电磁场与电磁波

第四章 静态电磁场边值问题的解法

李顺礼
lishunli621@seu.edu.cn

从麦克斯韦方程组到静态场方程

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\vec{H} &= \vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D} &= \rho\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{J} &= -\frac{\partial\rho}{\partial t}\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{场源不随时间变化}} \left.\begin{aligned} \nabla\times\vec{H} &= \vec{J}\\ \nabla\times\vec{E} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{D} &= \rho\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{J} &= 0\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{电磁解耦}} \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{E} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{D} &= \rho\end{aligned}\right\}\text{静电场}\Rightarrow\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\\ &\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{E} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{J} &= 0\end{aligned}\right\}\text{恒流场}\Rightarrow\nabla^2\varphi=0\\ &\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H} &= \vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0\end{aligned}\right\}\text{静磁场}\Rightarrow\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}\end{aligned}\right.$$

- 静态场问题，归结为位函数满足的泊松方程或是拉普拉斯方程；
- 静态场问题，就是对泊松方程或是拉普拉斯方程进行求解；

数学物理方程的求解

静态场问题

- **分布型问题**：已知场源（电荷、电流）分布，直接从场的积分公式求空间各点的分布，要求源分布已知；边界简单（无限大或对称有界）-特殊问题的特殊解法。
- **边值型问题**：已知场域边界上的值，求场域内的场分布-一般问题的一般性解法。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{a}_r$$

$$\varphi_A = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

矢量叠加

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

标量叠加

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

静态场边值问题的解法

- **解析法** —>给出场量的解析表达式，如镜像法、分离变量法等。
- **数值法** —>给出场量的一组离散数据，如有限差分法等。

静态电磁场边值问题的解法

- 4.1 边值问题的类型
  - 4.1.1 泊松方程和拉普拉斯方程
  - 4.1.2 边值问题的实质
  - 4.1.3 边值问题的分类
- 4.2 唯一性定理
  - 4.2.1 格林恒等式
  - 4.2.2 唯一性定理的证明
- 4.3 镜像法
  - 4.3.1 无限大导体平面的镜像法
  - 4.3.2 电介质分界平面的镜像法
  - 4.3.3 磁介质平面的镜像法
- 4.4 分离变量法
  - 4.4.1 直角坐标系中分离变量法

4.1 边值问题的类型

4.1.1 泊松方程和拉普拉斯方程

1. 静电场的泊松方程和拉普拉斯方程

静电场基本方程：

$$\left.\begin{aligned}&\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0\\&\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho_V dV\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=0\\\nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

静电场是有散(有源)无旋场，是保守场。

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{D}=\rho\Rightarrow\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\\&\left.\begin{aligned}&\nabla\times\vec{E}=0\\&\nabla\times\nabla\varphi=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{E}=-\nabla\varphi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\\&\varphi_1=\varphi_2\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{无源区}}\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi=0\\&\varphi_1=\varphi_2\end{aligned}\right\}$$

4.1 边值问题的类型

4.1.1 泊松方程和拉普拉斯方程

2. 恒流电场的拉普拉斯方程

恒流电场基本方程：

$$\left.\begin{aligned}\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} &= 0\\ \oint_S \vec{J}_\mathrm{c}\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= 0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}\nabla\times\vec{E} &= 0\\ \nabla\cdot\vec{J} &= 0\end{aligned}\right.$$

$$\vec{J}_\mathrm{c} = \sigma\vec{E}$$

导电媒质中的恒定电场具有无散、无旋场的特征，是保守场

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\varphi\\ \nabla\cdot\vec{J}_\mathrm{c} &= \sigma\nabla\cdot\vec{E} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma\nabla\cdot(-\nabla\varphi) = 0 \Rightarrow \nabla^2\varphi = 0$$

4.1 边值问题的类型

4.1.1 泊松方程和拉普拉斯方程

3. 恒定磁场的矢量泊松方程

恒定磁场基本方程

$$\left.\begin{aligned} &\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} \\ &\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_c \\ &\nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

恒定磁场是无散有旋场

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla\times\vec{B} = \mu\vec{J} \\ &\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ &\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\ &\qquad\qquad \nabla\cdot\vec{A} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\nabla\times\vec{B} = \nabla\times\nabla\times\vec{A} \\ &\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \\ &\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \end{aligned}\right\}$$

4.1 边值问题的类型

4.1.1 泊松方程和拉普拉斯方程

3. 恒定磁场的矢量泊松方程

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_c} \xrightarrow{\text{分解}} \begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu J_z \end{cases}$$

$$\vec{J}_c = 0 \quad \Downarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = 0}$$ ——矢量拉普拉斯方程

在没有电流分布的区域内，磁场也成了无旋场，具有位场的性质，引入标量磁位φ_m来表示磁场强度。即 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$

$$\left.\begin{aligned} \vec{H} &= -\nabla \varphi_m \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi_m = 0}$$ ——标量拉普拉斯方程

