ 任意去心邻域有点

定理与结论 1.9. *1.* 空集与全空间既开又闭

2. 开集之并为开集，闭集之交为闭集

3. 有限个开集的交为开集，有限个闭集的并为闭集

1.2 多元函数的极限与连续性

1.2.1 定义与概念

定义与概念 1.10. n 元数量值函数：$A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, w = f(\boldsymbol{x})$
n 元向量值函数：$A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m (m \geqq 2), \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [y_1, y_2, ...y_m]^T = \begin{bmatrix} y_1(x_1, x_2, ...x_n) \\ y_2(x_1, x_2, ...x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1, x_2, ...x_n) \end{bmatrix} \tag{3}$$

定义与概念 1.11 (n 重极限)**.** 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是一个聚点，若存在常数 a 使得

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} \boldsymbol{x} \in \mathring{U}(\boldsymbol{x}, \delta) \cap A \text{时, 恒有} |f(\boldsymbol{x}) - a| < \epsilon \tag{4}$$

则称当 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 时有极限，记做

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = a \tag{5}$$

定义与概念 1.12. 若 $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$，则称该函数在该点连续

注*.* 该函数连续等价于个分量函数连续

1.2.2 定理

定理与结论 1.13 (有界闭区域上连续函数的性质)**.** 有界；可取到最值；介值定理；连续则一致连续

应用. *1.* 用定义与概念证明二重极限

2. 利用极限的唯一性证明二元函数不收敛

1.3 多元数量值函数的导数与微分

1.3.1 定义与概念

定义与概念 1.14 (偏导函数)**.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, , y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{6}$$

定义与概念 1.15 (全微分)**.**

$$f(x_0+\Delta x,,y_0)-f(x_0,y_0)=\Delta z=a_1\Delta x+a_2\Delta y+o(\rho),\rho=||\Delta \boldsymbol{x}|| \tag{7}$$

$$dz=a_1dx+a_2dy \tag{8}$$

定义与概念 1.16 (方向导数)**.**

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_l)-f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \tag{9}$$

注. 几何意义是沿着该方向的切线的斜率

定义与概念 1.17 (梯度)**.** 若一个向量，其方向为该点方向导数取最大值的方向，其模是该点方向导数的最大值，则称该向量为这一点的梯度。

定义与概念 1.18 (高阶偏导数)**.**

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial(\dfrac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} \tag{10}$$

注. 一般情况下，求导的先后次序有影响。写在前面的先求导。

定义与概念 1.19 (高阶全微分)**.** $d^nu=(\dfrac{\partial}{\partial x}dx+\dfrac{\partial}{\partial y}dy)^nf$

1.3.2 定理

定理与结论 1.20 (梯度运算法则)**.** *1.* 保持线性
2. 同求导一样，有乘除运算法则和复合函数求导法则

定理与结论 1.21 (可微的必要条件)**.** 函数连续且两个偏导数均存在。则 $dz=f_xdx+f_ydy$

定理与结论 1.22 (可微的充分条件)**.** 两个偏导数均连续

定理与结论 1.23.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}=f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta,\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta) \tag{11}$$

定理与结论 1.24. $\nabla f=(f_x,f_y)$, 即梯度就是偏导数构成的向量。

定理与结论 1.25. 高阶偏导连续时，求导次序不影响

定理与结论 1.26 (多元函数求导的链式法则)**.** 设 $u=u(x,y),v=v(x,y),z=f(u,v)$, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{12}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{13}$$

定理与结论 1.27 (一阶全微分形式不变性)**.** $z=f(u,v)$ 无论 u,v 是自变量还是中间变量，都满足 $dz=f_1du+f_2dv$

定理与结论 1.28. 若一个曲线由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出。某一点满足：

1. 该点满足方程
2. 在该点的邻域有连续偏导数
3. 有至少一个偏导数不为零（这里设 $F_z \neq 0$）

则该方程可唯一地确定一个具有连续导数的隐函数，且有

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F_x}{F_z} \tag{14}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{F_y}{F_z} \tag{15}$$

应用. 1. 求高阶微分与偏导数

2. 求隐函数的微分与偏导数

1.4 多元函数的 Taylor 公式和极值

1.4.1 定义与概念

定义与概念 1.29 (Hesse 矩阵).

$$\mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{x}} \tag{16}$$

定义与概念 1.30 (矩阵形式的泰勒公式).

