Signals and Systems

Leo

2024 年 4 月 23 日

目录

第一章　连续信号的正交分解

1.1　正交函数集与信号分解

信号的分解指的是将任意信号分解为多个标准信号的加权和。若将 $f(t)$ 分解为函数集 $g_i(t)$ 的加权和，对于第一个分量 $g_1(t)$，存在一定误差

$$\epsilon(t) = f(t) - c_1 g_1(t) \tag{1.1}$$

这里的系数选择要使得误差函数的方均值最小。方均值定义为

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon^2(t) dt \tag{1.2}$$

代入 $\epsilon(t)$ 表达式，对 c_1 求偏导并使偏导数为零，得到方均值最小时的取值

$$c_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_1^2(t) dt} \tag{1.3}$$

特别地，当 $c_1 = 0$ 时，称两个函数正交，上式的分子为 0

对于复函数，上式修正为

$$c_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_1^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_1(t) g_1^*(t) dt} \tag{1.4}$$

归一化正交函数集：满足

$$\int_{t_1}^{t_2} g_l(t) g_m(t) dt = 0, l \neq m \tag{1.5}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt = 1 \tag{1.6}$$

1.2　信号表示为傅里叶级数

1.2.1　三角傅里叶级数

三角傅里叶级数采用正交函数集 $\{1, \cos\Omega t, \sin\Omega t, \cos 2\Omega t, \sin 2\Omega t, \ldots, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t, \ldots\ \}$

有如下关系

$$\int_{t_1}^{t_1+T}\cos^2 n\Omega tdt=\int_{t_1}^{t_1+T}\sin^2 n\Omega tdt=\frac{T}{2} \tag{1.7}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T}\cos m\Omega t\cos n\Omega tdt=\int_{t_1}^{t_1+T}\sin m\Omega t\sin n\Omega tdt=0,m\neq n \tag{1.8}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T}\sin m\Omega t\cos n\Omega tdt=0,m,n\text{为任意整数} \tag{1.9}$$

基本证明方法为和差化积，可以证明，移相后的三角函数之间往往不正交

$f(t)$ 展开为三角傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t) \tag{1.10}$$

$\frac{a_0}{2}$ 称为直流分量，$a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t$ 合称 n 次谐波分量。

分量系数的求法

$$a_n=\frac{\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)\cos n\Omega tdt}{\int_{t_1}^{t_1+T}\cos^2 n\Omega tdt}=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)\cos n\Omega tdt \tag{1.11}$$

$$b_n=\frac{\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)\sin n\Omega tdt}{\int_{t_1}^{t_1+T}\sin^2 n\Omega tdt}=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)\sin n\Omega tdt \tag{1.12}$$

a_0 的计算公式与 a_n 统一（n=0），但是代入级数表达式的时候记得除以 2！

若将 n 次谐波分量合成一项，则

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n) \tag{1.13}$$

有如下关系

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n} \tag{1.14}$$

$$a_n=A_n\cos\varphi_n,\quad b_n=-A_n\sin\varphi_n \tag{1.15}$$

a_n 和 A_n 都是频率的偶函数，b_n 和 φ_n 都是频率的奇函数

需要满足迪利克雷条件才能使傅里叶级数展开完全成立：

1. 周期内绝对可积
2. 周期内极值点数目有限
3. 周期内只有有限个跳跃间断点

吉布斯现象：即使级数项数趋向无穷大，用三角函数合成的函数在不连续点附加不可能每一点都收敛于原函数，且最大的差异收敛于与间断点处的跳变量相关的常数。

1.2.2 指数傅里叶级数

采用复指数函数集 $\{1, e^{j\Omega t}, e^{-j\Omega t}, e^{j2\Omega t}, e^{-j2\Omega t} \ldots, e^{jn\Omega t}, e^{-jn\Omega t}, \ldots\}$ 有如下关系

$$\int_{t_1}^{t_1+T} (e^{jn\Omega t})(e^{jn\Omega t})^* dt = T \tag{1.16}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} (e^{jm\Omega t})(e^{jn\Omega t})^* dt = 0, m \neq n \tag{1.17}$$