标量磁位只有在无源区才能应用，而矢量磁位则无此限制。

4.1 边值问题的类型

4.1.2 边值问题的实质

在静态场情况下，不管具体的场是什么物理量相关的，场都可以用位函数来表示，在均匀媒质中，位函数**满足泊松方程(有源区域)或拉普拉斯方程(无源区域)**，这个方程称为泛定方程；同时在场域的边界上位函数还满足一定的边界条件。

位函数方程 }
边界条件 } 位函数的边值问题

即在给定的边界条件下，求解位函数的泊松方程或拉普拉斯方程。

从数学的角度上看，位函数方程是偏微分方程，位函数的边界条件保证了方程的解是唯一的。位函数的边值问题就是偏微分方程的定解问题。

稳定浓度分布，稳定热源，静电场，静磁场，恒定电流电场，不可压缩的稳恒流动，都是满足泊松方程和拉普拉斯方程。

4.1 边值问题的类型

4.1.3 边值问题的分类

根据给定的在场域的边界的边界条件，可以相应地把边值问题分为三类：

第一类边值问题(狄里赫利问题)：给定边界S上的各点位函数值；

$$\varphi\big|_{S_i} = g_i(S) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

第二类边值问题(诺依曼问题)：给定边界S上各点的位函数的法向导数；

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{S_i} = p_i(S) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

如给定导体表面的电荷面密度分布

第三类边值问题(混合边值问题)：给定一部分边界S_1上每一点的电位，同时给定其余边界S_2上每一点的电位法向导数。

$$\begin{cases} \varphi\big|_{S_i} = g_i(S) & (i = 1, 2 \ldots k) \\ \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{S_i} = p_i(S) & (i = k+1, 2 \ldots n) \end{cases}$$

4.1 边值问题的类型

4.1.3 边界的两种具体形式

1、如果问题空间为无限大空间，则位函数满足自然边界条件：无限远处的边界条件；

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi = \text{有限值} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty}\varphi = 0 \\ r\to\infty\text{时}\,\varphi\text{的衰减不慢于}\dfrac{k}{r},k\text{为常数} \end{cases}$$

第六章即是此类

2、有限大不同媒质分界面上的边界条件；

如静电场中两媒质分界面上的边界条件：

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\rho_S$$

第七章即是此类

4.2 唯一性定理

唯一性定理表述为：在场域V的边界面S上给定 φ 或 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ 的值（三类边界条件），则泊松方程（s面内有源的情况）或拉普拉斯方程（ s面内无源的情况）在场域V内具有唯一的解。

4.2.1 格林恒等式

$$\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi)\equiv\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\varphi\nabla^2\psi$$

$$\Rightarrow\int_V\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi)dV=\int_V\nabla\varphi\cdot\nabla\psi dV+\int_V\varphi\nabla^2\psi dV$$

$$\Rightarrow\oint_S\varphi\nabla\psi\cdot d\vec{S}=\int_V\nabla\varphi\cdot\nabla\psi dV+\int_V\varphi\nabla^2\psi dV$$

$$\Rightarrow\oint_S\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS=\int_V\nabla\varphi\cdot\nabla\psi dV+\int_V\varphi\nabla^2\psi dV\text{-格林第一恒等式}$$

$$\Rightarrow\oint_S\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\int_V\nabla\psi\cdot\nabla\varphi dV+\int_V\psi\nabla^2\varphi dV$$

$$\Rightarrow\oint_S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS=\int_V\left(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi\right)dV\text{-格林第二恒等式}$$

4.2 唯一性定理

对于第三类边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0\big|_{S_1}=\varphi_1\big|_{S_1}-\varphi_2\big|_{S_1}=0\\&\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right|_{S_2}=\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{S_2}-\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_2}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\nabla\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=C\xrightarrow{\text{自然边界条件}}C=0$$

- 唯一性定理的意义：
- 唯一性定理告诉我们：场由源和边界场唯一确定（泊松方程）；无源区的场由边界场唯一确定（拉普拉斯方程）；物理规律本身已经包含在方程中；
- 唯一性定理指出了静态边值场问题具有唯一解的条件，在边界面S上的任一点只需给定电位或其法向导数的值，而不能同时给定两者的值。
- 根据唯一性定理，在求解边值问题时，无论采用什么方法，无论前期采用了什么假定，只要给出的位函数既满足相应的泊松方程(或拉普拉斯方程)，又满足给定的边界条件，此函数就是所求出的唯一正确解，不需要知道源分布；
- 如果可能用不同的方法得到不同形式的解，则根据唯一性定理，它们是等价的。
- 唯一性定理表明：一旦找到某种电荷分布，既符合媒质和边界约束，又是物理实在，则这种电荷分布就是唯一可能的分布。

4.3 镜像法

镜像法是应用唯一性定理来求解边值问题的一种方法。只要虚设电荷与场域内原有的实际电荷一起所产生的电场满足原有问题所给定的边界条件，所得的结果就是原问题的解。

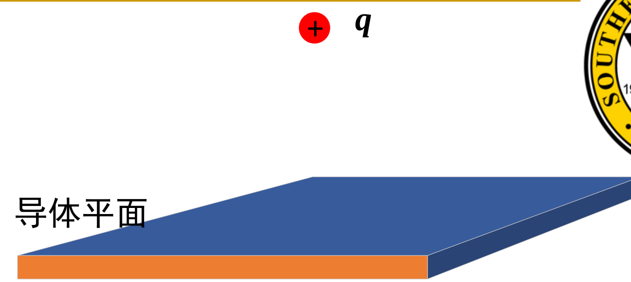
镜像法的思想：它在所研究的场域以外的某些适当的位置上，用一些虚设的电荷（镜像电荷）等效替代导体表面的感应电荷或介质分界面上的极化电荷。把原来的边值问题的求解转换为均匀无界空间中的问题来求解。镜像法就是一种寻找等效问题的方法。