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + < \nabla f(\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}) > + \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} \tag{17}$$

定义与概念 1.31 (一般形式的二元泰勒公式).

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f_{x_1}\Delta x_1 + f_{x_2}\Delta x_2 + R_1 \tag{18}$$

其中

$$R_1 = \frac{1}{2!}(f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2)|_{(\boldsymbol{x}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0 + \theta\Delta\boldsymbol{y})} \tag{19}$$

1.4.2 定理

定理与结论 1.32 (极值的必要条件). 这一点处可微且梯度为 *0*（各一阶偏导全为零）

定理与结论 1.33 (极值的充分条件). *Hesse* 矩阵正定则取极小值，*Hesse* 矩阵负定则取极大值

定理与结论 1.34 (条件极值与 Lagrange 乘数法). 设目标函数 $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$，约束条件 $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, 2, ..., m$，则可设 $L = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ...\lambda_m) = f + \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_m\varphi_m$，解方程组

$$\begin{cases} L_{x_p} = 0, p = 1, 2, ..., n \\ \varphi_q = L_{\lambda_q} = 0, q = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{20}$$

解出来的点就是 L 的驻点。

应用. *1.* 求二元函数的二阶 *Taylor* 展开式，中间尽快代入具体值化简。

2. 求二元 $C^{(2)}$ 函数极值

1. 求所有驻点 *2.* 求 *Hesse* 矩阵正定性。若 $A>0, AC-B^2>0$ 则正定，取极小值；若 $A<0, AC-B^2>0$ 则负定，取极大值；若 $AC-B^2<0$ 则不定，不是极值；若 $AC-B^2=0$ 则不知道，一般返回原始式子直接看。

1.5 多元向量值函数的导数与微分

1.5.1 定义与概念

定义与概念 1.35 (一元向量值函数的可导).

$$D\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{f}'(x_0)=\frac{d\boldsymbol{f}}{dx}\bigg|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(x_0+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x_0)}{\Delta x} \tag{21}$$

注. 充要条件是各个分量函数可导

定义与概念 1.36 (一元向量值函数的微分).

$$\boldsymbol{f}(x_0+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{a}\Delta x+\boldsymbol{o}(\rho)\ \rho=||\Delta x|| \tag{22}$$

定义与概念 1.37.

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} df_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ df_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

定义与概念由各偏导数组成的矩阵 A 为该二元向量值函数的导数，称为 Jacobi 矩阵，简记为 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(x_0)d\boldsymbol{x}$

若记成梯度形式则有 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=[\nabla f_1,\nabla f_2,...\nabla f_m]^T$ 推广至多元向量值函数

$$D\boldsymbol{f}(x_0)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

当 $n=m$ 时，记 $|D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})|=\boldsymbol{J}_f(\boldsymbol{x_0})=\dfrac{\partial(f_1,f_2,...f_n)}{\partial(x_1,x_2,...x_m)}\bigg|_{\boldsymbol{x}_0}$

定义与概念 1.38 (向量值函数的偏导数).

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\Delta x_i\boldsymbol{e}_i)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\Delta x_i}=(\frac{\partial\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_i},...,\frac{\partial\boldsymbol{f_m}(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_i}) \tag{25}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_i=(0,0,...,0,1,0,...0)^T\text{（仅在第 i 维不为 0）} \tag{26}$$

1.5.2 定理

定理与结论 1.39.

$$d\boldsymbol{f}(x_0)=\boldsymbol{a}\Delta x=\boldsymbol{f}'(x_0)\Delta x \tag{27}$$

定理与结论 1.40 (微分运算法则). *1. 若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 都可微，则 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 可微，且其导数为*

$$D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{28}$$

2.$<\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}>$ 可微，且其导数为

$$D<\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}>(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^TD\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^TD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{29}$$

3.$u\boldsymbol{f}$ 可微且其导数为

$$D(u\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=uD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})Du(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

4. 若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 都是从一维空间映射到三维空间，则其向量积也可微，且其导数为

$$D(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})(x)=D\boldsymbol{f}(x)\times\boldsymbol{g}(x)+\boldsymbol{f}(x)\times D\boldsymbol{g}(x) \tag{31}$$

注. 证明过程用到了梯度运算法则

定理与结论 1.41 (向量值复合函数的链式法则).

$$D\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}\cdot D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{32}$$

定理与结论 1.42. *设有方程组*

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0\\F_2(x,y,u,v)=0\end{cases} \tag{33}$$