傅里叶展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \tag{1.18}$$

分量系数的求法

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \tag{1.19}$$

注意系数是 $\frac{1}{T}$ 而非 $\frac{2}{T}$

另一种表示形式

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \tag{1.20}$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{jn\Omega t} \tag{1.21}$$

函数的奇偶性质与谐波含量的关系

1. 奇函数仅含正弦分量，偶函数仅含直流与余弦分量
2. 奇谐函数：任意半个周期的波形可由前半周期波形沿横轴反褶得到，只含有奇次谐波；
3. 偶谐函数：两个二分之一周期内完全相同的周期性函数，只含有偶次谐波分量

1.2.3 周期信号的频谱

一般说的频谱是幅度频谱。

1. 周期性函数的频谱是离散谱
2. 相邻谱线的间隔是基波频率 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$
3. 信号在时域上变化越快（脉冲宽度越窄），频谱首先速度越慢，整个频谱的幅度也相应地减小

1.2.4 非周期信号的频谱

当周期信号的周期趋于无穷时，相邻谱线距离趋于 0，由离散谱转变为连续谱。周期信号的复数幅度

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{jn\Omega t} \tag{1.22}$$

趋于零无法区分，为了加以区分，等式两边同乘 $\frac{T}{2}$，$\Omega \to \omega$，$n\Omega \to \omega$，则可以定义单位宽度频带的幅度, 称为频谱函数

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{TA_n}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.23}$$

傅里叶变换对

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.24}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1.25}$$

非周期函数进行傅里叶变换一般要满足绝对可积条件（迪利克雷条件），即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ 应当收敛。迪利克雷条件是进行傅里叶变换的充分条件。

常用傅里叶变换举例如表1.2.4

1.2.5 周期函数的傅里叶变换

本来周期函数只有傅里叶展开，但是引入奇异函数后，周期函数也可以进行傅里叶变换了。根据傅里叶展开式

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \tag{1.26}$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)e^{jn\Omega t} \tag{1.27}$$

对 $f(t)$ 做傅里叶变换

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{A}_n}{2}e^{jn\Omega t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{A}_n}{2}\mathcal{F}\{e^{jn\Omega t}\} \tag{1.28}$$

根据指数函数的傅里叶变换 $e^{j\omega_c t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_c)$ 得

$$F(j\omega) = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n\delta(\omega-n\Omega) \tag{1.29}$$

即周期函数的频谱函数是一个离散冲激谱

1.2.6 傅里叶变换的性质

若已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

1. 线性性质:$a_1f_1(t)+a_2f_2(t) \leftrightarrow a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$
2. 延时性质:$f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. 移频性质:$f(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F[j(\omega-\omega_c)]$
4. 尺度变换性质:$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{j\omega}{a})$

名称	$f(t)$	$F(j\omega)$
单位冲激	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$\epsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
符号函数	$sgn(t)=\epsilon(t)-\epsilon(-t)$	$\frac{2}{j\omega}$
单位直流	1	$2\pi\delta(\omega)$
指数函数	$e^{j\omega_c t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_c)$
单边指数	$e^{-\alpha t}\epsilon(t)$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
双边指数	$e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
指数脉冲	$te^{-\alpha t}\epsilon(t)$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$
单位余弦	$\cos\omega_c t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
单位正弦	$\sin\omega_c t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
阶跃正弦	$\sin\omega_c t\epsilon(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]+\frac{\omega_c}{\omega_c^2-\omega^2}$
阶跃余弦	$\cos\omega_c t\epsilon(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]+\frac{j\omega}{\omega_c^2-\omega^2}$
门函数	$G_\tau(t)=\epsilon(t+\frac{\tau}{2})-\epsilon(t-\frac{\tau}{2})$	$\tau Sa(\frac{\tau\omega}{2})$
抽样函数	$Sa(\frac{\Omega t}{2})=\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}$	$\frac{2\pi}{\Omega}G_\Omega(\omega)$
三角脉冲	$1-\frac{\|t\|}{\tau}$	$\tau\left[Sa(\frac{\omega\tau}{2})\right]^2$
冲激序列	$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\Omega\delta_\Omega(\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$

