



电磁场与电磁波

第二章 电磁场的基本定律

李顺礼

lishunli621@seu.edu.cn



电磁场的基本定律

■ 2.1 源量：电荷与电流

- 2.1.1 电荷与电荷分布
- 2.1.2 电流与电流密度
- 2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

■ 2.2 电场

- 2.2.1 库仑定律 Coulomb's law
- 2.2.2 电场与电场强度
- 2.2.3 电荷产生的电场

■ 2.3 高斯定律 Gauss' law

- 2.3.1 电力线
- 2.3.2 电场通量
- 2.3.3 电场中的高斯定律
- 2.3.4 电通密度和推广的高斯定律
- 2.3.5 静电场的环流

世界是事实的总体，而不是事物的总体。

---维特根斯坦

定律是对客观事实的一种表达形式，通过大量具体的客观事实经验累积归纳而成的结论。

亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的
“套路”。



电磁场的基本定律

■ 2.4 磁场

- 2.4.1 磁场
- 2.4.2 毕奥-沙伐尔定律 Biot-Savart law
- 2.4.3 磁通、磁通连续性原理

■ 2.5 安培环路定律

- 2.5.1 磁感应强度的环量和安培环路定律 Ampère's law
- 2.5.2 磁场强度

■ 2.6 电磁感应定律和位移电流

- 2.6.1 法拉第电磁感应定律 Faraday's magnetic induction law
- 2.6.2 位移电流
- 2.6.3 全电流定律

■ 2.7 电磁场方程的积分和微分形式

- 2.7.1 实验定律汇总
- 2.7.2 麦克斯韦方程 Maxwell equations



电磁场的基本定律

- 2.7.3 积分形式的麦克斯韦方程
- 2.7.4 微分形式的麦克斯韦方程
- 2.7.5 本构关系 constitutive relations

■ 2.8 媒质的电磁性质

- 2.8.1 媒质的宏观电磁特性
- 2.8.2 导体、电介质和磁介质
- 2.8.3 媒质中的Maxwell方程组

■ 2.9 电磁场的边界条件

- 2.9.1 电场法向分量的边界条件
- 2.9.2 电场切向分量的边界条件
- 2.9.3 磁场法向分量的边界条件
- 2.9.4 磁场切向分量的边界条件



2.1 源量：电荷和电流

电荷概念和电流概念的一般化

2.1.1 电荷与电荷分布

- 自然界中最小的带电粒子包括质子和电子，用正负表示；
- 带电体的电荷量用Q来表示，单位为库仑；
- 宏观视角的连续分布，而非物理、非数学数学的连续；
- 电荷是宏观量；电荷密度---微观量；
- 电荷与电荷密度都是标量；
- **体电荷分布** 描述体积V内的电荷分布情况，定义电荷**体密度**：

$$\rho_V(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \text{ C/m}^3$$

- **面电荷分布** 为描述曲面S内的电荷分布情况，定义电荷**面密度**：

$$\rho_S(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \text{ C/m}^2$$

- **线电荷分布** 为描述曲线l上的电荷分布情况，定义电荷**线密度**：

$$\rho_l(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \text{ C/m}$$

微观量—分析—追根溯源



2.1 源量：电荷和电流

电荷概念和电流概念的一般化

2.1.1 电荷与电荷分布

- **点电荷** 描述一个点上的电荷分布情况，定义点电荷密度：

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r}, t)$$

$$\delta(\vec{r}, t) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq 0 \\ \infty & \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \int_V \delta(\vec{r}, t) dV = \begin{cases} 0 & V \text{ 不含 } \vec{r} = 0 \text{ 点} \\ 1 & V \text{ 包含 } \vec{r} = 0 \text{ 点} \end{cases}$$

- 质点—质量的理想化模型—抓住主要矛盾，忽略次要矛盾；
- 从简单出发；复杂问题简化；
- 点电荷-理想化的模型；只关心电荷量，其他皆忽略；

微观量—分析—追根溯源

2.1 源量：电荷和电流

2.1.2 电流与电流密度

电流（或电流强度） i 为单位时间内流过某个面积 S 的电荷量，即

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

电流 i 只能描述面积 S 上总电流的强弱（是一个**通量**的概念）。

为描述电荷在**空间**不同点的分布状态，需要定义电流密度矢量。

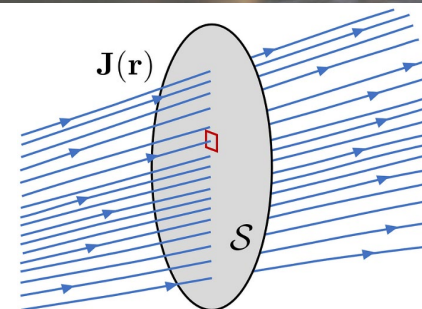
■ 电流---流量（立方米每秒）；

■ ?? ---流速（米每秒）；

■ 电流是宏观量；电流密度---微观量；

■ 电流是标量；电流密度是？

■ 电流与电荷相比：电流自占空间的一个维度；



2.1 源量：电荷和电流

2.1.2 电流与电流密度

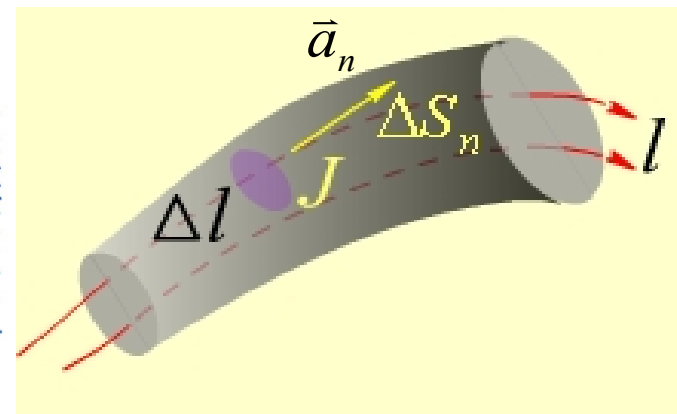
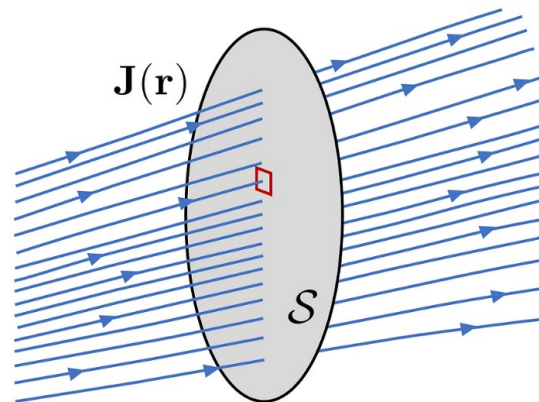
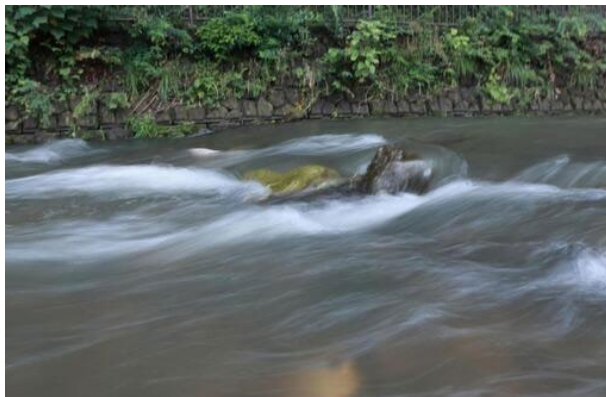
■ 体电流的面密度

若描述体积分布的电荷流动情况，在电荷运动方向垂直的方向上取一个面积元 ΔS ，定义**体电流的面密度**：

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i(\vec{r}, t)}{\Delta S} \vec{a}_n(\vec{r}, t) \quad \text{A/m}^2$$

通过任意曲面 S 的电流为：

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



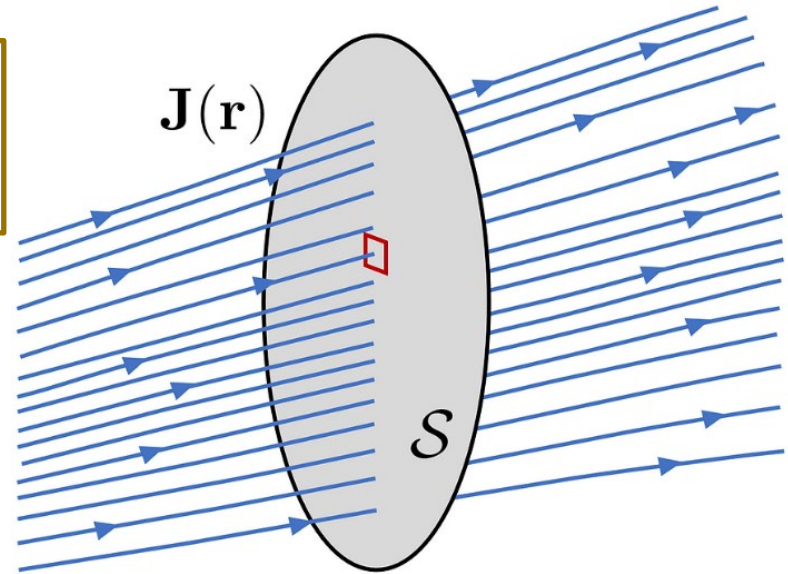
2.1 源量：电荷和电流

2.1.2 电流与电流密度

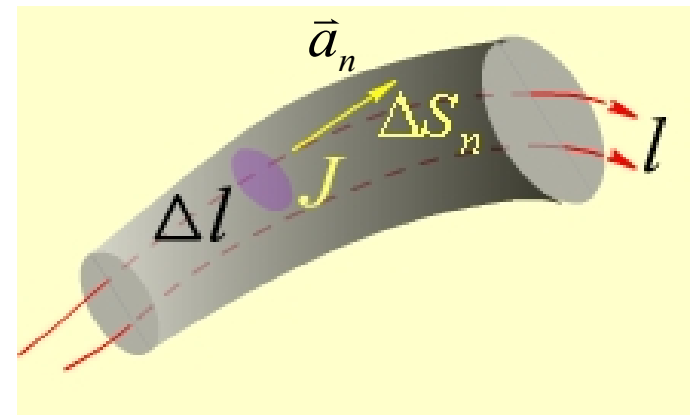
■ 体电流的面密度

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i(\vec{r}, t)}{\Delta S} \vec{a}_n(\vec{r}, t) \quad \text{A/m}^2$$

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



- 电流是宏观量；电流密度---微观量；
- 电流是标量；电流密度是矢量；
- 电流是一个通量；电流密度是通量密度；
- 电流与电荷相比：电流自占空间的一个维度；
- 所以，体电流的密度是面密度；



2.1 源量：电荷和电流

2.1.2 电流与电流密度

■ 面电流的线密度

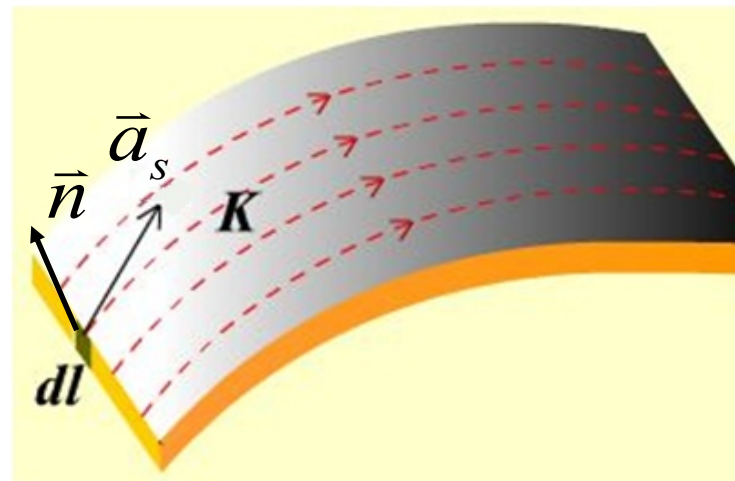
若描述仅分布在导体表面一个薄层内（厚度 $h \rightarrow 0$ ）的电荷流动情况，在电荷运动方向垂直的方向上取一个线元 Δl ，定义**面电流的线密度**：

$$\vec{J}_S(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i(\vec{r}, t)}{\Delta l} \vec{a}_S(\vec{r}, t) \quad \text{A/m}$$

通过薄层导体上任意有向曲线 l 的电流为：
$$i = \int_l \vec{J}_S \cdot \vec{a}_S \, dl = \int_l \vec{J}_S \cdot (\vec{n} \times d\vec{l})$$



浅水小溪
深不足虑
薄薄一层
思之无益



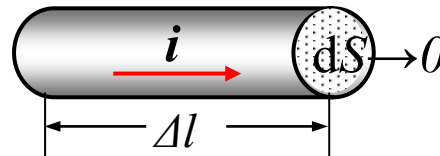
2.1 源量：电荷和电流

2.1.2 电流与电流密度

■ 线电流

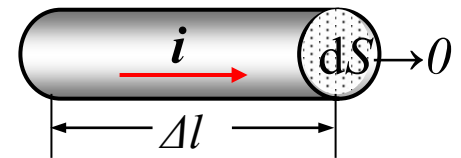
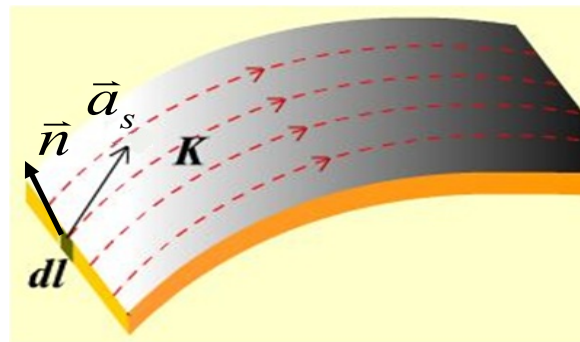
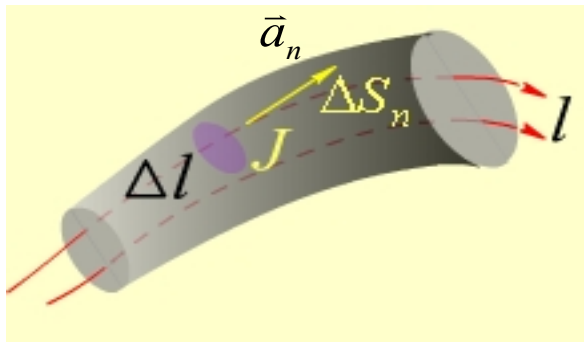
若所描述的带电体的截面为可忽略其尺寸的点（截面 $S \rightarrow 0$ ），则此电流称为**线电流**：

$$i(\vec{r}, t) \vec{a}_l(\vec{r}, t) \quad \text{A}$$



线电流的电流密度是多少？

- 电流是宏观量；电流密度---微观量；
- 电流是标量；电流密度是矢量；
- 体电流面密度；面电流线密度；线电流；
- 电流自占空间的一个维度；---没有点电流；





2.1 源量：电荷和电流

2.1.2 电流与电流密度

电流元: idl

描述电荷 dq 以速度 \vec{v} 定向运动形成电流，称 $dq\vec{v}$ 为**电流元**：

$$\text{线电流元: } idl \quad \text{A} \cdot \text{m} \quad = d \frac{q}{t} \vec{v} t = idl$$

$$\text{面电流元: } \vec{J}_S dS \quad \text{A} \cdot \text{m}$$

$$\text{体电流元: } \vec{J} dV \quad \text{A} \cdot \text{m}$$

例：不同电流产生的磁场的磁感应强度：

线电流回路的矢量磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2}$$

面电流的矢量磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_S dS' \times \vec{a}_R}{R^2}$$

体电流的矢量磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dV' \times \vec{a}_R}{R^2}$$



2.1 源量：电荷和电流

2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

电荷守恒定律：1747年

在一个与外界无电荷交换的闭合系统内，正、负电荷的代数和在任何电磁过程中均保持不变。

电流连续性方程：

在一个有限闭合区域内，单位时间从闭合面S流出的电荷量应等于闭曲面S所界定的体积V内电荷的减少量。

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV$$

积分形式

表明穿出有限区域界面体电流密度的通量等于该有限区域内以体电荷密度分布的电荷量的时间减少率。

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_V -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \\ \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

微分形式

表明某点体电流密度的散度等于该点体电荷密度的时间减少率。



2.1 源量：电荷和电流

2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

电荷守恒定律：1747年

在一个与外界无电荷交换的闭合系统内，正、负电荷的代数和在任何电磁过程中均保持不变。

电流连续性方程：

在一个有限闭合区域内，单位时间从闭合面S流出的电荷量应等于闭曲面S所界定的体积V内电荷的减少量。

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

- 恒定电流情况：流入等于流出；
- 电路节点不能存储电荷：流入等于流出；----KCL
- 从KCL（1845年）到电荷守恒定律（1747年）；
- 朴素的观点，准确的简单，准确的复杂---螺旋式上升；



2.1 源量：电荷和电流

2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

电荷守恒定律：

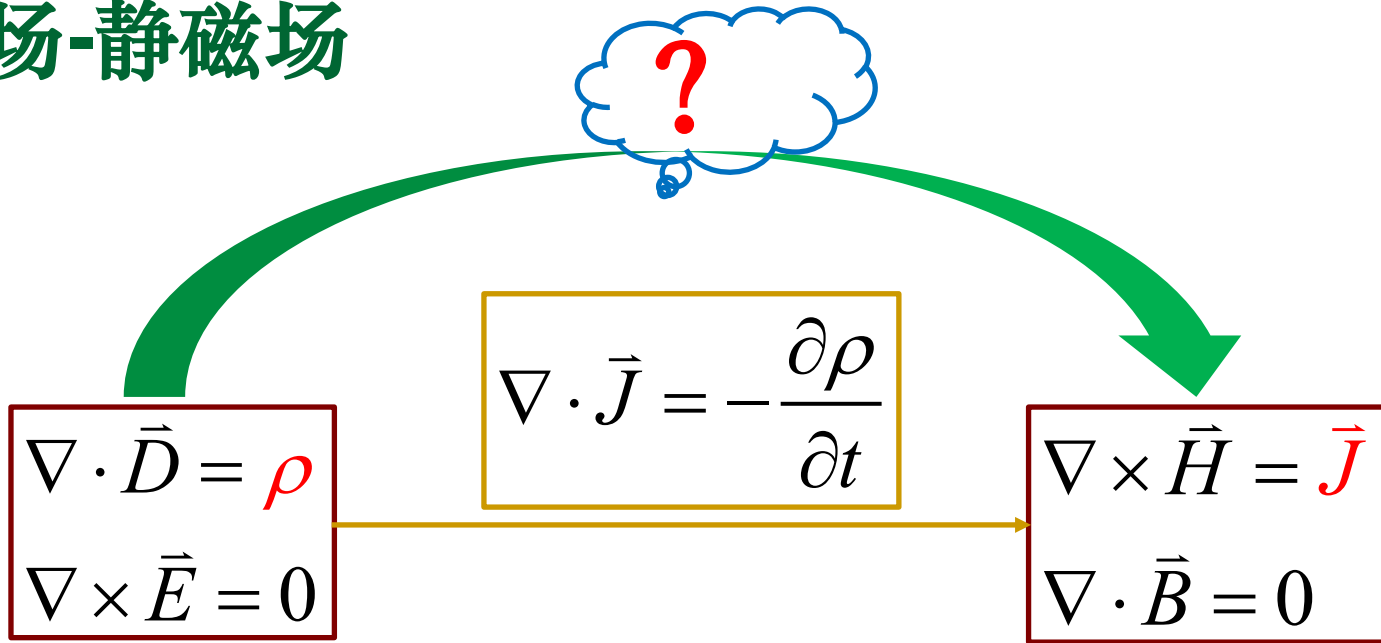
守恒定律与对称性

在一个无外界电荷交换的闭合系统内，正、负电荷的代数和在任何电磁过程中均保持不变。

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

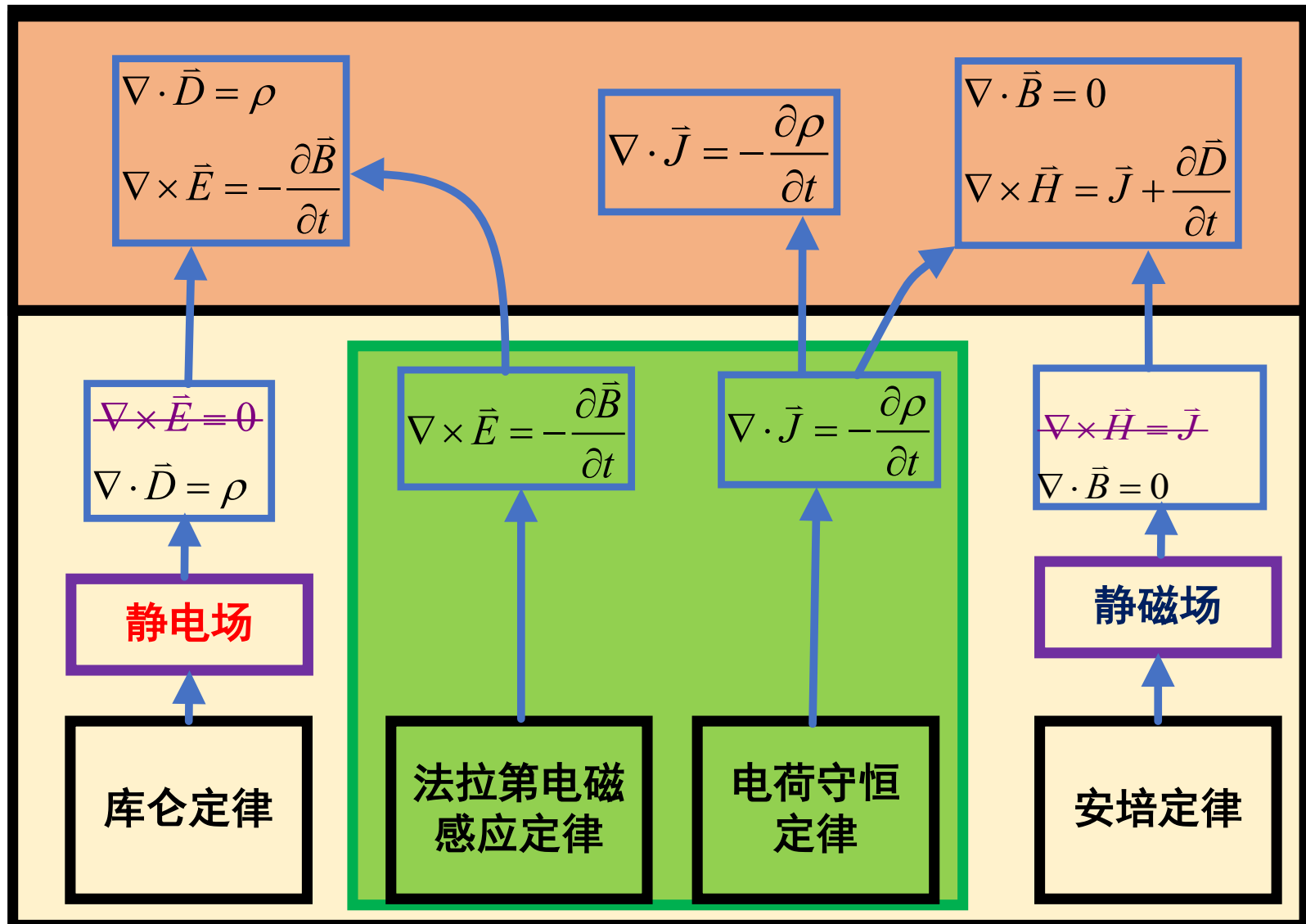
- 表明某点电流密度的散度等于该体电荷密度的时间减少率；
- 电荷守恒是一个基本定律，它是由**电荷的物质属性所决定的**，保证了电荷数量的不变性。
- 诺特定理：如果运动定律在某一变换下具有不变性，必相应地存在一条守恒定律。即：物理定律的一种对称性，对应地存在一条守恒定律；
- **时间平移对称性导致能量守恒定律**，运动定律的空间平移对称性导致动量守恒定律，空间旋转对称性（空间各向同性）导致角动量守恒定律，**规范对称性导致电荷守恒定律**；

静电场-静磁场



- 电荷与电流是场源；
- 电荷与电流的关系：电荷守恒定律；
- 电荷产生电场，电流产生磁场；
- 电荷与电流的关系，是否预示电场和磁场也有联系呢？

第二章 电磁场的基本定律



科研：基础与前沿

- 基础与前沿；
- 边学边做，知行合一；

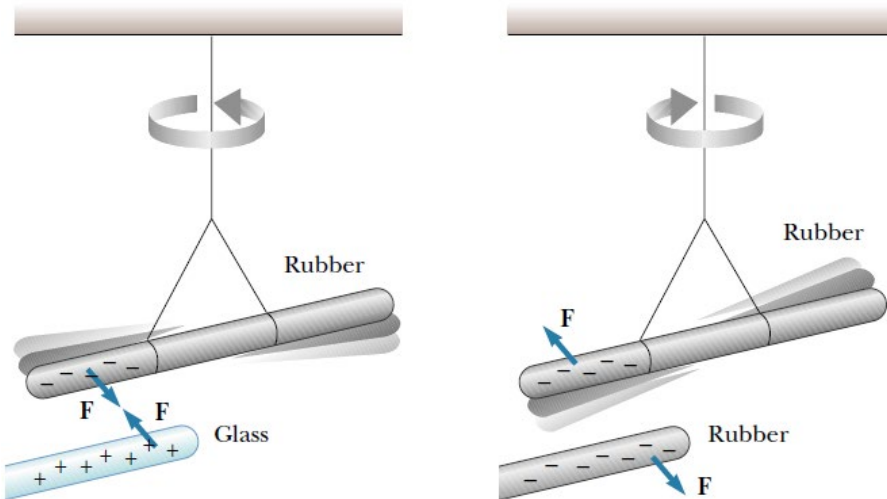


2.2 电场

2.2.1 库仑定律 Coulomb's law

- 电荷---点电荷模型
- 携带电荷的粒子称为载荷子；
- 电子和质子都是载荷子；
- 电量，标量，量子化；
- 力的作用

质子与电子的电荷量，
 $e=1.602 \times 10^{-19}$ 库仑

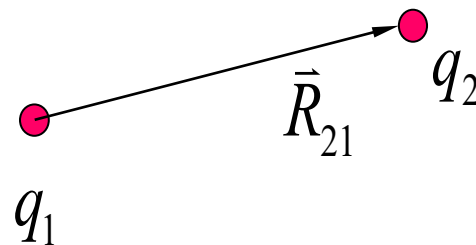


2.2 电场

- 库仑通过实验总结出两个静止点电荷相互作用力的大小，与它们各自所带电量成正比，而与距离的平方成反比。
- 库仑定律的表达式为：

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{a}_{21}$$

$$\epsilon : \left(\frac{C^2}{N \cdot m^2} = \frac{C^2}{J \cdot m} = \frac{F}{m} \right)$$



$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \approx 8.85 \times 10^{-12} \quad (F/m)$$

为真空中的介电常数，表示媒质电性质

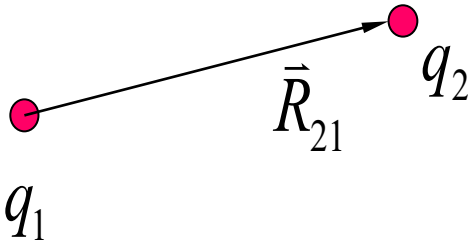
- 点电荷只考虑其电量效应，忽略其所占空间，例如：带电体尺寸远小于观察点到带电体的距离；
- 库仑力与万有引力；试计算氢原子中电子与质子之间的万有引力和库仑力；
- 库仑定律反映出来的超距的观点；
- 根源：只有空间分析，没有时间概念，只能是静态的，不知建立过程；
- 信号与系统视角：电荷是输入，无限大媒质空间是系统，库仑力是响应；
- 力是矢量，满足矢量叠加原理；



2.2 电场

- 库仑**通过实验**总结出两个静止点电荷相互作用力的大小，与它们各自所带电量成正比，而与距离的平方成反比。

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{a}_{21}$$



质子质量 $1.67\text{E-}27\text{kg}$ ，电子质量 $9.11\text{E-}31\text{kg}$ ，万有引力常数 $6.67\text{E-}11\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ ，