若两个函数满足

1. *均是一阶连续*
2. *某点同时在两个曲线上*
3. *Jacobi 行列式*

$$\boldsymbol{J}=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial u,v}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=\left|\begin{matrix}\frac{\partial F_1}{\partial u}&\frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}&\frac{\partial F_2}{\partial v}\end{matrix}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0 \tag{34}$$

则在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某邻域内确定了一个有连续偏导数的二元函数

$$u=u(x,y),v=v(x,y) \tag{35}$$

且其偏导数为

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}\\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}\\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}\\ \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}\end{cases} \tag{36}$$

1.6 多元函数微分学在几何上的应用

1.6.1 曲线的切平面与法线

曲线的参数方程可以普遍地写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \tag{37}$$

其切向量为 $\dot{\boldsymbol{r}}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$
切线的向量式方程为 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(t_0)+t\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$
切线的对称式方程为

$$\frac{x-x(t_0)}{\dot{x}(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{\dot{y}(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{\dot{z}(t_0)} \tag{38}$$

切线的自然式方程为（适用于以 $y=y(x),z=z(x)$ 形式给出的曲线）

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y(x_0)}{\dot{y}(x_0)}=\frac{z-z(x_0)}{\dot{z}(x_0)} \tag{39}$$

法平面的向量式

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot[\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)]=0 \tag{40}$$

法平面的参数式

$$\dot{x}(t_0)[x-x(t_0)]=\dot{y}(t_0)[y-y(t_0)]=\dot{z}(t_0)[z-z(t_0)] \tag{41}$$

法平面的自然式

$$x-x_0=\dot{y}(x_0)[y-y(x_0)]=\dot{z}(x_0)[z-z(x_0)] \tag{42}$$

对于以一般式

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases} \tag{43}$$

给出的曲线，若满足隐函数存在定理，则可以先求出隐函数 $\dot{y}(x_0),\dot{z}(x_0)$，再代回自然式方程。

1.6.2 弧长

定义与概念 $s=\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}||\overrightarrow{P_{i-1}P_i}||$ 弧微分 $ds=||\dot{\boldsymbol{r}(t)}||=\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}dt$ **计算公式**

$$s=\int_\alpha^\beta||\dot{\boldsymbol{r}}||dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}dt \tag{44}$$

特别地，对于平面曲线

$$\text{参数式：}s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}dt \tag{45}$$

$$\text{自然式：}s=\int_a^b\sqrt{[1+[y‘(x)]^2}dx \tag{46}$$

$$\text{极坐标式：}s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}d\theta \tag{47}$$

若以弧长 s 为为参数，则称为自然参数，有如下关系

$$(\frac{dx}{ds})^2+(\frac{dy}{ds})^2+(\frac{dz}{ds})^2=1 \tag{48}$$

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\frac{dy}{ds}=\cos\beta,\frac{dz}{ds}=\cos\gamma, \tag{49}$$

1.6.3 曲面的切平面与法线

若曲面 S 以参数方程形式给出为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \tag{50}$$

其偏导数为

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)=(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u})\Big|_{(u_0,v_0)},\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})\Big|_{(u_0,v_0)} \tag{51}$$

可取其法向量

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})_{(u_0,v_0)},\text{记为}(A,B,C) \tag{52}$$

故切平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{53}$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C} \tag{54}$$

若曲面以一般式形式给出 $F(x,y,z)=0$ 且有 $F_z\neq 0$，则由隐函数存在定理得，可以把 x,y 看作参数，

$$\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y=(\frac{F_x}{F_z},\frac{F_y}{F_z},1) \tag{55}$$

故切平面为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0 \tag{56}$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)} \tag{57}$$

若曲面以 $z=f(x,y)$ 形式给出，则切平面为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{58}$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \tag{59}$$

1.6.4 空间曲线的曲率

定义与概念 1.43 (曲率). 设空间光滑曲线以自然参数为参数，方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在变动 Δs 的同时转过 $\Delta\theta$，则曲率为 $\kappa=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$

定义与概念 1.44 (曲率半径). $R=\dfrac{1}{\kappa}$

定理与结论 1.45 (自然参数下的计算公式). $\kappa(s)=||\boldsymbol{r}''(s)||$

定理与结论 1.46 (一般参数下的计算公式). $\kappa(s)=\dfrac{||\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)||}{||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||^3}$

定理与结论 1.47 (平面曲线参数式下的计算公式). $\kappa(s)=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{[(\dot{x})^2+(\dot{x})^2]^{\frac{3}{2}}}$

