电磁在于运动

- 2020年春季-我们体会的历史；
- 4月8日，从杭州飞来武汉的首个进港航班厦航MF8095航班落地，天河机场为首架到达武汉航班飞机举行水门仪式-武汉复苏；
- 从未如此深切感受到变化的宝贵：社会要发展，生活要提升，人们要交流；

在这里，认识并体会一种新的变，电磁场的变化-电磁波，从静态场到时变场；

电磁场在我们身边---求变

教五楼顶，
一瞥有益。

- 这是什么？
- 有何用处？
- 为何能行？

- 天线
- 传递信息
- 信息-变化的电磁场

电磁场与电磁波

第五章　时变电磁场

李顺礼
lishunli621@seu.edu.cn

时变电磁场

- 5.1　时变电磁场方程与边界条件
  - 5.1.1　时变电磁场 — 回顾
  - 5.1.2　时变电磁场方程与边界条件
- 5.2　时变电磁场的唯一性定理
  - 5.2.1　时变电磁场的唯一性定理
- 5.3　时变电磁场的位函数
  - 5.3.1　时变电磁场的波动方程
  - 5.3.2　时变电磁场的位函数和位函数方程
- 5.4　时谐电磁场
  - 5.4.1　时谐场的复数表示
  - 5.4.2　复矢量的 Maxwell方程与边界条件
  - 5.4.3　时谐场的位函数与复数位函数方程
  - 5.4.4　复数介电常数和磁导率
- 5.5　电磁场的能量关系

5.1 时变电磁场方程与边界条件

电磁场理论— 回顾

$\nabla\times\vec{E}=0$

$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

1785年库仑定律

$\rho \longrightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{H}\cdots$

$\nabla\cdot\vec{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

电荷守恒定律

1747年，意义

$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

法拉第电磁

感应定律，1831年

波

的

产

生

$\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

位移电流假说

麦克斯韦1860年

$\vec{J} \longrightarrow \vec{H} \rightarrow \vec{E}\cdots$

$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$

$\nabla\cdot\vec{B}=0$

1825年安培定律

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

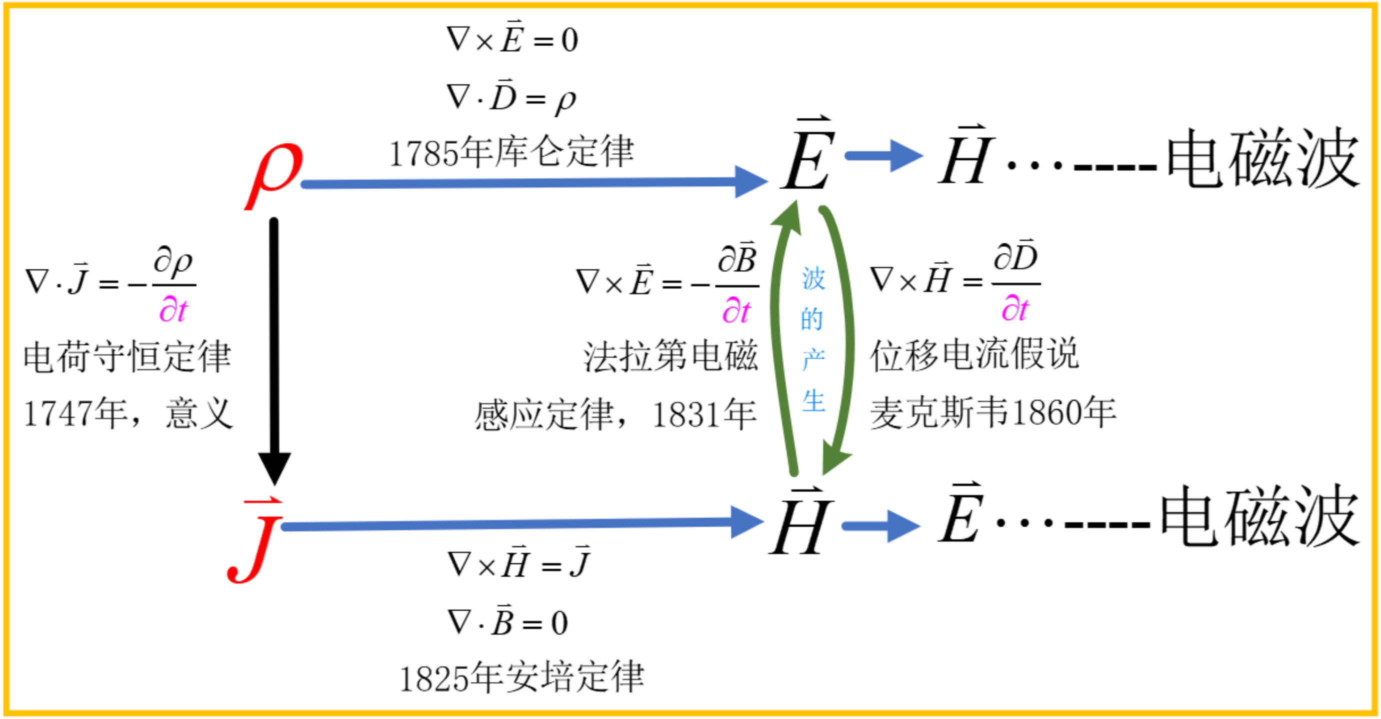
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

- 库伦定律是静电场的基础，安培定律是静磁场的基础；
- 电荷与变化的磁场产生电场+电流与变化的电场产生磁场；
- 1864年-麦克斯韦方程组；
- 麦克斯韦方程组的独立方程：两个表明电磁互生的旋度方程和一个含有电荷源的散度方程（电场高斯定理或电荷守恒定律）；

5.1 时变电磁场方程与边界条件

电磁场理论— 回顾



$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

空间传播；
时间推迟；
电磁波传向**远方**；

- 1864年-麦克斯韦方程组；
- 电磁互生：磁又生电，电又生磁；磁又有电，电又有磁；电电磁磁无穷匮也。---时间推迟；
- 电磁传播：（电磁波的）电场（左足）忽踩自己的磁场（右足）之上，于是便传播了一段距离（升上了一步）；然后磁场（右足）又踏在电场（左足）上，于是再传播了一段距离（高升一步）。如此互生传播（互踩而上），一秒绕地七圈半（一口气升了十六八步）。---空间传播；

5.1 时变电磁场方程与边界条件

电磁场理论— 回顾

$\nabla\times\vec{E}=0$

$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

1785年库仑定律

$\rho \longrightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{H}\cdots$----电磁波

$\nabla\cdot\vec{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

电荷守恒定律

1747年，意义

$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

法拉第电磁

感应定律，1831年

波的产生

$\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

位移电流假说

麦克斯韦1860年

$\vec{J} \longrightarrow \vec{H} \rightarrow \vec{E}\cdots$----电磁波

$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$

$\nabla\cdot\vec{B}=0$

1825年安培定律

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

空间传播；

时间推迟；

电磁波传向远方；

- 1864年-麦克斯韦方程组；
- 电磁互生：时间推迟；
- 电磁传播：空间传播；
- **然而，电磁一体，一体两面**

5.1 时变电磁场方程与边界条件

- 随时间变化的场源产生变化的电场和磁场；
- 变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场；
- 电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场；
- 在时变电磁场中，电场与磁场随着时间和空间而变化；
- 电场随时间的变化引起磁场的空间变化，磁场随时间的变化引起电场的空间变化；
- 电场和磁场相互激励，在空间形成电磁波；
- 时变电磁场的能量以电磁波的形式进行传播；

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\
&\nabla\cdot\vec{B}=0
\end{aligned}
}
$$

静态场到时变场：

质的飞跃

变化带来信息！

5.1 时变电磁场方程与边界条件

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

静态场到时变场：
质的飞跃

变化带来信息！

自然界三大要素：物质、能量、信息；
人类的三种需求：物质，能量，信息！
本学科之所以重要：电磁波是信息载体！

5.1　时变电磁场方程与边界条件

一般形式的边界条件：

$$n \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0$$

$$n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}_S$$

$$n \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_S$$

$$n \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0$$

分界面上，$\boldsymbol{E_t}$ 连续

思考：我们为何这么重视边界条件呢？

分界面上无表面电流时，$\boldsymbol{H_t}$ 连续

分界面上无自由电荷时，$\boldsymbol{D_n}$ 连续

分界面上，$\boldsymbol{B_n}$ 连续

- 微分形式的麦克斯韦方程组在边界上不成立；
- 不同媒质的分界面两侧电磁场矢量是不连续的；
- 理想导体内部不存在电磁场，表面可以有面电流和自由面电荷；
- 理想介质表面没有传导面电流和自由面电荷（非特意放置时作何选择？）；
- 导电媒质内部可以有电磁场和传导电流，表面没有传导面电流，表面一般有自由面电荷；

5.2 时变电磁场的唯一性定理

5.2.1 时变电磁场的唯一性定理

时变电磁场的唯一性定理：

- 前提：在以闭合曲面 S 为边界的有界区域 V 内，
- 边值条件：在 $t \geq 0$ 所有时间内，给定边界面 S 上的电场强度 E 的切向分量或磁场强度 H 的切向分量；
- 初值条件：给定 $t=0$ 时刻整个区域内电场强度 E 和磁场强度 H 的初始值；
- 结论：在 $t \geq 0$ 时，区域 V 内的电磁场由 Maxwell 方程唯一地确定。