质子电量 $1.609\text{E-}19\text{C}$ ，电子电量 $1.609\text{E-}19\text{C}$ ，库仑力常数 $8.99\text{E}9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ 。

万有引力：

$$G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

库仑力：

$$k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

万有引力和库仑力之比：

$$\frac{G m_1 m_2}{k Q_1 Q_2} = 1.09 \times 10^{-56}$$

- 库仑力与万有引力；**试计算氢原子中电子与质子之间的万有引力和库仑力；**
- 两个平方反比率；
- 必须是2次方吗？能不能是2.00001？能不能是1.99999999？
- **实验为何能得出2？**



2.2 电场

- 库仑**通过实验**总结出两个静止点电荷相互作用力的大小，与它们各自所带电量成正比，而与距离的平方成反比。

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{a}_{21}$$

- 为何在哪里都讨论力？
- 力的来源可能不同，力的效果可能不同；
- 不同的力可以矢量叠加-----联系不同的力的来源，联系不同的力的对象；
- 场强的概念属于某个场本身，力的概念不属于某个场；
- 力是不同领域联系的枢纽；
- 能量是不同领域联系的枢纽；



2.2 电场

物理意义明确；
数学运算严谨；
测试简单准确；

2.2.2 电场与电场强度

- 电场力反映了电场的存在与性质，通过电场力可以表征电场的特性。----可感知的，可测量的！
- 用电场强度 \vec{E} 表征电场特性。设在电场中一个试验电荷 q 受力为 \vec{F} ，定义该点的电场强度为：

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad \left(\frac{N}{C} \right)$$

- 电场强度的物理意义为：单位正电荷在电场中所受到的力；---力是综合效果，场强是分析单元；
- 电场强度的可测性；试验电荷不影响原有场；试验电荷是测量仪器！
- **场的观点和意义**：电荷周围产生电场；电场对其中的电荷有力的作用；电荷之间的力通过电场传递的；
- 信号与系统视角的场的观点：库伦定律只给出了静态电场力响应，只是静态响应部分，不包含暂态响应部分；
- 库伦定律仅反映了静态情况下不同电荷之间的作用力；



2.2 电场

2.2.3 电荷产生的电场

- 库仑定律表明：力是施力电荷的线性函数，满足叠加原理；
- 叠加原理贯穿课程始终；
- 叠加原理：矢量叠加运算与标量叠加运算；

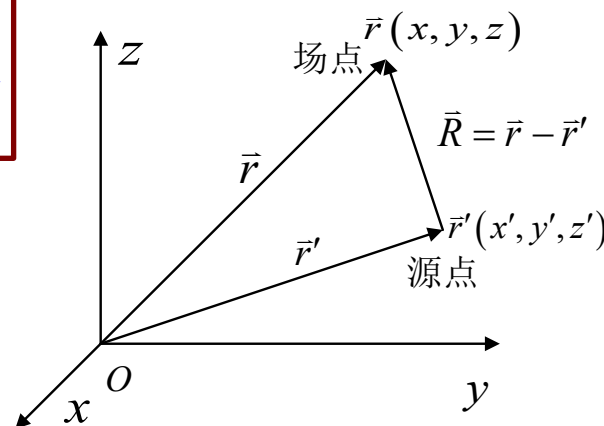
点电荷—离散电荷系—连续电荷

1. 点电荷产生的电场：点电荷 q （在坐标原点）产生的电场强度为：

$$\underbrace{\vec{E}}_{\text{响应}} = \frac{d\vec{F}}{dq} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon}}_{\text{系统}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{a}_r}{r^2}}_{\text{激励}} q$$

2. 离散电荷系产生的电场：（叠加原理）

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \sum_{k=1}^n \vec{E}_k = \sum_{k=1}^n \frac{\vec{a}_{r_k}}{4\pi\epsilon R_k^2} q_k \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} q_k\end{aligned}$$



如果有多个点电荷源，场域中某点的电场强度应该是所有点电荷在该场中产生的电场强度的矢量和。



2.2 电场

2.2.3 电荷产生的电场

3. 连续分布电荷产生的电场：（叠加）

a. 线电荷分布：电荷沿某一曲线连续分布-矢量函数的标量曲线积分。

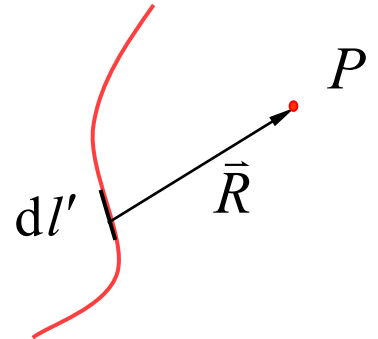
线电荷密度定义：单位长度上的电荷量。

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl'} \quad (C/m) \quad dq = \rho_l dl'$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R = \frac{\rho_l dl'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R$$

该线电荷在空间产生的电场强度：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\rho_l dl'}{R^2} \vec{a}_R$$





2.2 电场

2.2.3 电荷产生的电场

b. **面电荷分布**：电荷沿空间曲面连续分布-矢量函数的标量曲面积分。

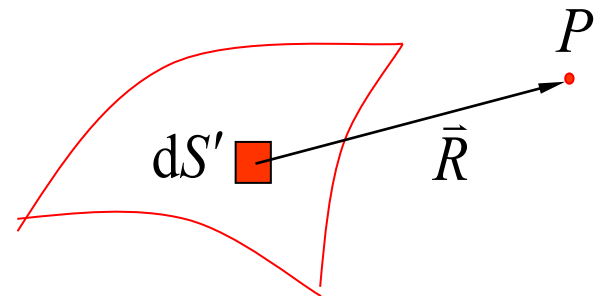
面电荷密度定义：单位面积上的电荷量。

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS'} \quad (C / m^2) \quad dq = \rho_S dS'$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R = \frac{\rho_S dS'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R$$

该面电荷在空间产生的电场强度：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_S dS'}{R^2} \vec{a}_R$$



2.2 电场

2.2.3 电荷产生的电场

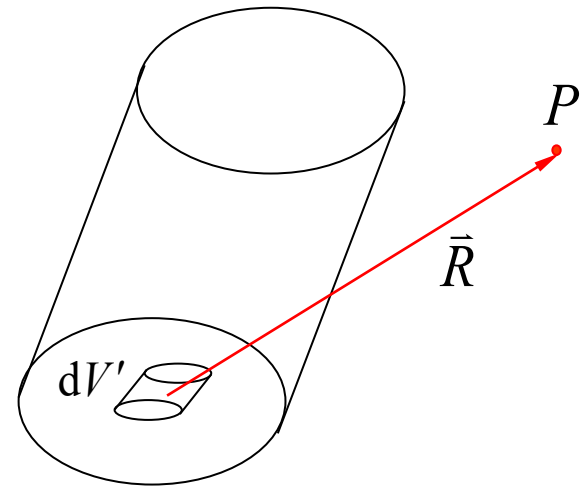
- c. **体电荷分布**：电荷在某空间体积内连续分布-矢量函数的体积积分。
体电荷密度定义：单位体积内的电荷量。

$$\rho_V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV'} \quad (C / m^3) \quad dq = \rho_V dV'$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R = \frac{\rho_V dV'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R$$

该体电荷在空间产生的电场强度：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_V dV'}{R^2} \vec{a}_R$$



2.2 电场

不同电荷分布产生的电场的电场强度:

体电荷分布的矢量场:

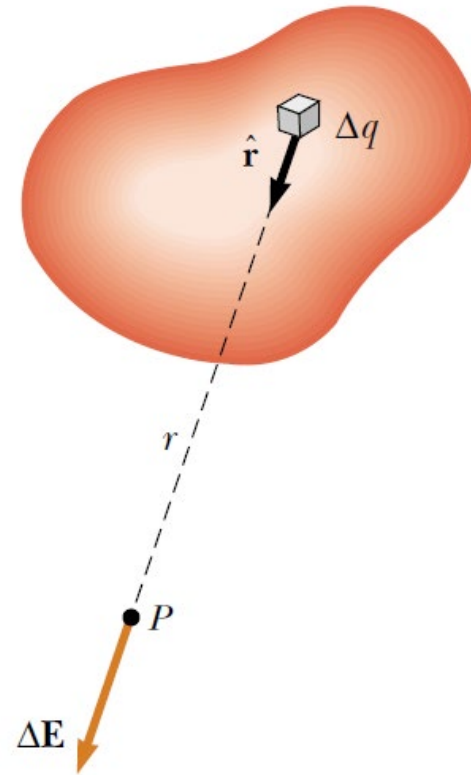
$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho_V dv}{4\pi\epsilon R^2} \vec{a}_R$$

面电荷分布的矢量场:

$$\vec{E} = \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon R^2} \vec{a}_R$$

线电荷分布的矢量场:

$$\vec{E} = \int_l \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon R^2} \vec{a}_R$$



- 库仑定律;
- 线性系统;
- 叠加原理;
- 矢量函数的数乘积分;

1.1 矢量分析

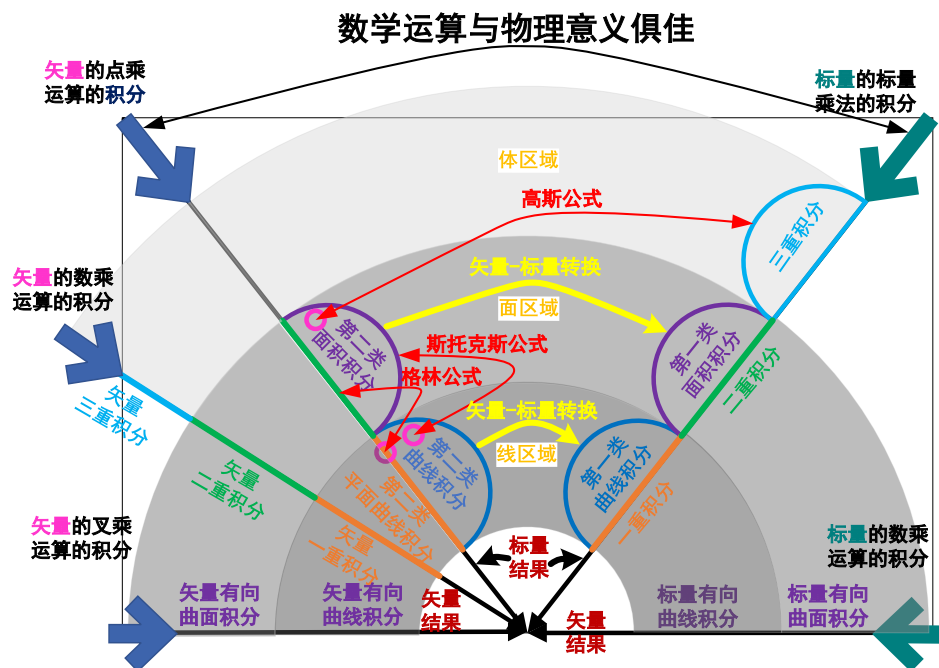
1.1.4 场量积分运算

■ 十二种数学形式：

- 标量与有向曲线，标量与有向曲面；
- 标量与曲线，标量与曲面，标量与体积；
- 矢量点乘有向曲线，矢量点乘有向曲面；
- **矢量与曲线，矢量与曲面，矢量与体积；**
- 矢量叉乘有向曲线，矢量叉乘有向曲面；

■ 矢量的叠加运算：

- 几何：平行四边形法则或三角形法则；
- 解析：矢量的数乘运算积分；

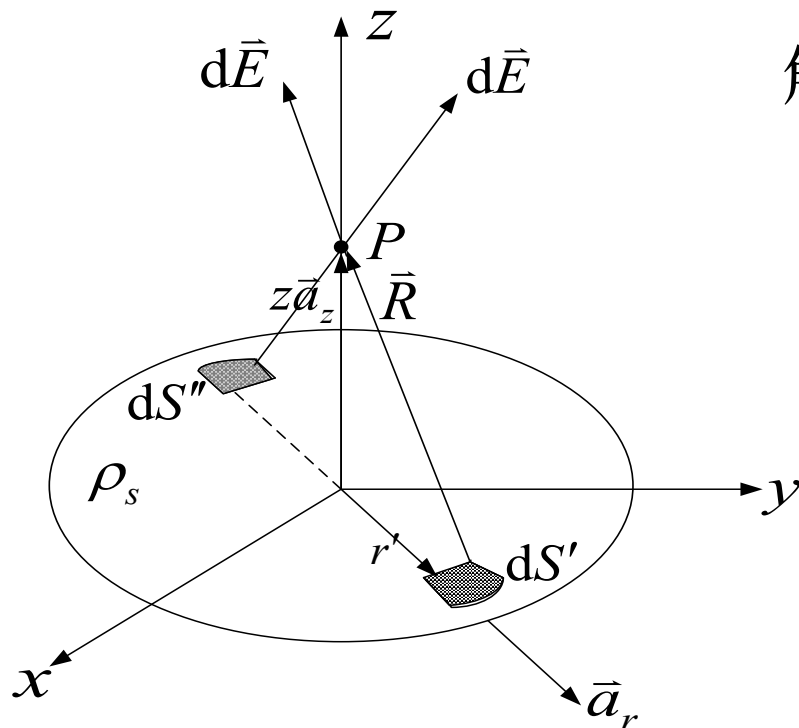




课后范例

例2：设有一无限大的均匀带电平面，面电荷密度为 ρ_s 。

求：距平面 h 高处的电场强度 \vec{E} 。



解：根据题意，选取圆柱坐标系

面元： $dS' = r' dr' d\varphi'$

面元上的电荷量为： $dq = \rho_s r' dr' d\varphi'$

从此电荷源到 z 轴上 P 点的距离

矢量为： $\vec{R} = -r'\vec{a}_r + h\vec{a}_z$

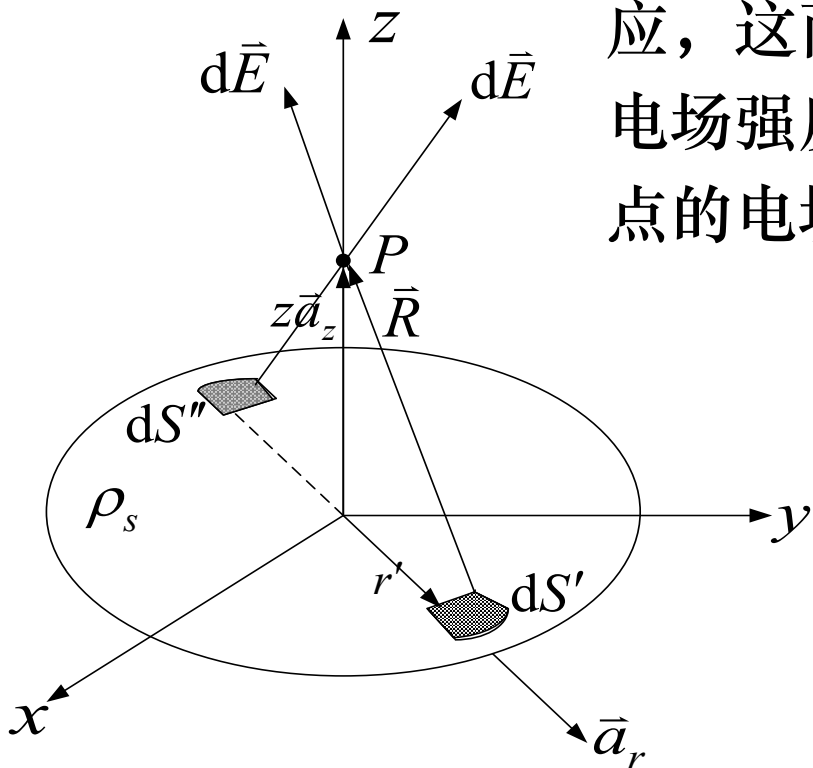
距离大小为： $R = (r'^2 + h^2)^{1/2}$

根据面分布电荷在空间一点所产生的电场强度公式：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s dS'}{R^2} \vec{a}_R = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r' dr' d\varphi'}{[r'^2 + h^2]^{3/2}} [-r'\vec{a}_r + h\vec{a}_z]$$

课后范例

由于电荷分布的对称性，对每一个面元 dS' ，将有一个对称面元 dS'' 与之对应，这两个面元上的电荷在 P 点产生的电场强度的径向分量相互抵消，因此 P 点的电场强度的径向分量为零。



$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r'h}{[r'^2 + h^2]^{3/2}} d\phi' dr' \vec{a}_z \\ &= \frac{\rho_s h}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{[r'^2 + h^2]^{1/2}} \right]_0^\infty \vec{a}_z \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \vec{a}_z\end{aligned}$$

■ 可见：无限大均匀带电平面产生的电场是均匀的，与距离 h 无关，方向为该平面的法线方向。



2.3 高斯定律 Gauss' law

$$\text{库仑定律: } \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{a}_{21}}{r^2} q_1 q_2$$

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{a}_r}{r^2}$$

研究对象：电场
电场有什么特性呢？
该如何研究电场的特性呢？

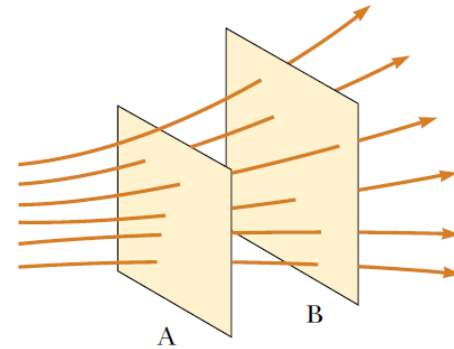
研究客观的，本来的场，
而不是我们观测的力！

亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“套路”。

研究一个矢量场（场点）的性质时，**需要从矢量的散度和矢量的旋度两方面去研究**，得到场的基本方程；

2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.1 电力线



- 可用矢量线来表示电场强度在空间的分布；
- 电力线上每一点的切线方向为该点的电场强度的方向；
- 电力线的密度与电场强度的大小成正比。

2.3.2 电场通量

根据前面矢量场通量的定义，电场的通量为：

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

点电荷电力线穿过 $d\vec{S}$ 的通量为：

$$\underbrace{\vec{E}}_{\text{响应}} = \frac{d\vec{F}}{dq} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon}}_{\text{系统}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{a}_r}{r^2}}_{\text{激励}} q$$

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

θ 是矢径与面元法向的夹角



2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.2 电场通量

根据前面矢量场通量的定义，电场的通量为：

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

点电荷电力线穿过 $d\vec{S}$ 的通量为：

$$\underbrace{\vec{E}}_{\text{响应}} = \frac{d\vec{F}}{dq} = \frac{1}{\underbrace{4\pi\epsilon}_{\text{系统}}} \cdot \frac{\vec{a}_r}{r^2} \underbrace{q}_{\text{激励}}$$

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

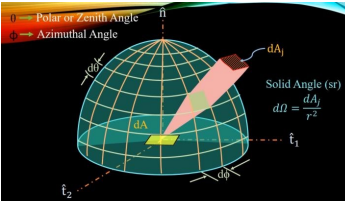
θ 是矢径与面元法向的夹角

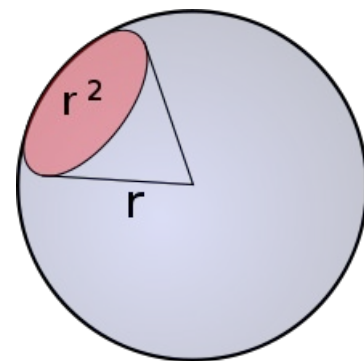
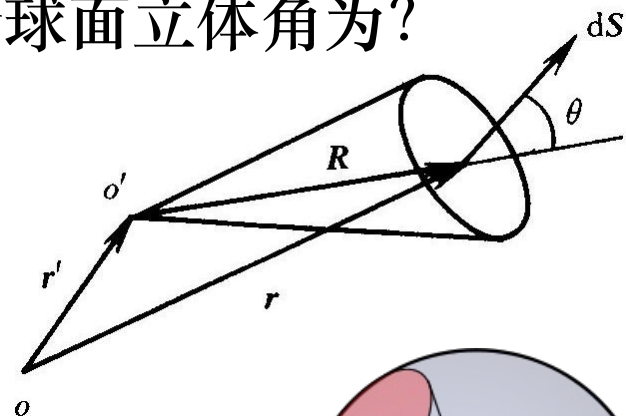
- 此积分可以借助立体角或者矢量恒等式（教材P335-7.12）；
- 课程讲解过程中，有几处数学小技巧；
- 这些小技巧，不影响知识的连贯和理解；

补充小知识：立体角

- 立体角定义：以锥体的顶点 O' 为球心作球面，该锥体在球表面的截取面积（投影面积）与球半径平方的**比值**定义为立体角；
- 立体角的理解：从一点出发**有向穿过**一个曲面的射线数目；
- 立体角是**平面角度（圆心角）**的推广，全球面立体角为？

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{a}_{r-r'}}{R^2} = \frac{dS \cos \theta}{R^2} = \frac{d\vec{S} \cdot (r - r')}{|r - r'|^3} \quad (sr \text{球面度})$$

$$\Omega = \int_S \frac{d\vec{S} \cdot (r - r')}{|r - r'|^3}$$




- 一般曲面对一个点张开的立体角计算---解析为优；
- 封闭曲面对一个点张开的立体角计算---几何为优；

若 \vec{S} 是封闭曲面：
$$\Omega = \oint_S \frac{d\vec{S} \cdot (r - r')}{|r - r'|^3} = \begin{cases} 4\pi & sr \\ 0 & sr \end{cases}$$
 点在闭合面内
点在闭合面外，穿进又穿出



2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.2 电场通量

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{a}_{r-r'}}{R^2} = \frac{dS \cos \theta}{R^2} = \frac{d\vec{S} \cdot (r - r')}{|r - r'|^3} \quad (sr \text{ 球面度})$$

$$\Omega = \int_S \frac{d\vec{S} \cdot (r - r')}{|r - r'|^3}$$

若 \vec{S} 是封闭曲面: $\Omega = \oint_S \frac{d\vec{S} \cdot (r - r')}{|r - r'|^3} = \begin{cases} 4\pi & \text{sr} \\ 0 & \text{sr} \end{cases}$ 点在闭合面内
点在闭合面外

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} d\Omega$$

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \oint_S d\Omega = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon} & \text{电荷在曲面内} \\ 0 & \text{电荷在曲面外} \end{cases}$$



2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.3 电场中的高斯定律

点电荷电力线穿过**包围它的**封闭曲面的通量为：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon}, \quad q \text{ 为封闭曲面内的电荷量}$$

$$\text{若点电荷在封闭曲面外: } \Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}, \quad q \text{ 为封闭曲面内的电荷量}$$

$$\underbrace{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \nabla \cdot \vec{A} d\tau}_{\text{高斯定理}} \rightarrow \int_\tau \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon} = \int_\tau \frac{\rho}{\epsilon} d\tau \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$



2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.3 电场中的高斯定律

$$\text{库仑定律} \Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}, & q \text{ 为封闭曲面内的电荷量} \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}, & \rho(\vec{r}) \text{ 为封闭曲面内的电荷密度} \end{cases}$$

- 静电场高斯定理：在各向同性的均匀媒质中，穿出任一封闭曲面的电场强度矢量的通量等于此**封闭曲面内**的电荷总量除以媒质的介电常数，而与此曲面的形状、大小以及封闭曲面内电荷的**具体分布情况无关**；
- 从库仑定律出发，不依赖其他任何条件，得到静电场的高斯定理；
- 高斯定理的**积分和微分形式**；
- 电荷是电场的散度源，没有电荷的场点电场散度为零；
- 在对称封闭曲面情况下，高斯定理计算电场比较简洁；



2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.4 电通密度和推广的高斯定律

电位移矢量: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (C/m^2)

电位移通量: $d\Psi_D = \vec{D} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$, 与 ε 无关

$$\text{库仑定律} \Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q, & q \text{ 为封闭曲面内的电荷量} \\ \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}), & \rho(\vec{r}) \text{ 封闭曲面内的电荷密度} \end{cases}$$

- 静电场高斯定理: 在各向同性的均匀媒质中, 穿出任一封闭曲面的电位移矢量的通量等于此**封闭曲面内**的电荷总量;
- 从库仑定律出发, 不依赖其他任何条件, 得到静电场的高斯定理;
- 高斯定理表明: 静电场是有源场;
- **但是, 电位移矢量在空间的分布是于媒质有关的;**



课后范例

高斯面的选取:

在场强对称情况下的选取

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}_2$$

在 \vec{S}_1 上 \vec{D} 与 $d\vec{S}_1$ 平行且均匀分布; 在 \vec{S}_2 上 \vec{D} 与 $d\vec{S}_2$ 正交

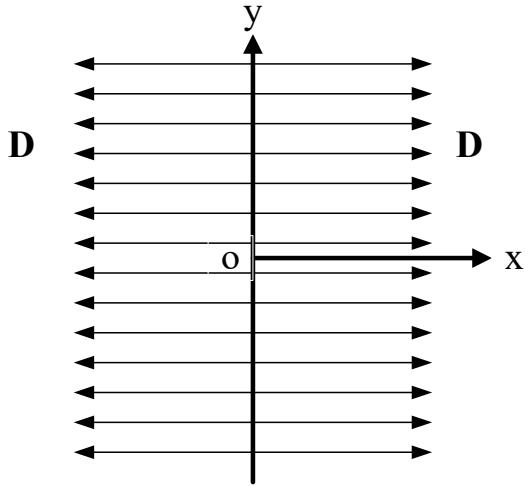
$$\Psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}_2 = D S_1$$

$$\vec{D} = \vec{a}_{n1} \frac{\int_V \rho dV}{S_1}$$

课后范例

例3： 设有一无限大的均匀带电平面，面电荷密度为 ρ_s 。

求：其两侧的电场 \vec{E} 。



解：根据题意，选取高斯面如下图，利用高斯定律有，

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D2S_1 = \int_{S_1} \rho_s dS = \rho_s S_1$$

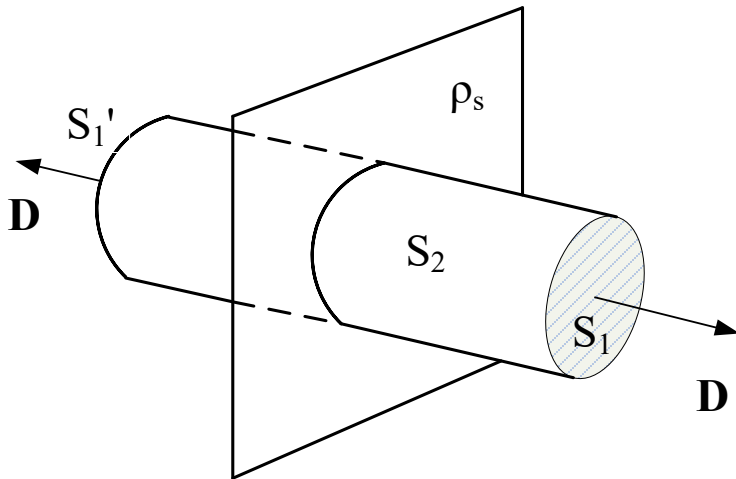
$$D = \frac{\rho_s}{2}$$

选取直角坐标系如上图：

$$\vec{D} = \vec{a}_x \frac{\rho_s}{2} \quad (x \geq 0); \quad \vec{D} = -\vec{a}_x \frac{\rho_s}{2} \quad (x \leq 0)$$

$$\vec{E} = \vec{a}_x \frac{\rho_s}{2\varepsilon} \quad (x \geq 0); \quad \vec{E} = -\vec{a}_x \frac{\rho_s}{2\varepsilon} \quad (x \leq 0)$$