应注意的问题：

1. 镜像电荷位于待求场域边界之外。
2. 将有边界的不均匀空间处理为无限大均匀空间，该均匀空间中媒质特性与待求场域中一致。
3. 实际电荷(或电流)和镜像电荷(或电流)共同作用保持原边界处的边界条件不变。

4.3 镜像法

4.3.1 无限大导体平面的镜像法

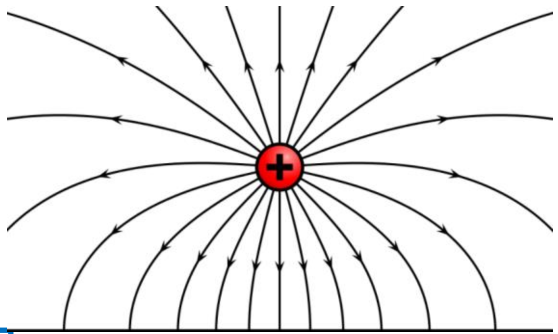


1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像

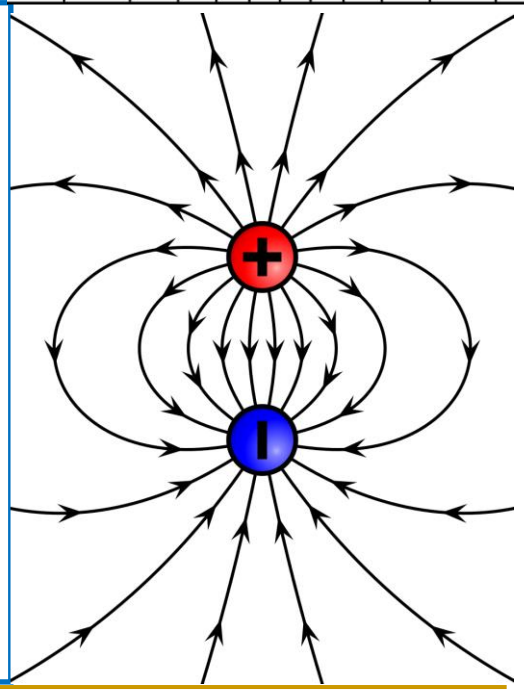
待求场域：上半空间电场

边界：无限大接地导体平面

边界条件：$\varphi = 0$



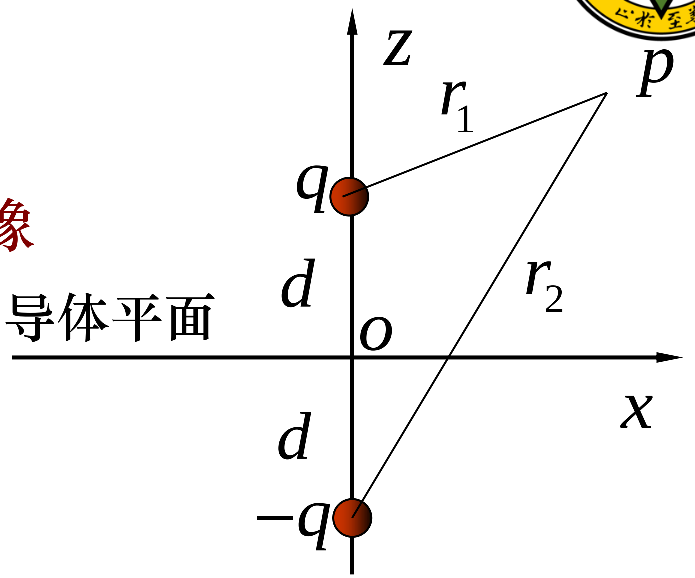
- 上半空间的电场由（）产生?
- 能否根据源的分布直接求解电场?
- 从场源和边界两方面思考，上半空间电场的实际形态是怎样的?
- 如果把导体平面拿掉，增加什么可以使得原有边界处的场保持不变?
- 增加后如何求解?
- 求解结果与原问题等价吗？在任何空间内都等价吗?