定理与结论 1.48 (平面曲线一般式下的计算公式). $\kappa(s)=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$

2 多元函数积分学及其应用

2.1 多元数量值函数积分的概念与性质

2.1.1 物体质量的计算

二元数量值函数积分的几何意义是对平面质量的计算，分为“分、合、匀、精”四个部分。

分 将一个区域分为 n 个子域。

匀 每个子域 $\Delta\sigma_k$ 上的密度函数 $f(M)$ 近似为不变，从而得到 $\Delta\sigma_k$ 的质量

$$\Delta m_k \approx f(M_k)\Delta\sigma_k \tag{60}$$

合 把所有 Δm_k 的质量合起来，得到薄板质量的近似值为

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k \tag{61}$$

精 令所有分割的子域都无限小（通过控制最大的子域直径趋于零来做到）

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k \tag{62}$$

2.2 多元数量值函数积分的概念

设 Ω 是可度量的几何形体（可求长度或面积或体积），则称

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\Omega_k \tag{63}$$

为多元数量值函数 f 在 Ω 上的积分。
下面根据积分域的不同具体给出式(63)的表达式。

1. 如果 (Ω) 是闭区间，则 f 是一元函数，则式(63)可具体地写成

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx. \tag{64}$$

2. 如果 (Ω) 是闭区域，则 f 是二元函数，则式(63)可具体地写成

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \tag{65}$$

3. 如果 (Ω) 是三维区域，则 f 是三元函数，则式(63)可具体地写成

$$\int_{(\Omega)} f(M)d\Omega = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k = \iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma \tag{66}$$

4. 如果 (Ω) 是一段弧，则 f 就是定义在弧段 C 上的二元或三元函数，于是式(63)可以写成

$$\int_{(C)} f(x,y)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k \tag{67}$$

或

$$\int_{(C)} f(x,y,z)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k \tag{68}$$

5. 如果 (Ω) 是一个曲面，那么 f 就是定义在 S 上的三元函数，于是式(63)可以写成

$$\iint_{S} f(x,y,z)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \tag{69}$$

2.3 积分存在的条件与性质

条件：(Ω) 是有界闭集且可度量，$f\in C((\Omega))$, 则 f 在 (Ω) 上一定可积。
性质：

1. **线性性质**
2. **对积分域的可加性**　其中积分域的划分不能重叠
3. **积分不等式**
   (a) 若$f(M)\le g(M),\forall M\in(\Omega)$, 则

$$\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \le \int_{(\Omega)} g(M)\mathrm{d}\Omega \tag{70}$$

   (b)

$$\left|\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \le \int_{(\Omega)} \left|f(M)\right|\mathrm{d}\Omega \tag{71}$$

   (c) 若$l\le f(M)\le L,\forall M\in(\Omega)$, 则

$$l\Omega \le \int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega \le L\Omega \tag{72}$$

4. **中值定理**　设 $f\in C((\Omega))$,(Ω) 为一有界连通闭集，则在 (Ω) 上至少存在一点 P, 使

$$\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega = f(M)\Omega \tag{73}$$

2.4 二重积分的计算

2.4.1 二重积分的几何意义

曲顶柱体的体积。

2.4.2 二重积分的计算方法

1. 直角坐标系

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{74}$$

将二重积分化为两次定积分，先对 y 积分，再对 x 积分，适用于 x 型区域。
如果是 y 型区域，则可以先对 x 积分

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{75}$$

一言以蔽之

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \tag{76}$$

常见的套路有

(a) 换积分次序

(b) 切割，分部积分见书上例 2.3

(c) 利用对称性与函数奇偶性
若积分域关于 x 轴对称而被积函数是关于 y 的奇函数，则积分结果为 0. 这一技巧经常和 1b 混合使用。

2. 极坐标系积分微元代换

$$\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{77}$$

积分式代换

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\sigma. \tag{78}$$

广义极坐标变换，用于处理椭圆域

$$\mathrm{d}\sigma=ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{79}$$

3. 一般曲线坐标系
对 x,y 做正则变换

$$T:\begin{cases}u=u(x,y),(x,y)\in(\sigma),\\ v=v(x,y),(x,y)\in(\sigma).\end{cases} \tag{80}$$

面积微元代换

$$\mathrm{d}\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}\theta' \tag{81}$$

积分式代换

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma')} f[u(x,y),v(x,y)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{82}$$