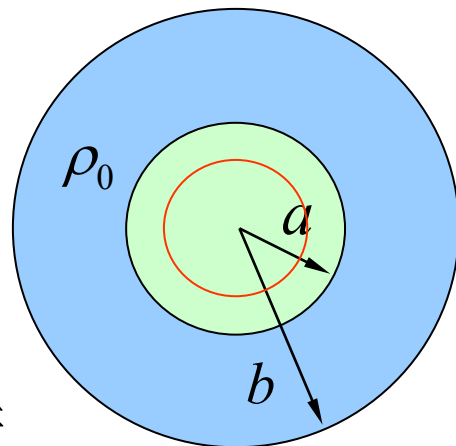
结论同前面的解法



课后范例

例4：一均匀带电球壳，电荷密度为 ρ_0 ，球壳内外半径分别为 a 、 b ，求各区域中的电位移矢量 \bar{D} 。

解：如图，选球坐标系，由于球壳内均匀带电，所产生的电场具有中心对称性。



(1) $R \leq a$ 区域

取半径为 R 的球面为高斯面，根据电高斯定律：

$$\oint_S \bar{D}_1 \cdot d\bar{S} = \int_V \rho_V dV$$

$$\oint_S \bar{D}_1 \cdot d\bar{S} = \oint_S \bar{D}_1 \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \bar{a}_R = D_1 4\pi R^2 = 0$$

可得： $\bar{D}_1 = 0$ $\bar{E}_1 = 0$

课后范例

(2) $a \leq R \leq b$ 区域

取半径为 R 的球面为高斯面，根据电高斯定律：

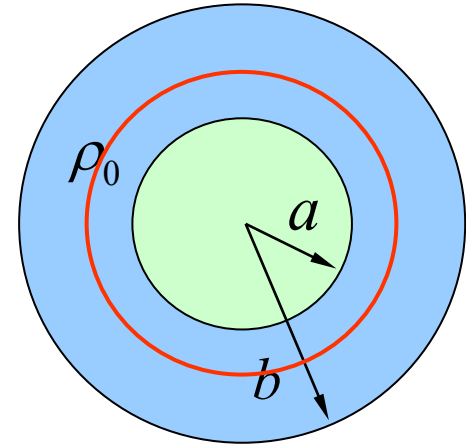
$$\oint_S \bar{D}_2 \cdot d\bar{S} = \int_V \rho_V dV$$

$$\oint_S \bar{D}_2 \cdot d\bar{S} = D_2 4\pi R^2$$

$$\int_V \rho_V dV = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 \right) = \frac{4}{3}\pi \rho_0 (R^3 - a^3)$$

可得：

$$\bar{D}_2 = \frac{\rho_0 (R^3 - a^3)}{3R^2} \bar{a}_R \quad \bar{E}_2 = \frac{\rho_0 (R^3 - a^3)}{3\epsilon R^2} \bar{a}_R$$





课后范例

(3) $R \geq b$ 区域

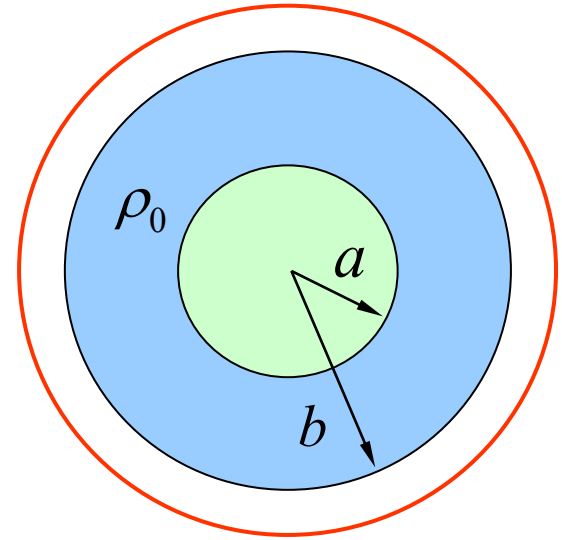
同理取半径为 R 的球面为高斯面，
根据电高斯定律：

$$\oint_S \bar{D}_3 \cdot d\bar{S} = \int_V \rho_V dV$$

$$\oint_S \bar{D}_3 \cdot d\bar{S} = D_{3R} 4\pi R^2$$

$$\int_V \rho_V dV = \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi b^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \frac{4}{3} \pi \rho_0 (b^3 - a^3)$$

$$\text{可得: } \bar{D}_3 = \frac{\rho_0 (b^3 - a^3)}{3R^2} \bar{a}_R \quad \bar{E}_3 = \frac{\rho_0 (b^3 - a^3)}{3\epsilon R^2} \bar{a}_R$$

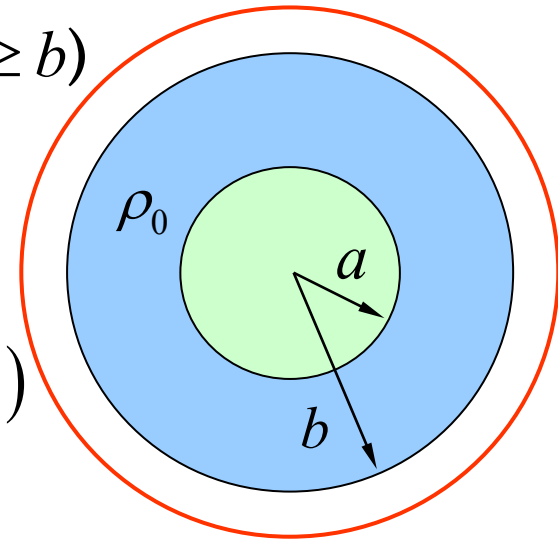


课后范例

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_1 = 0 \quad \bar{E}_1 = 0 \quad (R \leq a) \\ \bar{D}_2 = \frac{\rho_0(R^3 - a^3)}{3R^2} \bar{a}_R, \quad \bar{E}_2 = \frac{\rho_0(R^3 - a^3)}{3\epsilon R^2} \bar{a}_R \quad (a \leq R \leq b) \\ \bar{D}_3 = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3R^2} \bar{a}_R, \quad \bar{E}_3 = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon R^2} \bar{a}_R \quad (R \geq b) \end{array} \right.$$

在 $R = a$, $\bar{D}_1(R = a) = 0 = \bar{D}_2(R = a)$

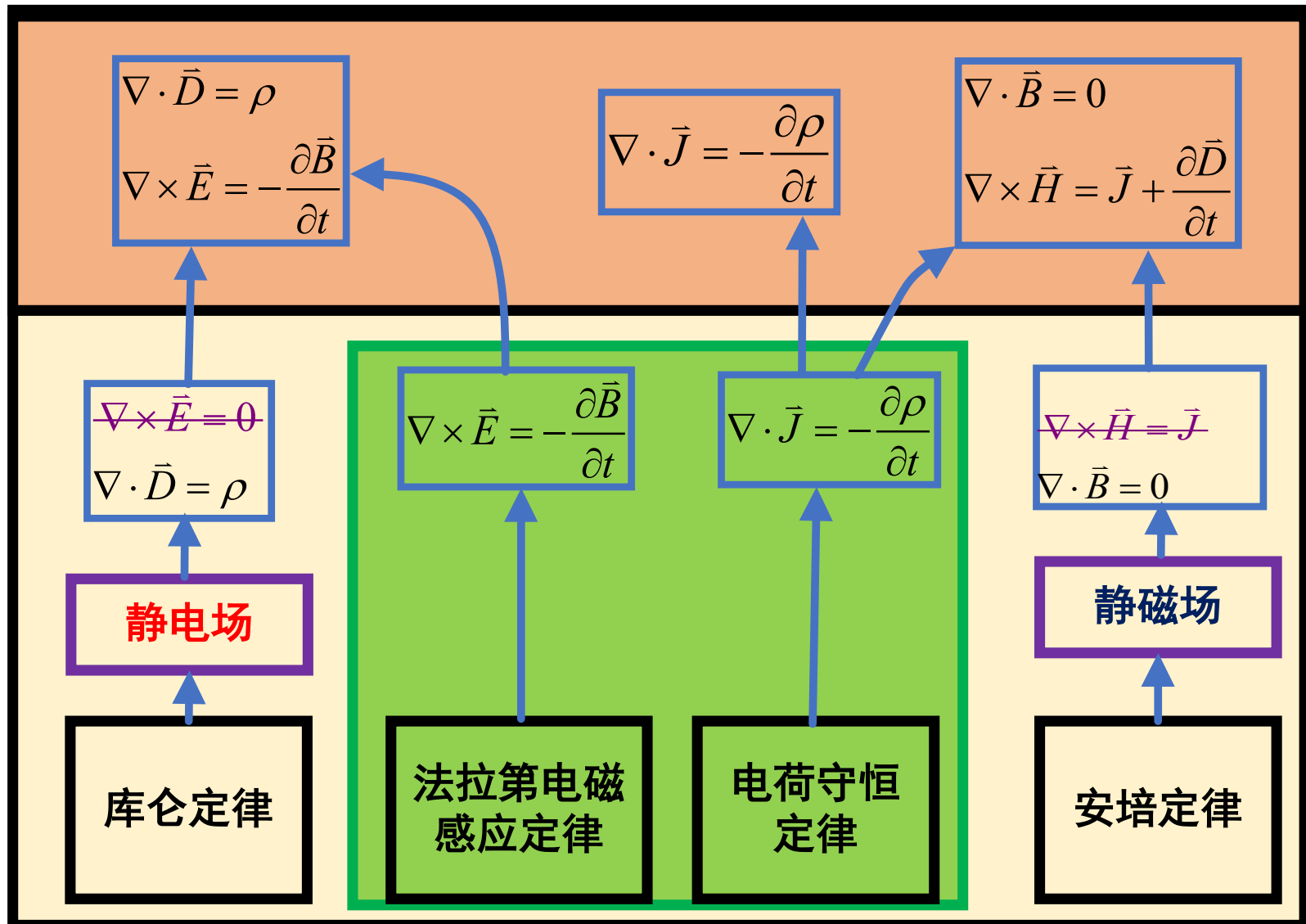
在 $R = b$, $\bar{D}_2(R = b) = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3R^2} \bar{a}_R = \bar{D}_3(R = b)$



若 $\epsilon_2(R < b) \neq \epsilon_0(R > b)$

$$\bar{E}_2(R = b) = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_2 R^2} \bar{a}_R \stackrel{?}{=} \bar{E}_3(R = b) = \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 R^2} \bar{a}_R$$

第二章 电磁场的基本定律

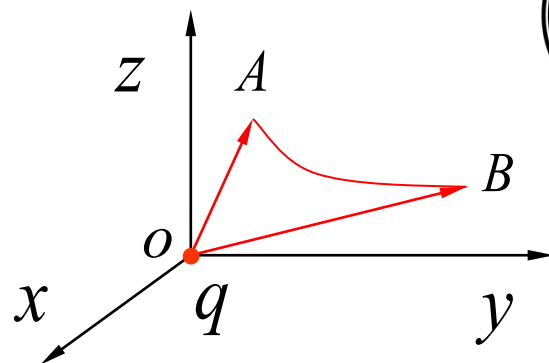




2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.5 静电场的环流

点电荷 q 的场中一条曲线上A,B两点:



\vec{E} 沿曲线的积分为:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{\vec{a}_R}{R^2} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

A,B两点重合时 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

$$\text{KVL} \xleftarrow{\text{特化为}} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \xrightarrow{\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}} \nabla \times \vec{E} = 0$$

- 静电场中场强沿任意闭合环路的线积分等于零; -根源是平方反比关系;
- 静电场力作功只与场和初末位置有关, 与路径无关-保守场;
- KVL是电磁理论的特殊形式;



2.3 高斯定律 Gauss' law

2.3.5 静电场的环流

$$\text{库仑定律} \Rightarrow \begin{cases} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

- 静电场环路定理：静电场的电场强度闭合环路积分为零；
- 从库伦定律出发，不依赖其他任何条件，得到静电场的环路定理；
- 环路定理的积分和微分形式；
- 静电场的旋度为零，静电场是无旋场；
- 静电场与重力场的对比；



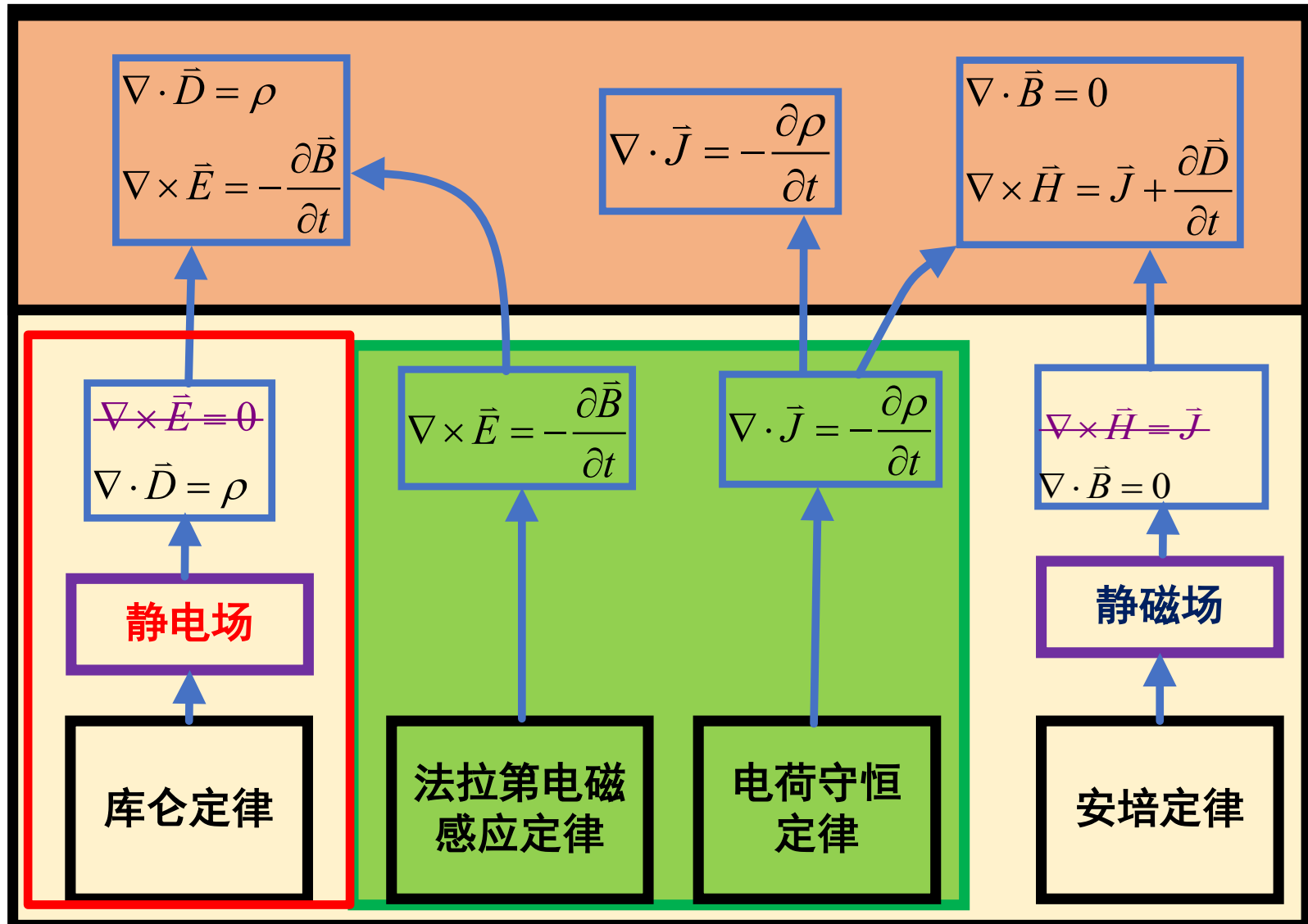
静电场

亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“套路”。

$$\text{库仑定律: } \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{a}_{21} \Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

- 从库仑定律出发，定义了电场，并且不依赖其他任何条件，得到静电场的场方程；
- 电荷是静电场的散度源；
- 静电场的旋度为零，静电场是无旋场；
- 库仑定律是静电场的力的定律，是静电场的物理基础；

第二章 电磁场的基本定律





电磁场的基本定律

■ 2.1 源量：电荷与电流

- 2.1.1 电荷与电荷分布
- 2.1.2 电流与电流密度
- 2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

■ 2.2 电场

- 2.2.1 库仑定律 Coulomb's law
- 2.2.2 电场与电场强度
- 2.2.3 电荷产生的电场

■ 2.3 高斯定律 Gauss' law

- 2.3.1 电力线
- 2.3.2 电场通量
- 2.3.3 电场中的高斯定律
- 2.3.4 电通密度和推广的高斯定律
- 2.3.5 静电场的环流



电磁场的基本定律

■ 2.4 磁场

- 2.4.1 磁场
- 2.4.2 毕奥-沙伐尔定律 Biot-Savart law
- 2.4.3 磁通、磁通连续性原理

■ 2.5 安培环路定律

- 2.5.1 磁感应强度的环量和安培环路定律 Ampère's law
- 2.5.2 磁场强度

■ 2.6 电磁感应定律和位移电流

- 2.6.1 法拉第电磁感应定律 Faraday's magnetic induction law
- 2.6.2 位移电流
- 2.6.3 全电流定律

■ 2.7 电磁场方程的积分和微分形式

- 2.7.1 实验定律汇总
- 2.7.2 麦克斯韦方程 Maxwell equations



电磁场的基本定律

- 2.7.3 积分形式的麦克斯韦方程
- 2.7.4 微分形式的麦克斯韦方程
- 2.7.5 本构关系 constitutive relations

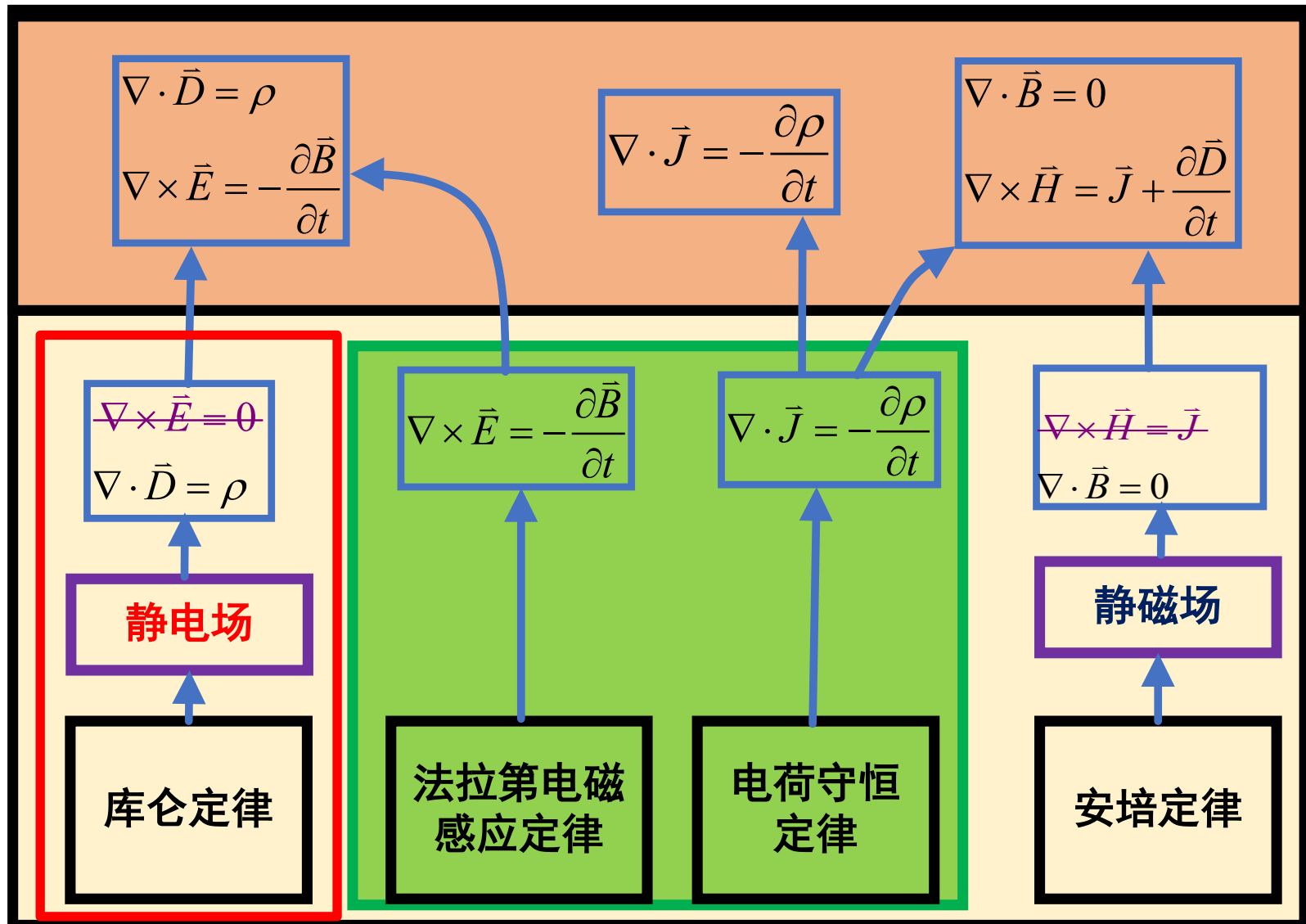
■ 2.8 媒质的电磁性质

- 2.8.1 媒质的宏观电磁特性
- 2.8.2 导体、电介质和磁介质
- 2.8.3 媒质中的Maxwell方程组

■ 2.9 电磁场的边界条件

- 2.9.1 电场法向分量的边界条件
- 2.9.2 电场切向分量的边界条件
- 2.9.3 磁场法向分量的边界条件
- 2.9.4 磁场切向分量的边界条件

第二章 电磁场的基本定律



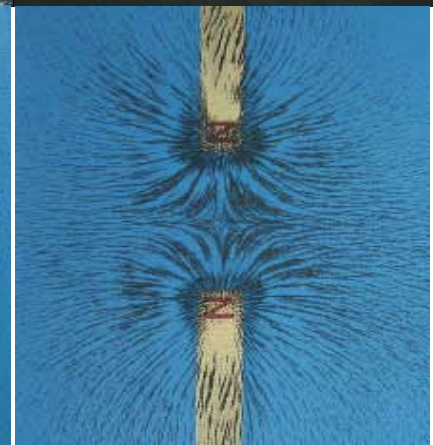
2.4 磁场

2.4.1 磁场

2.4.1.1 磁场的产生与表现

产生磁场的源：

- a.永久磁铁；
- b.电流，即运动的电荷；
- c.变化的电场；



- 存在于载流回路或永久磁铁周围空间，能对运动电荷施力的特殊物质称为磁场；
- 磁场表现为对运动电荷有作用力-洛伦兹力和安培力；
- 对于磁场，实际上比电场可能更加熟悉；

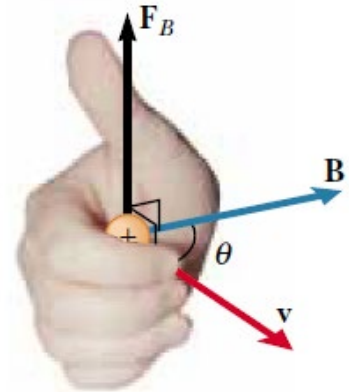
2.4 磁场

2.4.1.2 洛伦兹力 Lorentz force law

速度为 \vec{v} 的运动电荷 dq 在磁场中受到磁场力 $d\vec{F}$ 的作用，称为洛伦兹力。

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B}$$

\vec{B} (T or Wb/m^2) 称为磁感应强度



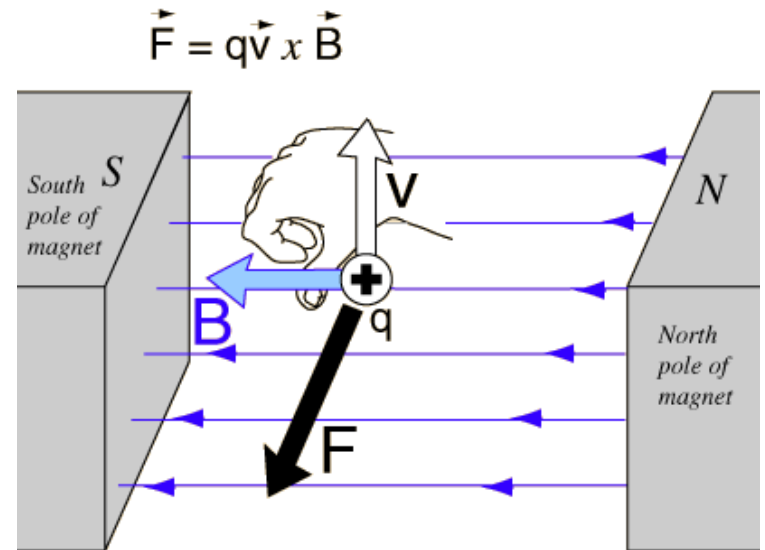
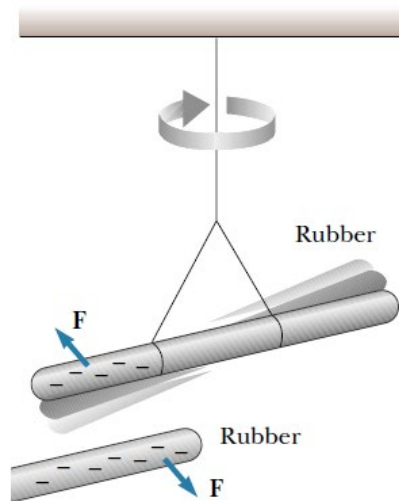
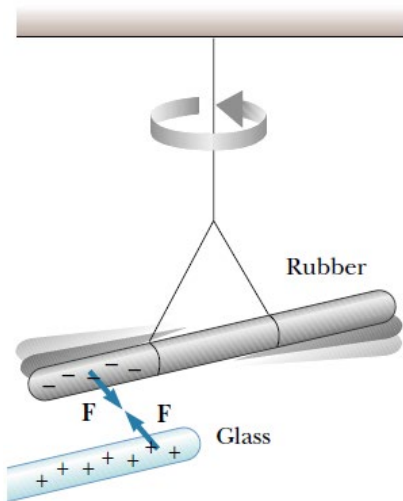
- 为何在哪里都讨论力？
- 力的来源可能不同，力的效果可能不同；
- 不同的力可以矢量叠加-----联系不同的力的来源，联系不同的力的对象；
- 场强的概念属于某个场本身，力的概念不属于某个场；
- 力是不同领域联系的枢纽；
- 能量是不同领域联系的枢纽；

2.4 磁场

2.4.1.2 洛伦兹力 Lorentz force law

如果空间还存在外电场 E ，电荷 q 受到的力还要加上电场力。带电 q 以速度 v 运动的点电荷在外电磁场(E, B)中受到的**电磁力**为：

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



2.4 磁场

2.4.1.3 安培力定律

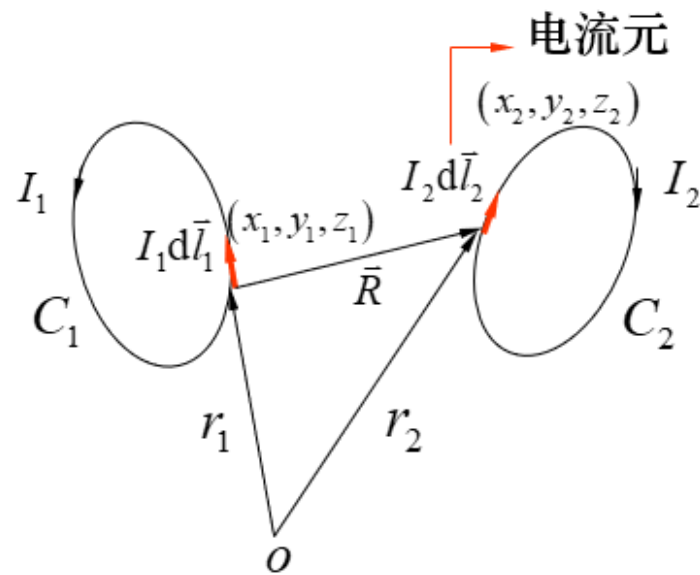
安培通过**大量实验总结**出 C_1 对 C_2 的作用力 \vec{F}_{21} 表达为:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2}$$

μ (H/m) 为表示媒质特性的磁导率

真空中的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2}$$



- 安培力定律：两个电流回路之间的安培力的计算；
- 可以认为是一个孤立电流元对另一个孤立电流元的安培作用力；
- 安培力定律类比库伦定律：形式、意义和地位；
- 安培力定律反映出来的超距的观点；---静止情况下