4.3 镜像法

4.3.1 无限大导体平面的镜像法

1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像



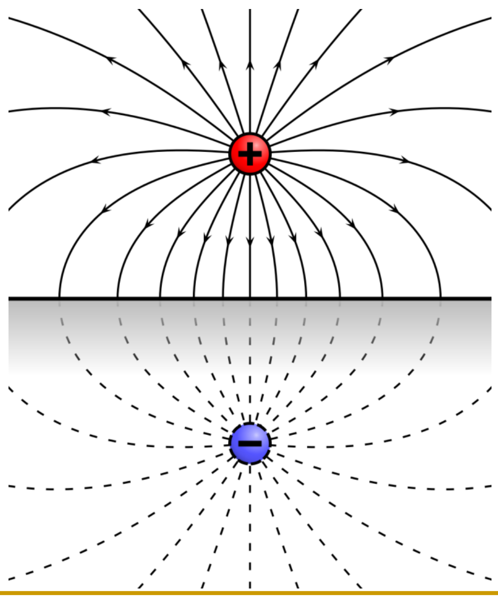
待求场域：上半空间

边界：无限大接地导体平面

边界条件： $\varphi = 0$

空间的电位为点电荷 q(0,0,d) 和镜像电荷 $-q$(0,0,-d) 所产生的电位叠加，即

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right\}$$



导体平面边界上：

$$r_1 = r_2 \longrightarrow \varphi = 0$$

<u>电位满足边界条件</u>

4.3 镜像法

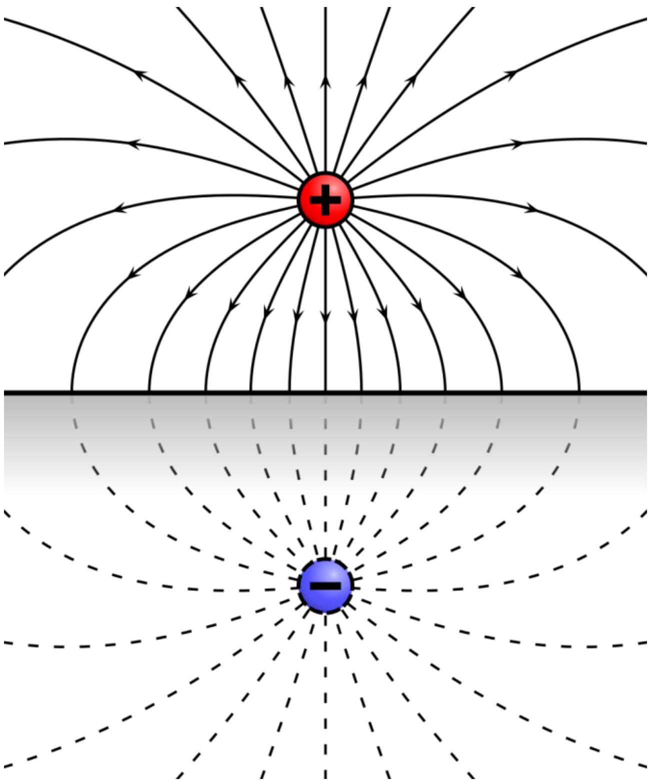
电位：$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

上半空间的电场强度：$\vec{E}=-\nabla\varphi$

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}}-\frac{x}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}}-\frac{y}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z-d}{\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{3/2}}-\frac{z+d}{\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{3/2}}\right\}$$



4.3 镜像法

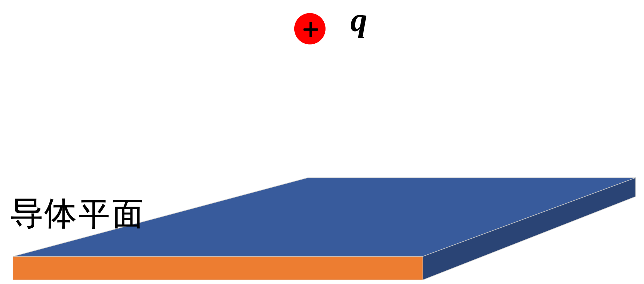
还可以得到，导体表面感应电荷

$$\rho_S = D_n = \varepsilon_0 E_z = -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