- 满足麦克斯韦方程组及初值边值条件的电磁场是唯一的；
- 对比静态场的唯一性定理的异同：初值条件
- 边界条件不独立，切向即可；
- 唯一性定理对求解做了保障，但没有给出具体求解麦克斯韦方程组的方法；
- 如何求解麦克斯韦方程组呢？

5.3 时变电磁场的位函数

5.3.1 时变电磁场的波动方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

电场和磁场是耦合的 $\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}\xrightarrow[\text{消元}]{\text{本构关系}}\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$

$\xRightarrow{\vec{E}\text{和}\vec{H}\text{是求解目标}}\begin{cases}\vec{E}\text{表示为}\rho\text{和}\vec{J}_c\text{的函数}\\ \vec{H}\text{表示为}\rho\text{和}\vec{J}_c\text{的函数}\end{cases}$

$\xRightarrow{\vec{E}\text{和}\vec{H}\text{解耦是求解方向}}\begin{cases}\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu\nabla\times\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\times\vec{J}_c+\varepsilon\nabla\times\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$

5.3 时变电磁场的位函数

5.3.1 时变电磁场的波动方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}\xRightarrow{\vec{E}\text{和}\vec{H}\text{解耦是求解方向}}\begin{cases}\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu\nabla\times\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\times\vec{J}_c+\varepsilon\nabla\times\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{E}\\ \nabla^2\vec{H}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{H}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\nabla\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\right)+\mu\nabla\times\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla^2\vec{H}=-\nabla\times\vec{J}_c-\varepsilon\nabla\times\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

非齐次波动方程

齐次波动方程

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\dfrac{\partial\vec{J}_c}{\partial t}+\dfrac{\nabla\rho}{\varepsilon}\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}_c\end{cases}\xrightarrow[\rho=0]{\vec{J}_c=0}\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$$

5.3 时变电磁场的位函数

5.3.1 时变电磁场的波动方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\dfrac{\partial\vec{J}_c}{\partial t}+\dfrac{\nabla\rho}{\varepsilon}\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}_c\end{cases}\xrightarrow[\rho=0]{\vec{J}_c=0}\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}\Rightarrow v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\Rightarrow\begin{cases}3\times10^8\ m/s\\ \text{媒质决定，不可更大}\\ \text{没有参考系}\end{cases}$$

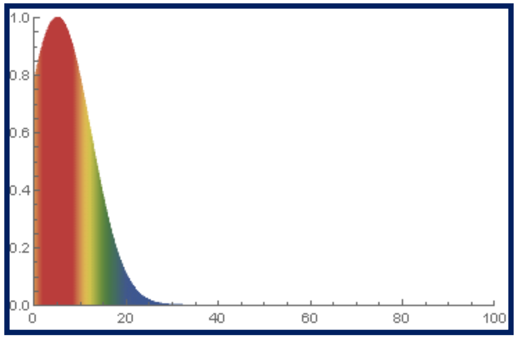
- 1864年–麦克斯韦方程组；
- 电磁场满足波动方程----**这是波！** ----传播到远方；
- 传播到远方的真实含义是什么？-----与热传导方程的比较；

热量传播过程中，需要温度差才可以扩散，故能量不会全部到达远方； 静止电荷或恒定电流一旦消失，它们产生的场也随之失去，因而静态场称为束缚场，没有辐射作用。

- 把所有能量送到远方，有何益处？

$$\nabla^2 u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\text{-波动方程}$$

$$\nabla^2 u-\frac{\partial u}{\partial t}=0\text{---热传导方程}$$



5.3 时变电磁场的位函数

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\text{-波动方程}$$

$$\nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0\text{---热传导方程}$$

5.3.1 时变电磁场的波动方程

非齐次波动方程　　　　齐次波动方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \dfrac{\partial \vec{J}_c}{\partial t} + \dfrac{\nabla \rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J}_c \end{cases} \xrightarrow[\rho=0]{\vec{J}_c=0} \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow \begin{cases} 3\times 10^8 \quad m/s \\ \text{媒质决定，不可更大} \\ \text{没有参考系} \end{cases}$$

- 1864年-麦克斯韦方程组；
- 电磁场满足波动方程----这是波！ ---传播到远方；
- 传播到远方的真实含义是什么？-----与热传导方程的比较；

  热量传播过程中，需要温度差才可以扩散，故能量不会全部到达远方；
- 把所有能量送到远方，有何益处？
- 波动方程的常数项-----传播速度；
- 电磁波的波动方程：最快、有限且不变的速度；
- 这么快的把能量送到远方，有何益处？

最快：不能超过光速
有限：不是无穷大，所以形成波
不变：参考系无关-相对论

5.3 时变电磁场的位函数

5.3.1 时变电磁场的波动方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\dfrac{\partial\vec{J}_c}{\partial t}+\dfrac{\nabla\rho}{\varepsilon}\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}_c\end{cases}\xrightarrow[\rho=0]{\vec{J}_c=0}\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}\Rightarrow v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\Rightarrow\begin{cases}3\times10^8\quad m/s\\ \text{媒质决定，不可更大}\\ \text{没有参考系}\end{cases}$$

- 1864年-麦克斯韦方程组；
- 电磁场满足波动方程----**这是波！**---传播到远方；
- 电磁波的波动方程：**最快**、有限且不变的速度；
- 这么快的把能量送到远方，有何益处？
- Heinrich Rudolph Hertz，实验证实经典电磁理论；
- 电磁波存在，产生，传输，接收；
- 电磁波速＝光速，电磁波与光具有同一性；
- 赫兹当时认为电磁波没有什么用！！！
- 当今电磁波在应用中的基础地位；

5.3 时变电磁场的位函数

5.3.1 时变电磁场的波动方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{H}=0 \end{cases} \xRightarrow{\vec{E}\text{和}\vec{H}\text{解耦是求解方向}} \begin{cases} \nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\dfrac{\partial\vec{J}_c}{\partial t}+\dfrac{\nabla\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}_c \end{cases}$$

- 从麦克斯韦方程组到电场和磁场各自与场源的关系式；
- 若是无源区，可以直接求解电场和磁场；
- 若是有源区，场源关系复杂，不是直接的场源-造成求解困难；
- 静态场问题求解---位函数
- 时变场问题求解---故技重施？我们前面的伎俩是什么？

5.3 时变电磁场的位函数

5.3.2 时变电磁场的位函数和位函数的方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0 & \overset{\text{其旋不散}}{\Longrightarrow} & \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \nabla\times\left(\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 & \overset{\text{其梯不旋}}{\Longrightarrow} & \vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\\ \nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

$\vec{A}$： 动态矢量位函数

φ： 动态标量位函数

- 只确定了矢量磁位的旋度，还需要确定其散度；
- 没有其他约束的情况下，规定矢量磁位的散度-洛伦兹规范；

5.3 时变电磁场的位函数

5.3.2 时变电磁场的位函数和位函数的方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0 \overset{\text{其旋不散}}{\Rightarrow} \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \nabla\times\left(\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \overset{\text{其梯不旋}}{\Rightarrow} \vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\\ \nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

$\vec{A}$：动态矢量位函数

φ：动态标量位函数

$$\xrightarrow[\text{Lorentz Condition}]{\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

洛仑兹规范

达朗贝尔方程（非齐次方程）

此方程表明矢位 $\vec{A}$ 的源是 $\vec{J}$，而标位 φ 的源是 ρ 。

时变场中 $\vec{J}$ 和 ρ 是相互联系的

5.3 时变电磁场的位函数

有源区域：非齐次方程

$$\begin{cases}\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\dfrac{\partial\vec{J}_c}{\partial t}+\dfrac{\nabla\rho}{\varepsilon}\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}_c\end{cases}\\ \begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}\xrightarrow{\text{静态情况}}\begin{cases}\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}_c\\ \nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}\end{cases}$$

无源区域：齐次方程

$$\begin{cases}\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}\\ \begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0\end{cases}\xrightarrow{\text{静态情况}}\begin{cases}\nabla^2\vec{A}=0\\ \nabla^2\varphi=0\end{cases}\end{cases}$$