2.4 磁场

2.4.2 毕奥-沙伐尔定律 Biot-Savart law

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2}, \text{ 其中 } I_2 d\vec{l}_2 = \frac{dq}{dt} d\vec{l}_2 = dq \vec{v}_2$$

$$dF_{21} = dq \vec{v}_2 \times \frac{\mu}{4\pi} \frac{(I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2} \Leftrightarrow d\vec{F}_m = dq \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{令 } d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} \Rightarrow d\vec{B}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2}$$

电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 在空间 r_2 点所产生的磁感应强度

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2}$$

闭合回路1在 r_2 点的磁感应强度矢量称为毕奥—沙伐尔定律



2.4 磁场

2.4.2 毕奥-沙伐尔定律 Biot-Savart law

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2}, \text{ 其中 } I_2 d\vec{l}_2 = \frac{dq}{dt} d\vec{l}_2 = dq \vec{v}_2$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2} \Leftrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2}$$

毕奥—沙伐尔定律

- 毕奥-沙伐尔定律更侧重场的概念，**电能生磁（1820年奥斯特）**；
- **场的观点和意义**：电流周围产生磁场；磁场对其中的电流有力的作用；电流之间的力通过磁场传递的；
- 电流只存在于闭合回路中，一小段电流（微分形式）的分析意义好，环路电流（积分形式）的实验意义好；
- 安培力定律只给出了静态磁场力响应，只是稳态响应部分，不包含暂态响应部分；
- 安培力定律仅反映了静态情况下不同电流之间的作用力；



2.4 磁场

2.4.2 毕奥-沙伐尔定律 Biot-Savart law

安培力定律: $\vec{F}_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2} \Leftrightarrow$ 库伦定律: $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{a}_{21}$

毕奥-沙伐尔定律: $\vec{B}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2} \Leftrightarrow$ 电场计算公式: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{a}_r$

- 电场和磁场的平方反比律;
- 毕奥-沙伐尔定律在1820年提出, 安培力定律在1823年提出;
- 形式上安培力定律好像不满足牛顿第三定律 (叉乘交换符号相反), 实际是满足的, 证明见劳兰书P205;
- **力是联系的枢纽, 力的测量比场的测量更为直接, 力的概念为第一性;**
- 麦克斯韦认为这两个定律是等价的, 也有文献称为Ampere - Laplace - Biot - Savart 定律;
- 安培力定律和安培环路定律, 安培对磁场有更加系统深刻的研究;
- 麦克斯韦通常使用的是安培定律, **我们不区分这两个定律;**

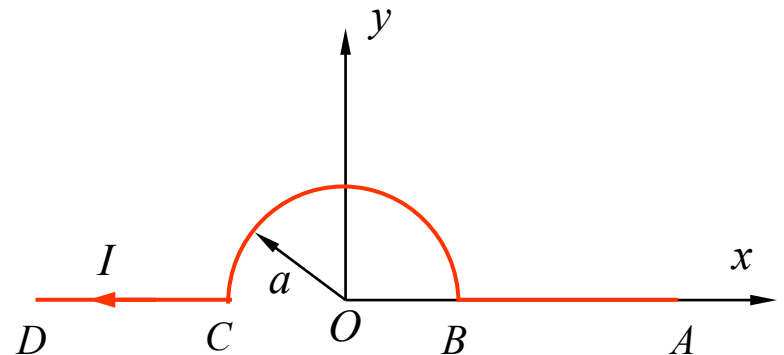


课后范例

例5： 求如图所示的电流线 I 在 O 点产生的磁感应强度。

解：取圆柱坐标系 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{Id\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2}$

将电流线分成 \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} 三段分别求这三段电流在 O 点产生的磁感应强度。





课后范例

(1) \widehat{AB} 段在 O 点产生的 \vec{B}_1

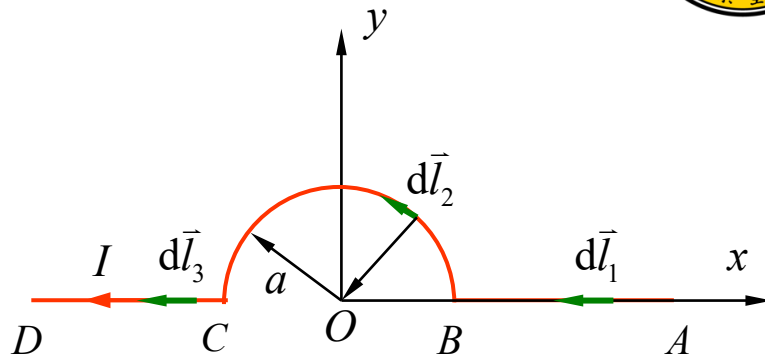
$$\begin{cases} d\vec{l}'_1 = dr(-\vec{a}_r) \\ \vec{a}_{R1} = (-\vec{a}_r) \end{cases}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'_1} \frac{Id\vec{l}'_1 \times \vec{a}_{R1}}{R_1^2} = 0$$

(2) \widehat{BC} 段在 O 点产生的 \vec{B}_2

$$\begin{cases} d\vec{l}'_2 = ad\varphi\vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_{R2} = (-\vec{a}_r) \\ R_2 = a \end{cases}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{Iad\varphi\vec{a}_\varphi \times (-\vec{a}_r)}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4a} \vec{a}_z$$



(3) \widehat{CD} 段在 O 点产生的 \vec{B}_3

$$\begin{cases} d\vec{l}'_3 = dr\vec{a}_r \\ \vec{a}_{R3} = (-\vec{a}_r) \end{cases}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'_3} \frac{Id\vec{l}'_3 \times \vec{a}_{R3}}{R_3^2} = 0$$

O 点产生的磁感应强度:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4a} \vec{a}_z$$

课后范例

例6： 求长为 l ，载有电流 I 的细直导线在 P 点产生的磁感应强度。

解： 如图所示，选用圆柱坐标系

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{Id\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2}$$

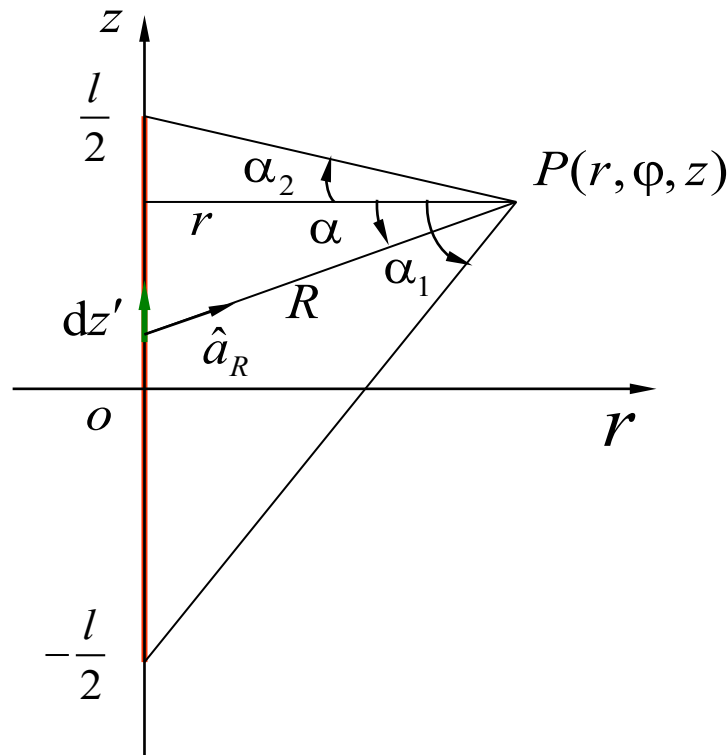
式中： $d\vec{l}' = dz' \vec{a}_z$

$$z' = z - r \tan \alpha$$

$$dz' = -r \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$R = r \sec \alpha$$

$$\vec{a}_R = \vec{a}_r \cos \alpha + \vec{a}_z \sin \alpha$$



所以： $d\vec{l}' \times \vec{a}_R = \vec{a}_z dz' \times (\vec{a}_r \cos \alpha + \vec{a}_z \sin \alpha) = -\vec{a}_\phi r \sec^2 \alpha \cos \alpha d\alpha$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{-\vec{a}_\phi r \sec^2 \alpha \cos \alpha}{r^2 \sec^2 \alpha} d\alpha = \vec{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

课后范例

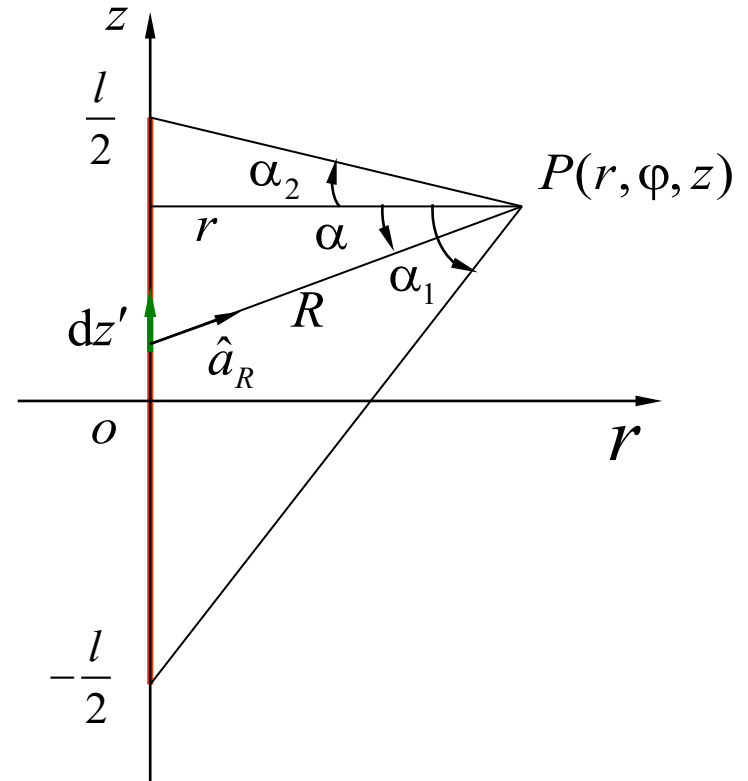
有限长度电流线磁感应强度：

$$\vec{B} = \vec{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

式中：

$$\sin \alpha_1 = \frac{z + \frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + (z + \frac{l}{2})^2}}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{z - \frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + (z - \frac{l}{2})^2}}$$



无限长载流直导线周围磁感应强度：

即： $l \rightarrow \infty \begin{cases} \alpha_1 \rightarrow \pi/2 \\ \alpha_2 \rightarrow -\pi/2 \end{cases}$

于是得：

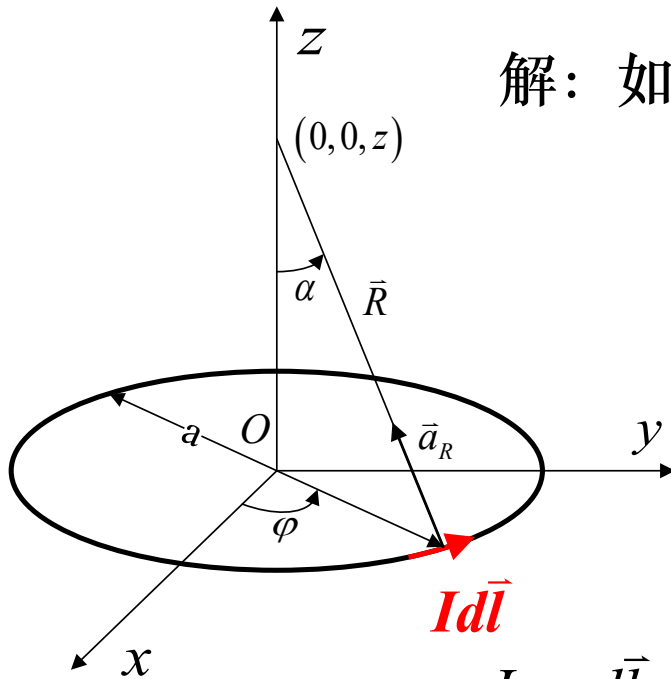
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\varphi$$



课后范例

例7：求载有电流 I 的细圆环在轴线上的磁场,圆环半径为 a 。

解：如图，选用圆柱坐标系，场点坐标为 $(0,0,z)$



$$d\vec{l} = \vec{a}_\varphi a d\varphi$$

$$\vec{a}_R = -\vec{a}_r \sin \alpha + \vec{a}_z \cos \alpha$$

$$d\vec{l} \times \vec{a}_R = \vec{a}_z a \sin \alpha d\varphi + \vec{a}_r a \cos \alpha d\varphi$$

$$R = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R^2} \left[\int_0^{2\pi} \vec{a}_z \sin \alpha d\varphi + \int_0^{2\pi} \vec{a}_r \cos \alpha d\varphi \right]$$

=0

$$\vec{B} = \vec{a}_z \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + z^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} 2\pi = \vec{a}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$



2.4 磁场

$$\text{安培力定律: } d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2}$$

研究对象：磁场
磁场有什么特性呢？
该如何研究磁场的特性呢？

亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“套路”。

研究一个矢量场（场点）的性质时，**需要从矢量的散度和矢量的旋度两方面去研究**，得到场的基本方程；



2.4 磁场

2.3.3 磁通、磁通连续性原理

2.3.3.1 磁力线

- 可用矢量线来表示磁感应强度在空间的分布；
- 磁力线上每一点的切线方向为该点的磁感应强度的方向；
- 磁力线的疏密程度与磁感应强度的大小成正比；

2.3.3.2 磁通

- 磁感应强度对一个曲面的面积分称为磁感应矢量穿过这个曲面的通量，简称磁通；

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (Wb)$$

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} \cdot d\vec{S}$$



补充小知识：矢量微分算符与矢量恒等式

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} \cdot d\vec{S}$$

- 此积分求解用到多个矢量恒等式；
- 课程讲解过程中，有几处数学小技巧；
- 这些小技巧，不影响知识的连贯和理解；

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{a}_R}{R^2}$$

$$\text{Generalized Stokes' Formula: } \int_{\Omega} d\omega = \oint_{\partial\Omega} \omega$$

$$\oint_S \vec{n} \times \vec{A} dS = -\oint_S \vec{A} \times d\vec{S} = \int_{\tau} \nabla \times \vec{A} d\tau$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

- 矢量运算的交换律与结合律；
- Stokes公式：函数在低维空间的积分与函数微分在高维空间的积分；
- 矢量微分与普通微分的相似性与差异；
- 两个重要的矢量恒零等式；

2.4 磁场

课后证明并思考
其意义



2.4.3.3 磁通连续性原理

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \oint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} \cdot d\vec{S} \\&= \oint_C \frac{\mu_0 Id\vec{l}}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{\vec{a}_R \times d\vec{S}}{R^2} \\&= \oint_C \frac{\mu_0 Id\vec{l}}{4\pi} \cdot \oint_S \left(-\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right) \times d\vec{S} \\&= \oint_C \frac{\mu_0 Id\vec{l}}{4\pi} \cdot \int_\tau \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) d\tau \\&= 0\end{aligned}$$

毕奥—沙伐尔定律

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{a}_R}{R^2}$$

(见作业1.2)

$$\oint_S \vec{n} \times \vec{A} dS = -\oint_S \vec{A} \times d\vec{S} = \int_\tau \nabla \times \vec{A} d\tau$$

教材附录337
课件第1章1.2.4节

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv 0$$

\vec{B} 线穿过任一封闭曲面 S 的磁通恒等于零

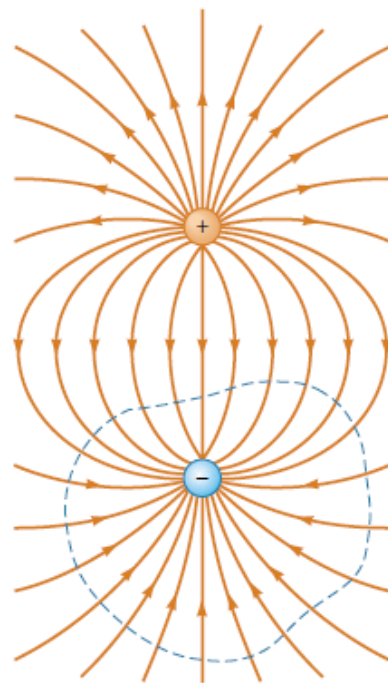
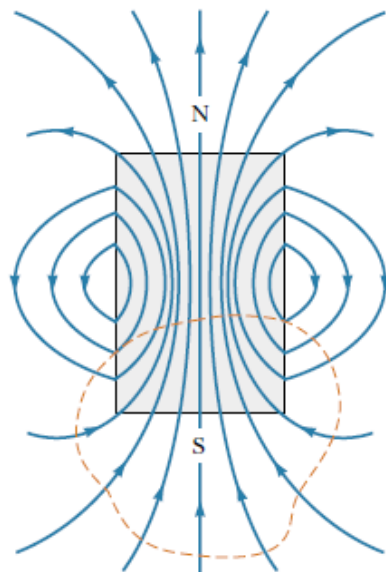
2.4 磁场

2.4.3.3 磁通连续性原理

- 在空间任意作一封闭曲面，穿入该封闭曲面的任一磁力线必然从这封闭曲面的另一处穿出，因而通过**任意曲面**的磁通的代数和恒为零；
- 磁通在磁场中处处连续，**磁力线在空间是封闭的曲线**；
- 称为磁通连续性原理；

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- 电力线始于正电荷，终于负电荷；
- 磁力线是封闭曲线，说明不存在磁荷，散度**恒**为零（**三者等价**）；
- 尚未发现磁荷的存在；
- 磁场是无散场；
- 高中画磁力线：要求必须封闭；





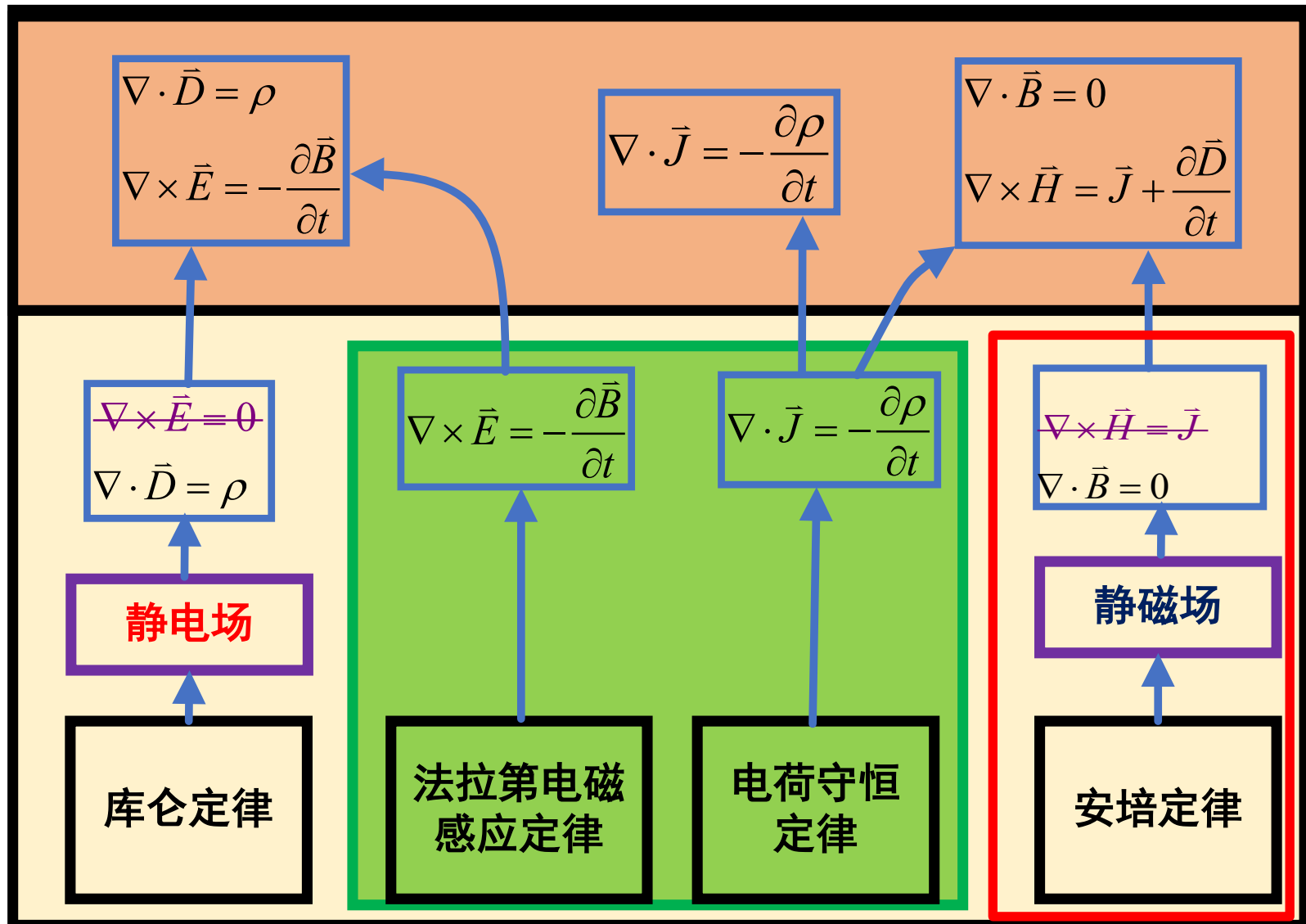
2.4 磁场

2.4.3.3 磁通连续性原理

$$\text{安培力定律} \Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

- 磁通连续性原理，也称为磁场的高斯定理；
- 从安培力定律出发，不依赖其他任何条件，得到静磁场的高斯定理；
- 磁场高斯定理的积分和微分形式；
- 磁场是无散场；
- 在对称封闭曲面情况下，磁场高斯定理计算电场比较简洁；

第二章 电磁场的基本定律





2.5 安培环路定律

2.5.1 \vec{B} 的环量和安培环路定律 Ampère's law

由麦克斯韦在1861年导出的

- 研究一个矢量场的性质，需要从散度和旋度或者闭合面通量和闭合回路的环流来研究。
- 从毕奥-沙伐尔定律可以推出磁感应强度沿闭合曲线C的积分（磁感应强度的环流）。

$$\text{毕奥萨伐尔定律: } d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C'} \frac{-\vec{a}_R}{R^2} \cdot (-d\vec{l} \times d\vec{l}')$$



补充小知识：立体角

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C'} \frac{-\vec{a}_R}{R^2} \cdot (-d\vec{l} \times d\vec{l}')$$

$$d\Omega = \frac{-\vec{a}_R}{R^2} \cdot (-d\vec{l} \times d\vec{l}')$$

$$\Omega = \oint_C \frac{-\vec{a}_R}{R^2} \cdot (-d\vec{l} \times d\vec{l}') = \begin{cases} 4\pi & \text{环路铰链} \\ 0 & \text{环路不铰链} \end{cases}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C'} \frac{-\vec{a}_R}{R^2} \cdot (-d\vec{l} \times d\vec{l}') = \begin{cases} \mu I_1 & \text{环路铰链} \\ 0 & \text{环路不铰链} \end{cases}$$

- 参考王家礼书；
- 有多种求解过程；
- 此处为了与静电场对称，依旧采用立体角的过程；

2.5 安培环路定律

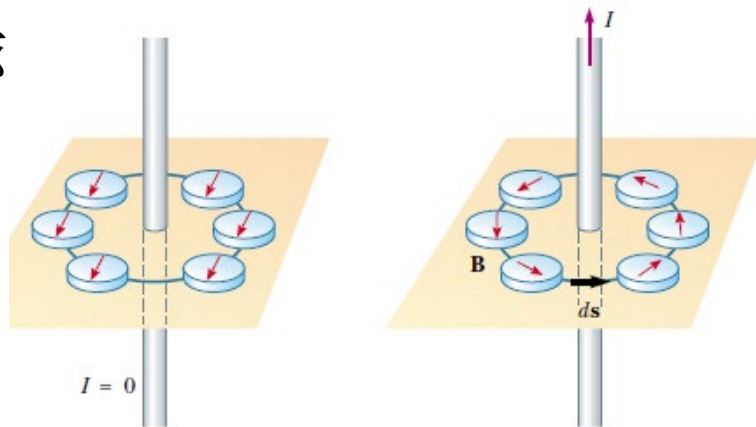
2.5.1 \vec{B} 的环量和安培环路定律 Ampère's law

由麦克斯韦在1861年导出的

- 研究一个矢量场的性质，需要从散度和旋度或者闭合面通量和闭合回路的环流来研究。
- 从毕奥-沙伐尔定律推出磁感应强度沿闭合曲线C的积分（磁感应强度的环流），称为安培环路定律，**是独立的实验定律**。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$

- 安培环路定律表明：在均匀媒质中，磁感应强度 \vec{B} 沿闭合曲线C的积分等于该闭合回路C所交链（包围）的电流的代数和与媒质磁导率的乘积。
- 符号：满足右手螺旋关系，取正，



2.5 安培环路定律

2.5.1 \vec{B} 的环量和安培环路定律 Ampère's law

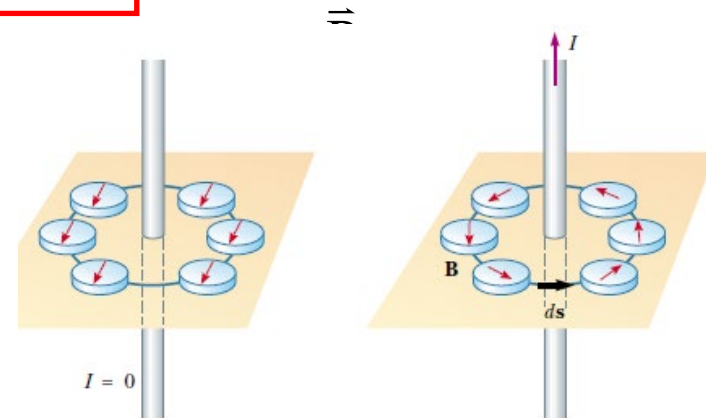
由麦克斯韦在1861年导出的

- 研究一个矢量场的性质，需要从散度和旋度或者闭合面通量和闭合回路的环流来研究。

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \sum_k I_k \\ \mu_0 \sum_k I_k &= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- 磁场是有旋场，旋度源是电流密度；
- 与静电场对比；

本页PPT的公式，有没有什么问题？
提示：两个重要的恒零等式





2.5 安培环路定律

2.5.2 磁场强度 引入另一矢量 \vec{H} , 称为磁场强度

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Downarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

实际工程中常常是称为：磁场B或磁场H。

$$\text{安培力定律} \Rightarrow \begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$



2.5 安培环路定律

2.5.2 磁场强度

$$\text{安培力定律} \Rightarrow \begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

- 静磁场环路定理：静磁场的磁场强度闭合环路积分为所较链的电流；
- 从安培力定律出发，不依赖其他任何条件，得到磁电场的环路定理；
- 环路定理的积分和微分形式；
- 静磁场的旋度为电流密度；

亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“套路”。

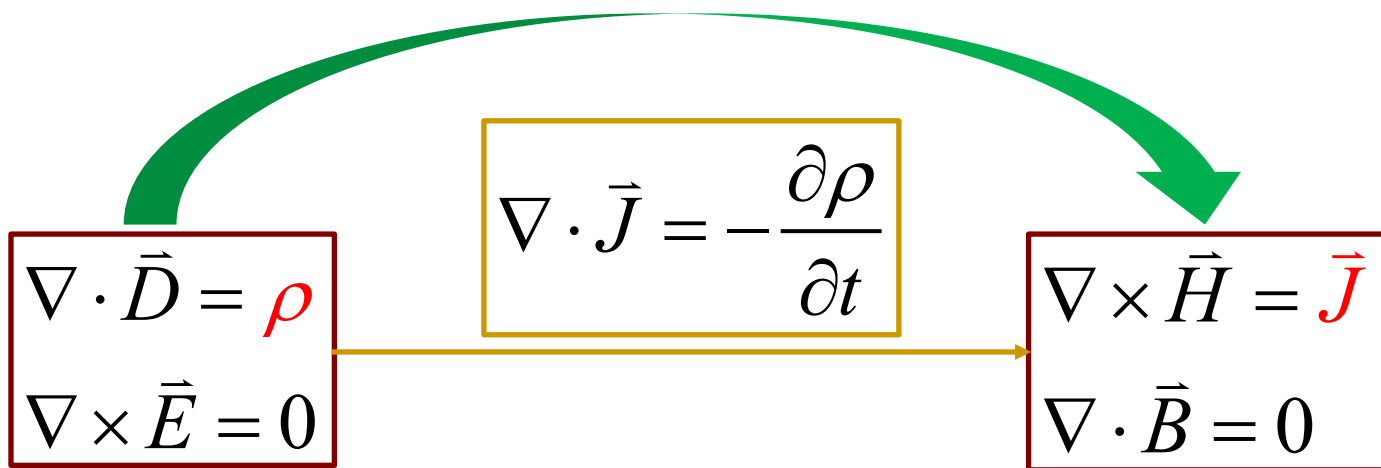
$$\text{安培力定律: } d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2} \Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

