电磁场与电磁波

第一章 场量分析

李顺礼
lishunli621@seu.edu.cn

电磁场的数学物理基础

- 1.1　矢量分析
  - 1.1.1　标量和矢量
  - 1.1.2　矢量代数运算
  - 1.1.3　矢量微分运算
  - 1.1.4　矢量积分运算
- 1.2　场分析
  - 1.2.1　标量场和矢量场
  - 1.2.2　标量场的几何表示与梯度
  - 1.2.3　矢量场的散度
  - 1.2.4　矢量场的旋度
  - 1.2.5　两个重要的零恒等式
  - 1.2.6　亥姆霍兹定理

我们是物理课程；
不要落入数学泥淖！

参考教材P300-P338
参考谢树艺《矢量分析与场论》

数学描述，运算过程与物理现象的统一

1.1 矢量分析

1.1.1 标量和矢量

- 标量 (scalar) —仅需要一个数值就可以完全描述的量。（只有大小而没有方向的量。如电压U、电荷量Q、电流I、面积S ）。标量的空间分布构成标量场。

$$T = T(x, y, z, t)$$

- 矢量 (vector) —既要用数值又要用方向才能完整描述的量。（具有大小和方向特征的量。如电场强度矢量、磁场强度矢量、作用力矢量、速度矢量等）。矢量的空间分布构成矢量场。

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$$

1.1 矢量分析

1.1.1 标量和矢量

- 标量 (scalar) —标量的空间分布构成标量场。

$$T = T(x, y, z, t)$$

- 矢量 (vector) —矢量的空间分布构成矢量场。

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$$

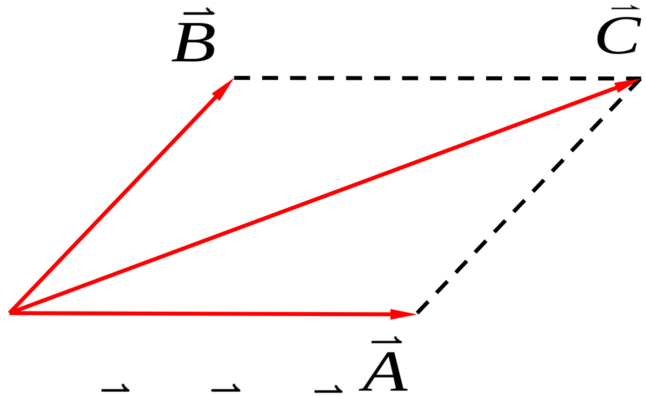
标量场和矢量场统称为场量；
对于场量的研究，称为场量分析；

对于场量，每个人都可以定义不同的运算，关键是哪种运算更好！

1.1 矢量分析

数学运算；
运算法则；

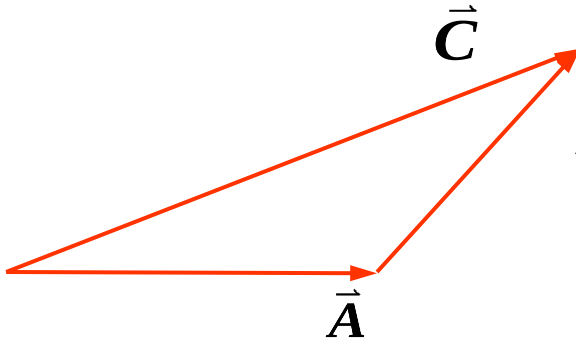
1.1.2 矢量代数运算



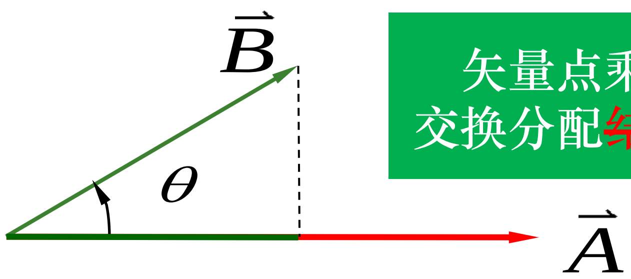
$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{A}+\cdots+\vec{A}=k\vec{A}$$