- 场量的波动方程和位函数的波动方程；
- 我们又化难为繁！
- 退化为静态场：波动方程-稳定场方程；
- 波动方程，达朗贝尔方程，泊松方程，拉普拉斯方程；

5.3 时变电磁场的位函数

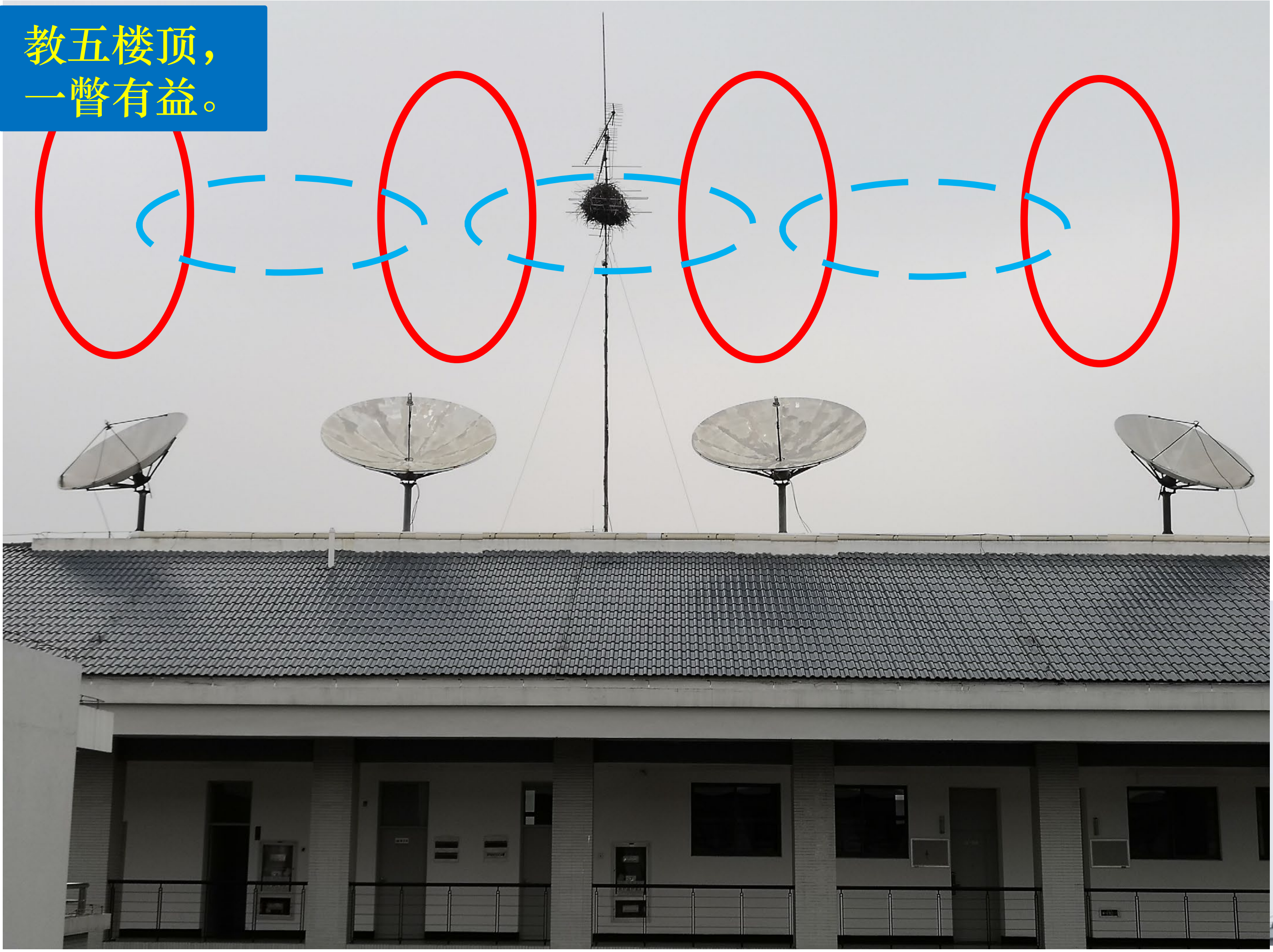
$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, & \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}, & \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{r})=\int_V\frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 R}dV'\leftrightarrow\varphi(\vec{r},t)=\int_V\frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\dfrac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 R}dV'\\ \vec{A}(\vec{r})=\int_V\frac{\mu_0\vec{J}(\vec{r}\,')}{4\pi R}dV'\leftrightarrow\vec{A}(\vec{r},t)=\int_V\frac{\mu_0\vec{J}\left(\vec{r}\,',t-\dfrac{r}{c}\right)}{4\pi R}dV'\end{aligned}\right\}\text{无限大自由空间中的解}$$

- 位函数与场源之间的关系简单-有源区位函数优势明显；
- 位函数求解电磁场是把复杂问题拆分为两步完成；
- 上述形式是在洛伦兹规范下导出的；
- 可以引入其他位函数，如赫兹矢量位函数等；

1746年，达朗贝尔发现了一维波动方程，欧拉在其后10年之内发现了三维波动方程；达朗贝尔方程一般是指位函数的波动方程；和电场和磁场的波动方程相区别；

电磁场在我们身边---求变



- 这是什么？
- 有何用处？
- 为何能行？

- 天线
- 传递信息
- 信息-变化的电磁场

5.4 时谐电磁场

5.4.1 时谐电磁场的复数表示

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c(\vec{r},t)\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon}\end{cases}$$

- 麦克斯韦方程是一阶线性偏微分方程；
- 线性系统；
- 复杂信号激励的线性系统—仍不易求解!

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+\cdots x_n(t)+\cdots$$

线性系统

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)+\cdots y_n(t)+\cdots$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

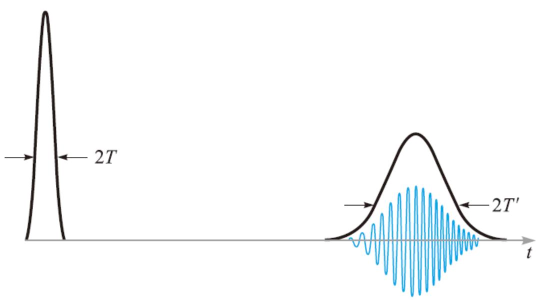
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

- 找到“简单”的激励函数；简单—数学特性好；
- 信号空间；完备正交基；求解简单；
- 傅里叶变换；拉普拉斯变换等；
- 单频激励下，线性系统的响应是同频的---无始无终的稳态；
- 单频激励下求解麦克斯韦方程组，则问题容易解决；
- 时谐形式的方程组，场，位函数，边界条件，媒质参数，定理；

5.4 时谐电磁场

5.4.1 时谐电磁场的复数表示



限定了时间变化规律，能带来什么益处?

$$F\cos(\omega t+\varphi)\Rightarrow \text{线性系统}\Rightarrow F'\cos(\omega t+\varphi')$$

$$\Downarrow$$

$$F\angle\varphi\Rightarrow \text{线性系统}\Rightarrow F'\angle\varphi'$$

$$\Downarrow$$

$$H(\omega)=\frac{F'}{F}\angle(\varphi'-\varphi)=\frac{F'}{F}e^{j(\varphi'-\varphi)}$$

- 时域求解波形幅度都发生变化---复杂;
- 随时间按照正余弦关系变化的信号（电磁信号）通过线性系统:
- 频率不变，波形不变，求解简单;
- 隐去时间，消元降阶，数学形式简洁，物理意义明确;
- 然而，信号与系统都如此表示才可以;

5.4 时谐电磁场

5.4.1 时谐电磁场的复数表示

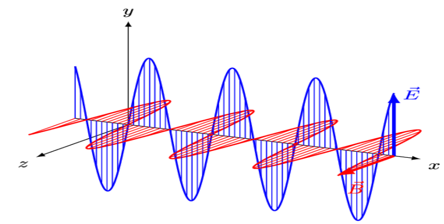
- 在时变电场中，如果场量以一定的角频率随时间呈时谐变化，则所产生的电磁场也以同样的角频率随时间发生变化。这种以一定的角频率作时谐变化的电磁场，称为**时谐电磁场或者正弦电磁场（时谐，简谐，正弦）**；
- 每一点都是随时间简谐变化的，因此时间变量和空间**变量分离，在频域可以表示为两个函数的乘积的形式**；
- 并限定时间函数部分随时间变量按照时谐形式变化；
- 在直角坐标系中，如果场随时间是按照正余弦关系变化的，如下所示：

$$\vec{F}(x,y,z,t)=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i g_{mi}(x,y,z,\cancel{t})\cdot f(\cancel{x,y,z},t)$$

$$=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i F_{mi}(x,y,z,\cancel{t})\cos[\omega t+\varphi_i(x,y,z,\cancel{t})]$$

$$=\vec{a}_x F_{mx}\cos(\omega t+\varphi_x)+\vec{a}_y F_{my}\cos(\omega t+\varphi_y)+\vec{a}_z F_{mz}\cos(\omega t+\varphi_z)$$

$$=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i F_i$$



相位是空间的函数；
相位维系了不同空间的相互关联；

5.4 时谐电磁场

5.4.1 时谐电磁场的复数表示

$$\vec{F}(x,y,z,t)=\vec{a}_x F_{mx}\cos(\omega t+\varphi_x)+\vec{a}_y F_{my}\cos(\omega t+\varphi_y)+\vec{a}_z F_{mz}\cos(\omega t+\varphi_z)$$

$$=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i F_{mi}(x,y,z,\cancel{t})\cos[\omega t+\varphi_i(x,y,z,\cancel{t})]=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i F_i$$

- 希望把臃肿并且复杂运算的三角函数转化为复指数形式；
- 欧拉公式；

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

$$F_i=F_{mi}(x,y,z,\cancel{t})\cos[\omega t+\varphi_i(x,y,z,\cancel{t})]$$

$$=\mathrm{Re}[F_{mi}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_i)}]=\mathrm{Re}[F_{mi}e^{j\varphi_i}\cdot e^{j\omega t}]$$

$=\mathrm{Re}[\dot{F}_{mi}\cdot e^{j\omega t}]$----- $\dot{F}_{mi}$ 为分量的相量

$$\vec{F}(x,y,z,t)=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i F_i$$

$$=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i\mathrm{Re}[\dot{F}_{mi}\cdot e^{j\omega t}]$$

$$=\mathrm{Re}[(\vec{a}_x\dot{F}_{mx}+\vec{a}_y\dot{F}_{my}+\vec{a}_z\dot{F}_{mz})\cdot e^{j\omega t}]$$

$$=\mathrm{Re}[\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}]$$

$$=\sum_{i=x,y,z}\vec{a}_i g_{mi}(x,y,z,\cancel{t})\cdot f(\cancel{x,y,z},t)$$

$$\dot{\vec{F}}_m=\vec{a}_x\dot{F}_{mx}+\vec{a}_y\dot{F}_{my}+\vec{a}_z\dot{F}_{mz}\Rightarrow\begin{cases}\text{复矢量}\\\text{复振幅}\end{cases}$$

5.4 时谐电磁场

5.4.1 时谐电磁场的复数表示

$$\vec{F}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}]$$

"跳动的世界里找你的频率
流动的时间里找你的旋律"
-- 《频率》苏打绿演唱

(1) $\dot{\vec{F}}_m$ 是时谐函数$\vec{F}(x,y,z,t)$的复振幅(复矢量) $\Rightarrow$ 一一对应;

(2) $\dot{\vec{F}}_m$ 只是空间变量的函数，与时间变量无关 $\Rightarrow$ 减少变量;

(3)时空变量分离，集中力量处理空间变量;

- 时域形式转化为复数形式;
- 给定时间变化规律后，只关注空间变化规律!
- 复矢量的虚部实际上是没有规定的;
- 并不对应物理过程，只具有运算意义;
- 复矢量的形式，引入了频率的概念;
- 频域概念和分析方法的引入;
- 限定了时间变化规律---规定了场随时间的变化规律---函数本身和导数!