- 从安培力定律出发，不依赖其他任何条件，得到静磁场的场方程；
- 电流是静磁场的旋度源；
- 静磁场的散度为零，静磁场是无散场；
- 安培力定律是静磁场的物理基础；



静电场--静磁场

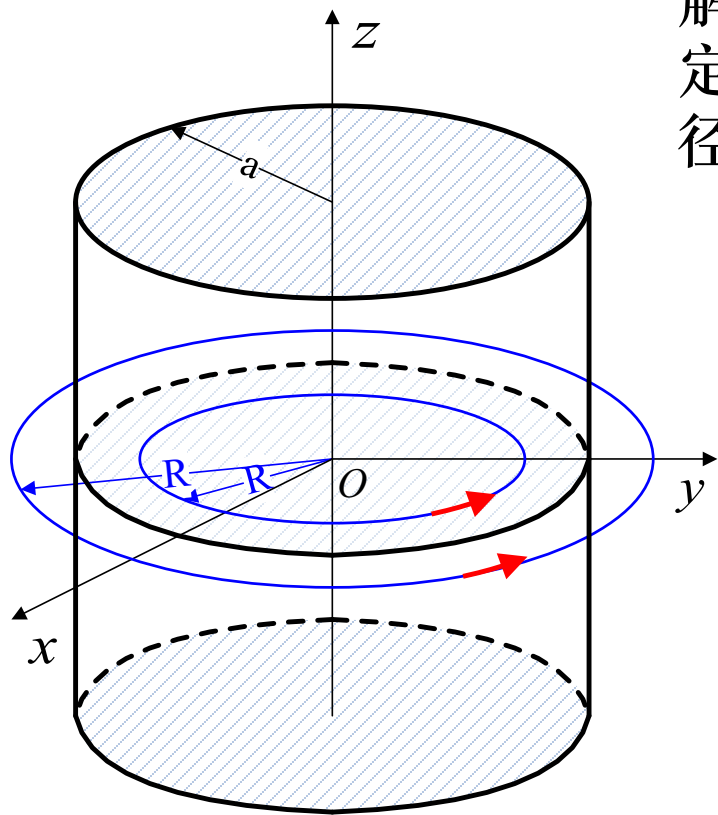
电场强度	E V/m	磁场强度	H A/m
电通密度,电位移矢量	D C/m ²	磁通密度,磁感应强度	B Wb/m ²
介电系数 (电容率)	ϵ F/m	导磁系数 (磁导率)	μ H/m
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$		$\vec{B} = \mu \vec{H}$	
电通	Ψ C	磁通	Φ Wb
$\Psi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$		$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	



课后范例

例8：圆柱直长导线中均匀分布电流 I ，导线半径为 a ，磁导率为 μ ，求导线内外部空间的磁场分布。

解：如图，选用圆柱坐标系，用安培环路定律解。作闭合回路 C ，由于对称性， C 路径上各点 \vec{H} 大小相等，方向与环路相切。



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi R H$$

$$R \leq a, \quad I' = JS = \frac{I}{\pi a^2} \pi R^2, \quad H = \frac{R}{2\pi a^2} I$$

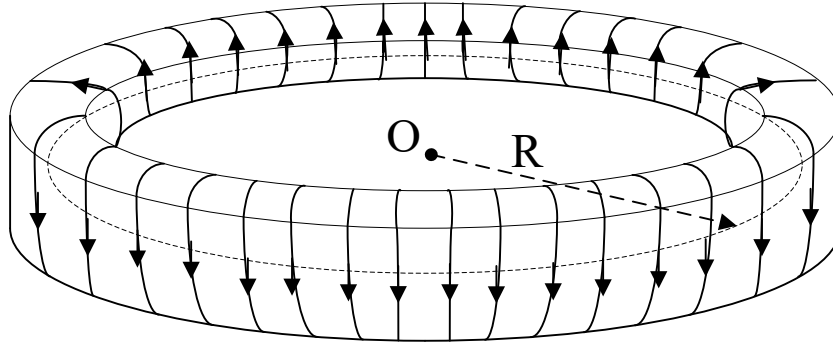
$$\vec{H} = \vec{a}_\phi \frac{R}{2\pi a^2} I, \quad \vec{B} = \vec{a}_\phi \frac{\mu R}{2\pi a^2} I$$

$$R \geq a, \quad I' = I, \quad H = \frac{I}{2\pi R}$$

$$\vec{H} = \vec{a}_\phi \frac{I}{2\pi R}, \quad \vec{B} = \vec{a}_\phi \frac{\mu I}{2\pi R}$$

课后范例

例9：螺线形线圈，设总匝数为 N ，通过的电流为 I ，求磁场分布。



解：由安培环路定律可得 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$

所以，在环内：
$$H = \frac{NI}{2\pi R}$$

在环外：
$$H = 0$$

作业



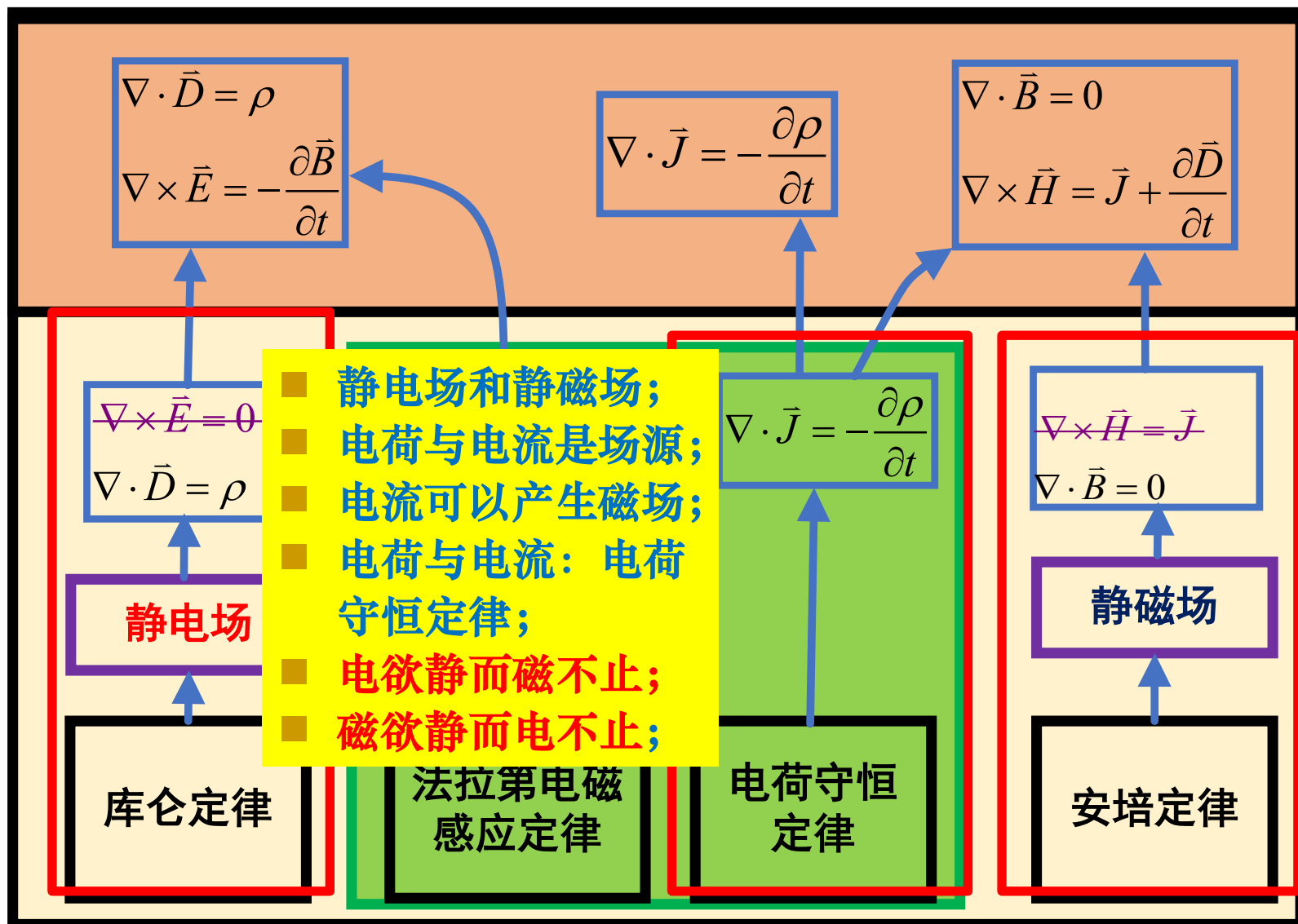
P31 习题1.4

P31 习题1.8

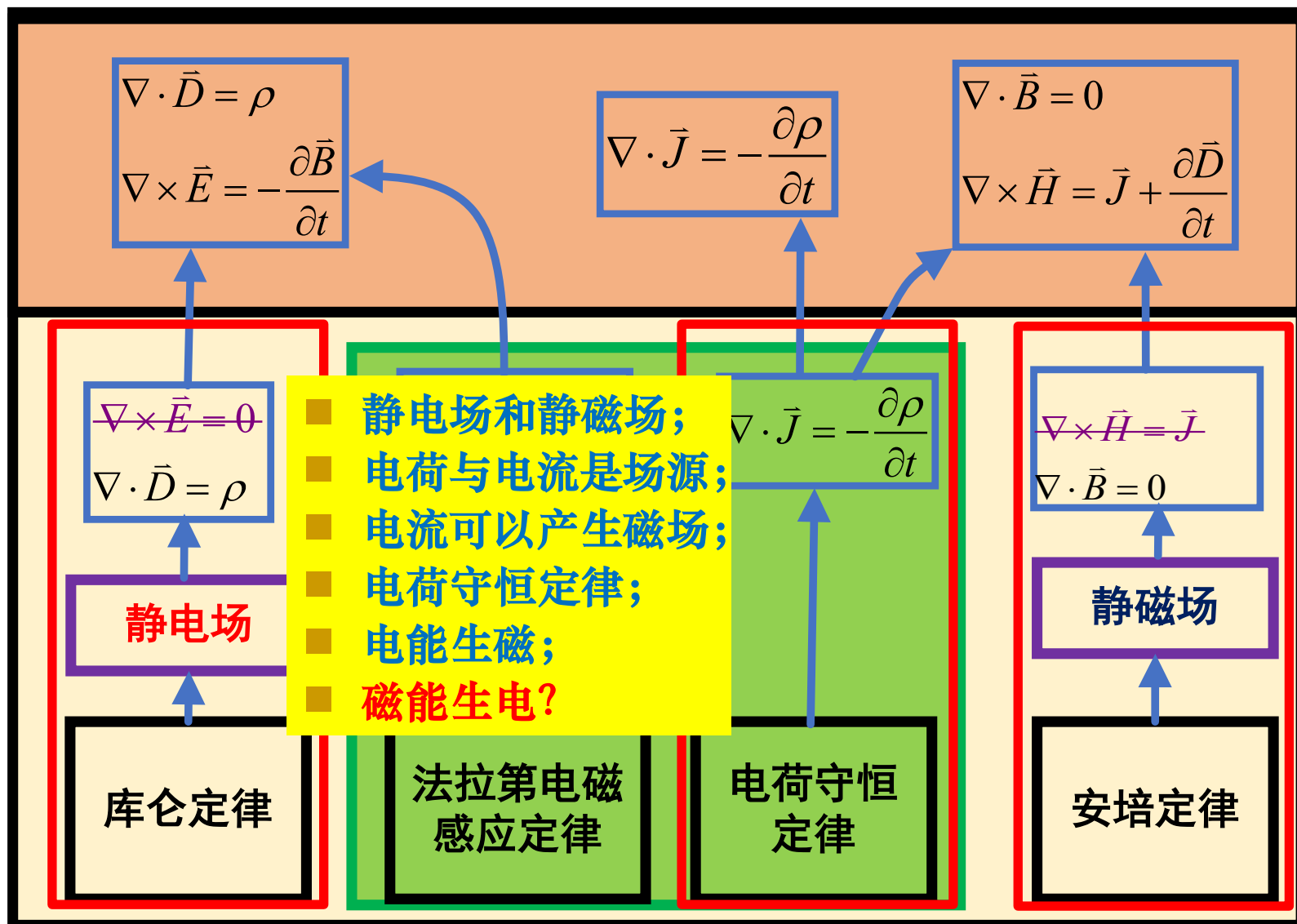
P31 习题1.9

P31 习题1.12

第二章 电磁场的基本定律



第二章 电磁场的基本定律





电磁场的基本定律

■ 2.1 源量：电荷与电流

- 2.1.1 电荷与电荷分布
- 2.1.2 电流与电流密度
- 2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

■ 2.2 电场

- 2.2.1 库仑定律 Coulomb's law
- 2.2.2 电场与电场强度
- 2.2.3 电荷产生的电场

■ 2.3 高斯定律 Gauss' law

- 2.3.1 电力线
- 2.3.2 电场通量
- 2.3.3 电场中的高斯定律
- 2.3.4 电通密度和推广的高斯定律
- 2.3.5 静电场的环流



电磁场的基本定律

■ 2.4 磁场

- 2.4.1 磁场
- 2.4.2 毕奥-沙伐尔定律 Biot-Savart law
- 2.4.3 磁通、磁通连续性原理

■ 2.5 安培环路定律

- 2.5.1 磁感应强度的环量和安培环路定律 Ampère's law
- 2.5.2 磁场强度

■ 2.6 电磁感应定律和位移电流

- 2.6.1 法拉第电磁感应定律 Faraday's magnetic induction law
- 2.6.2 位移电流
- 2.6.3 全电流定律

■ 2.7 电磁场方程的积分和微分形式

- 2.7.1 实验定律汇总
- 2.7.2 麦克斯韦方程 Maxwell equations



电磁场的基本定律

- 2.7.3 积分形式的麦克斯韦方程
- 2.7.4 微分形式的麦克斯韦方程
- 2.7.5 本构关系 constitutive relations

■ 2.8 媒质的电磁性质

- 2.8.1 媒质的宏观电磁特性
- 2.8.2 导体、电介质和磁介质
- 2.8.3 媒质中的Maxwell方程组

■ 2.9 电磁场的边界条件

- 2.9.1 电场法向分量的边界条件
- 2.9.2 电场切向分量的边界条件
- 2.9.3 磁场法向分量的边界条件
- 2.9.4 磁场切向分量的边界条件

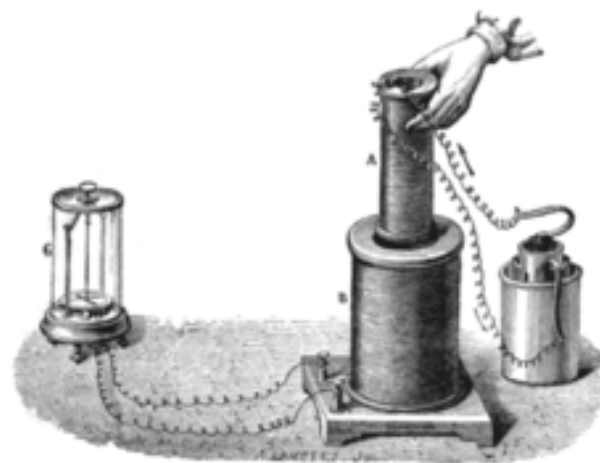
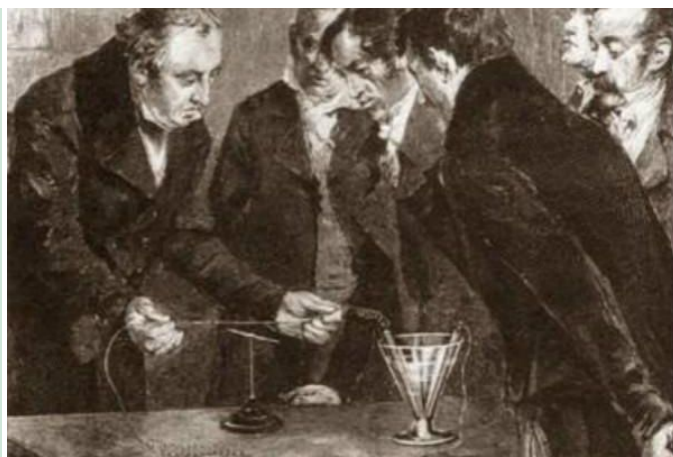
2.6 电磁感应定律和位移电流

前法拉第时代

- 库伦认为电和磁没有什么关系
- **电能生磁**——1820年-定性;
- **你会想什么?**
- 安培定律-----定量;

后法拉第时代

- **磁能生电**
- 电磁场形成
- 电磁波的证实
- 电磁波的广泛应用



2.6 电磁感应定律和位移电流

1822年的想法
1831年的验证



2.6.1 法拉第电磁感应定律 Faraday's magnetic induction law

1831年，法拉第等人的**实验**表明：**导体回路**所围曲面的**磁通量**发生变化时，导体中就会出现**感应电动势**，并在闭合回路中引起**感应电流**。

- 法拉第电磁感应定律：感应电动势的大小正比与磁通对时间的**变化率**；

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- 感应电动势与媒质无关；
- 感应电动势产生感应电场并使得闭合回路中电荷定向移动形成感应电流；
- Lenz完善电磁感应定律，楞次定律：感应电流产生的磁通总是对原磁通的**变化**起阻碍作用---负反馈；



2.6 电磁感应定律和位移电流

1822年的想法
1831年的验证

2.6.1 法拉第电磁感应定律 Faraday's magnetic induction law

$$\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- 感应电动势是与**感应电场**对应的，因此有

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l}$$

- 感应电动势是感应电场沿着**闭合回路**的积分；
- 感应电动势产生感应电场并使得闭合回路中电荷定向移动形成感应电流；
- 感应电场存在于整个空间，感应电流存在于导体中；

- 静态场情况下：法拉第电磁定律：
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \xrightarrow[\text{似稳态 } \frac{d\vec{B}}{dt} \approx 0]{\text{静态 } \frac{d\vec{B}}{dt} = 0} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{---KVL}$$

- 一般情况下，电场沿着闭合回路的积分**不是零？！**

2.6 电磁感应定律和位移电流

1822年的想法
1831年的验证



2.6.1 法拉第电磁感应定律 Faraday's magnetic induction law

$$\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}_s) \cdot d\vec{S}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E}_s = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \leftarrow \text{感应电场是有旋场} \\ \nabla \times \vec{E}_c = 0 \leftarrow \text{库伦电场是无旋场} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times (\vec{E}_s + \vec{E}_c) = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}_c + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- 库伦电场：静止电荷产生的静电场；
- 感应电场：随时间变化的磁场是激发感应电场的漩涡源；
- 库伦电场是无旋场并且与媒质有关；感应电场是有旋场并且与媒质无关；
- 总电场形式上与有旋场一样满足法拉第电磁感应定律；



2.6 电磁感应定律和位移电流

2.6.1 法拉第电磁感应定律 Faraday's magnetic induction law

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

三种引起磁通变化的原因及数学描述：

■ 闭合回路是静止的，但与之交链的磁场是随时间变化的，这时回路中产生的感应电动势称为**感生电动势**；

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

■ 闭合回路与恒定磁场之间存在相对运动，这时回路中的感应电动势为**动生电动势**；

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

矩形匀速 $\rightarrow = BLv$

■ 既存在时变磁场又存在回路的相对运动，则总的感应电动势为：

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$



2.6 电磁感应定律和位移电流

- 从静电场到电磁感应；
- 电荷与变化的磁场产生电场；
- 库伦电场；
- 感应电场；
- 总场满足法拉第电磁感应定律；
- **假定** 电场高斯定理对时变情况依旧成立：合理假定
- 电场的物理基础：库伦定律和法拉第电磁感应定律；

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}_c + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$



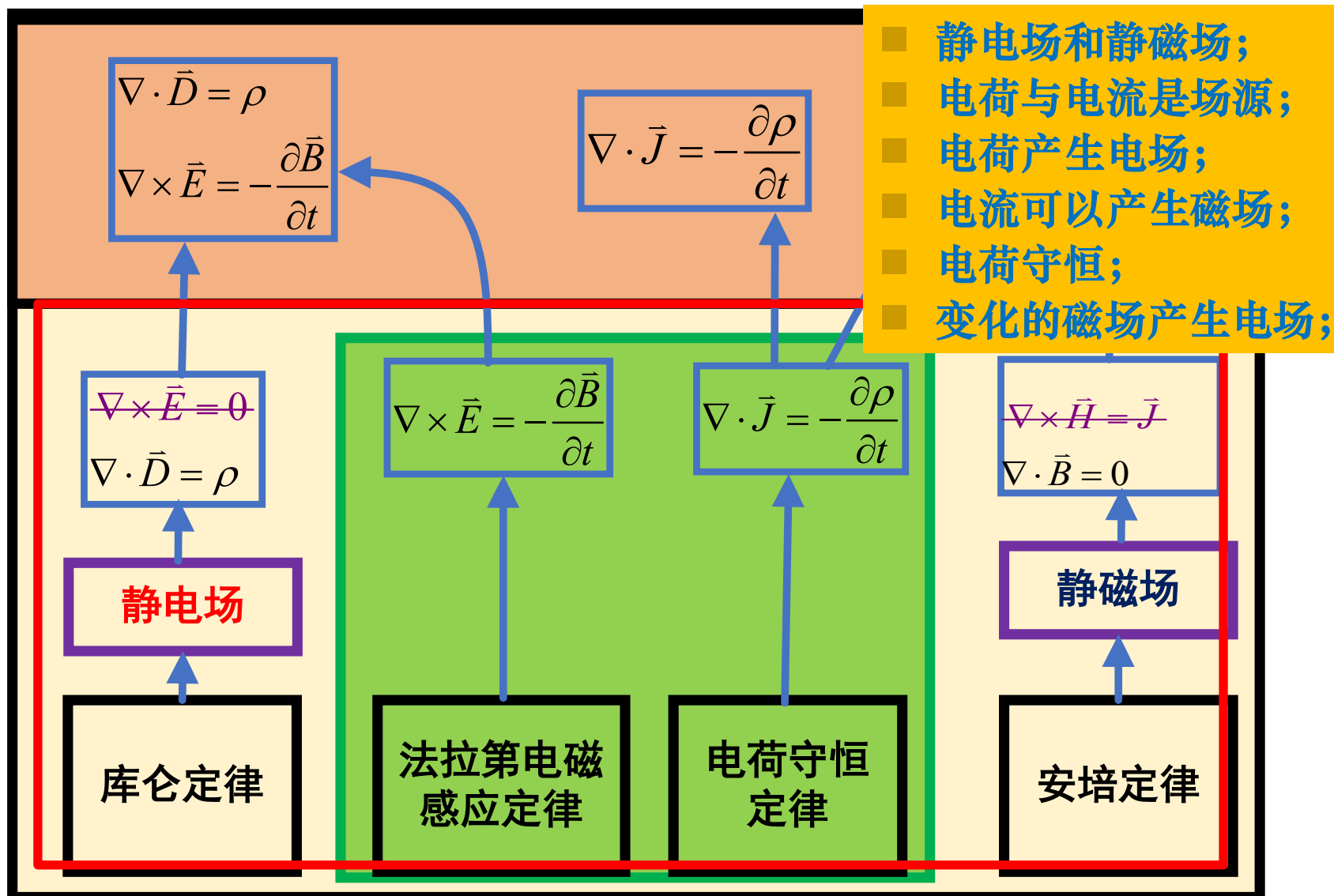
2.6 电磁感应定律和位移电流

- **假定** 电场高斯定理对时变情况依旧成立：合理假定
- **电场的物理基础：库伦定律和法拉第电磁感应定律；**

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}_c + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

- **合理** 假定；后验合理，尝试后合理，不是先验合理；
- **大胆假设，细心求证；**
- **大胆假设是筌路蓝缕的开创，是最难的一步；**

第二章 电磁场的基本定律





2.6 电磁感应定律和位移电流

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV} \\ \xrightarrow{\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right.$$

- 1747年-1831年;
- ★ ■ 竟然自相矛盾!
- 问题出在哪里?
- 如何解决矛盾?

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 \neq - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

何子错? 竟至满盘皆落索!