导体表面上感应电荷总量

$$q_S = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -q$$

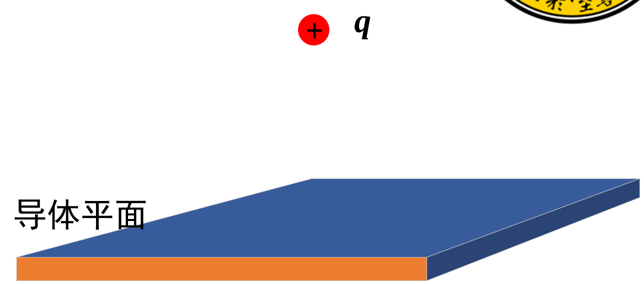


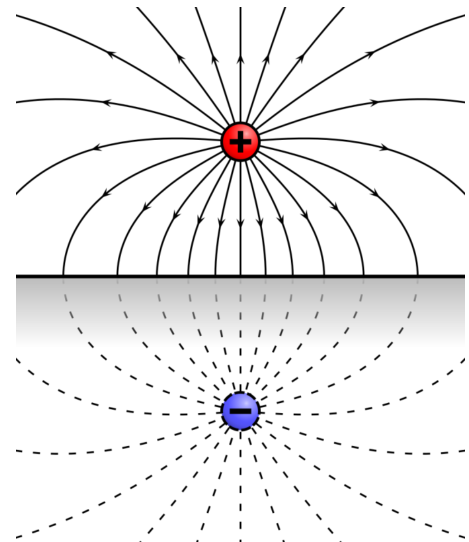
4.3 镜像法

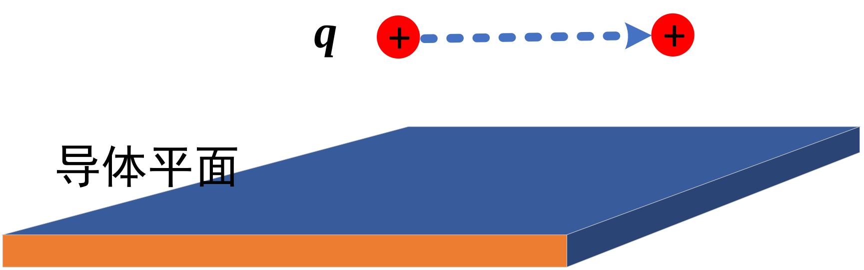
4.3.1 无限大导体平面的镜像法

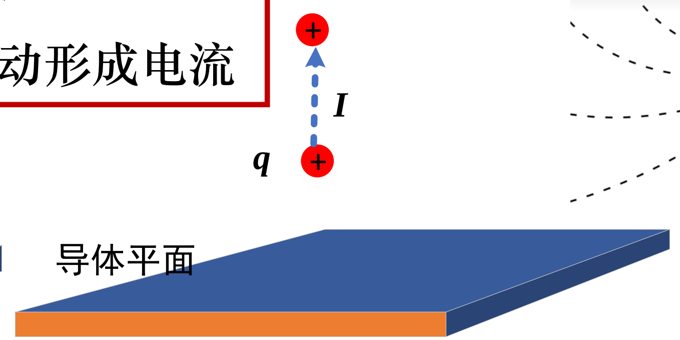
1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像

- 镜像电荷必须在研究空间之外；
- 镜像电荷与原电荷使得边界条件保持不变；
- 镜像法的基础是唯一性定理；
- 镜像法只对研究空间等效；
- 镜像法化边值型问题为分布型问题；
- 从镜像电荷到镜像电流：电荷的运动形成电流



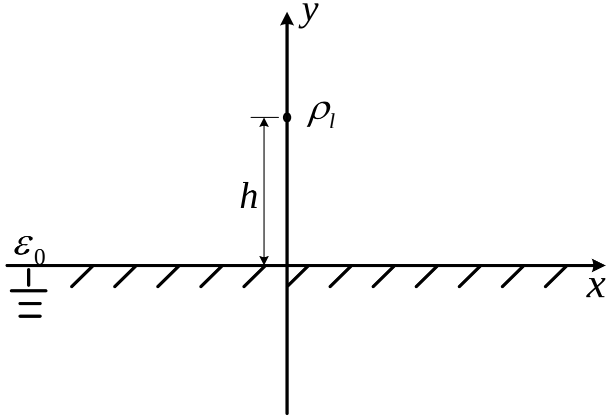


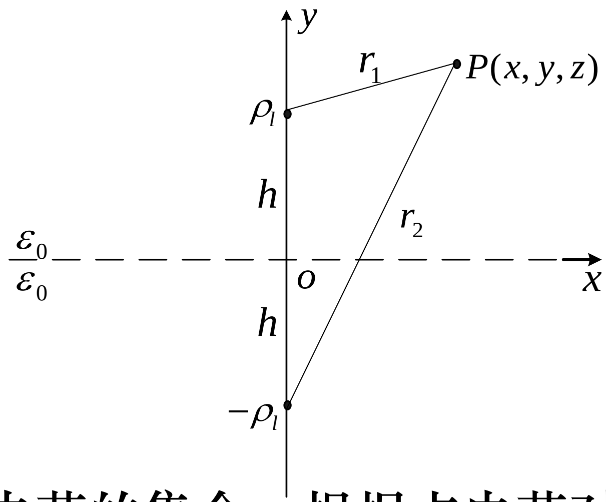




4.3 镜像法

2. 线电荷对无限大接地导体平面的镜像



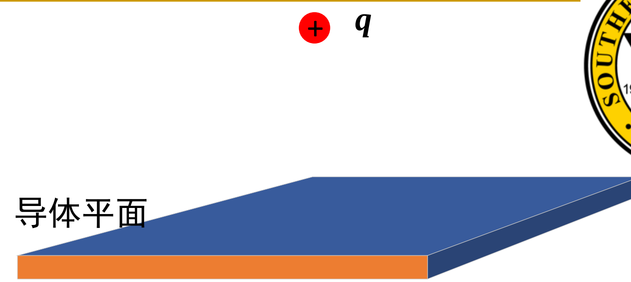


将无限长的线电荷看作无数个点电荷的集合。根据点电荷对无限大接地导体平面的镜像原理，可得到线电荷对应的镜像电荷仍为平行于导体表面的线电荷，其电荷密度为 $-\rho_l$

待求场域$(y>0)$ 中的电位 $$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

上半空间的电场 $$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\vec{a}_{r1} + \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\vec{a}_{r2}$$