- 频率是时谐电磁场的要素之一;
- 频率的变化表示不同信息-调频;
- 频率不仅仅可以不同;
- 频率的正交性—频分复用;
- 这种正交性是信号空间的关键;
- 频率沟通了时间变量;

5.4 时谐电磁场

5.4.1 时谐电磁场的复数表示

$$\vec{E}(\vec{r},t) \leftrightarrow \dot{\vec{E}}_m(\vec{r})$$
$$\vec{D}(\vec{r},t) \leftrightarrow \dot{\vec{D}}_m(\vec{r})$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) \leftrightarrow \dot{\vec{B}}_m(\vec{r})$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) \leftrightarrow \dot{\vec{H}}_m(\vec{r})$$
$$\vec{J}(\vec{r},t) \leftrightarrow \dot{\vec{J}}_m(\vec{r})$$
$$\rho(\vec{r},t) \leftrightarrow \dot{\rho}_m$$

$$\vec{F}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\dot{\vec{F}}_m \cdot e^{j\omega t}]$$

信号（电磁信号）已经就范，
麦克斯韦方程组还会远吗?

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- 利用复数来描述正弦电磁场，使数学运算简化，物理意义明确：时间**稳态**；
- 电磁场量和源量已经表示为复矢量的形式，还有麦克斯韦方程组呢？；

5.4 时谐电磁场

5.4.2 复矢量的Maxwell方程和边界条件

$$\boxed{\vec{F}\left(x,y,z,t\right)=\mathrm{Re}[\,\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}\,]}$$

$$\vec{F}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\,\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}\,]\leftrightarrow\dot{\vec{F}}_m(\vec{r})$$

$$\frac{\partial\vec{F}(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{\partial(\mathrm{Re}[\,\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}\,])}{\partial t}=\mathrm{Re}[j\omega\,\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}\,]\leftrightarrow j\omega\,\dot{\vec{F}}_m(\vec{r})$$

$$\frac{\partial^2\vec{F}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=\mathrm{Re}[\,-\omega^2\,\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}\,]\leftrightarrow-\omega^2\,\dot{\vec{F}}_m(\vec{r})$$

- 限定了时间变化规律---规定了场随时间的变化规律---函数本身和导数！
- 时域形式转换为复矢量形式，实质是隐去时间变量；
- 时域微分对应了复矢量乘以jw；
- 降阶减元，简化运算；

信号（电磁信号）已经就范，
麦克斯韦方程还会远吗？

5.4 时谐电磁场

5.4.2 复矢量的Maxwell方程和边界条件

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathrm{Re}[\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]+\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]}{\partial t}$$

$$\mathrm{Re}[\nabla\times\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}+\frac{\partial\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}}{\partial t}]$$

$$\mathrm{Re}[\nabla\times\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}+j\omega\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]$$

- 注意哈密尔顿算符是针对空间变量的，取实部是针对时间变量的；
- 对于空间变量的运算与对于时间变量的运算可以交换顺序；

5.4 时谐电磁场

5.4.2 复矢量的Maxwell方程和边界条件

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathrm{Re}[\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]+\frac{\partial\,\mathrm{Re}[\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]}{\partial t}$$

$$\mathrm{Re}[\nabla\times\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}+j\omega\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}]$$

↓不等价变形

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}=\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}+j\omega\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\cdot e^{j\omega t}$$

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})=\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})+j\omega\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})$$

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}+j\omega\dot{\vec{D}}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}[\dot{\vec{F}}_m\cdot e^{j\omega t}]=\vec{F}(x,y,z,t)}$$

- 对于方程的虚部，没有物理定义，只有运算形式；
- 假想了一个虚部，与原有的实部一起构成复数利于运算，最后再舍掉虚部；
- 求解出复矢量形式后需要转换为时域形式；
- 毫不利己专门利人的虚部！

5.4 时谐电磁场

5.4.2 复矢量的Maxwell方程和边界条件

时谐电磁场中的复矢量所满足的Maxwell方程为：

微分形式:

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})=\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})+j\omega\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})$$

$$\nabla\times\dot{\vec{E}}_m(\vec{r})=-j\omega\dot{\vec{B}}_m(\vec{r})$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{B}}_m(\vec{r})=0$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})=\dot{\rho}_m(\vec{r})$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})=-j\omega\dot{\rho}_m(\vec{r})$$

积分形式:

$$\oint_C\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})\cdot d\vec{l}=\int_S\left[\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})+j\omega\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\right]\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C\dot{\vec{E}}_m(\vec{r})\cdot d\vec{l}=-j\omega\int_S\dot{\vec{B}}_m(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S\dot{\vec{B}}_m(\vec{r})\cdot d\vec{S}=0$$

$$\oint_S\dot{\vec{D}}_m(\vec{r})\cdot d\vec{S}=\int_V\dot{\rho}_m(\vec{r})dV$$

$$\oint_S\dot{\vec{J}}_m(\vec{r})\cdot d\vec{S}=-j\omega\int_V\dot{\rho}_m(\vec{r})dV$$

5.4 时谐电磁场

5.4.2 复矢量的电磁理论

麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}+j\omega\dot{\vec{D}}$$

$$\nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\dot{\vec{B}}$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{B}}=0$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{D}}=\dot{\rho}$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{J}}=-j\omega\dot{\rho}$$

简单媒质中的本构关系

$$\dot{\vec{D}}=\varepsilon\dot{\vec{E}}$$

$$\dot{\vec{J}}=\sigma\dot{\vec{E}}$$

$$\dot{\vec{B}}=\mu\dot{\vec{H}}$$

$$\dot{\vec{J}}=\rho\dot{\vec{v}}$$

$$n\times\left(\dot{\vec{H}}_1-\dot{\vec{H}}_2\right)=\dot{\vec{J}}_S$$

$$n\cdot\left(\dot{\vec{D}}_1-\dot{\vec{D}}_2\right)=\dot{\rho}_S$$

$$n\times\left(\dot{\vec{E}}_1-\dot{\vec{E}}_2\right)=0$$

$$n\cdot\left(\dot{\vec{B}}_1-\dot{\vec{B}}_2\right)=0$$

至此，信号（电磁信号）+麦克斯韦方程的时谐形式都已完成！
能够在时域和频域之间来去自如！

课后范例

例 1 将下列场矢量的瞬时值形式写为复数形式

(1) $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(z,t)=\vec{a}_x E_{xm}\cos\left(\omega t-kz+\varphi_x\right)+\vec{a}_y E_{ym}\sin\left(\omega t-kz+\varphi_y\right)$

(2) $\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}(x,z,t)=\vec{a}_x H_0 k\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(kz-\omega t\right)+\vec{a}_y H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(kz-\omega t\right)$

解：

(1) $\vec{E}(z,t)=\vec{a}_x E_{xm}\cos\left(\omega t-kz+\varphi_x\right)+\vec{a}_y E_{ym}\cos\left(\omega t-kz+\varphi_y-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\mathrm{Re}\left[\vec{a}_x E_{xm} e^{j(\omega t-kz+\varphi_x)}+\vec{a}_y E_{ym} e^{j\left(\omega t-kz+\varphi_y-\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{E}}_m(z)=\vec{a}_x E_{xm} e^{j(-kz+\varphi_x)}+\vec{a}_y E_{ym} e^{j\left(-kz+\varphi_y-\frac{\pi}{2}\right)}=\left(\vec{a}_x E_{xm} e^{j\varphi_x}-\vec{a}_y jE_{ym} e^{j\varphi_y}\right)e^{-jkz}}$$

(2) $\vec{H}(x,z,t)=\vec{a}_x H_0 k\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t-kz+\frac{\pi}{2}\right)+\vec{a}_y H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t-kz\right)$

$$\vec{H}_m(x,z)=\left[\vec{a}_x jH_0 k\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\vec{a}_y H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]e^{-jkz}$$