第二章 电磁场的基本定律

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

- 静电场和静磁场；
- 电荷与电流是场源；
- 电磁感应定律

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 \neq -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

谁是最可靠的定律？

静电场

库仑定律

法拉第电磁
感应定律

电荷守恒
定律

静磁场

安培定律



第二章 电磁场的基本定律

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 \neq -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

谁是最可靠的定律？

- 直觉：符合日常认知和常规逻辑的；
- 直觉不是凭空产生的，也不是每个人都有的；
- 假定：假定不是随意的，是有尝试，有判断的；
- 做出预测后，要努力去证实或证伪；
- 认识的理论化、系统化，认识从直觉上升为“真理”；



2.6 电磁感应定律和位移电流

2.6.2 位移电流 (displacement current)

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{恒成立}} \left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right\} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- 1861年麦克斯韦;
- 提出了位移电流;
- 解决了矛盾;

$$\begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array}$$



2.6 电磁感应定律和位移电流

2.6.2 位移电流 (displacement current)



- 前人的感性认识；
- 1747年电荷守恒定律；
- 1785年库伦定律；
- 1820年电流的磁效应；
- 1823年安培力定律；
- 1831年法拉第电磁感应定律；
- 1861年麦克斯韦提出了位移电流假说；
- 1864年麦克斯韦方程组；
从表面直觉，到深刻认识；
借助数学，实现质的飞跃！

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

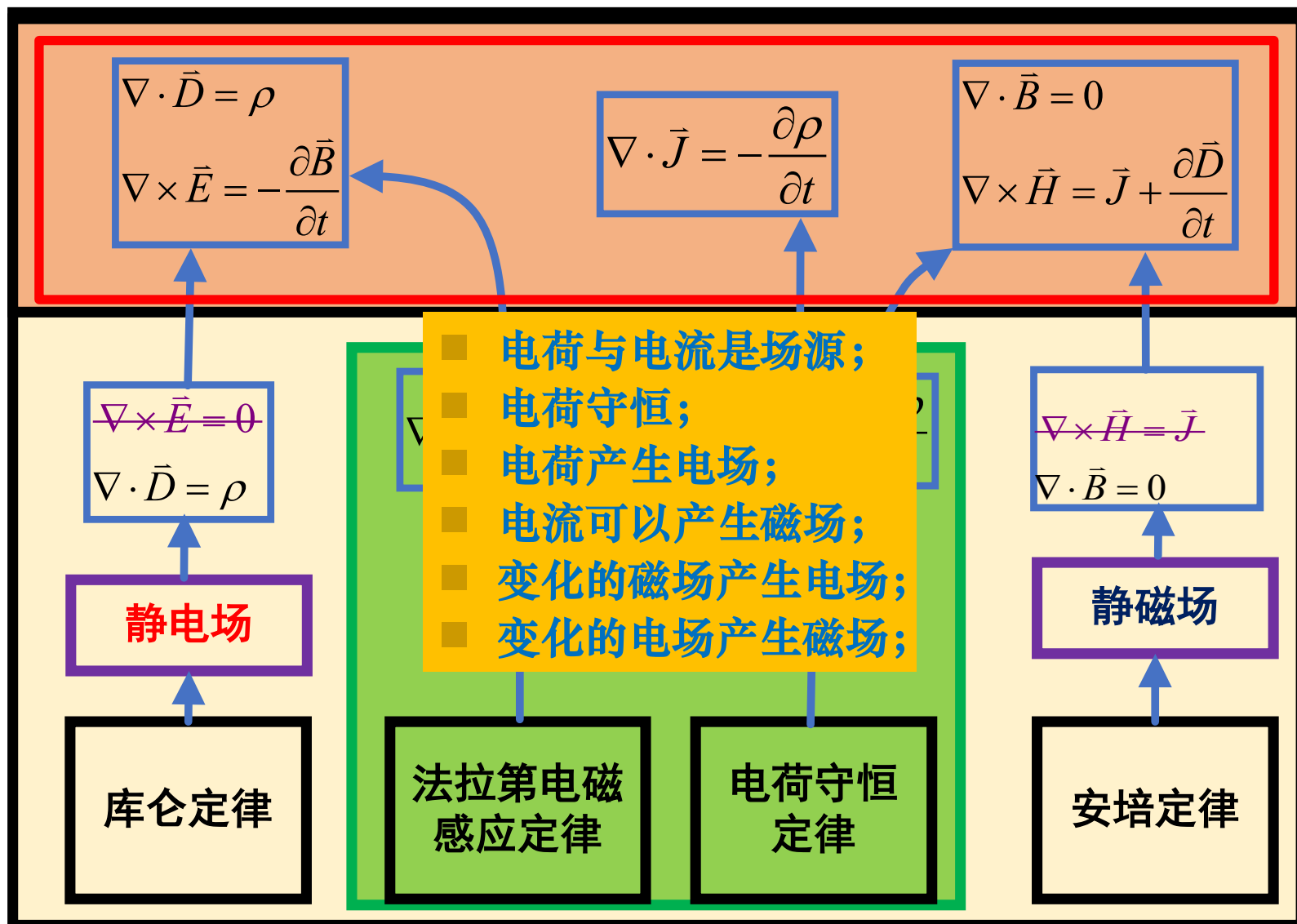
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

第二章 电磁场的基本定律

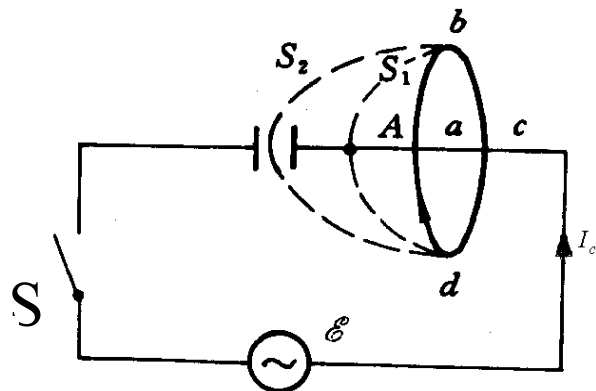


2.6 电磁感应定律和位移电流

2.6.2 位移电流 (displacement current)

矛盾的出现:

安培环路定律在时变电磁场条件下出现矛盾 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S}$



电容器充放电网络

穿过 S_1 的传导电流为 i_c ，则：

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_c$$

穿过 S_2 的传导电流为 0，则：

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{矛盾?}$$

原因：电容器充放电网络中，背离了静态电流连续性原理

$$\text{静电场中: } \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$



2.6 电磁感应定律和位移电流

2.6.2 位移电流 (displacement current)

流入封闭曲面S的电流应等于这一封闭曲面所包围的体积中单位时间内聚集的电荷。

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} &= -\frac{dq}{dt} \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} + \oint_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\vec{J}_c + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \oint_S (\vec{J}_c + \vec{J}_d) \cdot d\vec{S} = 0$$

传导电流密度 \vec{J}_c ; 位移电流密度 $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; 位移电流 $i_d = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

- 位移电流的依据：物理思考+电荷守恒定律和高斯定理；
- 电位移矢量随时间的变化率具有电流密度的量纲；
- 传导电流密度与位移电流密度的封闭曲面积分为零；



2.6 电磁感应定律和位移电流

2.6.3 全电流定律

传导电流密度

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$

自由电荷在**导体中流动**形成传导电流

运流电流密度

$$\vec{J}_v = \rho \vec{v}$$

带电质点在**介质中运动**形成运流电流

位移电流密度

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

电场时变形成位移电流，

全电流密度

$$\vec{J}_t = \vec{J}_c + \vec{J}_v + \vec{J}_d = \begin{cases} \vec{J}_c + \vec{J}_d - \text{导体中} \\ \vec{J}_v + \vec{J}_d - \text{介质中} \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_t$$

- 真实的电流：传导电流和运流电流；
- 等效的电流：位移电流；
- 传导电流和运流电流不同时存在于同一位置；
- **三种电流，都是磁场的旋度源，激发磁场的效果相同；**



2.6 电磁感应定律和位移电流

2.6.3 全电流定律

扩大电流的概念，包括传导电流、运流电流与位移电流，三者全称为**全电流**，**全电流密度**为：

$$\vec{J}_t = \vec{J}_c + \vec{J}_v + \vec{J}_d = \begin{cases} \vec{J}_c + \vec{J}_d - \text{导体中} \\ \vec{J}_v + \vec{J}_d - \text{介质中} \end{cases}$$

电流连续性原理可表示为：

$$\oint_S \vec{J}_t \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{J}_v \cdot d\vec{S} + \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{J}_t = 0$$

安培环路定律可推广为：**广义安培环路定律**

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_c + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_t$$

2.6 电磁感应定律和位移电流

基尔霍夫定律是电磁理论的特殊形式：

法拉第电磁定律：
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \xrightarrow[\text{似稳态 } \frac{d\vec{B}}{dt} \approx 0]{\text{静态 } \frac{d\vec{B}}{dt} = 0} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{---KVL}$$

电荷守恒定律：
$$\oint_S \vec{J}_t \cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{J}_c + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow[\text{似稳态 } \vec{J}_v = 0, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0]{\text{静态 } \vec{J}_v = 0, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0} \oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = 0 \text{---KCL}$$

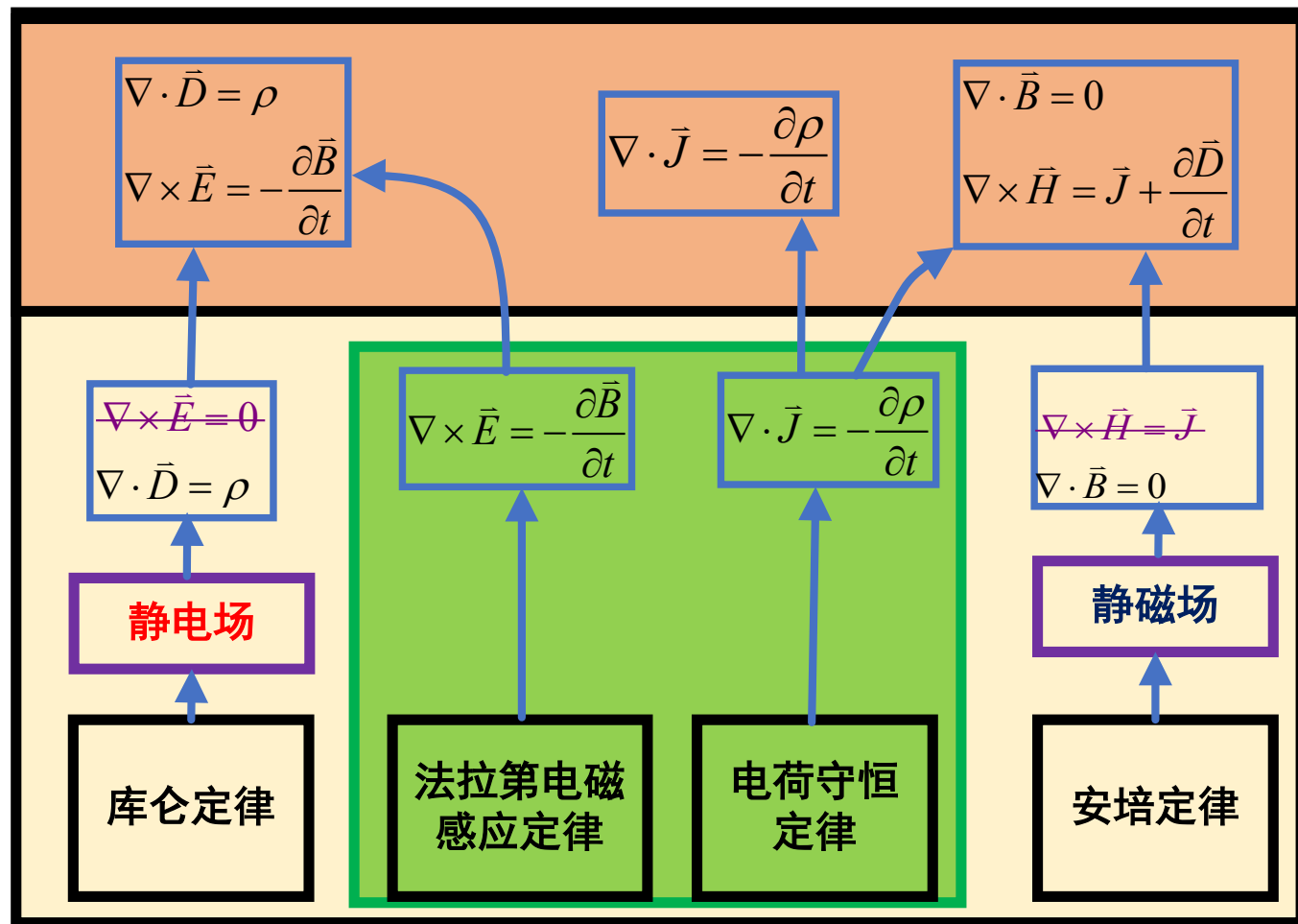
- 时间：基尔霍夫定律是静态或似稳态的特殊形式；
- 空间：基尔霍夫研究一维电路；
- 对象：基尔霍夫研究电压电流宏观量；
- 电磁场理论在时间、空间和研究对象三方面对基尔霍夫定律的全面一般化；



2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.1 实验定律汇总

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}$$





2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.2 麦克斯韦方程 Maxwell equations---1864年

- 电生磁，磁生电；
- 电磁统一，相互依存，相互制约；
- 麦克斯韦由此出发，通过数学推演，预言了电磁波的存在。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}_c + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dV$$

- 亥姆霍兹定理中：矢量场的散度和旋度都表示矢量场的源。
- 麦克斯韦方程揭示了电磁场和它的源之间的全部关系；

- 磁场可以由传导电流，运流电流和位移电流完全等价的产生；
- 电场可由电荷产生（无旋场部分），也可由时变磁场产生（有旋场部分）；
- 通过任何闭合曲面的磁通量恒为零；磁力线总是连续的，它不会在闭合曲面内积累或中断，故称磁通连续性原理；
- 穿过任何闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的净电荷；
- 从封闭曲面流出的电流，必然等于封闭曲面内正电荷的减少率，反之亦然。



2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.2 麦克斯韦方程 Maxwell equations---1864年

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\vec{J}_c + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= - \int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV\end{aligned}$$

- 电荷与电流是电磁场的场源；
- 任何对于电磁场的影响，都可以归结为对于电荷与电流的影响；
- 电磁场与媒质的相互作用，可以归结为媒质中的带电粒子在电磁场作用下形成了新的电荷源与电流源，从而产生了新的电磁场，并由此改变了原有的电磁场；



2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.3 积分形式的麦克斯韦方程

一般情况：

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\vec{J}_{\text{excit}} + \vec{J}_c + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV\end{aligned}$$

无源区情况：

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} &= - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV\end{aligned}$$

只有无耗介质的无源区：
($\rho = 0, J = 0$)

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= 0\end{aligned}$$

- 有源区和无源区；运流电流通常是电真空器件中考虑的；
- 导体散射是无源区的典型范例；
- 有传导电流通常是有导体存在，导体常常是分析区域的边界；
- 无源区是普遍大量存在的，尤其在远离场源的地方，基本都是无源区；
- 无源区求解比有源区简单的多；
- 只有无耗介质的无源区：自由空间，理想导体和理想介质组成的结构；



2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.4 微分形式的麦克斯韦方程

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= - \int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \end{aligned} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\begin{aligned} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV \\ \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}} \\ \left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{J} &= - \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \right\} \end{array}$$

- 利用矢量分析中的高斯定理：联系闭曲面面积分和体积分；
- 利用矢量分析中的斯托克斯定理：联系闭合曲线积分和面积分；



2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.4 微分形式的麦克斯韦方程

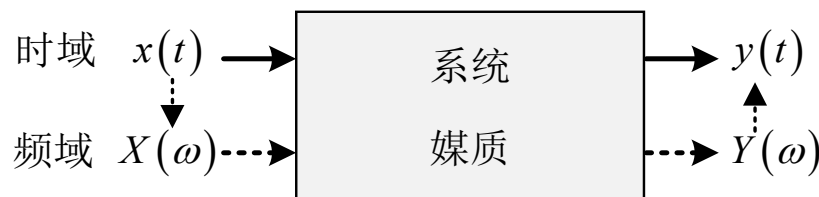
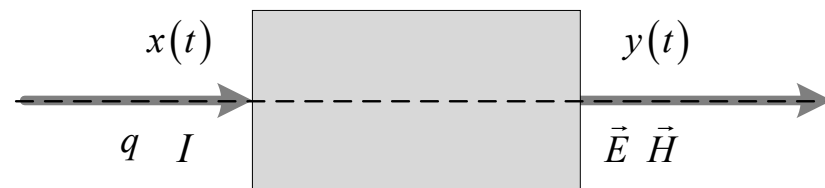
$$\left. \begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= - \int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \end{aligned} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\begin{aligned} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV \\ \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}} \\ \left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{J} &= - \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \right\} \end{array}$$

- 微分形式的麦克斯韦方程给出了空间某点场量之间及场量与场源之间的关系；
- 麦克斯韦方程的微分形式只适用于媒体的物理性质不发生突变的区域；
- 大部分是无源区域，此时源量为零；

2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.4 微分形式的麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right.$$



- 麦克斯韦方程组给出了空间某点场量之间及场量与场源之间的关系；
- 麦克斯韦方程组是一阶**线性**偏微分方程组，满足叠加原理；
- 麦克斯韦方程组反映了媒质（系统，包括电磁参数和结构）中场源（激励，电荷与电流）与电磁场（响应， \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} ）的关系；
- 电磁场是随时空变量变化的，化难为繁对时空变量都可进行；



2.7 电磁场方程的积分和微分形式

2.7.5 本构关系 constitutive relations

- 麦克斯韦电磁场方程组中四个场量之间的关系由其所在的媒质特性反映，表征媒质特性的三个方程为媒质的状态方程；
- 它们和麦克斯韦电磁场方程组构成完整的电磁场基本方程；

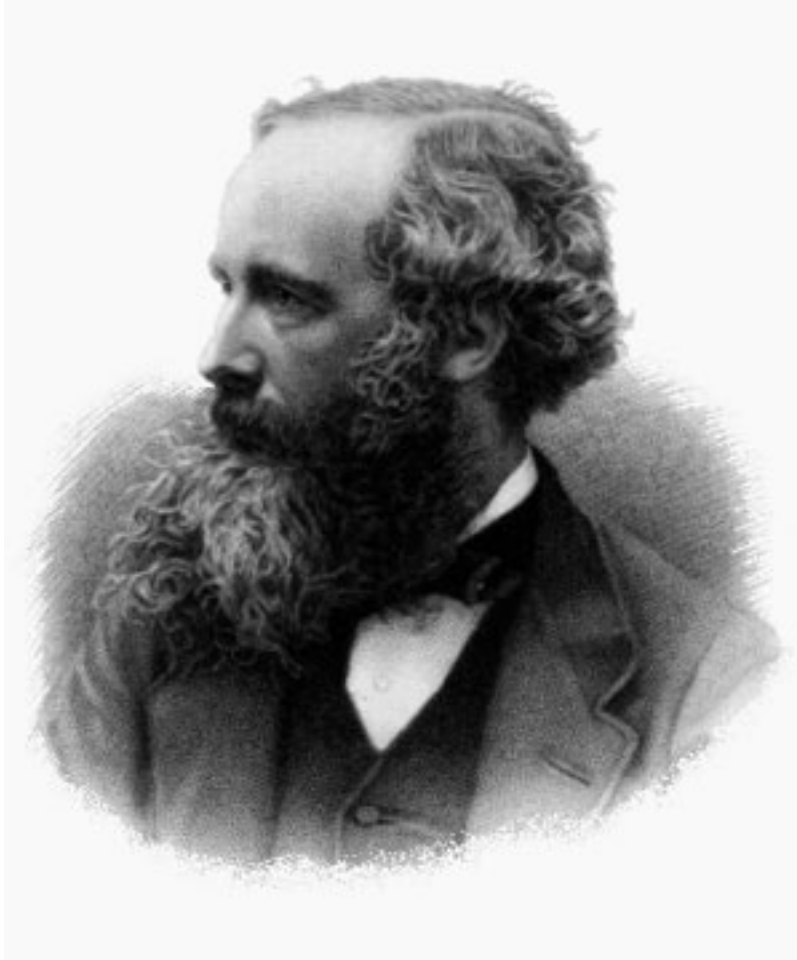
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}$$



- 我们遇到了多少未知量？
- 我们有几个独立方程？两个旋度方程+电荷守恒定律
- 对两个旋度方程求散度
- 媒质的电磁特性-待续

2.7 电磁场方程的积分和微分形式

James Clerk Maxwell (1831-1879)



James Clerk Maxwell

Born	June 13, 1831 Edinburgh, Scotland
Died	November 5, 1879 Cambridge, England
Residence	 Scotland
Nationality	 Scottish
Field	Mathematician and physicist
Alma mater	University of Cambridge
Known for	Maxwell's Equations, The Maxwell Distribution, Maxwell's Demon
Notable prizes	Rumford Medal, Adams Prize
Religion	Christian

2.7 电磁场方程的积分和微分形式

James Clerk Maxwell (1831-1879)



- 《论法拉第的力线》用数学方法对法拉第力线进行严格描述
- 《论物理的力线》
位移电流
位移电流的速度等于光速
- 《电磁场的动力学理论》
完善Maxwell方程
推导波动方程
预言电磁波存在
电磁波传播速率等于光速



2.7 电磁场方程的积分和微分形式

麦克斯韦方程组包含着丰富的内容和深刻的含义。伟大的物理学家**爱因斯坦**曾这样评价麦克斯韦方程：

“这个方程组的提出是牛顿时代以来物理学上一个重要的事情，这是关于场定律的定量的描述。方程中所包含的内容比我们所指出的要丰富得多。在它们简单的形式下隐藏着深奥的内容。这些内容只有靠仔细的研究才能显示出来。它是描述场的结构的定律，它不像牛顿定律那样把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是**此处此刻的场只与最近的刚过去的场**发生关系。假使我们知道此处此刻所发生的事件，这些方程便可帮助我们预测在**空间上稍远一些，在时间上稍迟一些**将会发生什么。”

“The theory of relativity would have never been possible without the mathematical equations first described by James Maxwell.”

-Albert Einstein



2.7 麦克斯韦方程组的积分和微分形式

积分形式:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dV$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{A} dV$$

微分形式:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

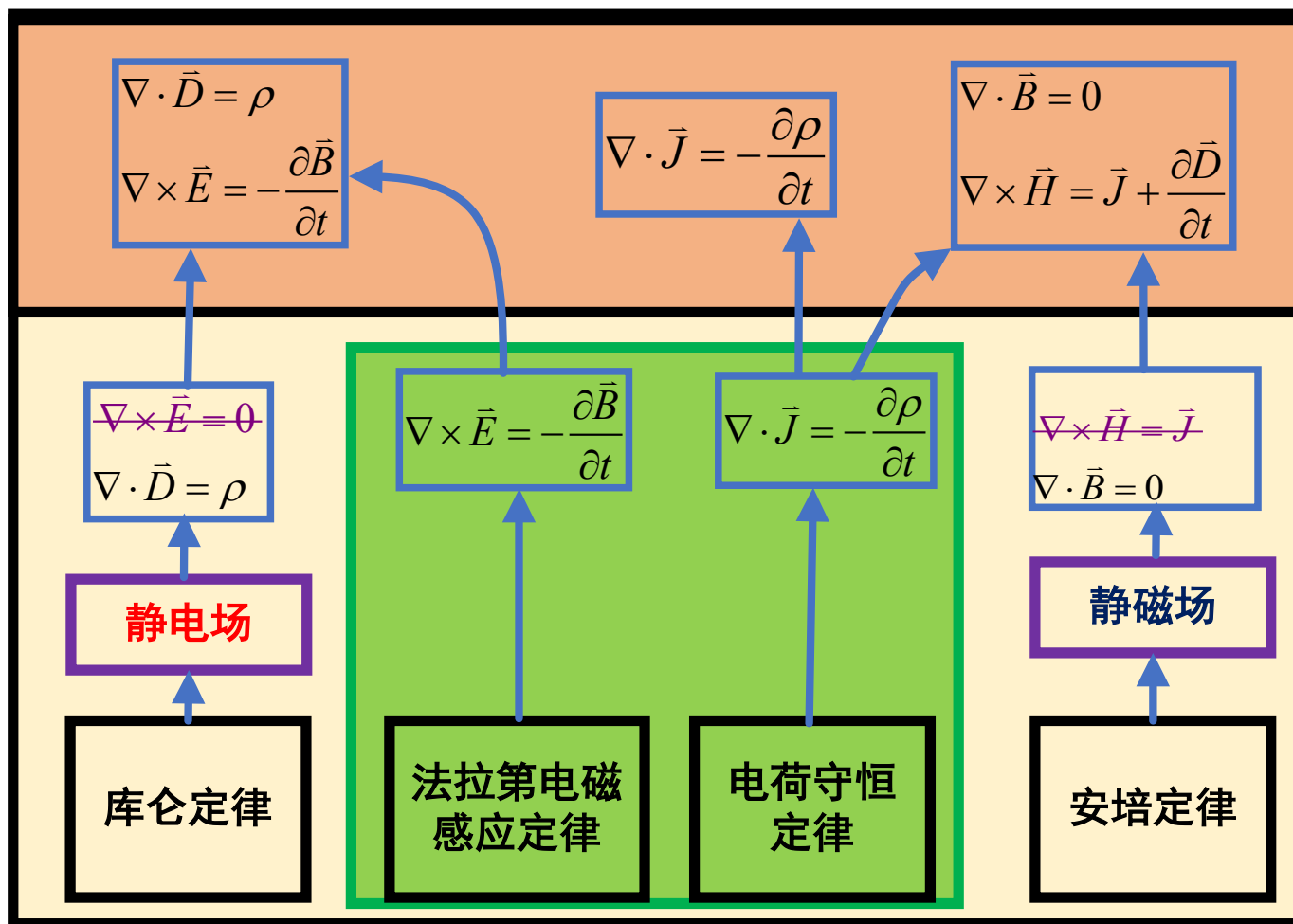
$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- 麦克斯韦方程组给出了空间某点场量之间及场量与场源之间的关系。
- 源量: ρ , \vec{J} ; 场量: \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , $\vec{H} \Rightarrow 16$ 个标量
- 线性方程, 满足叠加原理; 三个独立方程 (3+3+1个独立标量方程)
- 问题: 数学上不能定解; 物理上解释不通--**电磁场与媒质相互作用**;



第二章 电磁场的基本定律

- 研究电磁场，就是研究电磁场随空间和时间的变化规律；
- 研究电磁场，就是研究电磁场与媒质的相互作用；





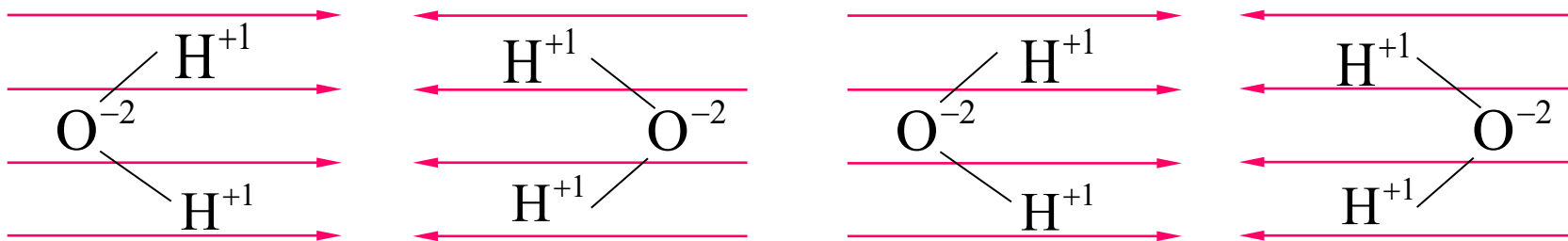
2.8 媒质的电磁特性

教材中无此部分；参考谢处方书；
生活中的例子：

微波炉加热；探地雷达；医学成像；



- 微波炉是利用电磁波的能量来加热食物的；
- 微波炉由一个磁控管将电能转化为电磁波，然后照射到食物上；
- 食物被电磁场加热的原因：因为食物中含有水分子，而水分子具有一定的电偶极矩，在高频电磁场作用下，正负电荷将受到电场力的作用，电偶极矩发生迅速变化和旋转，使得水分子运动加剧，温度上升，加热食物；
- 电磁波加热，是**电磁波与媒质**（食物）的相互作用





2.8 媒质的电磁特性

2.8.1 媒质的宏观电磁特性

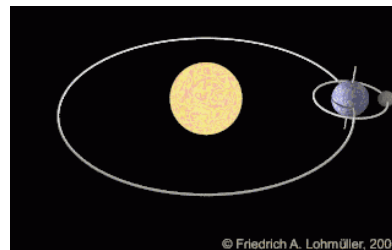
- 物质中有电荷，因此会与电磁场进行相互作用；
- 研究物质与电磁波相互作用时，把物质称为媒质；
- 媒质内部电荷构成方式千变万化，媒质与电磁场的相互作用复杂；
- 电磁场的基本特性是对其中的电荷有力的作用：电磁力；

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- 媒质在电磁力作用下，媒质内部电荷的运动主要有传导、极化和磁化三种行为，电磁力是电磁波与媒质相互作用的根源；

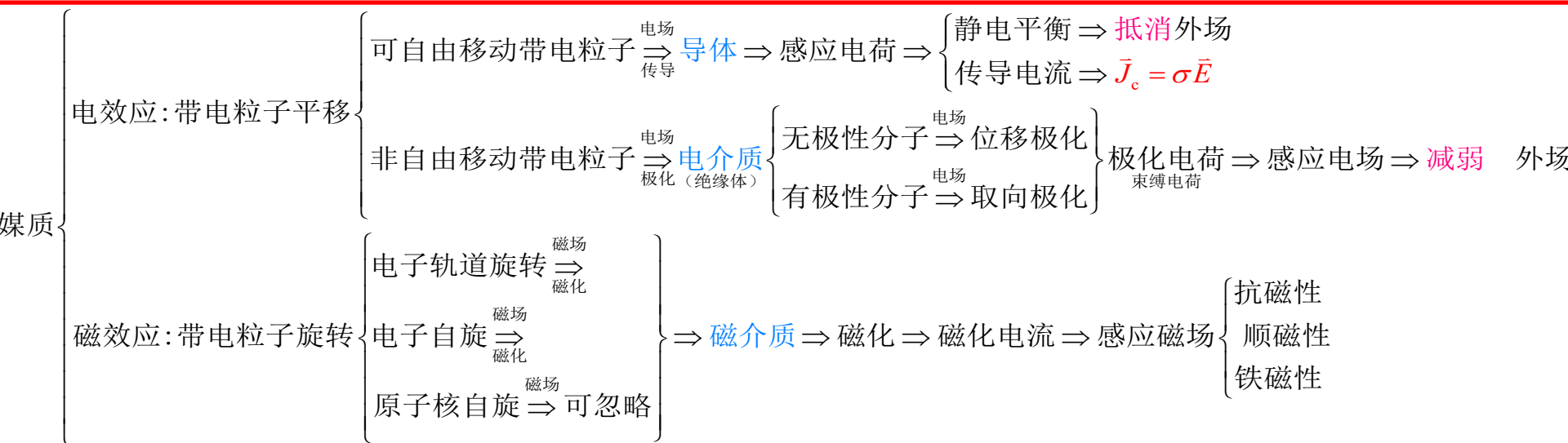
- 媒质内部：电子和原子核；并且是运动的；
- 有些媒质内部有自由移动的带电粒子，包括自由电子和正负离子；
- 有些媒质内部没有自由移动的带电粒子，电子是束缚在原子核附近的；
- 电子绕原子核旋转；电子和原子核在自旋；