矢量叠加；
交换结合；

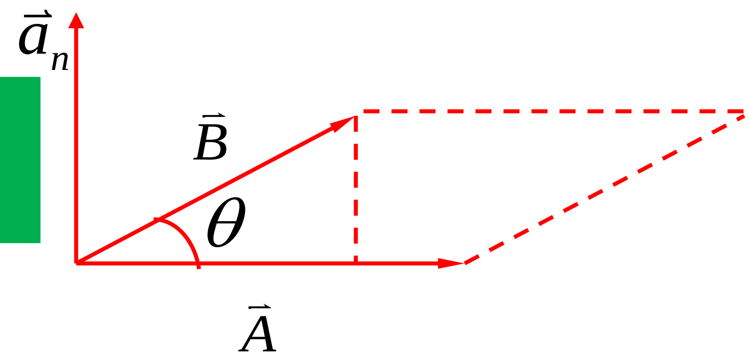


$$\vec{B}=\vec{C}-\vec{A}$$



矢量点乘；
交换分配~~结合~~；

矢量叉乘；
~~交换~~分配~~结合~~；



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{a}_n AB\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)$$

1.1 矢量分析

1.1.2 矢量代数运算

标积：

投影

矢量点乘；

交换分配~~结合~~；

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right) \qquad \vec{A}\cdot\vec{B}=\begin{cases}0 & \vec{A}\perp\vec{B}\\ \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| & \vec{A}\parallel\vec{B}\end{cases}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \qquad \left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}\neq\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$

矢积：

矢量叉乘；

~~交换~~分配~~结合~~；

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{a}_n\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right) \qquad \vec{A}\times\vec{B}=\begin{cases}0 & \vec{A}\parallel\vec{B}\\ \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| & \vec{A}\perp\vec{B}\end{cases}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A} \qquad \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C} \qquad \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}\neq\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$

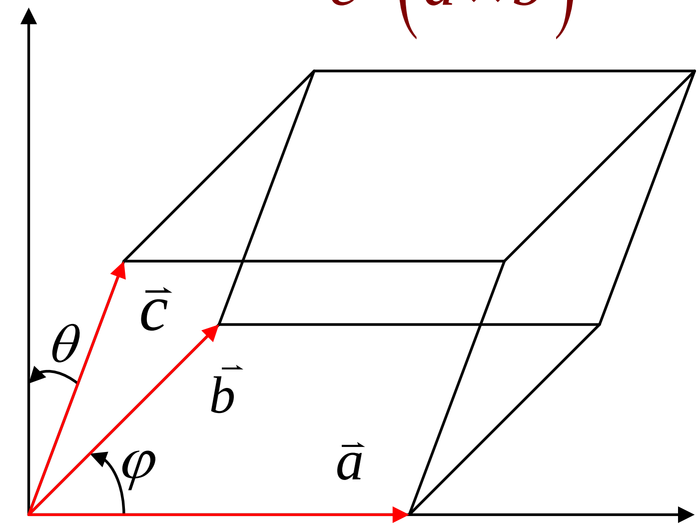
1.1 矢量分析

1.1.2 矢量代数运算

三重积；
~~交换分配结合~~；

三重积(triple product):只有三种定义

$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$



数乘三重积 $(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

标量三重积 $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|\sin\varphi\cos\theta$$

标量三重积结果为三矢量构成的平行六面体的体积

矢量三重积

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

运算定义千万种，
意义明确很重要。

电磁场的数学物理基础

- 1.1　矢量分析
  - 1.1.1　　标量和矢量
  - 1.1.2　　矢量代数运算
  - 1.1.3　　矢量微分运算
  - 1.1.4　　矢量积分运算
- 1.2　场分析
  - 1.2.1　　标量场和矢量场
  - 1.2.2　　标量场的几何表示与梯度
  - 1.2.3　　矢量场的散度
  - 1.2.4　　矢量场的旋度
  - 1.2.5　　两个重要的零恒等式
  - 1.2.6　　亥姆霍兹定理