4.3 镜像法



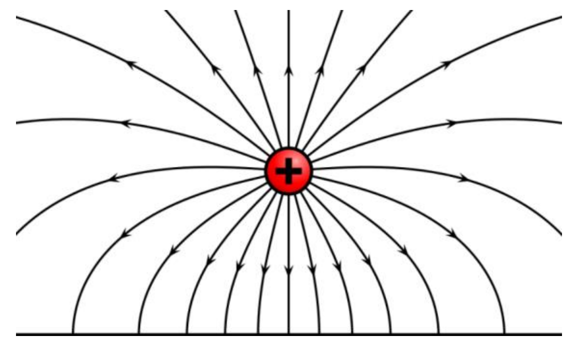
4.3.1 无限大导体平面的镜像法

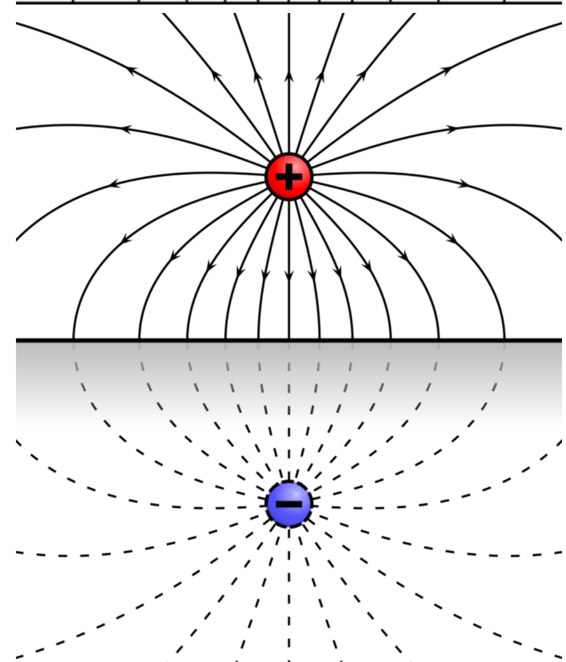
1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像

待求场域：上半空间电场

边界：无限大接地导体平面

边界条件：$\varphi = 0$





- 镜像电荷必须在研究空间之外；镜像法只对研究空间等效；镜像电荷与原电荷使得边界条件保持不变；
- 镜像法有一定的经验性，适用范围非常小，但对于问题的物理过程理解是非常重要的；

除此之外…

- 球形和柱形导体面等问题的镜像法；
- 无限大介质分界面的镜像法；
- 复杂的镜像法已经没有简单的物理理解，数学机巧；

4.4 分离变量法

- 分离变量法的前奏

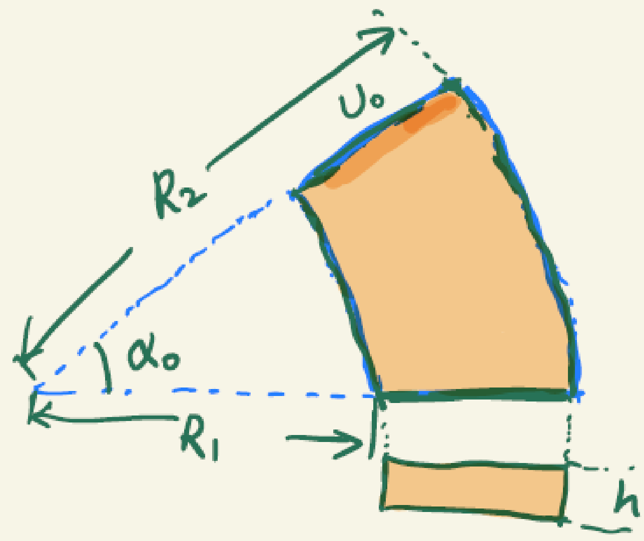
如图所示圆弧形导电媒质构成片状结构，其电导率为γ。已知：该结构两边界条件为

$\alpha=0$ 时 $\varphi=0$

$\alpha=\alpha_0$ 时 $\varphi=U_0$

求：该结构内的电势φ，电场强度$\vec{E}$

电流密度$\vec{J}$及该结构的电阻.



4.4 分离变量法

- 分离变量法的前奏

分析: $\varphi \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{J} \rightarrow R$

① 明显不是分布型问题 → 边值问题

② 边值问题: $\begin{cases} \text{泛定方程?} \\ \text{边界条件?} \end{cases}$

解: 对于导电媒质中(无源区), 恒流电场的电势,

满足 Laplace 方程 $\nabla^2\varphi = 0$ ---- 2′

由于分析的对象是圆弧状的柱体, 故选择圆柱坐标系来进行计算, 此时方程可表达

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

根据所给定的边界条件, 边界上 φ 与 R 及 z 无关,

故 $\frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, 则方程简化为

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

即: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2} = 0$ ---- 2′

该方程的通解为 $\varphi = C_1\alpha + C_2$ ---- 2′

当 $\alpha = 0$ 时, $\varphi(0) = C_2 = 0$

当 $\alpha = \alpha_0$ 时, $\varphi(\alpha_0) = C_1\alpha_0 = U_0$

$\Rightarrow C_1 = \frac{U_0}{\alpha_0}$, $C_2 = 0$ ---- 2′

则 $\varphi = \varphi(R, \alpha, z) = \frac{U_0}{\alpha_0}\alpha$ ---- 2′

$$\vec{E} = \vec{E}(R, \alpha, z) = -\nabla\varphi \quad \text{---- 2}'$$

$$= -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{U_0}{\alpha_0}\alpha\right)\vec{e}_\alpha$$

$$= -\frac{U_0}{\alpha_0}\frac{1}{R}\vec{e}_\alpha \quad \text{---- 1}'$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = -\frac{U_0}{\alpha_0}\frac{\sigma}{R}\vec{e}_\alpha$$