2.8 媒质的电磁特性



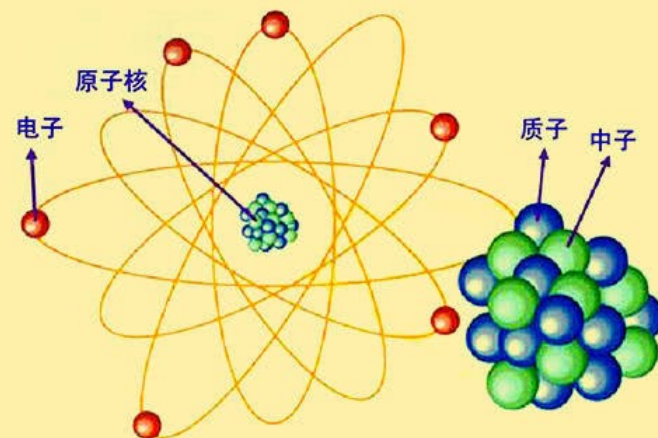
© Friedrich A. Lohmüller, 2008

2.8.1 媒质的宏观电磁特性



■ 研究物质与电磁波相互作用时，把物质称为媒质；

■ 媒质按照电效应分类：1) 理想介质（无耗）；2) 有耗介质（损耗主要来源于极化损耗）；3) 普通导体（损耗主要来源于导体损耗，电导率较大、有限）；4) 理想导体（电导率无穷大）





2.8 媒质的电磁特性

2.8.1 媒质的宏观电磁特性

■ 导体的传导现象：

在外电场的作用下，媒质内**带电粒子（电子）**将发生定向运动，形成传导电流，这种现象称为传导。能发生传导现象的材料称为导体。如银，铜，金。

■ 电介质的极化现象：

媒质的极化是媒质中的**束缚电荷**在电磁场作用下有一微小运动，其宏观效果可用一正、负电荷间的相对小位移来表示，这就相当于有一个电偶极矩。这种在外加电场作用下，**分子的电偶极矩**将增大或发生转向的现象称为电介质的极化现象。

■ 磁介质的磁化现象：

还有一些材料对磁场较敏感，例如螺丝刀在磁铁上放一会儿，螺丝刀就具有一定的磁性，能吸起小螺钉。这种现象称为磁化现象。能产生磁化现象的材料称为磁介质。媒质的磁化是指媒质中分子电流所形成的**分子磁偶极矩**受到磁场力的作用，其大小和取向发生变化而出现的宏观磁偶极矩。

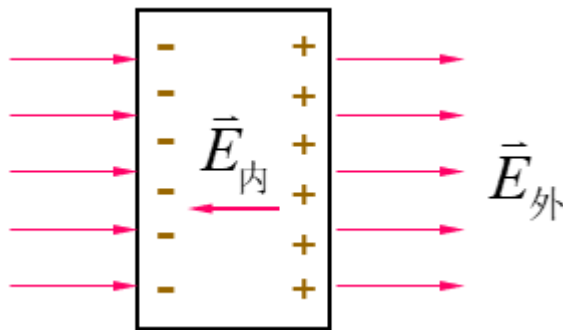
2.8 媒质的电磁特性

2.8.2 导体、电介质和磁介质

导体

- 导体的定义：含有大量可以自由移动的带电粒子的物质；
- 导体有两种：由自由电子导电的金属导体和由带电离子导电的电解质导体；
- 三种状态：自由状态的导体，静电场中的导体，恒定电场作用下的导体；

静电场中的导体



- 暂态过程：逐渐累积的电荷使得感应场变大抵消外加电场力；
- 豫驰时间非常短暂，铜的豫驰时间在 10^{-19} 秒量级；
- 静电平衡后，导体为等位体，导体内部电场为零；
- 导体表面的电场处处与导体表面垂直，切向电场为零；
- 感应电荷只分布在导体表面上，导体内部感应电荷为零；



2.8.2 导体、电介质和磁介质

疑问：在电场作用下电子
匀速还是加速运动？

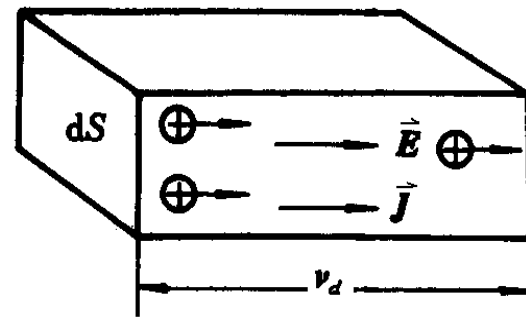
恒定电场中的导体的传导

- 暂态过程：将一段导体与电源**连接**，形成电场，自由电子在电场作用下加速，逐渐增加的速度使得碰撞阻力变大并与外加电场力平衡，自由电子匀速运动，此时则导体内部会存在恒定电场；
- 导体中的自由电子受到电场力的作用，逆电场方向运动。其平均电子速度称为漂移速度：

$$\bar{v}_d = -\mu_e \bar{E}, \quad \mu_e \text{ 为电子的迁移率}$$

单位时间内通过 dS 的电荷量 $dq = -N_e e v_d dS$

N_e 为自由电子密度



$$\text{传导电流密度: } \bar{J}_c = \frac{dq}{dS} = -N_e e \bar{v}_d = N_e e \mu_e \bar{E} \xrightarrow{\text{令 } \sigma = \mu_e N_e e} \bar{J}_c = \sigma \bar{E}$$

- 导体的电导率描述了导体媒质在电磁场存在下的响应特性；
- 对于线性和各向同性的导电媒质，媒质内任意一点的电流密度矢量和电场强度成正比；**注意电场可以是时变的；**



2.8.2 导体、电介质和磁介质

导电材料的本构方程

$$\vec{J}_c = N_e e \mu_e \vec{E} \xrightarrow{\text{令 } \sigma = \mu_e N_e e} \vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$

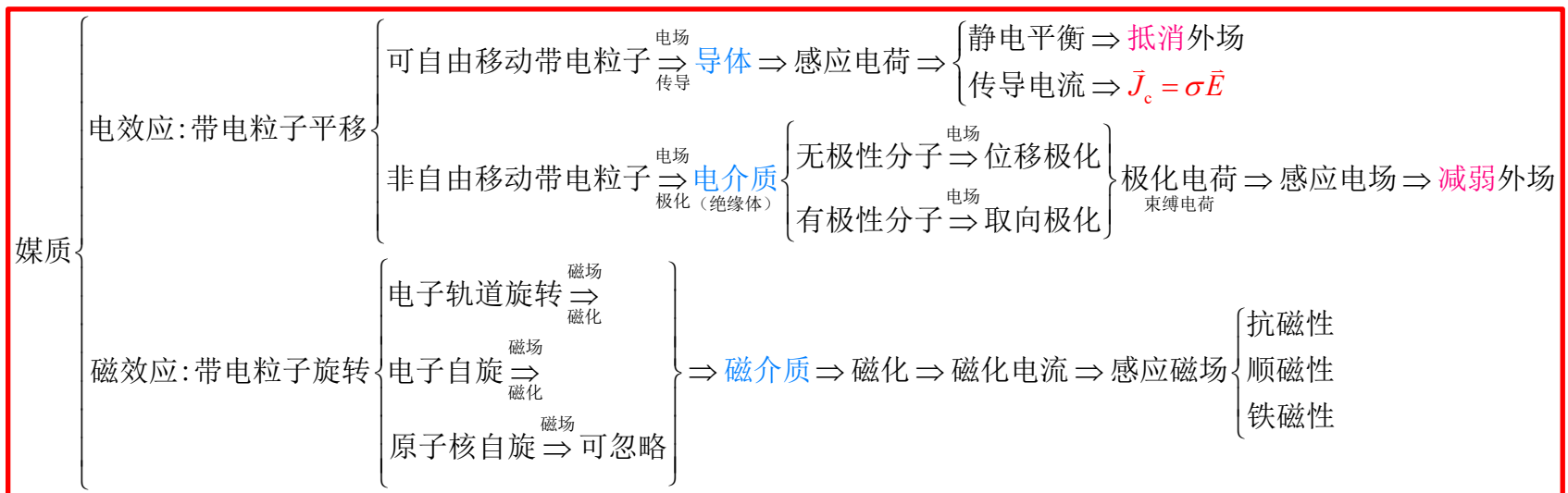
- 媒质的本构方程描述了在**外加电磁场作用下媒质的响应**；
- 注意自由电子豫驰时间短，所以电场与传导电流是同相；
- 媒质的本构方程对电磁场量进行了约束；
- 线性媒质—线性系统；
- **相互作用**：导电材料**在外加电场力作用下形成传导电流**；
- **相互作用**：传导电流产生电磁场；
- 导体的电导率由材料本身特性决定；
- 常见的导体：银，铜，金，铝；
- 理想导体：电导率为无穷大的导体，理想导体中不存在电场（理想导体可以有电流），理想导体中可以存在静磁场（毕德显P308）；



2.8.2 导体、电介质和磁介质

导电材料的本构方程

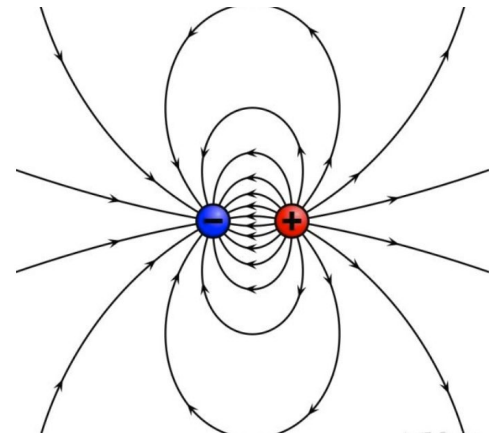
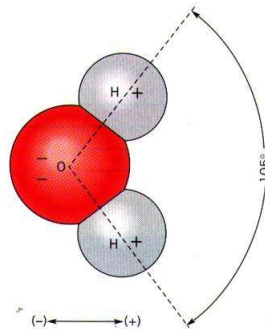
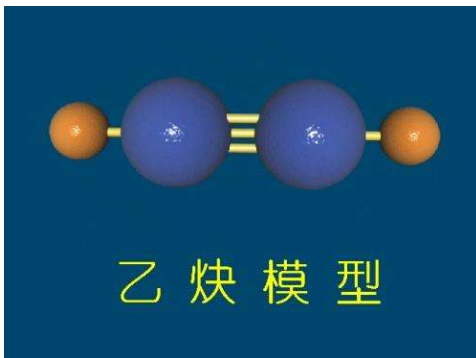
$$\vec{J}_c = N_e e \mu_e \vec{E} \xrightarrow{\text{令 } \sigma = \mu_e N_e e} \vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$



2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质

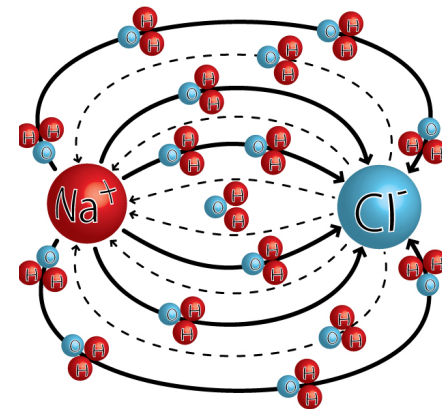
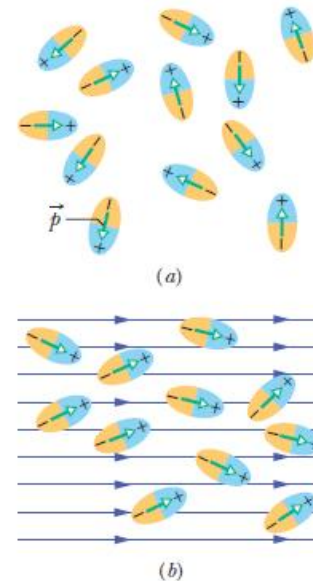
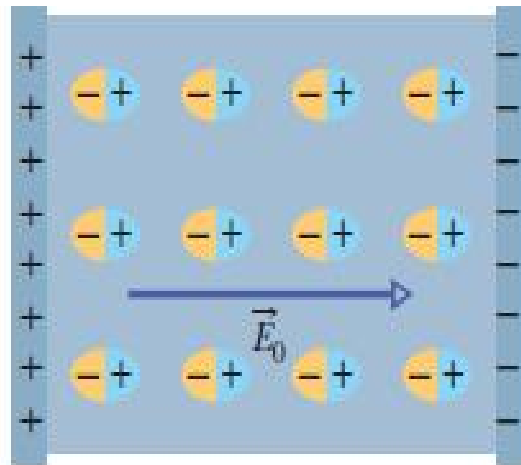
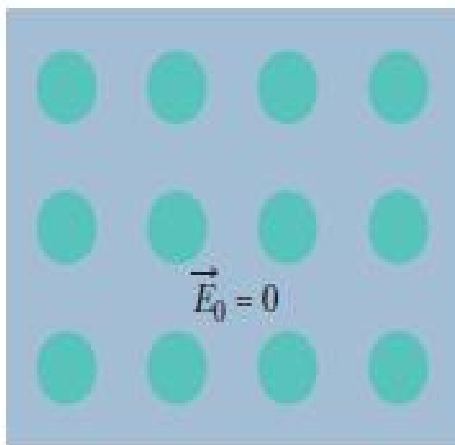
- 电介质是一种绝缘材料，在外电场作用下不能发生传导现象，可以发生极化现象；
- 电介质有多种形态：固态，液态和气态；
- 电介质分子可分为两类：无极性分子和有极性分子；
- 无极性分子：当无外加电场时，电介质中分子的正负电荷的“中心”是重合的；
- 有极性分子：当无外加电场时，电介质中分子的正负电荷的“中心”不重合的；
- 当考虑电介质的电特性时，电介质的每个分子可等效为一个电偶极子；
- 电偶极子：一个等量正负**电荷对**；



2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质的极化

- 极化：在外加电场力作用下，电介质中出现**有序**排列的电偶极子，产生**束缚电荷**的现象，称为电介质的极化；束缚电荷也叫极化电荷；
- 极化电荷也会产生电场，因此，**电介质对电场的影响，可以归结为极化电荷对电场的影响**；
- 无极性分子的极化：位移极化， 在外电场作用下，由无极分子组成的电介质中，分子的正负电荷“中心”将发生相对位移，形成等效电偶极子；
- 有极性分子的极化：取向极化，在外电场作用下，由有极分子组成的电介质，各分子的电偶极矩转向电场的方向；
- 有极性分子主要是取向极化；



2.8.2 导体、电介质和磁介质

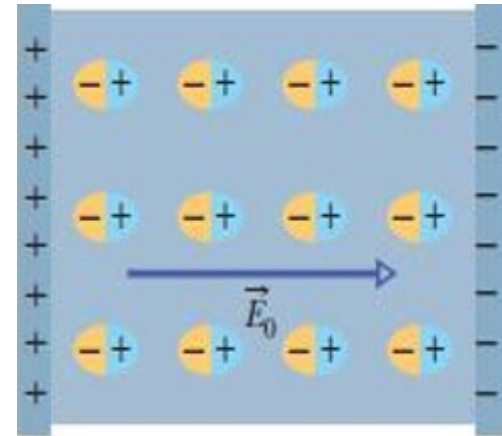
电介质的极化

- 对电介质极化特性的度量：极化强度；
- 极化强度是描述电介质极化程度的物理量；
- 极化强度定义：单位体积中分子电偶极矩的矢量和；
- 电偶极矩：电偶极子电荷与间距矢量（从负电荷指向正电荷）的数量积称为电偶极矩；
- 假定介质中任一小体积中所有分子的电偶极矩矢量和：

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i q_i \vec{l}_i$$
- 极化强度为：

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$
- 实验可知，介质中的每一点极化强度矢量与该点的电场强度成正比：

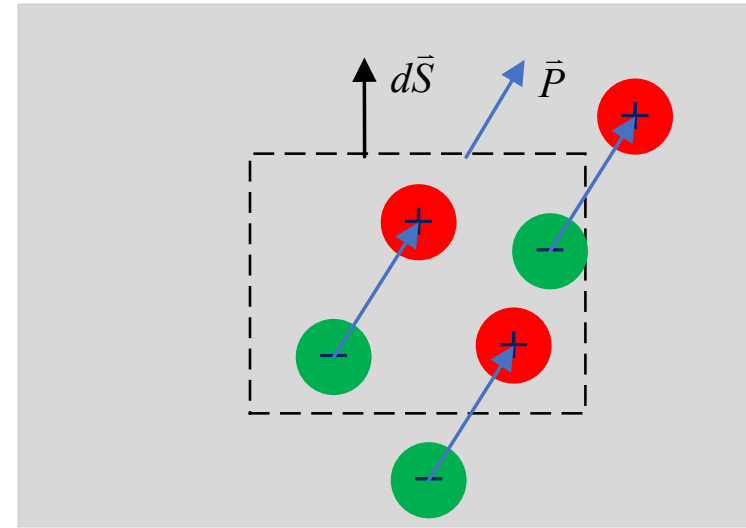
$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \chi_e > 0 \text{ 为电极化率}$$
- 极化强度矢量与外加电场方向相同；
- 电极化率越大，说明在同样的外加电场下极化强度越大；
- 极化电荷产生的感应电场与外加电场方向相反（类似楞次定律）；



2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质的极化

- 封闭曲面内的电偶极子的正负电荷中心是有效的电荷；
- 封闭曲面上极化强度积分与体极化电荷，**注意极化强度矢量指向正电荷**；
- 由于极化效应，原有电中性体区域内的电荷通过区域表面穿出，穿出的电荷量与该区域剩余的电偶极矩量相同，**剩余电荷为极化体电荷**；
- 均匀极化时，极化电荷体密度为零；



$$\vec{P} \cdot (\vec{l} \cdot d\vec{S}) = \vec{P} \cdot \Delta V = N \Delta V \cdot e \vec{l} = q_p \cdot \vec{l}, \quad N \text{ 为单位体积内分子数}$$

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot (\vec{l} \cdot d\vec{S}) = q_p \cdot \vec{l} \xrightarrow{\vec{P} \text{ 与 } \vec{l} \text{ 同方向}} q_p = \vec{P} \cdot d\vec{S} \xrightarrow[\text{推广到封闭曲面 } S]{\text{流出 } S \text{ 的电荷量 } q_p} q_p = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

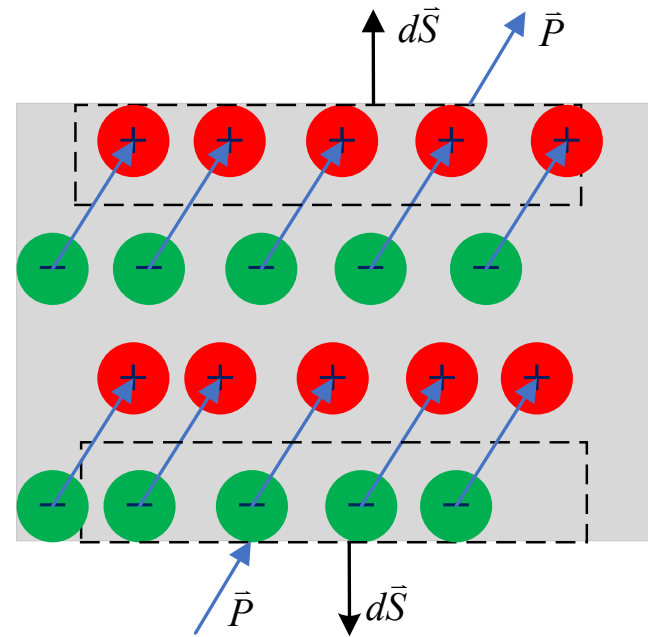
$$\left. \begin{array}{l} \text{S面内剩余的极化电荷: } q_p = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV \\ \text{极化电荷体密度 } \rho_P: q_p = \int_V \rho_P dV \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质的极化

- 电介质表面出现极化面电荷；
- 取封闭曲面与电介质表面重合；
- 对于极化面电荷，穿出封闭曲面的电荷为极化面电荷；
- 极化电荷面密度：

$$\rho_{PS} = \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{dS} = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$$



- 极化强度的封闭曲面积分是包围的极化电荷量；
- 极化强度与电位移矢量非常类似；
- 极化电荷与自由电荷同样产生电磁场；
- 电介质考虑了极化电荷后，其所处的空间就是真空；

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\rho_{PS} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$



2.8.2 导体、电介质和磁介质

极化电荷的电势

- 电介质中全部电偶极子在场点产生的总电势：
- 电势是在等效真空的环境中进行计算的；
- 总电势是束缚面电荷与束缚体电荷在场点产生的电势的标量叠加；

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}'}{R} + \int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P})}{R} dV' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S'} \frac{\rho_{PS} dS'}{R} + \int_{V'} \frac{\rho_P}{R} dV' \right]\end{aligned}$$

- 极化电荷与自由电荷同样产生电磁场；
- 若电介质中还存在自由电荷分布时，电介质中一点总的电势为：

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S'} \frac{\rho_{PS}}{R} dS' + \int_{V'} \frac{\rho_V + \rho_P}{R} dV' \right]$$



2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质的本构方程

- 电介质极化后，场域中除了自由电荷之外，又多了束缚电荷；
- 电介质考虑了极化电荷的影响后，电介质所处的空间就是真空！
- 极化电荷与自由电荷对于电场强度是同等的；
- 电位移矢量只与自由电荷有关；
- 电介质的本构方程给出了在外加电场作用下媒质导致的场的变化特性；

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_0) &= \rho \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}') &= \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho + \rho_P = \rho + (-\nabla \cdot \vec{P})$$
$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \xrightarrow[\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}]{\text{定义 } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \vec{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E}$$
$$\xrightarrow{\text{令 } \epsilon_r = 1 + \chi_e} \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} - \text{电介质的本构方程}$$
$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho - \text{电介质中的高斯定理}$$



2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质的本构方程

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

- 媒质的本构方程描述了在**外加电磁场作用下媒质的响应**；
- 注意极化电荷豫驰时间未必短暂，所以电场与电位移矢量不一定是同相；
- 媒质的本构方程对电磁场量进行了约束；
- 线性媒质—线性系统；
- **相互作用**：导电材料**在外加电场力作用下形成极化电荷**；
- **相互作用**：极化电荷产生电磁场；
- 介质的介电常数由材料本身特性决定；
- 常见的介质：空气，聚乙烯；
- 理想介质：电导率为零；**自然的媒质，人为的划分**；
- 真空中，相对介电常数为1；一般媒质中，相对介电常数大于1；
- **人工媒质**中，相对介电常数可以按照需求进行设计；

理想导体

良导体

导电媒质

良介质

理想介质



2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质的本构方程

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_0) &= \rho \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}') &= \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{P} &= \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{E}' &= -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{E}' &= -\chi_e \vec{E} \\ &\text{方向相反；可强可弱} \\ \vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi_e} \\ &\text{方向相同；极化减弱} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}' = -\frac{\chi_e}{\chi_e + 1} \vec{E}_0$$

方向相反；幅度较弱

- 极化电场与外加场方向相反；
- 极化电场比外加电场幅度较弱；
- 极化电场与总场方向相反；
- 极化电场比总场幅度可大可小；
- 总场比外加电场较弱，总场与外加电场方向相同；
- 相对介电常数越大，说明极化场越接近与外加场，导致总场越小，介质越接近于“导体”；

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e, \quad \chi_e > 0$$

χ_e 可在0.0006到几千之间变化



2.8.2 导体、电介质和磁介质

电介质中的场方程

- 相互作用：电介质在外加电场作用下产生极化现象；
- 相互作用：极化电荷产生感应电场；
- 介质中的高斯定律：
- 穿过任意封闭曲面的电通量，只与曲面中包围的自由电荷有关，而与介质的极化电荷无关；

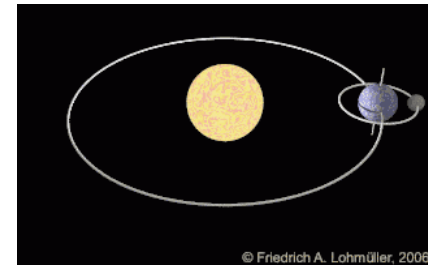
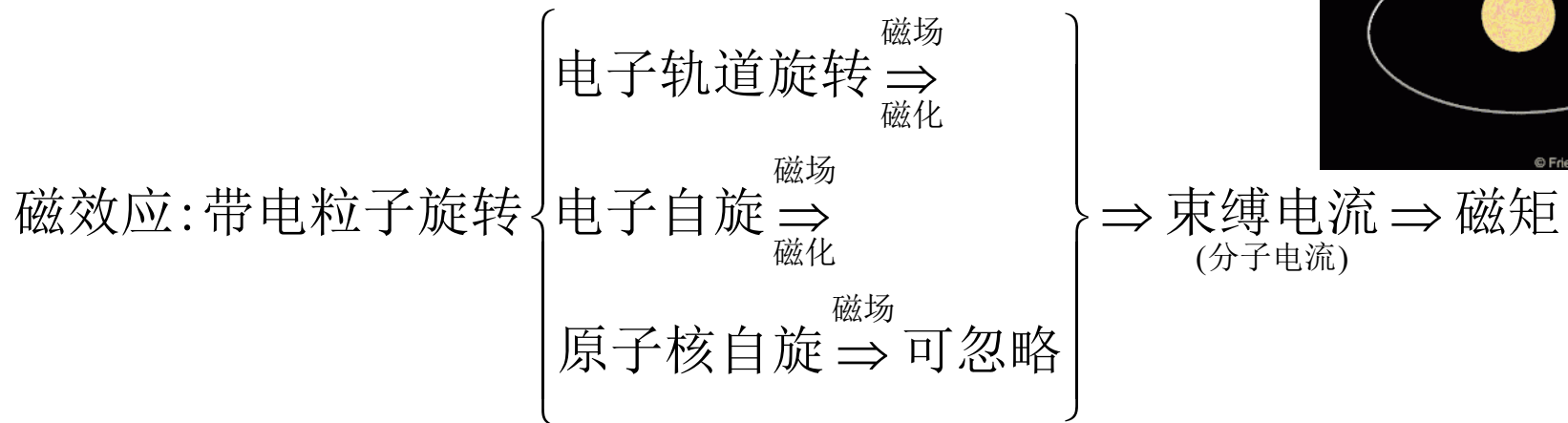
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

- 常见电介质的相对介电常数如：
- 空气：1.0006，近似认为是1即可；
- 硅：12；玻璃：4.1；
- 蒸馏水：81；水蒸汽：1.00785；甘油：45.8；
- 理想介质：介电常数为实数的介质称为理想介质；

2.8.2 导体、电介质和磁介质

磁介质

- 磁介质：研究物质的磁效应时，将物质称为磁介质；
- 磁效应的来源：分子中的带电粒子形成束缚电流；
- 磁介质的磁化：在外磁场作用下，物质中的分子束缚电流都将受到一个扭矩作用，所有分子束缚电流都趋于和外磁场方向一致排列，结果对外产生磁效应，这种现象称为物质的磁化；
- 磁介质对磁场的影响，可以归结为束缚电流对磁场的影响；





2.8.2 导体、电介质和磁介质

磁化强度

- 磁矩：所载电流乘以回路有向面积；
- 对磁介质磁化特性的度量：磁化强度；
- 磁化强度是描述磁介质磁化程度的物理量；
- 磁化强度的定义：单位体积内，所有磁矩的矢量；
- 相互作用：磁介质被磁化后，磁介质中束缚电流一致排列；
- 相互作用：束缚电流会产生磁场使得原有磁场产生改变；