电磁场随空间和时间的变化规律

参考教材P300-P338
参考谢树艺《矢量分析与场论》

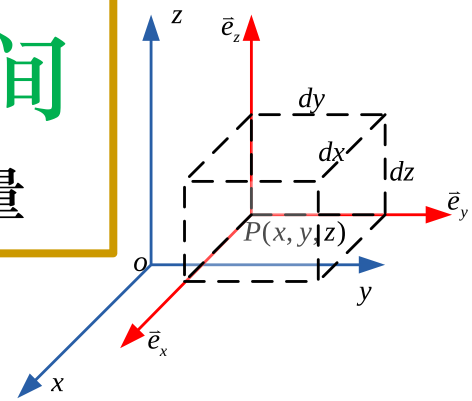
数学描述，运算过程与物理现象的统一

1.1 矢量分析

1.1.3 矢量函数的微分

空间和时间

变量都是标量



在直角坐标系中，矢量函数:

$$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z,t)=\vec{e}_x A_x(x,y,z,t)+\vec{e}_y A_y(x,y,z,t)+\vec{e}_z A_z(x,y,z,t)$$

其对时间的偏导数为:

宏观低速；
时空解耦；

$$\frac{\partial \vec{e}}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=\frac{\partial[\vec{e}_x A_x(x,y,z,t)+\vec{e}_y A_y(x,y,z,t)+\vec{e}_z A_z(x,y,z,t)]}{\partial t}$$

$$=\vec{e}_x\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial t}+\vec{e}_y\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial t}+\vec{e}_z\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial t}$$

其对空间的偏导数为:

$$\frac{\partial \vec{e}}{\partial x}=0$$

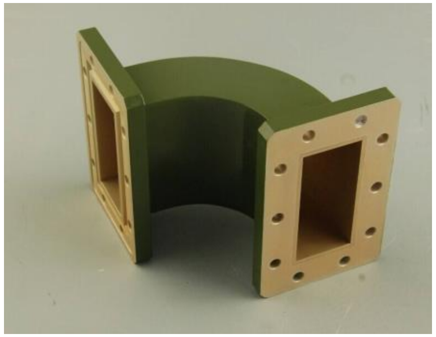
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}=\frac{\partial[\vec{e}_x A_x(x,y,z,t)+\vec{e}_y A_y(x,y,z,t)+\vec{e}_z A_z(x,y,z,t)]}{\partial x}$$

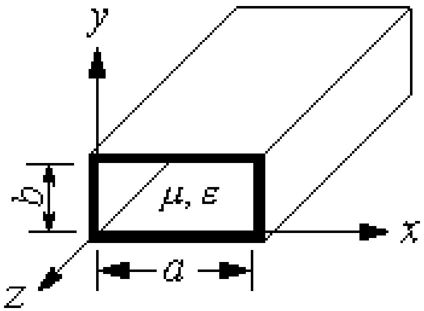
$$=\vec{e}_x\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x}+\vec{e}_z\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x}$$