表 1.1: 常用傅里叶变换

5. 奇偶特性: 设 $F(j\omega)=R(\omega)-jX(\omega)=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$，则 $R(\omega),|F(j\omega)|$ 为偶函数，$X(\omega),\varphi(\omega)$ 为奇函数. 若 $f(t)$ 为关于 t 的偶函数，则 $F(j\omega)=R(\omega)=2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt$; 若 $f(t)$ 为关于 t 的奇函数，则 $F(j\omega)=-jX(\omega)=-j2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt$

6. 对称性质:$F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$. 特别地，当 $f(t)$ 为实偶函数，则 $R(t)\leftrightarrow 2\pi f(\omega)$; 当 $f(t)$ 为虚奇函数，则 $-jX(t)\leftrightarrow -2\pi f(\omega)$

7. 时域微分特性:$\frac{d^n f(t)}{dt^n}\leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

8. 时域积分特性:$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}F(j\omega)$(该特性仅对于在 $t\to-\infty$ 时 $f(t)=0$ 的函数适用，否则会有直流分量被忽视)

9. 频域微分特性:$-jf(t)\leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$

10. 频域积分特性:$\pi f(0)\delta(t)+j\frac{f(t)}{t}\leftrightarrow \int_{-\infty}^\infty F(j\Omega)d\Omega$

11. 卷积定理:$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega), f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1(j\omega)*F_2(j\omega)]$(注意系数 2π)

12. 帕塞瓦尔定理周期信号的功率等于该信号在正交完备集中各分量功率之和。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|F(j2\pi f)|^2 df$$

.

补充：正弦函数集下的功率计算公式：

$$\overline{f^2(t)}=(\frac{A_0}{2})^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}A_i \tag{1.30}$$

其中直流分量为 $\frac{a_0}{2}$, 功率为 $(\frac{a_0}{2})^2$;A_i 代表 $A_i\cos(i\Omega t+\varphi_i)$ 的幅度，该分量功率为 $\frac{A_i^2}{2}$。据此还可以定义能量密度频谱函数，或简称能量频谱 $G(\omega)$。

$$G(\omega)=\frac{1}{\pi}|F(j\omega)|^2 \tag{1.31}$$

$$W=\int_0^{\infty}G(\omega)d\omega \tag{1.32}$$

第二章　连续时间系统的频域分析

2.1　信号通过系统的频域分析方法

2.1.1　周期信号通过系统的频域分析方法

假设信号为

$$e(t) = Ee^{j(\omega t+\varphi)} = Ee^{j\varphi}e^{j\omega t} = \dot{E}e^{j\omega t} \tag{2.1}$$

$\dot{E} = Ee^{j\varphi}$ 定义为信号的复数幅度，包含了激励复正弦信号的幅度和相位信息。系统可以表示为一常系数微分方程

$$\sum_{i=0}^{n} a_i r^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i e^{(i)}(t) \tag{2.2}$$

因为正弦信号经过该系统后还是同频率的正弦信号，所以若响应为 $r(t) = \dot{R}e^{j\omega t}$, 则

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i\right] \dot{R}e^{j\omega t} = \left[\sum_{i=0}^{n} b_i (j\omega)^i\right] \dot{E}e^{j\omega t} \tag{2.3}$$

$$\dot{R} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{n} b_i (j\omega)^i\right]}{\left[\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i\right]}\dot{E} \tag{2.4}$$

$$r(t) = \dot{R}e^{j\omega t} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{n} b_i (j\omega)^i\right]}{\left[\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i\right]}\dot{E}e^{j\omega t} \tag{2.5}$$

定义频域系统函数

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \frac{\left[\sum_{i=0}^{n} b_i (j\omega)^i\right]}{\left[\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i\right]} \tag{2.6}$$

对于实正弦信号，通过系统后，其幅度等于原幅度乘以 $|H(j\omega)|$, 相位等于原信号相位加上频域系统的相位 $\varphi(\omega)$。即对 $e(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, 其响应为 $r(t) = A|H(j\omega)|\cos(\omega t + \phi + \varphi(\omega))$