课后范例

例 2 已知电场强度复矢量如下，写出电场强度的瞬时值

$$\dot{\vec{E}}_m(z)=\vec{a}_x jE_{xm}\cos\left(k_z z\right)$$

解：$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\vec{a}_x jE_{xm}\cos\left(k_z z\right)e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\vec{a}_x E_{xm}\cos\left(k_z z\right)e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$=\vec{a}_x E_{xm}\cos\left(k_z z\right)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=-\vec{a}_x E_{xm}\cos\left(k_z z\right)\sin\omega t$$

（1）我们整本书采用Re和cos的形式；
（2）几个特殊值：e（j0）=1； e（jπ）=-1； e（j0.5π）=j； e（-j0.5π）=-j;
（3）瞬时形式和复数形式：形式决定波，每个参数在形式中的位置；
（4）瞬时形式的相位项，有时间和空间变量的才是相位项；
（5）写为瞬时形式时，初相位一定要放到相位项中；

5.4 时谐电磁场

5.4.3 时谐场的位函数与复数位函数方程

$$
\begin{cases}
\dot{\vec{B}} = \nabla \times \dot{\vec{A}} \\
\vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \leftrightarrow \dot{\vec{E}} = -\nabla\dot{\varphi} - j\omega\dot{\vec{A}} \\
\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \leftrightarrow \nabla \cdot \dot{\vec{A}} = -j\omega\mu\varepsilon\dot{\varphi}
\end{cases}
$$

- 1746年，达朗贝尔发现了一维波动方程，欧拉在其后10年之内发现了三维波动方程；
- 达朗贝尔方程和波动方程相似；
- 达朗贝尔方程是针对位函数；
- 波动方程针对场量；
- 不显含时间变量（时谐）形式的波动方程称为**亥姆霍兹方程**；

洛仑兹条件

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \leftrightarrow \nabla^2\dot{\vec{A}} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\vec{A}} = -\mu\dot{\vec{J}}_c \\
\nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \leftrightarrow \nabla^2\dot{\varphi} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\varphi} = -\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon}
\end{cases}
$$

$$
\xrightarrow{k^2=\omega^2\mu\varepsilon}
\begin{cases}
\nabla^2\dot{\vec{A}} + k^2\dot{\vec{A}} = -\mu\dot{\vec{J}}_c \\
\nabla^2\dot{\varphi} + k^2\dot{\varphi} = -\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon}
\end{cases}
\xrightarrow{\dot{\vec{J}}_c=0,\ \dot{\rho}=0}
\begin{cases}
\nabla^2\dot{\vec{A}} + k^2\dot{\vec{A}} = 0 \\
\nabla^2\dot{\varphi} + k^2\dot{\varphi} = 0
\end{cases}
$$

5.4 时谐电磁场

5.4.4 复数介电常数和复数磁导率

- 方程是复频域表示，媒质特性也要在复频域表示；
- 媒质的极化、磁化和导电特性，分别用介电常数、磁导率和电导率来描述；
- 电导率为有限值的导电媒质（存在欧姆损耗）；

无耗媒质：$\nabla\times\dot{\vec{H}} = j\omega\dot{\vec{D}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}$

有耗媒质：$\nabla\times\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + j\omega\dot{\vec{D}} = \sigma\dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}} = j\omega\left(\varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}\right)\dot{\vec{E}}$

$$\xrightarrow{\dot{\varepsilon}_c=\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}} = \nabla\times\dot{\vec{H}}=j\omega\dot{\varepsilon}_c\dot{\vec{E}}$$

- 引入等效复数介电常数或复电容率，虚部反映了媒质的损耗特性；
- 媒质由于其导电性而引起的损耗，注意**损耗在虚部并且是负数**；
- 形式上，有耗和无耗的方程是相似的；
- 特别注意，上述方程可能是针对无源区的，传导电流未必只是源；

5.4 时谐电磁场

5.4.4 复数介电常数和复数磁导率

- 实际的媒质都是有损耗的；
- 电导率为有限值的导电媒质存在欧姆损耗，电介质存在电极化损耗，磁介质存在磁化损耗；
- 损耗的大小除与媒质的材料有关外，也与场随时间变化的快慢有关，电偶极子随着外加场的振动；
- 一些媒质在低频场中的损耗可以忽略，在高频场中损耗往往就不能忽略了；
- 电偶极子和分子环流--有反作用的从动；
- 存在电极化损耗的电介质-极化过程中的损耗；

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''}$$

- 复数介电常数或复电容率，实部储能，虚部损耗；
- 媒质存在电极化损耗，ε'与ε''都是频率的函数；

5.4　时谐电磁场

5.4.4　复数介电常数和复数磁导率

- 同时存在欧姆损耗和电极化损耗的电介质；
- 电导率和介电常数虚部都产生损耗；
- 介电常数虚部的损耗与频率相关；
- 传导电流和位移电流可以用一个等效位移电流代替；
- 导电媒质和有耗媒质也是简单媒质（各向同性媒质）；

$$\nabla\times\dot{H}=\sigma\dot{E}+j\omega(\varepsilon'-j\varepsilon'')\dot{E}=(\sigma+\omega\varepsilon'')\dot{E}+j\omega\varepsilon'\dot{E}$$

$$=j\omega\left[\varepsilon'-j\left(\varepsilon''+\frac{\sigma}{\omega}\right)\right]\dot{E}$$

$$\xrightarrow{\dot{\varepsilon}_c=\varepsilon'-j\left(\varepsilon''+\frac{\sigma}{\omega}\right)}=j\omega\dot{\varepsilon}_c\dot{E}$$

$$\nabla\times\dot{H}=j\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}\begin{cases}\text{无耗：}\ \dot{\varepsilon}=\varepsilon\\ \text{有耗：}\ \dot{\varepsilon}_c=\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{\omega}\\ \text{有耗：}\ \dot{\varepsilon}_c=\varepsilon'-j\left(\varepsilon''+\dfrac{\sigma}{\omega}\right)\end{cases}$$

5.4 时谐电磁场

5.4.4 复数介电常数和复数磁导率

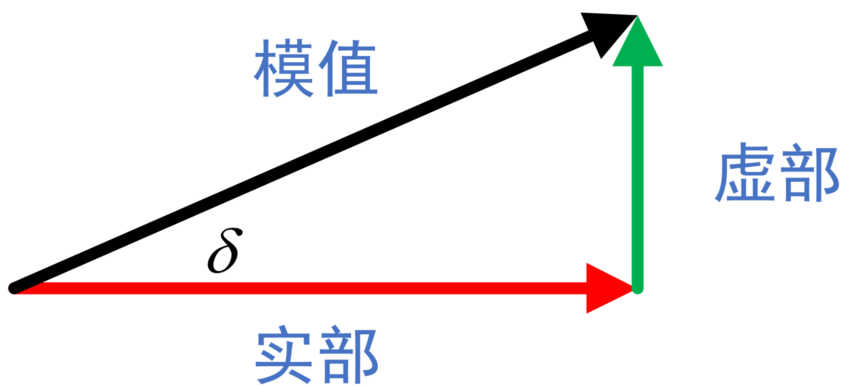
$$\boxed{\dot{\mu} = \mu' - j\mu''}$$

- **存在磁化损耗的磁介质，损耗在虚部并且为负数；**
- 复数磁导率，媒质存在磁化损耗，**μ‘与μ“**都是频率的函数；
- 通常用损耗角正切来表征媒质的损耗，其他类似的表示方法？；
- 损耗角正切也可以同时包含传导损耗和极化损耗；

$$\text{导电媒质}: \tan\delta_\sigma = \frac{\sigma/\omega}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}$$

$$\text{有耗介质}: \tan\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

$$\text{磁介质}: \tan\delta_\mu = \frac{\mu''}{\mu'}$$



时谐场的表示方法，利于色散媒质的电磁参数表示；

5.4 时谐电磁场

频域形式的电磁理论

麦克斯韦方程组-系统函数

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}+j\omega\dot{\vec{D}}$$

$$\nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\dot{\vec{B}}$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{B}}=0$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{D}}=\dot{\rho}$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec{J}}=-j\omega\dot{\rho}$$

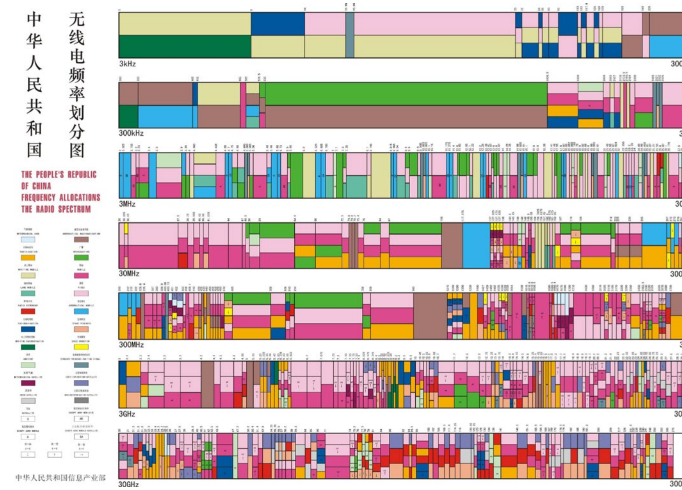
"跳动的世界里找你的**频率**
流动的**时间**里找你的旋律"
-- 《频率》苏打绿演唱