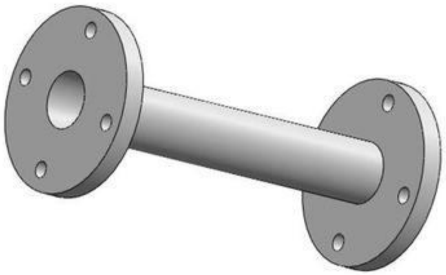
没有什么特别的啊！？

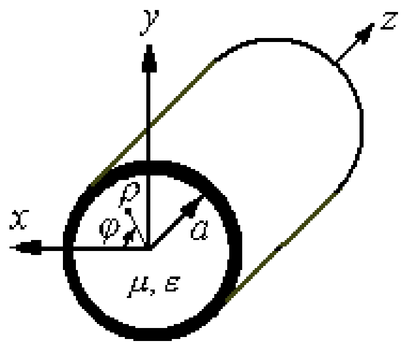
1.1 矢量分析

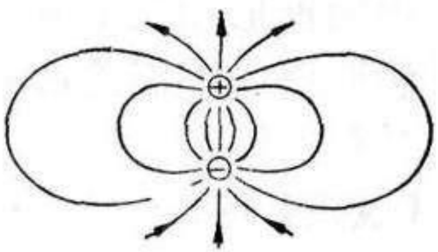
1.1.3 矢量函数的微分

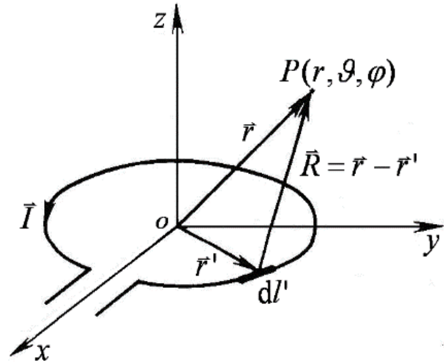












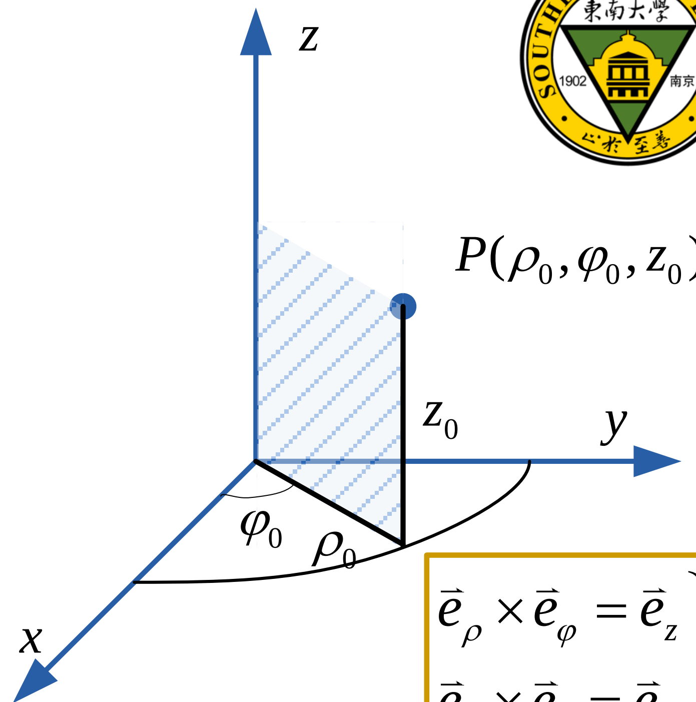
- 直角坐标系是常用的；
- 有些运算用直角坐标系并不简明；
- 根据问题来选择合适的坐标系（求解区域与坐标面重合）；
- 直角坐标系，柱坐标系，球坐标系下的微分和积分运算