2.1.2　非周期信号通过系统的频域分析方法

由于 $r(t) = e(t) * h(t)$，加上傅里叶变换的卷积特性，可得一般求解步骤：

1. 求出激励信号的傅里叶变换 $E(j\omega)$
2. 求出系统的傅里叶变换 $H(j\omega)$
3. 得响应的傅里叶变换 $R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$
4. 傅里叶反变换得 $R(j\omega)$

5. * 可用图解法（p165 例题）

傅里叶变换只能得到系统的零状态响应

2.2 理想低通滤波器

2.2.1 理想低通滤波器的冲激响应

理想低通滤波器的频域系统函数（也即冲激响应频谱函数）为

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0}, |\omega| < \omega_{c0} \\ 0, others \end{cases} \tag{2.7}$$

为简便计算，后面的推导中 $K = 1$。

用傅里叶反变换，结合门函数的变换式和延时特性，可得冲激响应

$$h(t) = \frac{\omega_{c0}}{\pi} Sa[\omega_{c0}(t - t_0)] \tag{2.8}$$

2.2.2 理想低通滤波器的阶跃响应

设理想低通滤波器输入了一个单位阶跃信号，则输出电压的频谱为

$$U(j\omega) = E(j\omega)K(j\omega) = \tag{2.9}$$

$$= \begin{cases} \left[\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}\right] e^{-j\omega t_0}, |\omega| < \omega_{c0} \\ 0, others \end{cases} \tag{2.10}$$

傅里叶反变换得

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} \pi\delta(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega + \int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega}d\omega\right] \tag{2.11}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{c0}(t-t_0)} \frac{\sin\omega(t-t_0)}{\sin\omega(t-t_0)}d\omega(t-t_0) \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}Si[\omega_{c0}(t-t_0)] \tag{2.13}$$

这里定义了正弦积分函数 $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{y}dy.$

该阶跃响应得特点为

1. 响应滞后：若以 $u(t) = \frac{1}{2}$ 作为响应出现的时间，则延迟时间值为 t_0
2. 跳变斜率有限：从 $u(t) = 0$ 到 $u(t) = 1$，通过数值积分得到电压建立时间 $t_B - t_A = \frac{3.84}{\omega_{c0}}$, 即信号边沿跳变越快，对应的 ω_{c0} 越大，表明通频带越宽，包含的高频分量越多
3. 波形失真
4. 系统违反因果性，物理上不可实现

2.3 佩利-维纳准则和物理可实现滤波器

系统物理可实现的充分必要条件: 该系统的冲激响应满足

$$h(t)\epsilon(t) = h(t) \tag{2.14}$$

但是一般情况下只能了解 $|H(j\omega)|$，其相频特性不易获得，也就不容易获得 $h(t)$，因此希望有一个准则可以仅凭 $|H(j\omega)|$ 判断是否物理可实现。**佩利-维纳准则**
当 $|H(j\omega)|$ 满足平方可积，也即 $\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$ 时，可以证明系统满足因果性的充要条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2}d\omega < \infty \tag{2.15}$$

由此可知，物理可实现系统仅允许转移函数在有限分离点上幅值为零。另外，系统频响的衰减速率也不能大于等于指数衰减速率

2.3.1 几种工程中用到的滤波器

2.3.2 巴特沃思滤波器

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+B_n\Omega^{2n}}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_{c0}} \tag{2.16}$$

一般取 $B_n = 1$，使得通带边界处（$\Omega = 1$）的衰减常数为 $1/\sqrt{2}$. 这种滤波器又叫最平坦型滤波器，因为在 $\Omega = 0$ 处误差值和误差函数（1-$|H(j\omega)|$）的前 $2n-1$ 阶导数均为零。这一点的证明用到了二项式的幂级数展开.