- 频率是时谐电磁场的要素之一；
- 频率的不同可以表示不同信息-调频；
- 频率不仅仅可以不同；
- 频率的正交性—频分复用；
- 频率沟通了时间变量；

- 分解：一般场源分解为一系列时谐场源--完备正交性；
- 通过：所有时谐场源通过系统的时谐响应-只有幅相改变；
- 合成：所有时谐响应合成为实际响应--线性系统；
- **频域**分析方法，描述的仍然是时域空域的物理过程，是一个数学策略；
- 这是化整为零的策略，与标准化流水线的思想类似；

5.4 时谐电磁场

- 时谐电磁场是求解电磁问题的频域方法；
- 频域分析方法与工程的理想结合；
- 频谱划分；
- 对于窄带、色散问题非常有效；
- 接下来的分析，很多都是采用时谐分析；
- 频域方法是极为重要的分析方法；
- 电磁场时空域的本质属性，这也是时谐场分析能够简化的根源；



然而…回头反思

- 电磁现象是发生在时空域的物理过程，不管诉诸何种变换域求解方法，都不忘记时空域理解；
- 频域求解过程中，常常变换到时域看看物理过程；
- 能够在时域和变换域方法之间并行不悖；

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.1 坡印亭定理的推导

- 电磁波本身是一种物质，电磁波具有能量，电磁波是信息载体；
- 能量是物质的属性之一；
- 能量守恒定律的电磁场版本：电场和磁场都具有能量。当场随时间变化时，空间各点的电磁场能量密度也要随着时间改变，从而引起电磁能量的流动和交换，能量总和保持不变；
- Poynting’s theorem-1884年；

XV. *On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field.*

By J. H. POYNTING, *M.A., late Fellow of Trinity College, Cambridge, Professor of Physics, Mason College, Birmingham.*

Communicated by Lord RAYLEIGH, *M.A., D.C.L., F.R.S.*

Received December 17, 1883,—Read January 10, 1884.

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.1 坡印亭定理的推导

- 能量守恒定律的电磁场版本：电场和磁场都具有能量。当场随时间变化时，空间各点的电磁场能量密度也要随着时间改变，从而引起电磁能量的流动和交换，能量总和保持不变；

Maxwell, to look upon the medium surrounding the conductor as playing a very important part in the development of the phenomena. If we believe in the continuity of the motion of energy, that is, if we believe that when it disappears at one point and reappears at another it must have passed through the intervening space, we are forced to conclude that the surrounding medium contains at least a part of the energy, and that it is capable of transferring it from point to point.

Upon this basis Maxwell has investigated what energy is contained in the medium, and he has given expressions which assign to each part of the field a quantity of energy depending on the electromotive and magnetic intensities and on the nature of the matter at that part in regard to its specific inductive capacity and magnetic permeability. These expressions account, as far as we know, for the whole

How does the energy about an electric current pass from point to point—that is, by what paths and according to what law does it travel from the part of the circuit where it is first recognisable as electric and magnetic to the parts where it is changed into heat or other forms?

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.1 坡印亭定理的推导

- 电磁波本身是一种物质，电磁波具有能量，电磁波是信息载体；
- 能量是物质的属性之一；
- 能量守恒定律的电磁场版本：电场和磁场都具有能量。当场随时间变化时，空间各点的电磁场能量密度也要随着时间改变，从而引起电磁能量的流动和交换，能量总和保持不变；
- Poynting’s theorem-1884年；

- 电磁能量怎么计算？两个矢量点乘得到一个标量！

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dV$$

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} =$$

$$p = \vec{J}\cdot\vec{E} - \text{热功率}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B} dV$$

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.5 常用的矢量恒等式

两个矢量点乘
得到一个标量!

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

$$\boxed{\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}}$$

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi \qquad \nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\times(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.1 坡印亭定理的推导

- 电磁能量怎么计算？两个矢量点乘得到一个标量！

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}+\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}$$

$$-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}$$

$$-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}\xrightarrow{\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}}\begin{cases}-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\\ =\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}\\ =\vec{E}\cdot\left(\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)-\vec{H}\cdot\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\\ =\vec{E}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\vec{J}\end{cases}$$

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.1 坡印亭定理的推导

- 若 ε，μ，σ 等媒质参数不随时间变化，线性时不变系统（LTI）；

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\varepsilon\vec{E}}{\partial t}\xrightarrow{\text{求导运算出来}\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}\right)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)$$

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{H}\cdot\frac{\partial\mu\vec{H}}{\partial t}\xrightarrow{\text{求导运算出来}\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

$$-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)+\vec{E}\cdot\vec{J}$$

- 在体积V上，对上式做体积分，再用散度定理，得：

$$-\int_V\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV=-\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$=\int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)+\vec{E}\cdot\vec{J}\right]dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)dV+\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}dV$$

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.1 坡印亭定理的推导

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \right) + \vec{E}\cdot\vec{J} \right] dV$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \right) dV + \int_V \vec{E}\cdot\vec{J} dV$$

$$= -\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H} \right)\cdot d\vec{S}$$

$$= -\int_V \nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H} \right) dV$$

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \quad \left(J/m^3 \right) \leftrightarrow W_e = \int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} dV$$

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \quad \left(J/m^3 \right) \leftrightarrow W_m = \int_V \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} dV$$

$p = \vec{J}\cdot\vec{E} = \sigma E^2 = \rho\vec{v}\cdot\vec{E} = \vec{F}\cdot\vec{v}$功率

通过面积S进入体积V中的电磁功率

- 磁场能量密度-磁场能量—磁场功率的增加量；
- 电场能量密度-电场能量—电场功率的增加量；
- 电流做功转化为其他形式的功率；
- 三项的和：体积V内，电磁功率的增加量及转化为其他形式能量的功率；
- 根据能量守恒定律，通过面积S进入体积V中的电磁功率；
- 推知：E×H具有电磁功率密度的物理意义；

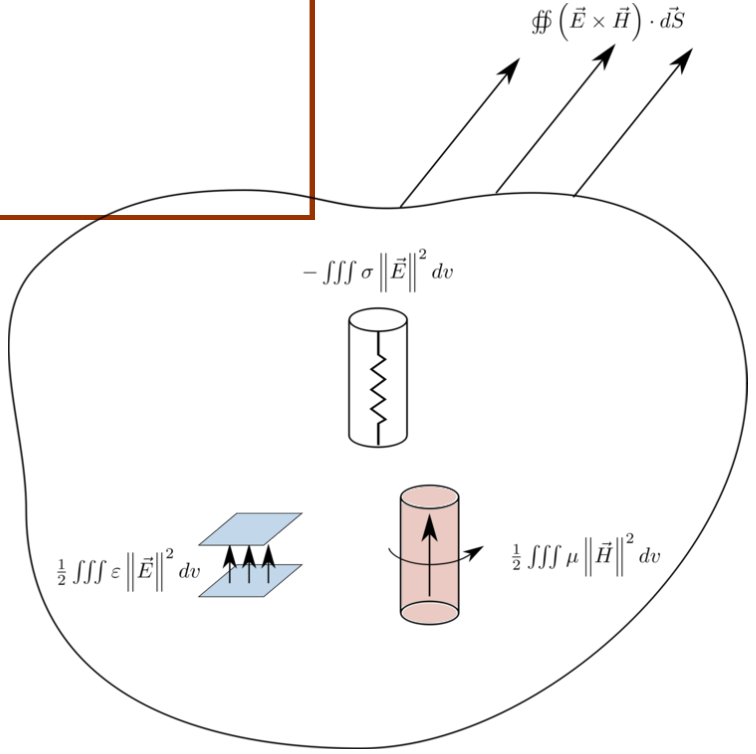
5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.1 坡印亭定理的推导

$$-\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)dV+\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}dV$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\text{具有能量密度的物理内涵;}\\\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\text{具有能量密度的物理内涵}\end{cases}$$

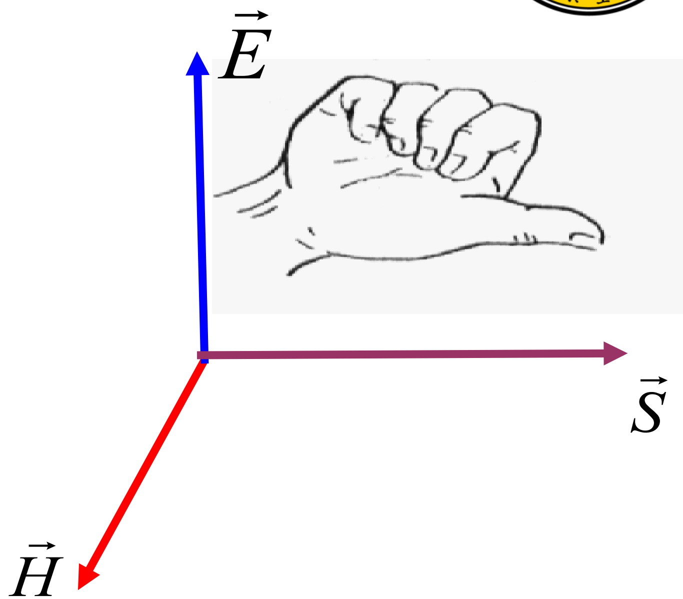
- 上式称为表征电磁能量守恒关系的坡印亭定理;
- 坡印亭定理的物理意义为:
- 当体积V内无其他能源时，在单位时间内体积V内电磁功率的增加与体积中功率的损耗等于经体积表面S流入的功率流之和;



5.5　电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.2 坡印亭矢量

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\quad\left(W/m^{2}\right)}$$