1.1 矢量分析

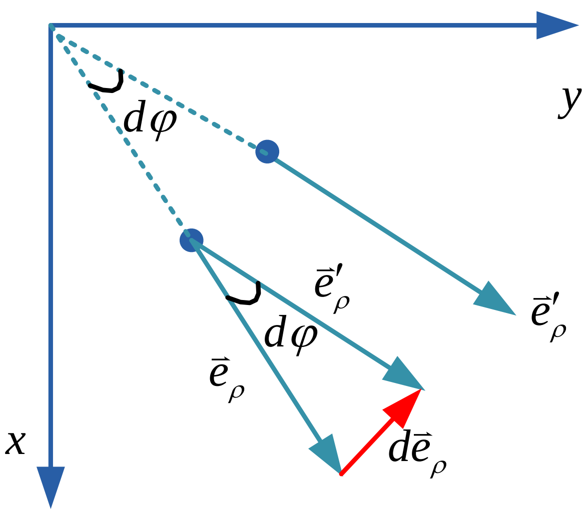
1.1.3 矢量函数的微分

- 柱坐标系为例
- 柱坐标系的坐标参量为 (ρ,φ,z)
- 三个单位矢量并非都是常矢量；

以 $\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}$ 为例进行说明



$$\left.\begin{aligned}\vec{e}_\rho\times\vec{e}_\varphi &= \vec{e}_z\\ \vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z &= \vec{e}_\rho\\ \vec{e}_z\times\vec{e}_\rho &= \vec{e}_\varphi\end{aligned}\right\}$$



$$de_\rho = \left|\vec{e}_\rho\right| d\varphi = d\varphi$$

$$\Downarrow$$

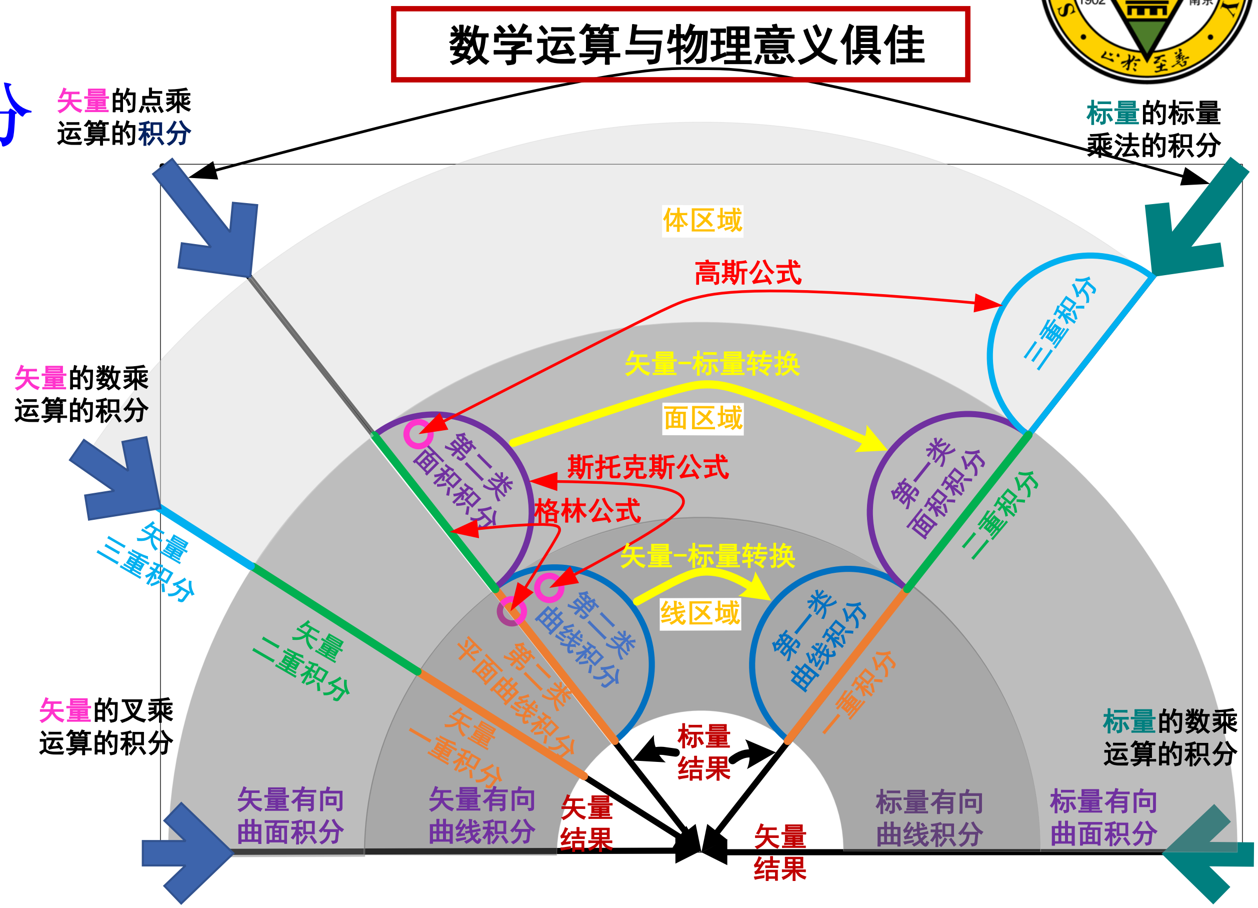
$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}=\vec{e}_\varphi,\ \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-\vec{e}_\rho,\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}$$