2′

4.4 分离变量法

- 分离变量法的前奏

$R=\frac{U_0}{I}$

$I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=\int_R -\frac{\sigma U_0}{\alpha_0}\frac{1}{R}\vec{e}_\alpha\cdot h(-\vec{e}_\alpha)dR$ ---2'

$=\frac{\sigma U_0 h}{\alpha_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{R}dR$

$=\frac{\sigma U_0}{\alpha_0}h\ \ln\frac{R_2}{R_1}$ ---1'

$R=\frac{U_0}{I}=\frac{\alpha_0}{\sigma h\ln\frac{R_2}{R_1}}$ ---2'

当 $R_2\simeq R_1$ 时，且 α_0 较小时（弧→直）

$R=\frac{\alpha_0}{\sigma h\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{\alpha_0}{\sigma h\ln(1+\frac{R_2-R_1}{R_1})}$

$\ln(1+x)\underset{x\to 0\text{时}}{\simeq} x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$

则 $R=\frac{\alpha_0}{\sigma h\ln(1+\frac{R_2-R_1}{R_1})}$

$\simeq\frac{\alpha_0}{\sigma h\frac{R_2-R_1}{R_1}}=\frac{\alpha_0 R_1}{\sigma h(R_2-R_1)}$

$=\frac{1}{\sigma}\cdot\alpha_0 R_1\cdot\frac{1}{h(R_2-R_1)}$

$\simeq\rho\cdot L\cdot\frac{1}{S}=\rho\frac{L}{S}$

4.4 分离变量法

■ 分离变量法的前奏

圆柱坐标系来进行计算，此时方程可写成

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

根据所给定的边界条件，说明φ与R及z无关

故 $\frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0$，$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$，则方程简化为

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

关键所在：

- 变量依赖关系能够简化；
- 函数依赖一个变量?
- 待求函数变为三个函数，各自依赖一个变量?

4.4 分离变量法

在这里，多关注每一步的潜在意义；

分离变量法的思想：

（1）把待求的位函数表示为几个未知函数的乘积，其中每一个未知函数仅是一个坐标变量的函数。----分离变量

（2）代入偏微分方程进行变量分离，将原偏微分方程分离为几个常微分方程。然后分别求解这些常微分方程。----降低维度

（3）利用边界条件确定待定常数，从而得到位函数的解。----定解问题

应注意的问题：

- 应用分离变量法时，选择合适的坐标系非常重要。当边界面与某坐标系的坐标面相吻合，或是分段吻合时，才选用该坐标系。（繁多坐标系！）
- 分离变量法是应用唯一性定理来求解边值问题的一种方法（为何？）。唯一性定理保证了这种方法求出的解是唯一的。
- 线性系统的叠加原理，与级数和变换的关系；

4.4 分离变量法

4.4.1 直角坐标系中分离变量法

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi(x,y,z)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\\&\varphi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

分离变量

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dX^2(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0\\[2ex]\dfrac{dY^2(y)}{dy^2}+k_y^2Y(y)=0\\[2ex]\dfrac{dZ^2(z)}{dz^2}+k_z^2Z(z)=0\end{cases}\quad \text{and}\quad k_x^2+k_y^2+k_z^2=0$$

本征值

k_x， k_y， k_z 为分离常数。

本征方程

4.4 分离变量法

如果$k_x^2>0$，k_x为实数 $\left(k_x=\pm\left|k_x\right|\right)$：

$$X(x)=A_1'e^{j|k_x|x}+A_2'e^{-j|k_x|x}=A_1\cos(k_x x)+A_2\sin(k_x x)$$

如果$k_x^2<0$，k_x为虚数 $\left(k_x=\pm j\left|k_x\right|\right)$：

$$X(x)=B_1'e^{-|k_x|x}+B_2'e^{|k_x|x}=B_1 ch\left(\left|k_x\right|x\right)+B_2 sh\left(\left|k_x\right|x\right)$$