- 是一个与垂直通过单位面积的电磁场功率相关的矢量，表明功率流动的大小和方向；
- 称为电磁功率流密度矢量或坡印亭矢量；
- 三者相互垂直，符合右手螺旋关系；
- 任一时刻，空间任一点的电磁功率流密度矢量（瞬时值）的大小为：

$$\boxed{S(\vec{r},t)=E(\vec{r},t)H(\vec{r},t)}$$

- 功率流密度矢量瞬时值是电场强度和磁场强度的瞬时值的乘积；
- 只有两者同时达到最大值时，功率流密度才会达到最大；
- 同时达到最大—同步—同相；
- ~~不同相位—功率交换—谐振~~；

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)dV + \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV$$

$$\xrightarrow{\text{静态场的功率流动}} -\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV = \int_V \sigma E^2 dV$$

$$\xrightarrow{\text{在介质中电磁场蕴含的能量密度}} \begin{cases} \dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \\ \dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{在导体中电磁场损耗的功率密度}} \vec{E}\cdot\vec{J}$$

- 电磁能量守恒关系-坡印亭定理，适用于静态和时变所有情况；
- 坡印廷矢量只适用于有电磁功率流动的情况：时变场和恒流场的功率输运过程；无电磁功率流动过程没有定义坡印廷矢量；
- 进入导体内部的能量全部转化为导体的热能；
- 坡印廷定理描述功率的**净流动**导致的区域内的存储和损耗功率变化；
- 并不反映当前的存储功率，因此对于静态场的存储功率值并没有涉及；
- 恒流电场情况下，介质中的功率流是恒定的，也是不随时间变化的，即没有功率的聚集和耗散；

5.5　电磁场的能量关系—坡印亭定理

- 例　同轴线的内导体半径为a、外导体的内半径为b，其间填充均匀的理想介质。设内外导体间的电压为U，导体中流过的电流为I 。在导体为理想导体的情况下，计算同轴线中传输的功率。

课后范例

解： 取导线轴为圆柱坐标系的z轴。 对于理想导体，电荷均匀分布于内导体表面，设沿轴线方向单位长度带电量为ρ_l

$\rho \le a \qquad \vec{E} = 0 \qquad \vec{H} = 0$

$a \le \rho \le b \qquad \vec{E} = \vec{e}_\rho E(\rho)$

高斯曲面为以z轴为轴半径为ρ 高度为1的圆柱面

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad 2\pi\rho E = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0}$$

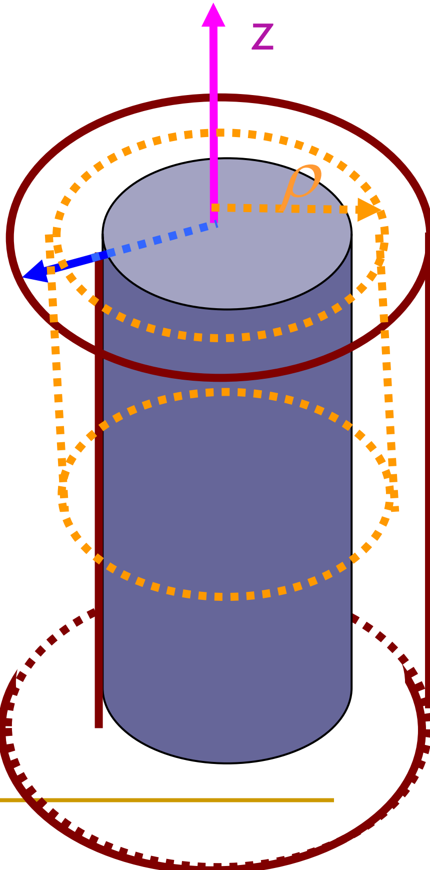
$$a \le \rho \le b \qquad \vec{E} = \vec{e}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \qquad \vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi\rho}$$

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{e}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho} \cdot \vec{e}_\rho d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(b/a)$$

$$\rho_l = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln(b/a)}$$

内外导体电流反向，电荷异号

$\rho \ge b \qquad \vec{E} = 0 \qquad \vec{H} = 0$



课后范例

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & \rho\le a\\ \vec{e}_\rho\dfrac{U}{\rho\ln(b/a)} & a\le\rho\le b\\ 0 & \rho\ge b\end{cases}\qquad \vec{H}=\begin{cases}0 & \rho\le a\\ \vec{e}_\varphi\dfrac{I}{2\pi\rho} & a\le\rho\le b\\ 0 & \rho\ge b\end{cases}$$

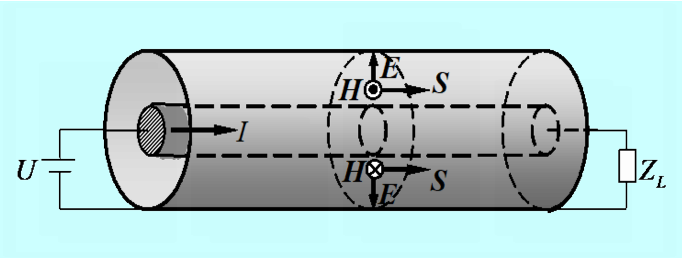
同轴线的内部和外部没有电磁功率流动。

$$a\le\rho\le b\quad \vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{e}_\rho\frac{U}{\rho\ln(b/a)}\times\vec{e}_\varphi\frac{I}{2\pi\rho}=\vec{e}_z\frac{UI}{2\pi\rho^2\ln(b/a)}$$

电磁能量沿z轴方向流动，由电源向负载传输。

通过垂直于能量流动方向的任意平面的功率为

$$\boxed{P=\int_{S'}\vec{S}\cdot d\vec{S}'=\int_0^{2\pi}\int_a^b\frac{UI}{2\pi\rho^2\ln(\frac{b}{a})}\rho d\rho d\varphi=UI}$$



若同轴线的内导体为理想导体，则功率通过内外导体间的电磁场传递到负载，而不是经过导体内部传递。

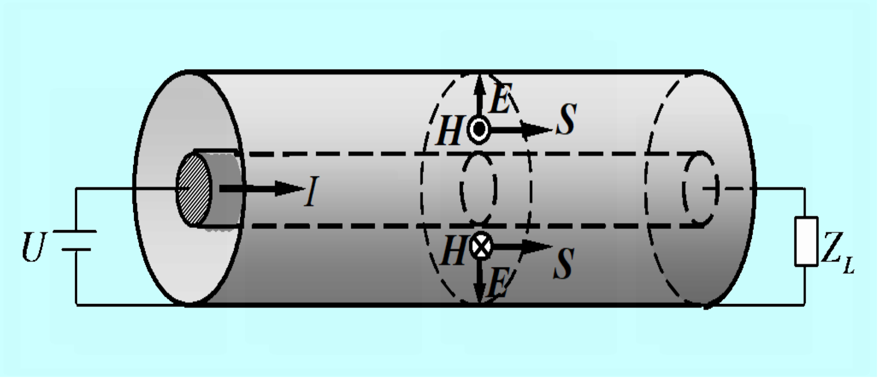
课后范例

$$\vec{S} = \begin{cases} 0 & \rho \le a, \rho \ge b \\ \vec{e}_z \dfrac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)} & a \le \rho \le b \end{cases}$$

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_V (\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

$$\frac{dW}{dt} = 0 \qquad \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = 0 \qquad P = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}' = 0$$

能量从一个端流入又从另一端流出，闭合曲面中的电磁能量不增加也不减小。



5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.3 复数坡印亭矢量与坡印亭定理

1. 复数坡印亭矢量

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\quad W/m^2$$

坡印亭定理：单位时间内体积V内的电磁能量的减少等于体积中功率的损耗与经体积表面S流出的功率流之和。

$$\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}+\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dV$$

时谐电磁场中，

二次瞬时值 $\vec{S}(t)=\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)$ 是否等于场量复数表示式的乘积的实部 $\mathrm{Re}\left[\left(\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}\right)\times\left(\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}\right)\right]$ ？ ？

$$\vec{S}(t)=\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)=\vec{E}_0\cos(\omega t+\varphi)\times\vec{H}_0\cos(\omega t+\psi)=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}\right]\times\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}e^{j2\omega t}\right]\neq\mathrm{Re}\left[\left(\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}\right)\times\left(\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}\right)\right]$$

二次不是线性项！

5.5　电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.3　复数坡印亭矢量与坡印亭定理

瞬时：$\vec{S}(t)=\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}e^{j2\omega t}\right]$

平均：$\vec{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\vec{S}(t)dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}e^{j2\omega t}\right]\right\}dt$

$=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right]dt=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right]$

复数坡印廷矢量：$\dot{\vec{S}}=\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}$

瞬时坡印廷矢量：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

$$\vec{S}_{av}=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{S}}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right]$$

- 瞬时坡印廷矢量表示为两项叠加：常数项＋2倍周期项；
- 对周期性变化，一个周期内的平均功率流密度矢量比瞬时值更有意义；
- **复数坡印亭矢量：电场和磁场共轭的矢量积，瞬时与复数定义差异导致有系数½；复数坡印亭矢量的实部为功率流密度的时间平均值；**

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

5.5.3 复数坡印亭矢量与坡印亭定理

- 同理，可得到电场能量密度和磁场能量密度的时间平均值；
- 为坡印廷定理的复数形式做好了准备；

$$w_{eav}=\frac{1}{T}\int_0^T w_e dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}dt=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\varepsilon_c\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*\right]=\frac{1}{4}\varepsilon'\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*$$

$$w_{mav}=\frac{1}{T}\int_0^T w_m dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}dt=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\mu_c\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*\right]=\frac{1}{4}\mu'\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*$$