2.3.3 切比雪夫滤波器

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\Omega)}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_{c0}} \tag{2.17}$$

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n\arccos\Omega), |\Omega \le 1 \\ \cosh(narccosh\Omega), |\Omega| > 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

有递推关系

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega) \tag{2.19}$$

$$T_2(\Omega) = 2\Omega T_1(\Omega) - T_0(\Omega) = 2\Omega^2 - 1 \tag{2.20}$$

ϵ 为控制通带波纹大小的一个因子，ϵ 越小，起伏幅度越小，通带特性越理想。与 Butterworth 滤波器相比，同一阶数 n 下，切比雪夫滤波器在通带中有较小的最大衰减，在通带外有较陡的衰减特性。

其他类型的滤波器还有反切比雪夫型（通带单调变化，阻带等波纹起伏）、椭圆函数滤波器（通带和阻带均有等波纹起伏）、贝塞尔滤波器（逼近线性相频特性）

2.4 调制与解调

调制：把待传输的信号托附到高频振荡的过程

$$modulation\begin{cases}amplitude-modulation\\ anglemodulation\begin{cases}frequencymodulation\\ phasemodulation\end{cases}\\ pulsemodulation\end{cases}\tag{2.21}$$

$$waves\begin{cases}amplitude-modulatedwave\\ angle-modulatedwave\begin{cases}frequency-modulatedwave\\ phase-modulatedwave\end{cases}\\ pulsewave(non-contineous)\end{cases}\tag{2.22}$$

在调制时，待传输的低频信号称为调制信号，由其控制另一个高频振荡。高频振荡起着运载工具的作用，称为载波，载波的频率称为载频。载波不一定是正弦波。调幅之后的信号称为调幅信号。不要混淆各个名称！

解调：从已经调制的信号中恢复或提取调制信号的过程。

对调幅信号的解调称为检波，对调频和调相信号的解调称为鉴频与鉴相。

2.4.1 抑制载频调幅,AM-SC

设调制信号为 $e(t)$，则抑制载波调幅后的信号为 $a(t)=e(t)\cos\omega_c t$, 在频谱图上表现为将 $E(j\omega)$ 向两边搬运到 $\pm\omega_c$ 处，即 $A(j\omega)=\frac{1}{2}[E(j(\omega+\omega_c))+E(j(\omega-\omega_c))]$. 其频宽为 $B=\omega_m$(不是 $2\omega_m$!)。

由于频谱搬移的对称性，我们一般只讨论 $\omega>0$ 的部分。大于 ω_c 的部分，即 ω_c 到 $\omega_c+\omega_m$ 的频谱称为上边带，小于 ω_c 的部分，即 $\omega_c-\omega_m$ 到 ω_c 的频谱称为下边带。调制后的信号频宽为调制信号频宽的两倍。

解调时，需要乘以一个同频同相的正弦信号，再通过一个截止频率大于 ω_m 小于 $2\omega_c-\omega_m$ 的低通滤波器滤波，得到输出信号 $c(t)=\frac{1}{2}e(t)$. 这种方法也叫同步解调。

2.4.2 幅度调制,AM

采用常规调幅，在发射端产生边带信号的同时，加入一个载频分量，使已调信号的幅度按调制信号的规律变化，即已调信号的包络与调制信号呈线性关系。也称为幅度调制。

$$a(t)=[A_0+e(t)\cos\omega_c t]\tag{2.23}$$

$$A(j\omega)=\pi A_0[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]+\frac{1}{2}E(j(\omega+\omega_c))+\frac{1}{2}E(j(\omega-\omega_c))\tag{2.24}$$

调幅信号的频谱比 AM-SC 信号的频谱多了位于 $\pm\omega_c$ 处的两个冲激分量。

解调时，通过一个二极管和一个 RC 并联网络就可以检波，处理出信号的包络，也即调制信号。需要注意的是，A_0 必须大于 $|e(t)|_{max}$，否则称为过调幅（“过”指调制信号的幅度过大）。

特别地，考察周期信号 (展成傅里叶级数)

$$e(t) = \sum_{n=1}^{N} E_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \tag{2.25}$$

进行幅度调制

$$a(t) = [A_0 + e(t)] \cos \omega_c t \tag{2.26}$$
$$= \left[A_0 + \sum_{n=1}^{N} E_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \right] \cos \omega_c t \tag{2.27}$$
$$= A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{N} m_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \right] \cos \omega_c t \tag{2.28}$$