2.5 三重积分的计算

2.5.1 化三重积分为单积分和二重积分的累次积分

1. 先单后重，“穿针法”投影至 xOy 平面，先积好一个细柱条再在平面上无限累加。适用于被积函数仅是 z 的函数的情况。

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{(\sigma)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma \tag{83}$$

2. 先重后单，切片法。把每一个薄片积好再关于 z 轴积分。

2.5.2 三种坐标系下的积分法

1. 直角坐标系。见上

2. 一般的曲线坐标系
做正则变换：

$$\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases} \tag{84}$$

积分微元代换：

$$\mathrm{d}V = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}V' = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{85}$$

其中，

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \tag{86}$$

是变换的 *Jacobi* 行列式，从而

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{(V)} f[xu,v,w,y(u,v,w),z(u,v,w)] \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{87}$$

3. 柱面坐标系
积分微元代换：

$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{88}$$

积分式变换为：

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{(V)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{89}$$

4. 球面坐标系
球面变换：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \tag{90}$$

其中，φ 是向径与 z 轴正方向的夹角，θ 是向径与 x 轴正方向的夹角。积分微元代换：

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \tag{91}$$

积分式代换：

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \tag{92}$$

2.6 反常重积分（略过）

2.7 第一型线积分与面积分

2.7.1 第一型线积分

把对弧长的线积分称为第一型线积分，积分的值与积分路径无关。
计算公式：

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f[(x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\mathrm{d}t \tag{93}$$

使用场景：

1. 计算柱面的侧面积。
2. 计算金属丝的质量，质心，转动惯量。

2.7.2 第一型面积分

1.

曲面面积微元的代换：uOv 坐标网下的矩形面积微元可以变换成在 xyz 坐标网下的曲面微元。uOv 坐标网下的任意 4 个点 (M_1,M_2,M_3,M_4) 形成面积微元 $\Delta\sigma$，经正则变换，映射到在 xyz 坐标网下的四个点 $(P_1,P2,P_3,P_4)$，形成面积微元 ΔS。先把 ΔS 的面积近似为平行四边形的面积，为 $||\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}||$，而 $\overrightarrow{P_1P_2}\approx \boldsymbol{r}_u\Delta u$,$\overrightarrow{P_1P_3}\approx \boldsymbol{r}_v\Delta v$, 所以有面积微元的代换：

$$\mathrm{d}S = ||\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v||\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{94}$$

用二重积分算曲面面积：

1. 一般的曲面坐标系

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} ||\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v||\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{95}$$

2. 用一般方程给出 $z = z(x, y)$, 则曲面的向量方程可以写成 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

$$\mathrm{d}S = ||\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y||\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{96}$$

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} ||\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y||\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{97}$$

第一型面积分的计算：

1. 若 S 的方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k} \tag{98}$$

   则 f 在 S 上的第一型面积分为：

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{(\sigma)} f[(x(u, v), y(u, v), z(u, v))]||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{99}$$

2. 若 S 的方程为 $z = z(x, y)$, 则 f 在 S 上的第一型面积分为：

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{100}$$

2.8 第二型线积分与面积分

2.8.1 场的概念

2.8.2 第二型线积分

定义：

$$\int_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot \mathbf{ds} = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}(\overline{M_k}) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} \tag{101}$$

其中 $\mathbf{A}(M)$ 称为场函数，是向量值函数，$\mathbf{ds}$ 是微元向量。
性质：

1. 若积分路径反向，则积分值为相反数
2. 在积分路径上具有可加性
3. 闭合曲线上的积分可以分成两个同向（同为顺时针或逆时针）的闭合曲线积分，这两个路径有一条公共边界

计算：
设曲线的参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), (\alpha \le t \le \beta)$，场函数为 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z$
且在曲线上连续，则

$$\begin{aligned}\int_{(C)} \mathbf{A}(M) \cdot \mathbf{ds} &= \int_{(C)} (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \\ &= \int_{(C)} P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中

$$\int P(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}P[x(t),y(t),z(t)]\dot{x}(t)\mathrm{d}t \tag{102}$$

$$\int Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}q[x(t),y(t),z(t)]\dot{y}(t)\mathrm{d}t \tag{103}$$

$$\int R(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_{\alpha}^{\beta}R[x(t),y(t),z(t)]\dot{z}(t)\mathrm{d}t \tag{104}$$