如果$k_x^2=0$，k_x为 0：

$$X(x)=C_1x+C_2$$

$Y(y)$，$Z(z)$ 的解类似。

通解 $\varphi(x)=X(x)Y(y)Z(z)$ ，再根据边界条件确定分离常数和待定常数。

4.4 分离变量法

数学过程在平行课程里已经讲授
在后面章节具体应用会细讲

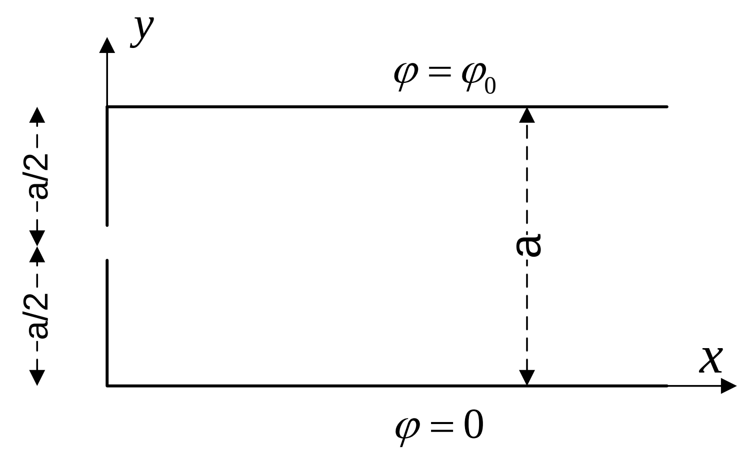
分离变量法求解的步骤：

（1）选取合适的坐标系（应适应边界的几何形状），在此坐标系中列出方程求通解。--**记住通解！**

（2）列出齐次和非齐次的边界条件，有多少个待定系数就需要有多少个边界条件。

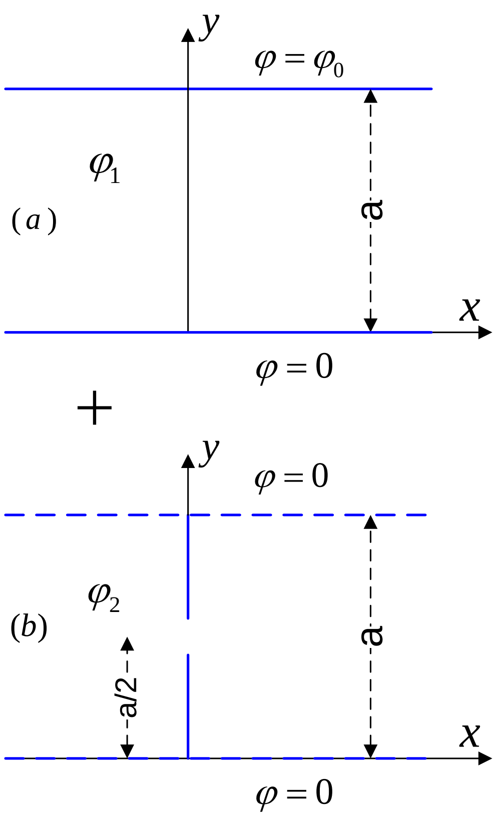
（3）利用**齐次边界条件**和函数的性质求待定常系数和分离常数。

例4： 两块直角形导体板沿x方向和z方向都是无限长，如图所示，下板电位为0，上板电位为φ_0，求两板所围区域内的电位分布。



解：这是一个二维电场φ(x,y)的问题。

将此场分解为两个场的叠加，如下图所示。



场(a) 中为均匀电场：

$$\varphi_1(y)=\frac{\varphi_0}{a}y$$

场(b) 中边界条件为：

$$\varphi_2(0,\ y)=-\frac{\varphi_0}{a}y,\ (x=0,0\le y\le\frac{a}{2})$$

$$\varphi_2(0,\ y)=\varphi_0-\frac{\varphi_0}{a}y,\ (x=0,\frac{a}{2}\le y\le a)$$

叠加后的边界条件为：

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=0,\ (x=0,0\le y\le\frac{a}{2})$$

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\varphi_0,\ (x=0,\frac{a}{2}\le y\le a)$$

和原来的边界条件相同，所以现在只需求解φ_2

$$\varphi_2(x,y)=X(x)Y(y)$$

为满足 $\varphi_2(x,0)=0$和$\varphi_2(x,a)=0$ ，Y(y)必为正弦函数sin(k_yy)

又因为$x\to\infty$时， $\varphi_2\to 0$ ，X(x)为 $e^{-a_x x}$ 函数。

$$k_x^2+k_y^2=0\Rightarrow k_x^2=-a_x^2=-k_y^2 \qquad \therefore a_x=k_y=\frac{n\pi}{a} \quad (n=1,2,3\ldots)$$

所以φ_2的解的形式为：$\varphi_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

A_n 为最后一个待定系数

↓

用非齐次边界条件

代入边界条件：$\varphi_2(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)=\begin{cases}-\frac{\varphi_0}{a}y & (x=0,0\le y\le\frac{a}{2})\\ \varphi_0-\frac{\varphi_0}{a}y & (x=0,\frac{a}{2}\le y\le a)\end{cases}$

得到：$\frac{a}{2}A_s=\frac{\varphi_0 a}{s\pi}\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\xrightarrow{s=2m}A_m=\frac{\varphi_0}{m\pi}(-1)^m \quad (m=1,2,3\ldots)$

所以：$\varphi_2=\frac{\varphi_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}e^{-\frac{2m\pi}{a}x}\sin\left(\frac{2m\pi}{a}y\right)$

叠加的电位为：$\varphi(x,y)=\frac{\varphi_0}{a}y+\frac{\varphi_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}e^{-\frac{2m\pi}{a}x}\sin\left(\frac{2m\pi}{a}y\right)$

作业

P137　习题4.1；

习题4.3　（用电位方程求解）；