式中 $m_n = \dfrac{E_n}{A_0}$ 称为部分调幅系数，表征调制信号中 n 次谐波对载波幅度的相对大小。

因为 $e(t)$ 是周期信号，能展开成三角函数形式，所以其频谱函数可以由常数的傅里叶变换加 cos 移频得到

$$E(j\omega) = \sum_{n=1}^{N} E_n[\delta(\omega + \Omega_n) + \delta(\omega - \Omega_n)] \tag{2.29}$$

代入公式2.24可以得到已调信号的频谱函数（假设 $\varphi_n = 0$）

$$A(j\omega) = \pi A_0[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] + \tag{2.30}$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi E_n}{2} [\delta(\omega - \omega_c + \Omega_n) + \delta(\omega - \omega_c - \Omega_n) + \delta(\omega + \omega_c + \Omega_n) + \delta(\omega + \omega_c - \Omega_n)] \tag{2.31}$$
$$= \pi A_0 \{[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] + \tag{2.32}$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2} [\delta(\omega - \omega_c + \Omega_n) + \delta(\omega - \omega_c - \Omega_n) + \delta(\omega + \omega_c + \Omega_n) + \delta(\omega + \omega_c - \Omega_n)]\} \tag{2.33}$$

图像上看，就是位于 y 轴两侧的一系列冲激函数被搬运到了对称的两侧，同时加上了位于 $\pm\omega_c$ 的两个冲激。频宽加倍。

从上式来看功率：位于 y 轴两侧的每一对冲激函数对应一个余弦信号。根据 $\cos \omega_c t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] \Rightarrow P = (\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2 = \dfrac{1}{2}$, 可得上式各项对应的功率为

$$\pi A_0[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] \Rightarrow P = (\frac{A_0}{\sqrt{2}})^2 = \frac{A_0^2}{2} \tag{2.34}$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi A_0 m_n}{2} [\delta(\omega - \omega_c + \Omega_n) + \delta(\omega + \omega_c - \Omega_n)] \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} (\frac{m_n A_0}{2\sqrt{2}})^2 = \frac{m_n^2 A_0^2}{8} \tag{2.35}$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi A_0 m_n}{2} [\delta(\omega - \omega_c - \Omega_n) + \delta(\omega + \omega_c + \Omega_n)] \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} (\frac{m_n A_0}{2\sqrt{2}})^2 = \frac{m_n^2 A_0^2}{8} \tag{2.36}$$

所以总功率为

$$P = \frac{1}{2} A_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n^2 A_0^2}{4} \tag{2.37}$$

其中，不含信息的载频功率为

$$P_c = \frac{1}{2}A_0^2 \tag{2.38}$$

含有信息的边频功率为

$$P_s = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n^2 A_0^2}{4} = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n^2}{2} P_c \tag{2.39}$$

为了避免过调幅，$m_n \leq 1$，所以边频功率不超过载频功率的一半，功率浪费较多。改进方法有单边带、残留边带（无线模拟电视信号）

2.4.3 脉冲幅度调制,PAM

用离散的脉冲串作为载频信号进行调幅。常用的是矩形波形的脉冲串 $s(t)$, 幅度为 E，周期为 T，脉宽为 τ, 调幅的过程是将调制信号与载频信号相乘，即 $a(t) = e(t) \cdot s(t)$。载波信号的频谱为

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega) \tag{2.40}$$

$$\dot{A}_n = \frac{2E\tau}{T} Sa \frac{n\Omega\tau}{2} \tag{2.41}$$

若已知激励的频谱函数，则由频域卷积定理可得

$$A(j\omega) = \frac{1}{2\pi} E(j\omega) * S(j\omega) \tag{2.42}$$

$$= \frac{E\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa(\frac{n\Omega\tau}{2}) E[j(\omega - n\Omega)] \tag{2.43}$$