所以第二型线积分实际上可以转化为三个分量的定积分（第一型线积分）之和来计算。
两类线积分的联系：关键在于积分微元的变化。即 $\mathbf{ds}=\mathbf{e}_\tau\mathrm{d}s$，$\mathbf{e}_\tau$ 是与有向路径 C 方向一致的单位切向量。

2.8.3 第二型面积分

第二型面积分对应的实际问题是流量问题。

定义第二型面积分为

$$\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}(M_k)\cdot\boldsymbol{e_n}(M_k)\Delta S_k \tag{105}$$

其中 $\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e_n}\mathrm{d}S$ 称为曲面的面积微元向量。且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(M)&=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\\ \boldsymbol{e_n}(M)&=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\end{aligned}$$

$\mathrm{e_n}$ 所以有

$$\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)\cos\alpha\mathrm{d}S+Q(x,y,z)\cos\beta\mathrm{d}S+R(x,y,z)\cos\gamma\mathrm{d}S \tag{106}$$

其中 $\mathrm{d}S=||\mathbf{d}\boldsymbol{S}||=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，为面积向量微元在三个坐标面上的投影。或记为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S\cos\alpha&=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}S\cos\beta&=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}S\cos\gamma&=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以还有如下等式

$$\iint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{107}$$

两种面积分的联系：第二型面积分有方向性，转化为无方向性的第一型面积分的时候，用方向向量 $\boldsymbol{e_n}$ 来建立联系。

性质：

1. 改变积分曲面的侧，积分结果变号

2. 对区域的可加性

3. 若闭合曲面 S 所围成的闭合区域被另一位于该区域内部的曲面分成了两个区域，其边界曲面为 S_1, S_2，则

$$\oiint_{(S)} \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{(S_1)} \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} + \oiint_{(S_2)} \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{108}$$

4. 对称性。比如，若积分曲面是关于 yOz 面对称的，且被积函数是关于 x 的**偶函数**（包括 x 的零次方项），则该项为零。

计算：为了简便起见，这里只讨论曲面方程可以用 $z = z(x, y)$ 形式表示出来的情况，并只讨论第三个分量函数 $R(x, y, z)$。

$$\iint_{(S)} R(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \pm \iint_{(\sigma_{x,y})} R(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{109}$$

关注三个点：

1. 正负号。当曲面法向量与 z 轴正向夹角为锐角时取正号，反之取负号

2. 积分域 $\sigma_{x,y}$。$\sigma_{x,y}$ 是曲面在 xOy 面上的投影，如果投影退化为线或点，则直接为零。

3. 积分函数。被积函数中不能再出现 z。

2.9 各种积分的联系及其在场论中的应用

2.9.1 Green 公式

格林公式反映了第二型平面线积分与二重积分的联系，一般用于化简第二型平面线积分。
若平面有界闭区域 σ 由一条分段光滑简单闭曲线 C 围成，$P, Q \in C^{(1)}(\sigma)$，则有

$$\iint_{(\sigma)} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}\sigma = \oint_{(+C)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \tag{110}$$

式中曲线正向是指逆时针。
注意　该公式成立的条件是 σ 是单连通域，若不满足，则应该分割该区域分别应用应用：
对于复杂的非闭合曲线的线积分，可以将其补成一个闭合曲面并减去所补线上的线积分。一般补线选择竖直或水平线。**注意所补的线要保证仍然满足在所给域上一阶可导**
容易混淆的一点是，在线上积分可以代入曲线等式化简积分，但变换到面积上做二重积分的时候，不再满足曲线等式，不能代入。
平面线积分与路径无关的条件

设 $P, Q \in C(\sigma)$，下列命题等价：

1. $$\text{沿着任意闭曲线积分为零：} \oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0, \text{C 为闭合曲线} \tag{111}$$

2. $$\text{从 A 点到 B 点的线积分} \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \text{的值与路径无关} \tag{112}$$

3.
$$\text{被积表达式}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\text{在域内是某个函数的全微分，即}\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \tag{113}$$

4. 若 P,Q 在域内有连续的一阶偏导数，则上述三个命题还有充要条件：
$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{114}$$

第三、四条最常用。

势函数的求法 上述第 3 条中的 $u=u(x,y)$ 是全微分 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数（记得加 C!），又被称为势函数。

1. 用线积分求，选择竖直或水平线积分
2. 用偏积分求，对 x 偏积分的时候，常数项表述为 $\varphi(y)$，再代入 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 求解。
3. 凑全微分求。