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum I_i \vec{S}_i}{\Delta V}$$

$$\vec{J}_m = \nabla' \times \vec{M}$$

$$\vec{J}_{mS} = \vec{M} \times \vec{a}_n'$$

- 束缚电流体密度：
- 束缚电流面密度：
- 介质磁化后传导电流和束缚电流在空间产生的矢量磁位：

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{V'} \frac{\vec{J}_C + \vec{J}_m}{R} dV' + \oint_{S'} \frac{\vec{J}_{mS}}{R} dS' \right]$$



2.8.2 导体、电介质和磁介质

磁介质的本构方程

- 磁介质磁化后，场域中除了传导电流之外，又多了束缚电流；
- 磁介质考虑了磁化电流的影响后，磁介质所处的空间就是真空！
- 磁化电流与传导电流对于磁感应强度是同等的；
- 磁场强度与束缚电流无关；
- 磁介质的本构方程给出了在外加磁场作用下媒质导致的场的变化特性；

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_c + \vec{J}_m + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}} \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_c + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{介质中的全电流定律}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{M} &= \chi_m \vec{H} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$
$$\xrightarrow{\mu_r = 1 + \chi_m} \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} - \text{磁介质的本构方程}$$



经典物理不会提供
抗磁性和顺磁性—
费恩曼, P471

2.8.2 导体、电介质和磁介质

5. 磁介质的分类

■ 磁介质可分为：抗磁质、顺磁质、铁磁质和亚铁磁质等。

(1) 抗磁质：其磁化率 χ_m 为负，其相对磁导率略小于1，即

$$\mu_r = 1 + \chi_m < 1 \quad \text{且} \quad \mu_r \approx 1$$

如金、银和铜等属于抗磁质。

(2) 顺磁质：磁化率为正，相对磁导率略大于1，即

$$\mu_r = 1 + \chi_m > 1 \quad \text{且} \quad \mu_r \approx 1$$

如铝、锡、镁、锂和钨等属于顺磁质。

(3) 铁磁质：其磁化率非常大，其相对磁导率远大于1，即

$$\mu_r \gg 1 \quad \text{如铁、镍和钴等属于铁磁质。}$$

(4) 亚铁磁质：由于部分反向磁矩的存在，其磁性比铁磁材料的要小，铁氧体属于一种亚铁磁质。



2.8.2 导体、电介质和磁介质

磁介质的本构方程

- 磁介质可分为：抗磁质、顺磁质、铁磁质等；
- 能从中得到什么？
- 类比电介质；

经典物理不会提供
抗磁性和顺磁性—
费恩曼，P471

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}' \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \\ \nabla \times \vec{B}_0 &= \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \times \vec{B}' &= \mu_0 \vec{J}_M = \mu_0 \nabla \times \vec{M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{M} &= \chi_M \vec{H} = \chi_M \frac{\vec{B}}{(1 + \chi_M) \mu_0} \\ \vec{B}' &= \mu_0 \vec{M} \end{aligned} \right\}$$
$$\Rightarrow \vec{B}' = \frac{\chi_M}{\chi_M + 1} \vec{B} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{B}' &= \chi_M \vec{B}_0 \\ \text{抗磁反向减弱；顺磁同向增强；铁磁同向增强} \\ \vec{B} &= (1 + \chi_M) \vec{B}_0 \\ \text{抗磁稍微减弱；顺磁稍微增强；铁磁显著同向增强} \end{aligned} \right.$$

- 常用材料的相对磁导率如：
- 铜：0.99999；铝：1.000021；纯铁：4000；铁镍合金：100000



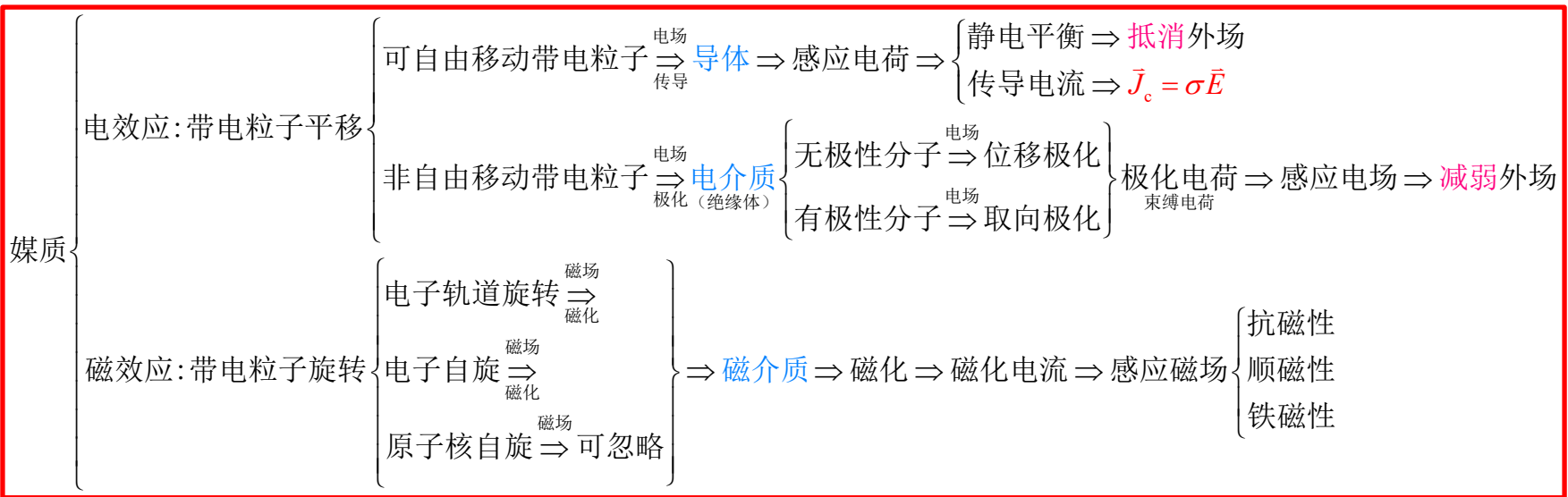
2.8 媒质的电磁特性

- 研究物质与电磁波**相互作用**时，把物质称为媒质；
- 媒质在电磁场作用下，内部电荷的运动主要有传导、极化和磁化三种行为；
- 本构关系描述了在外加电磁场情况下媒质的响应特性；

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ -电介质的本构方程

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ -磁介质的本构方程

$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ -导体的本构方程





2.8 媒质的电磁特性

- 研究物质与电磁波**相互作用**时，把物质称为媒质；
- 媒质在电磁场作用下，内部电荷的运动主要有传导、极化和磁化三种行为；
- 本构关系描述了在外加电磁场情况下媒质的响应特性；
- 大家想象一下，媒质是处在真空中的电荷组合，当考虑了这些电荷组合的电磁效应后，所有电磁现象都是发生在真空中了；
- 研究真空下的电磁场，继而研究与媒质的作用---科研方法
- 媒质本身并不理想的分为介质导体等简单的概念，实际**上任一媒质都具有传导极化磁化的行为**，只不过通常以媒质显著的电磁效应来对媒质进行分类；

电磁场作用于导体： $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ -导体的本构方程

电磁场作用于介质：
$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} - \text{电介质的本构方程} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} - \text{磁介质的本构方程} \end{cases}$$



2.8.3 媒质中的Maxwell方程组

媒质中麦克斯韦方程组

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

真空中麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

源量： ρ , \vec{J} ; 场量： \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , $\vec{H} \Rightarrow 16$ 个标量

■ 三个独立方程 (3+3+1个独立标量方程)

■ 三个本构关系 (3+3+3个独立标量方程)

■ 问题解决：数学上不能定解；物理上不能解释--电磁场与媒质相互作用；

■ 特别的，对于真空的情况，实际上不存在与媒质的相互作用，无D和H；

■ 真空中：十个独立方程定解十个未知量 (E, B, J, ρ)

2.8.3 媒质中的Maxwell方程组

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

源量： ρ , \vec{J} ; 场量： \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , $\vec{H} \Rightarrow 16$ 个标量

- 新的问题：单一媒质已经了解，多种媒质如何呢？
- 媒质分界面上：媒质电磁参数突变；
- 电磁场会不会突变？突变的时候，如何求解？

2.9 电磁场的边界条件

积分形式:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dV$$

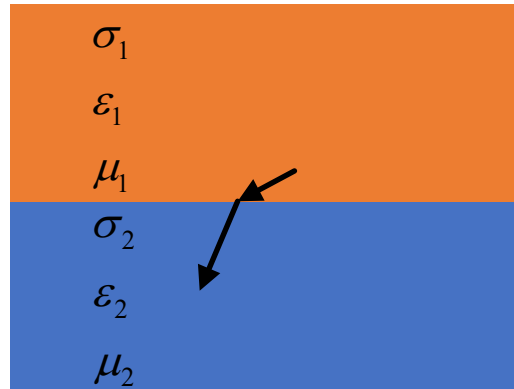
$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$



微分形式:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- 不同媒质的分界面两侧媒质的性质发生突变;
- 其中的电磁场会发生突变---不可导;
- 微分形式 (**不考虑广义函数及其运算**) 不可用;
- 积分形式----边界两侧电磁场的变化关系---边界条件

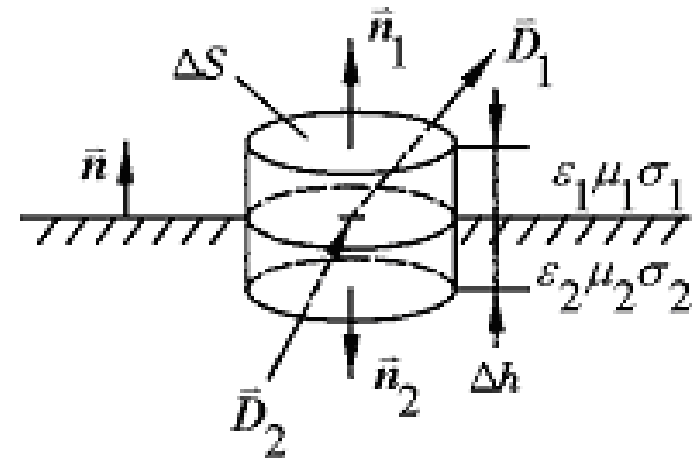
2.9 电磁场的边界条件

2.9.1 电场法向分量的边界条件

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

在分界面上取一小的柱形闭合面，应用电场的高斯定理，柱体高度趋近于零，忽略侧面，

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &\stackrel{\Delta h \rightarrow 0}{=} \int_{\text{两个底面}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ &\xrightarrow{\vec{n} \text{ 从媒质II指向媒质I}} = \vec{n} \cdot \vec{D}_1 \Delta S - \vec{n} \cdot \vec{D}_2 \Delta S = \rho_S \Delta S \\ \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2 &= \rho_S \\ \Leftrightarrow D_{1n} - D_{2n} &= \rho_S \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \rho_S &\xrightarrow{\rho_S=0} \vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \vec{n} \cdot \vec{D}_2 \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_S &\xrightarrow{\rho_S=0} D_{1n} = D_{2n} \\ \epsilon_1 \vec{n} \cdot \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{n} \cdot \vec{E}_2 = \rho_S &\xrightarrow{\rho_S=0} \epsilon_1 \vec{n} \cdot \vec{E}_1 = \epsilon_2 \vec{n} \cdot \vec{E}_2 \\ \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_S &\xrightarrow{\rho_S=0} \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2 &= \rho_S \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 \vec{n} \cdot \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{n} \cdot \vec{E}_2 = \rho_S \\ \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_S \end{cases}$$

2.9 电磁场的边界条件

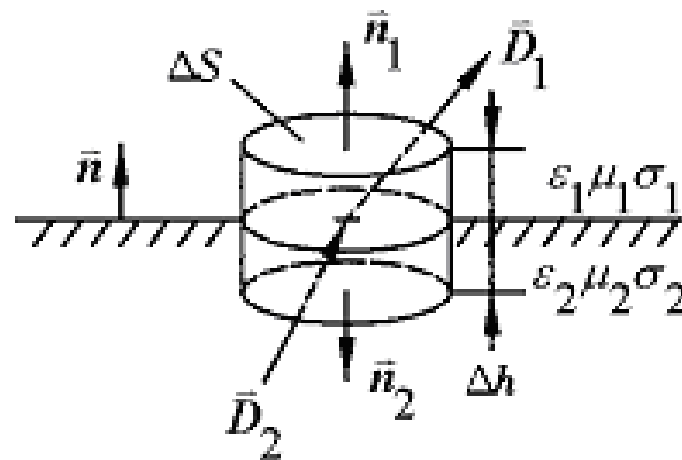
2.9.1 电场法向分量的边界条件

均匀区域: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$

分界面上: $\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$

均匀区域: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

分界面上: $\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$



- 自由面电荷可以存在于理想导体与介质的分界面，普通导体与介质的分界面；
- 自由面电荷在两种理想介质分界面上可以存在，但需要特意放置；(Guru书 P216)；理想介质表面非特意放置时无自由面电荷；
- 导电媒质表面一般存在自由面电荷；

2.9 电磁场的边界条件

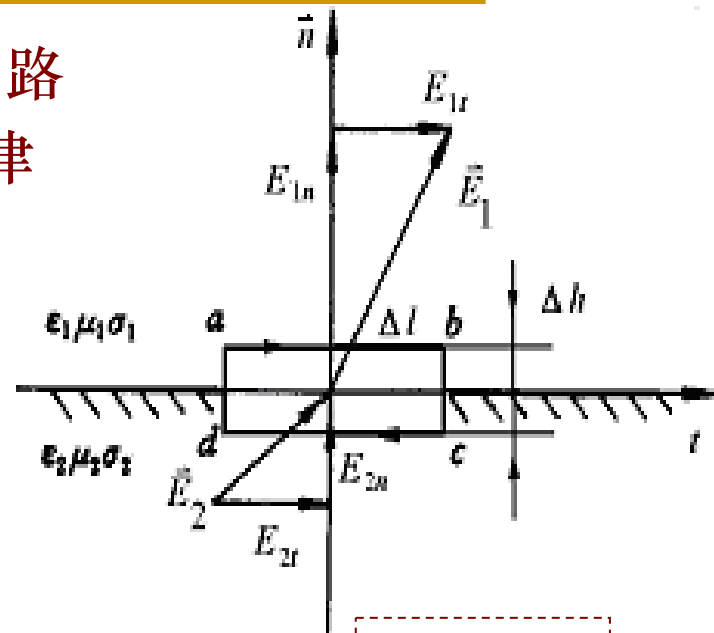
2.9.2 电场切向分量的边界条件

在两种媒质分界面上取一小的矩形闭合回路
 $abcd$, 在此回路上应用法拉第电磁感应定律

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} &= E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l \\ - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta l \Delta h \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta l \Delta h$$

$$\Rightarrow E_{1t} - E_{2t} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta h \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} E_{1t} - E_{2t} = 0$$



故: $\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$ 或

$$E_{1t} = E_{2t}$$

因为 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

该式表明, 在分界面上电场强度的切向分量总是连续的。

若媒质 II 为理想导体时: $E_{1t} = 0$

理想导体表面没有切向电场;
理想导体上电场垂直外表面;

2.9 电磁场的边界条件

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

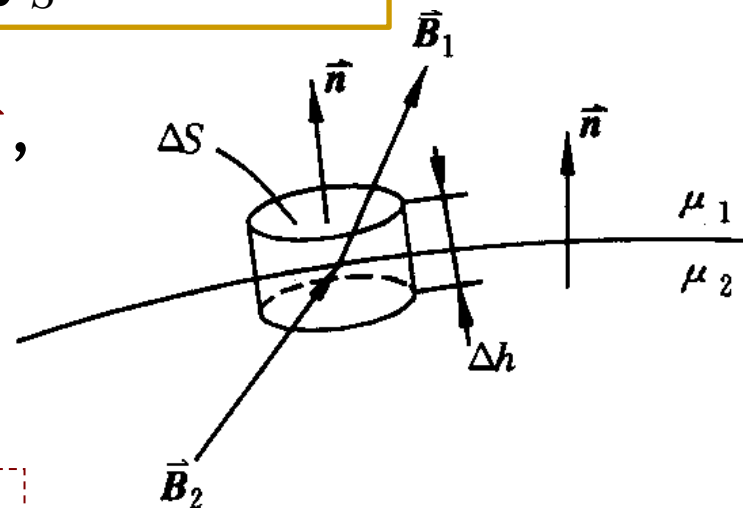
2.9.3 磁场法向分量的边界条件

在两种媒质分界面处做一小柱形闭合面，
如图 $\Delta h \rightarrow 0$

在该闭合面上应用**磁场的高斯定律**

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{n} \cdot \vec{B}_1 \Delta S - \vec{n} \cdot \vec{B}_2 \Delta S = 0$$

则： $\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ 或 $B_{1n} = B_{2n}$



该式表明：**磁感应强度的法向分量在分界面处是连续的。**

因为 $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

若媒质Ⅱ为理想导体时,由于理想导体中的时变磁感应强度为零,故: $B_{1n} = 0$

因此,理想导体表面上只有切向磁场,没有法向磁场。

2.9 电磁场的边界条件

2.9.4 磁场切向分量的边界条件

在两种媒质分界面处做一小矩形闭合环路，
如图，在此环路上应用安培环路定律

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta l} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{a}_l dl$$

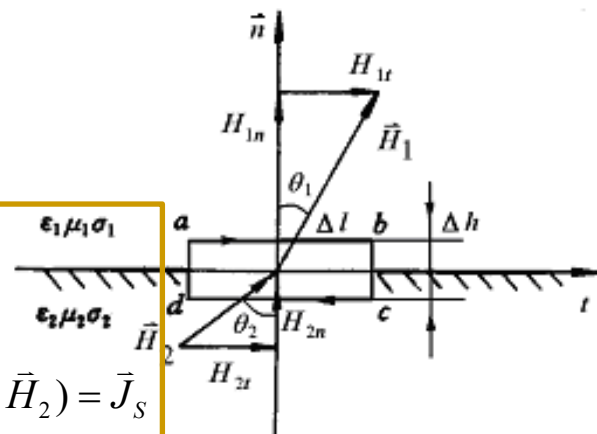
$$= \int_{\Delta l} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\vec{a}_S \times \vec{n}) dl = \int_{\Delta l} \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{a}_S dl$$

$$\int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\Delta h, \Delta l \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right] = \int_{\Delta l} \vec{J}_S \cdot \vec{a}_S dl + 0 = \int_{\Delta l} \vec{J}_S \cdot \vec{a}_S dl$$

$$\xrightarrow{\vec{B} = \mu \vec{H}} \frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = J_S$$

\vec{J}_S : 面电流线密度 A/m



■ 面电流只可以存在于理想导体表面；

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \text{若: } \mu_2 \rightarrow \infty \text{ 则 } \theta_1 = 0$$

即：在理想铁磁质表面上只有法向磁场，没有切向磁场。



2.9 电磁场的边界条件

边界条件不要按照教材的形式，要按照此处的形式。

一般形式的边界条件：

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

场量在边界不连续根源：分界面**存在电荷电流**

- 自由面电荷只产生法向电位移矢量，不影响切向电场；
- 面电流产生切向磁场强度；
- 面电流只可以存在于理想导体表面；
- 自由面电荷可以存在于理想导体、普通导体和介质的表面；
- 自由面电荷在两种理想介质分界面上可以存在，但需要特意放置；(Guru书P216)

- 不同媒质的分界面两侧**媒质的性质**发生突变，导致两侧电磁场不连续；
- 理想导体内部不存在电磁场，表面可以有面电流和自由面电荷；
- 理想介质表面没有传导面电流；
- 理想介质表面非特意放置时无自由面电荷，特意放置可以存在自由面电荷；
- 导电媒质内部可以有电磁场和传导电流，表面没有传导面电流；
- 导电媒质表面一般存在自由面电荷；



2.9 电磁场的边界条件

边界条件不要按照教材的形式，要按照此处的形式。

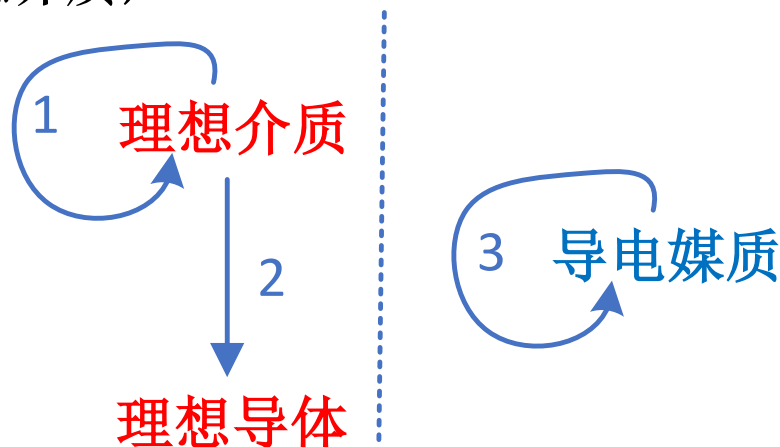
- 两种理想介质的边界条件（媒质均为理想介质）：

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \Rightarrow H_{1t} = H_{2t}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$$



- 理想介质与理想导体的边界条件（媒质2为理想导体）：

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \Rightarrow \vec{n} \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \Rightarrow \vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \rho_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0$$

- 两种导电媒质的边界条件（媒质均为非理想媒质）：

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

2.9 电磁场的边界条件

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dV$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

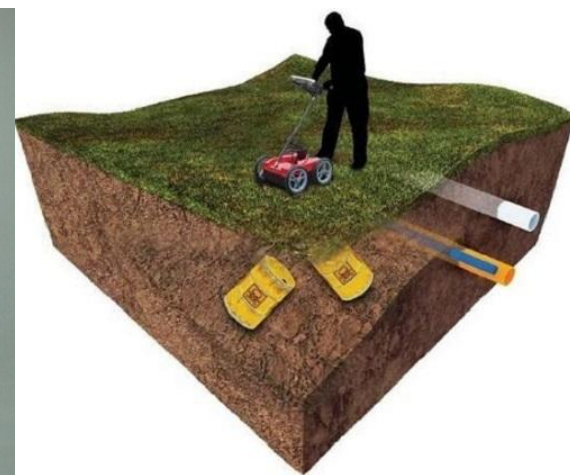
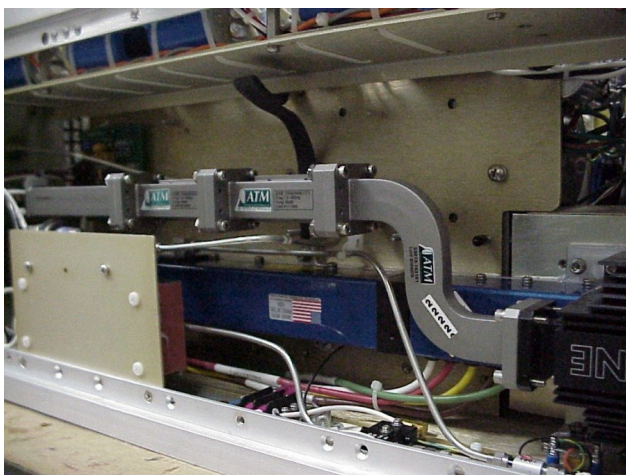
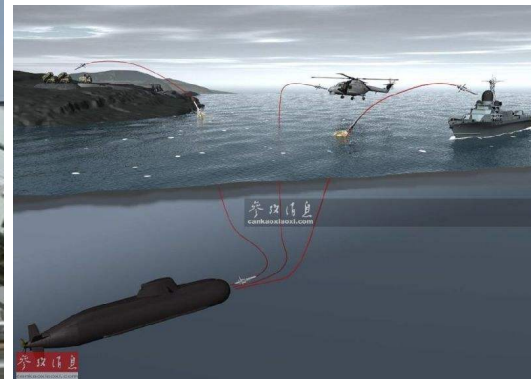
$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

- 积分形式=微分形式+边界条件；注意这里的微分形式不考虑广义函数及其运算；
- 两个切向边界条件即是足够的，两个法向边界条件可以用来验证结果；
- 至此，已经给出了麦克斯韦方程组的完整形式；
- 此后，在各种情况下求解麦克斯韦方程组是主要内容；
- 求解麦克斯韦方程组是边值问题：本征解+边界上的匹配；

2.9 电磁场的边界条件

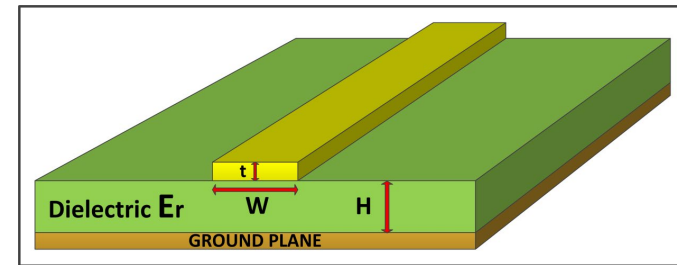
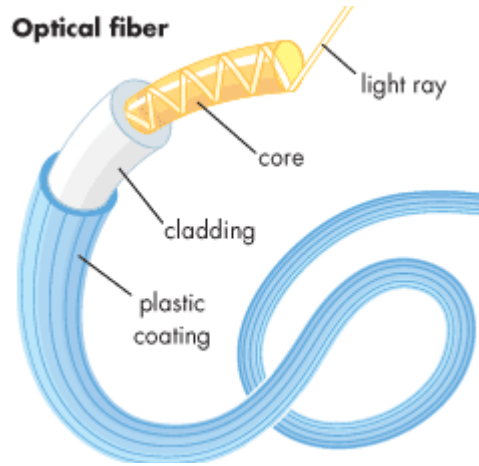
边界才是特性，是真爱！



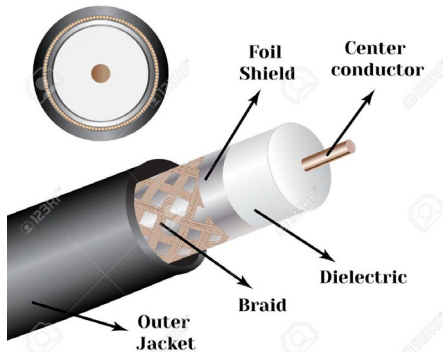
- 边界条件的应用；
- 空间-金属分界面；
- 介质-介质分界面； 空气-水分界面； 空气-土壤分界面；

2.9 电磁场的边界条件

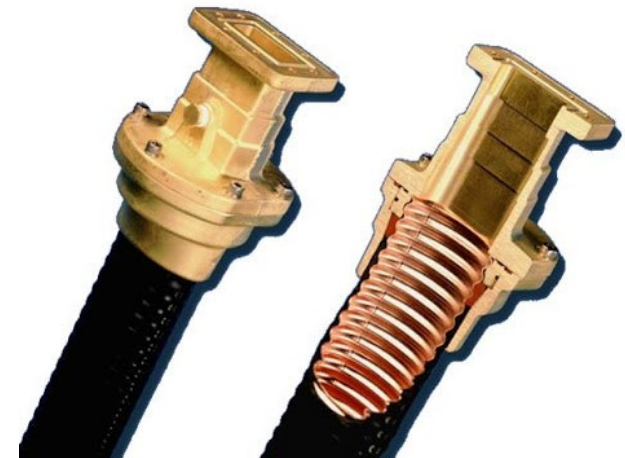
- 不同电磁场问题特点的根源在于**具有不同的边界条件**；
- 边界电磁理论；
- 电磁应用根源在于设计了不同的媒质边界；



COAXIAL TV CABLE



FREE
SPACE



作业



P32 习题1.13

教材例题：1.9.1和1.9.2

电磁场理论

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dV$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

- 至此，电磁场理论的基础（麦克斯韦方程组）已经全部给出；
- 剩下的事情，数学求解+物理理解；
- 本课程中，理解电磁场与波的物理过程、描述其特点的概念；



博采众长，以电磁证道

- 书要多看几本（数十本-百本），读懂不同作者的心路历程；
 - 书要看不同时期的，知道为何是现在的样子，也就利于知道未来专业发展的方向；
 - 思考着，哪种理解更合适自己？
 - 通常，能够在相互矛盾中来去自如，是通达的境地；
-
- 专业基础课，需要花时间，值得花精力去弄透彻；
 - 透彻后，不仅仅是专业能力，而且是认知能力的提升；
 - 从生活中来，再回到生活中；