1.1 矢量分析

1.1.4 场量函数的积分

- 被积函数；
- 积分区域；
- 乘法运算；



- **十二种数学形式：**
  - 标量与有向曲线，标量与有向曲面；
  - 标量与曲线，标量与曲面，标量与体积；
  - 矢量点乘有向曲线，矢量点乘有向曲面；
  - 矢量与曲线，矢量与曲面，矢量与体积；
  - 矢量叉乘有向曲线，矢量叉乘有向曲面；

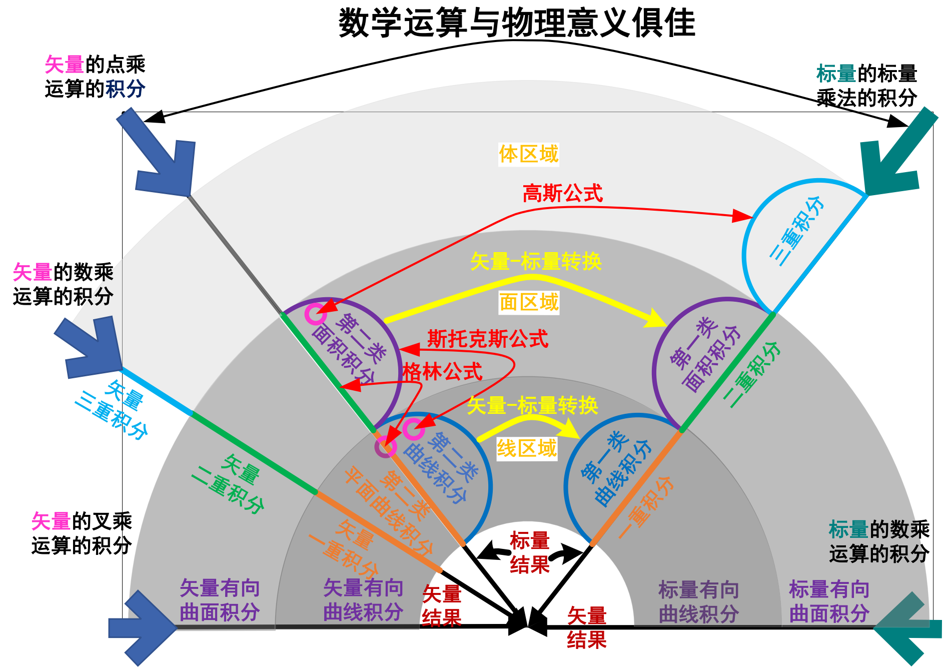
- **五种有重要物理意义：**
  - 标量与曲线，标量与曲面，标量与体积；
  - 矢量点乘有向曲线，矢量点乘有向曲面；

- **三大公式：**
  - 格林高斯斯托克斯公式；
  - 积分域维度变换；

1.1 矢量分析

1.1.4 场量函数的积分

- **十二种数学形式：**
  - 标量与有向曲线，标量与有向曲面；
  - 标量与曲线，标量与曲面，标量与体积；
  - 矢量点乘有向曲线，矢量点乘有向曲面；
  - 矢量与曲线，矢量与曲面，矢量与体积；
  - 矢量叉乘有向曲线，矢量叉乘有向曲面；