2.9.2 Gauss 公式与散度

设有界闭区域 V 由分片光滑曲面 S 围成，$\boldsymbol{A}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在域内有一阶连续偏导数，则
$$\iiint\limits_{(V)}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{115}$$

记为"缺哪项就对哪项求导"。还可记为
$$\iiint\limits_{(V)}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}\mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{116}$$

通量
$$\Phi=\oint_{(S)}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{117}$$

散度（通量密度） 点 M 处的散度为
$$div\boldsymbol{A}(M)=\lim_{\Delta V\to M}\frac{1}{\Delta V}\oiint\limits_{(\Delta S)}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{118}$$

计算公式为
$$div\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \tag{119}$$

则高斯公式可以写成
$$\iiint\limits_{(V)}div\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{120}$$

直观理解就是，一个闭区域中的各点源的散度之和等于该区域表面的通量之和。

2.9.3 Stokes 公式和旋度

斯托克斯公式给出了空间上第二型线积分与所张曲面的第二型面积分的关系。格林公式是斯托克斯公式的退化形式。

$$\oint_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \tag{121}$$

$$= \iint_{(S)} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{122}$$

可以写成向量形式

$$\oint_{(C)} \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \iint_{(S)} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \iint_{(S)} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e_n}\mathrm{d}S \tag{123}$$

旋度旋度是一个向量，该向量的方向可以使该点的环量密度取得最大值。该向量的模即为环量密度的最大值。环量密度，即一条闭曲线的环量在曲线逼近于一点时的极限值。旋度记为 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ 环量密度计算公式：

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S} = [(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e_n}]_M \tag{124}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S} = ||\nabla \times \boldsymbol{A}||||\boldsymbol{e_n}|| \cos\varphi \tag{125}$$

旋度的计算公式（就是对 $\boldsymbol{A}$ 作用一个 nabla 算符）

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{126}$$

或记成向量形式

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

利用旋度，环量密度可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e_n} = ||\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}|| \cos(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e_n}) \tag{127}$$

利用旋度，Stokes 公式可以改写成

$$\oint_{(C)} \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \iint_{(S)} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{128}$$

几种重要的特殊向量场

1. 无旋场。对域内任意闭曲线环量为零

$$\oint_{(C)} \boldsymbol{A}(M)\mathbf{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{129}$$

只要是一维单连域中的连续场，则无旋场、有势场（$\boldsymbol{A} = \nabla u$）、保守场和任意闭曲线环量为零等价。

2. 无源场。散度处处为零 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$。二维单连域下的一阶连续场内，无源场、任意闭曲面通量为零、势函数存在向量势 $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{B}$ 等价。

3. 调和场。既无旋又无源的场。即

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{130}$$

场的其他计算公式

1. $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$

2. $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$“旋无散”

3. $\nabla \times (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$“散无旋”

4. $\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u$

5. $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

3 无穷级数

3.1 正项级数

3.2 常数项级数

定义 设级数的前 n 项和为部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{131}$$

若部分和收敛则级数收敛。性质

1. 收敛级数保持线性
2. 改变、增删有限项不改变级数敛散性。
3. 级数收敛的必要条件是无穷远项无穷小。
4. 收敛级数满足结合律。

3.2.1 正项级数审敛准则

1. 正项级数收敛的充要条件是部分和数列有上界。
2. (比较准则 1) 假设在足够远处有 $a_n \le b_n$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。
3. (比较准则 2) 对于正项级数而言，设
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \tag{132}$$
若 $\lambda > 0$，则两个级数同敛散；
若 $\lambda = 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；
若 $\lambda = +\infty$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散；
4. 积分判别法对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，若存在一个单调减的非负连续函数，使 $f(n) = a_n$，则级数与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散。
5. 检比法对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 设
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \tag{133}$$
若 $\lambda < 1$, 则收敛；若 $\lambda > 1$, 则发散；若 $\lambda = 1$, 则未知；
6. 检根法对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 设
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \tag{134}$$
若 $\lambda < 1$, 则收敛；若 $\lambda > 1$, 则发散；若 $\lambda = 1$, 则未知；