从频域图像上来看，就是调制信号 $e(t)$ 的频谱被搬运到了脉冲所在的各次谐波两侧。从时域图像上看，就是 $e(t)$ 对 $s(t)$ 的各次谐波进行抑制载频调幅。

2.5 频分复用与空分复用

复用是指将若干个彼此独立的信号合并成可在同一信道上传输的复合信号的办法。

频分复用 FDM: 将信道的带宽分为不同的频段，每一频段传送一路信号。各路载频之间的间隔应为每路信号的频带与防护频带之和。注意调制后的频带还会加倍。

时分复用 TDM: 建立在脉冲调制基础之上。由于脉冲已调信号具有不连续的时间波形，因此只占用了信道的一部分时间，这样就有可能在这空余的时间里传输其他信号。实际的 TDM 系统采用的脉冲信号经过量化编码形成了二进制数码信号，即传输的是脉冲编码调制 (PCM) 信号。

第三章　连续时间系统的频域分析

傅里叶变换的不足之处：

1. 一般只能处理符合狄利克雷条件的信号，即满足绝对可积条件的信号。想要处理就要引入奇异函数，分析计算较为麻烦
2. 要做从负无穷大到正无穷大的积分，通常这个积分是难以求解的
3. 只能处理零状态响应

3.1　拉普拉斯变换

一个函数不满足绝对可积条件往往是由于当 t 趋向于无穷大时减幅太慢，所以考虑用一个收敛因子去乘以 $f(t)$，这就是拉普拉斯变换的最初想法。

双边拉普拉斯变换对

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3.2}$$

记为

$$F_d(s) = \mathcal{L}_d\{f(t)\} \tag{3.3}$$

$$f(t) = \mathcal{L}_d^{-1}\{F_d(s)\} \tag{3.4}$$

工程中一般处理有始信号，即积分下限为 0^-(一般简记为 0)，此时的变换称为单边拉普拉斯变换，记为 $f(t)\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. 称 $s, F(s)$ 为复频率和复频谱。

实际时间信号与复平面 $\sigma O j\omega$（或 s）的关系：

1. 正半实轴上的点表示单增的指数信号；负半轴上的点表示单减的指数信号；原点表示常数信号
2. 虚轴上关于实轴对称的两点合成一个等幅正弦（余弦）信号
3. 右半平面上关于实轴对称的两点合成一个幅度单增的指数包络的正弦（余弦）信号；左半平面上关于实轴对称的两点合成一个幅度单减的指数包络的正弦（余弦）信号；
4. 共轭点离实轴越远，振荡频率越高；离虚轴越远，增幅越快

3.2 拉普拉斯变换的收敛区

一般来说，想要满足绝对可积条件，要对收敛因子提出一定要求（比如 $\sigma > 0$）。σ 只在一定范围内满足条件，这就叫做收敛区。

常见函数的收敛区

1. 单个脉冲信号：全平面收敛（收敛坐标为 $-\infty$）, 也即单个脉冲的单边拉普拉斯变换一定存在
2. 单位阶跃信号：$\sigma > 0$
3. 指数函数 $e^{\alpha t}$：$\sigma > \alpha$

常用拉普拉斯变换

编号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t\epsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n\epsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\alpha t}\epsilon(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
6	$te^{\alpha t}\epsilon(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
7	$t^n e^{\alpha t}\epsilon(t)$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
8	$\sin\omega t\epsilon(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cos\omega t\epsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10	$\sinh\beta t\epsilon(t)$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$
11	$\cosh\beta t\epsilon(t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$
12	$e^{\alpha t}\sin\omega t\epsilon(t)$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
13	$e^{\alpha t}\cos\omega t\epsilon(t)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
14	$2re^{\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)\epsilon(t)$	$\frac{re^{\varphi}}{s-\alpha-\omega}+\frac{re^{-\varphi}}{s-\alpha+\omega}$
15	$\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\psi^2}}e^{-\psi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\psi^2})t\epsilon(t)$	$\frac{1}{s^2+2\psi\omega_n s+\omega_n^2}$