说说$\frac{1}{4}$的来历？$\begin{cases}\text{场能量从零开始逐步建立}\rightarrow\frac{1}{2}\\ \text{瞬时形式和复数形式差异}\rightarrow\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right)=\dot{\vec{H}}^*\cdot\nabla\times\dot{\vec{E}}-\dot{\vec{E}}\cdot\nabla\times\dot{\vec{H}}^*\\ \nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\dot{\mu}_c\dot{\vec{H}};\quad\nabla\times\dot{\vec{H}}^*=(\sigma\dot{\vec{E}}+j\omega\dot{\varepsilon}_c\dot{\vec{E}})^*=\sigma\dot{\vec{E}}^*-j\omega\dot{\varepsilon}_c^*\dot{\vec{E}}^*\end{cases}$$

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

2. 复数坡印亭定理

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right)=\dot{\vec{H}}^*\cdot\nabla\times\dot{\vec{E}}-\dot{\vec{E}}\cdot\nabla\times\dot{\vec{H}}^* \\ \nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\dot{\mu}_c\dot{\vec{H}};\quad \nabla\times\dot{\vec{H}}^*=\sigma\dot{\vec{E}}^*-j\omega\dot{\varepsilon}_c^*\dot{\vec{E}}^*\end{cases}$$

$$\Rightarrow\nabla\cdot\left(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right)=-j\omega\mu_c\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*+j\omega\varepsilon_c^*\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*-\sigma\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*$$

$$\Rightarrow\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\right)=-j\omega\frac{1}{2}\mu_c\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*+j\omega\frac{1}{2}\varepsilon_c^*\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*-\frac{1}{2}\sigma\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*$$

积分形式:

$$-\oint_S\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}=j\omega\int_V\left(\frac{1}{2}\mu_c\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*-\frac{1}{2}\varepsilon_c^*\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*\right)dV+\int_V\frac{1}{2}\sigma\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*dV$$

- **复数坡印亭定理：流入封闭曲面的电磁能量，一部分用来转化为其他形式的能量，剩余部分以电磁能的形式谐振存储。**

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

2. 复数坡印亭定理

$$\Rightarrow -\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}=\int_V\left(\frac{1}{2}\omega\mu''\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*+\frac{1}{2}\omega\varepsilon''\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*+\frac{1}{2}\sigma\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*\right)dV$$

$$+j2\omega\int_V\left(\frac{1}{4}\mu'\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*-\frac{1}{4}\varepsilon'\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*\right)dV$$

$$\Rightarrow -\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}=\int_V\left(\frac{1}{2}\omega\mu''H^2+\frac{1}{2}\omega\varepsilon''E^2+\frac{1}{2}\sigma E^2\right)dV+j2\omega\int_V\left(\frac{1}{4}\mu'H^2-\frac{1}{4}\varepsilon'E^2\right)dV$$

$$\Rightarrow -\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}=\int_V\left(p_{mav}+p_{eav}+p_{jav}\right)dV+j2\omega\int_V\left(w_{mav}-w_{eav}\right)dV$$

$p_{mav}=\frac{1}{2}\omega\mu''\dot{\vec{H}}\cdot\dot{\vec{H}}^*$ 单位体积的磁损耗的平均值

$p_{eav}=\frac{1}{2}\omega\varepsilon''\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*$ 单位体积的介电损耗的平均值

$p_{jav}=\frac{1}{2}\sigma\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{E}}^*$ 单位体积的焦耳热损耗的平均值

- 复介电常数的虚部必须小于零；
- 复磁导率的虚部必须小于零；

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

$$\Rightarrow -\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}=\int_V\left(\frac{1}{2}\omega\mu''H^2+\frac{1}{2}\omega\varepsilon''E^2+\frac{1}{2}\sigma E^2\right)dV+j2\omega\int_V\left(\frac{1}{4}\mu'H^2-\frac{1}{4}\varepsilon'E^2\right)dV$$

$$\Rightarrow -\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}=\int_V\left(p_{mav}+p_{eav}+p_{jav}\right)dV+j2\omega\int_V\left(w_{mav}-w_{eav}\right)dV$$

$$\Rightarrow -\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}=\int_V\left(p_{mav}+p_{eav}+p_{jav}\right)dV+j\pi\int_V\frac{\left(w_{mav}+(-w_{eav})\right)}{\frac{T}{2}}dV$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left[-\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}\right]=\pi\int_V\frac{\left(w_{mav}+(-w_{eav})\right)}{\frac{T}{2}}dV$$

- 无功功率是感性无功功率和容性无功功率的叠加；
- 无功功率的频率是场变化频率的**两倍（场有正负功率无正负）**；
- 无功功率流密度的积分表示了该体积内无功功率在功率周期内的变化量；

5.5 电磁场的能量关系—坡印亭定理

复数坡印亭定理：

$$-\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S} = \int_V\left(p_{mav}+p_{eav}+p_{jav}\right)dV + j2\omega\int_V\left(w_{mav}-w_{eav}\right)dV$$

$$\vec{S}_{av} = \mathrm{Re}\left[\dot{\vec{S}}\right]$$

$$-\oint_S \vec{S}_{av}\cdot d\vec{S} = -\oint_S \mathrm{Re}\left[\dot{\vec{S}}\right]\cdot d\vec{S}$$

$$= \mathrm{Re}\left[-\oint_S \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*\cdot d\vec{S}\right] = \int_V\left(p_{mav}+p_{eav}+p_{jav}\right)dV$$

- 时间平均意义下，有功功率全部转化为各种损耗；
- 复数坡印廷矢量的实部是时间平均值；
- 复数坡印廷矢量的虚部没有对应的物理实体（更多请参考经典电动力学-朱培豫）；

课后范例

例 3 在无源的自由空间，已知电磁场的电场强度矢量

$$\dot{\vec{E}}(z)=\vec{a}_y E_0 e^{-jkz} \qquad V/m$$

求：(1) 磁场强度复矢量 $\dot{\vec{H}}(z)$；(2) 瞬时坡印亭矢量 $\vec{S}$ ；(3)平均坡印亭矢量 $\vec{S}_{av}$

解：(1) $\nabla\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\mu_0\dot{\vec{H}}$

$$\dot{\vec{H}}(z)=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\dot{\vec{E}}=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\times\vec{a}_y E_0 e^{-jkz}=-\vec{a}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{-jkz}$$

(2) $$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(z)e^{j\omega t}\right]=\vec{a}_y E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\vec{H}(z,t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{H}}(z)e^{j\omega t}\right]=-\vec{a}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$

$$\vec{S}(t)=\vec{E}\times\vec{H}=\left[\vec{a}_y E_0\cos(\omega t-kz)\right]\times\left[-\vec{a}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)\right]$$

$$=\vec{a}_z\frac{kE_0{}^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)$$

课后范例

解：

$$(3)\quad \vec{S}_{av}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{a}_y E_0 e^{-jkz}\right)\times\left(-\vec{a}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{-jkz}\right)^{*}\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{a}_z\frac{kE_0^{\ 2}}{\omega\mu_0}\right]=\vec{a}_z\frac{kE_0^{\ 2}}{2\omega\mu_0}$$

或 $$\vec{S}_{av}=\frac{2\pi}{\omega}\int_0^{\omega/2\pi}\vec{S}dt=\frac{2\pi}{\omega}\int_0^{\omega/2\pi}\left[\vec{a}_z\frac{kE_0^{\ 2}}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)\right]dt=\vec{a}_z\frac{kE_0^{\ 2}}{2\omega\mu_0}$$

补充：特殊时空条件下的麦克斯韦方程

- 从一般到特殊

- 静态场
- 时谐场：稳态场

- 在特定条件下，关注主要矛盾，忽略次要矛盾——--化难为简！

- 特定条件：特定时间变化规律，特定空间区域

$$\boxed{\frac{\lambda}{T} = \lambda f = v}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

补充：特殊时空条件下的麦克斯韦方程

静态电场和磁场

$\nabla\times\vec{E}=0;\quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho;\quad \nabla\cdot\vec{J}=0$

$\nabla\times\vec{H}=\vec{J};\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$

- 静态电场和磁场：频率为零
- 电准静态电磁场：即电场类似于静电场，电场主要由电荷产生，由变化磁场产生的部分可以忽略。频率足够低，波长足够大；库伦场远大于感应电场；场源附近；
- 磁准静态电磁场：即磁场类似于静磁场，磁场主要由电流产生，由变化电场产生的部分可以忽略。频率足够低，波长足够大；传导电流远大于位移电流；场源附近
- 时谐场：任意频率

电准静态电磁场
- 电力传输线；
- 电子设备附近电场；

磁准静态电磁场
- 电机，变压器，涡流，感应加热，磁悬浮；
- 导体内部；天线近场；

电准静态电磁场

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

磁准静态电磁场

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=0$$

补充：特殊时空条件下的麦克斯韦方程

- 电准静态电磁场；
- 磁准静态电磁场；
- 位移电流和电磁感应是电场磁场耦合的关键，这两项都是与时间变化关联的；
- 忽略了时间变化，就是准静态的意思，是工程简化的考虑；

$$\boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \leftrightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

作业

教材P151　习题5.1，5.8