注意，上述判别法都是充分条件，如果其中一个方法不能判断其敛散性，则须换用其他方法。

3.2.2 变号级数审敛准则

特殊地，称 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 为交错级数，有 Leibniz 法则：若级数通项单减到零 (a_n 都是正的，交错靠-1 实现) 则交错级数收敛。且部分和 S_n 与和式的绝对误差不超过 a_{n+1}

$$|S - S_n| \le a_{n+1} \tag{135}$$

定义 绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛。

绝对收敛准则 若级数绝对收敛，则级数收敛。

可重排性 若级数绝对收敛，则级数任意重排后仍然绝对收敛，且和不变。

3.3 函数项级数

称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为函数项级数，使其收敛的 x_0 称为**收敛点**，收敛点构成的集合称为**收敛域**。
函数项级数的一致收敛性 若存在一个函数 S 满足

$$\forall\epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in N_+, s.t.when \quad n > N(\epsilon), \forall x \in D, always \quad |S_N(x) - S(x)| < \epsilon \tag{136}$$

则称级数一致收敛于 S **柯西一致收敛原理** 函数项级数在 D 上一致收敛的充要条件是

$$\forall\epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in N_+, \text{使得}\forall n, p \in N_+, \text{当}n > N(\epsilon)\text{时}, \forall x \in D, \text{恒有}|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)| < \epsilon \tag{137}$$

M 判别法 如果存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$，且恒有 $|n_n(x) \le M_n|$ 则函数项级数在 D 上一致收敛。

和函数的性质

1.（和函数的连续性）若 $u_n \in C(I)$ 且在区间 I 上一致收敛于 S，则和函数 S 也连续。
2. (和函数的可积性) 若级数一致收敛，则和函数的积分等于各项函数积分再求和。
3. (和函数的可导性) 若各项函数一阶连续，级数处处收敛，且各项导数的级数一致收敛，则和函数的求导等于各项函数求导再求和。

3.4 幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{或}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{138}$$

的函数项级数称为幂级数。
Abel 定理 对于幂级数，收敛区间是关于原点对称的一段区间。称收敛区间为 $[-R, R]$，收敛域可能还要加上端点。

3.4.1 收敛半径的求法

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{139}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \tag{140}$$

注意，这里与检根法和检比法恰好相反

3.4.2 幂级数的性质

1.（内闭一致收敛性）在收敛区间内任取一个闭区间，在其上一致收敛。

2. 和函数连续且可导且可积。

3.4.3 函数展开为幂级数

常见的 Maclaurin 展开式要熟记

1.
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \tag{141}$$

2.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ... \tag{142}$$

3.
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ... \tag{143}$$

4.
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ... x \in (-1, 1] \tag{144}$$

5.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ..., x \in (-1, 1) \tag{145}$$

6.
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..., x \in (-1, 1) \tag{146}$$

3.5 Fourier 级数

三角函数系 任意两个不同频率的函数的乘积在一个周期上的积分总为零。三角函数系是正交函数系。

Fourier 展开式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{147}$$

其中各项系数为

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x, k = 0, 1, 2, ... \tag{148}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x, k = 1, 2, ... \tag{149}$$

3.5.1 周期函数的 Fourier 展开

Dirichlet 定理 设函数在 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调，且只有有限个第一类间断点，则该函数的 Fourier 展开式收敛，且其和函数为

$$S(x)=\begin{cases} f(x), x\text{是连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, x\text{是间断点} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, x=\pm\pi \end{cases} \tag{150}$$

Fourier 正弦级数 奇函数的展开式只含正弦项，称为 Fourier 正弦级数。
Fourier 余弦级数 奇函数的展开式只含正弦项，称为 Fourier 余弦级数。

3.5.2 定义在 [0,l] 上函数的 Fourier 展开

做代换 $t=\frac{\pi}{l}x$ 并做延拓，则有

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=f(x) \tag{151}$$

其中的 Fourier 系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}t)\cos nt\mathrm{d}t, n=0,1,2,... \tag{152}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}t)\sin nt\mathrm{d}t, n=1,2,... \tag{153}$$

再将变量换回 x 便得到 f 在 $[-l,l]$ 上的展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}) \tag{154}$$

其中的系数为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n=0,1,2,... \tag{155}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n=1,2,... \tag{156}$$

偶延拓 将 f 从 $[0,l]$ 上的函数延拓为 $[-l,l]$ 上的偶函数，可使得 f 最终展开为余弦级数。
奇延拓 将 f 从 $[0,l]$ 上的函数延拓为 $[-l,l]$ 上的奇函数，可使得 f 最终展开为正弦级数。

3.5.3 Fourier 级数的复数形式

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{in\omega x} \tag{157}$$

其中

$$C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-in\omega x}\mathrm{d}x, n=0,\pm1,\pm2,... \tag{158}$$