3.3 拉普拉斯反变换

3.3.1 部分分式展开法

适用于 $F(s)$ 为有理函数的情况，且 $t \geq 0$。一般先将其化为真分式 $\frac{N(s)}{D(s)}$。

$m < n, D(s) = 0$, 没有重根

分解 $D(s)$

$$D(s) = \sum_{k=1}^{n} (s - s_k) \tag{3.5}$$

则 $F(s)$ 可以分解为

$$F(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - s_n} \tag{3.6}$$

其中待定系数为

$$K_k = \left[(s - s_k) \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=s_k} \tag{3.7}$$

$$= \left[\frac{N(s)}{D'(s)} \right]_{s=s_k} \tag{3.8}$$

求出待定系数后，对应项的反变换为

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_k}{s - s_k} \right\} = K_k e^{s_k t} \epsilon(t) \tag{3.9}$$

$m < n, D(s) = 0$，有重根

假设 $D(s) = (s - s_1)^p (s - s_{p+1} \cdots (s - s_n))$，则应展开为如下形式

$$F(s) = \frac{K_{1p}}{(s - s_1)^p} + \frac{K_{1(p-1)}}{(s - s_1)^{p-1}} + \cdots + \frac{K_{12}}{(s - s_1)^2} + \frac{K_{11}}{(s - s_1)} + \frac{K_{p+1}}{(s - s_{p+1})} + \cdots + \frac{K_n}{(s - s_n)} \tag{3.10}$$

其中单根项的系数按上文方法求解，重根项的待定系数为

$$K_{1k} = \frac{1}{(p-k)!} \frac{d^{p-k}}{ds^{p-k}} \left[(s - s_k)^p \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=s_1} \tag{3.11}$$

重根项对应的反变换为

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_{1k}}{(s - s_k)^k} \right\} = \frac{K_{1k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{s_1 t} epsilon(t) \tag{3.12}$$

3.3.2 围线积分法（留数法）

拉普拉斯反变换的定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \tag{3.13}$$

表示沿一条直线进行积分。理论上也可以用留数定理：

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C F(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^{n} Res_i \tag{3.14}$$

这样只要找到一条半径无穷大的封闭曲线 C 使得：C 内留数好算，C 上除了待求积分直线的其他路径上积分为 0，即可算出反变换. 由于约当辅助定理，对有始函数（$t>0$）单边拉普拉斯变换时，一般选择的是左半平面的无限大圆弧进行围线积分。此时反变换式为

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} Res_i \epsilon(t) \tag{3.15}$$

留数的计算公式：若 s_k 为 p 阶极点，则其留数为

$$Res_i=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(s-s_k)^p F(s)e^{st}\right]_{s=s_k} \tag{3.16}$$

3.4 拉普拉斯变换的性质

若已知 $f(t)\leftrightarrow F(s)$

1. 线性性质:$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$
2. 延时性质:$f(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$
3. 移频性质:$f(t)e^{s_ct}\leftrightarrow F(s-s_c)$
4. 尺度变换性质:$f(at)\leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
5. 时域微分特性:$\frac{d^nf(t)}{dt^n}\leftrightarrow s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f'(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$
6. 时域积分特性:$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\leftrightarrow \frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}+\frac{1}{s}F(s)$
7. 复频域微分特性:$tf(t)\leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$
8. 复频域积分特性:$\frac{f(t)}{t}\leftrightarrow \int_{-\infty}^{s} F(s)ds$, 扩展到双重积分则有
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t\int_0^\tau f(\lambda)d\lambda d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s^2} \tag{3.17}$$
9. 对参变量微分和积分：设 $\mathcal{L}\{f(t,a)\}=F(s,a)$，则
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}\right\}=\frac{\partial F(s,a)}{\partial a} \tag{3.18}$$
$$\mathcal{L}\left\{\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)da\right\}=\int_{a_1}^{a_2} F(s,a)da \tag{3.19}$$
10. 卷积定理:$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)F_2(s), f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$
11. 初值定理：
$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$
12. 终值定理：设函数及其导数存在且有拉普拉斯变换，且 $F(s)$ 的所有极点都位于 s 左半平面内（包括原点处的单极点），则 $f(t)$ 的终值为
$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$