- **五种有重要物理意义：** 这五种计算结果是标量！其他七种都是矢量！
  - 标量与曲线，标量与曲面，标量与体积；
  - 矢量点乘有向曲线，矢量点乘有向曲面；

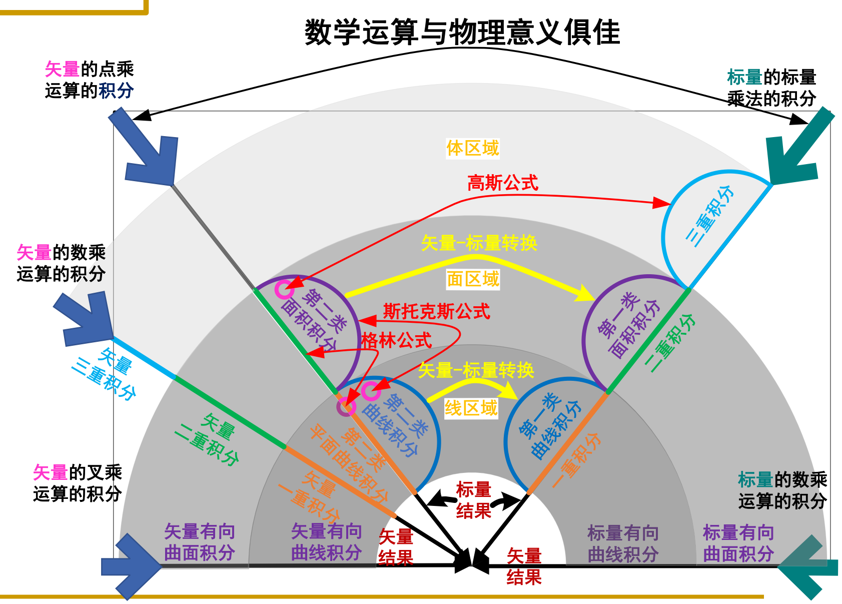
思考：为何标量结果的积分是重要的？

1.1 矢量分析

1.1.4 场量函数的积分

- 一般形式的斯托克斯公式：n维带边流形； $Generalized\ Stokes'\ Formula: \int_{\Omega} d\omega = \oint_{\partial\Omega} \omega$
- n=3，特化为高斯公式，格林恒等式； $\int_{\tau} \nabla\cdot\vec{A}d\tau = \oint_{S} \vec{A}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_{V}(\varphi\nabla^{2}\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)dV = \oint_{S}(\varphi\nabla\psi)\cdot d\vec{S} = \oint_{S}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$
- n=2，特化为曲面斯托克斯公式和格林公式； $\underbrace{\int_{S}(\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{C}\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{\text{三维曲面}} \Rightarrow \underbrace{\int_{S}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{C}Pdx+Qdy}_{\text{二维平面}}$
- n=1，特化为牛顿-莱布尼茨公式； $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a)$

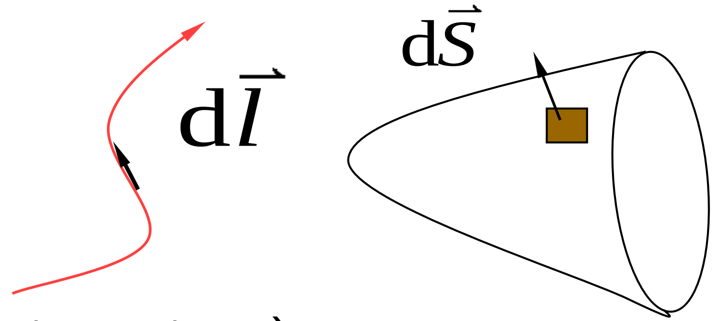
- 高维度空间与低维度空间的关系；
- 三大公式：变换积分域维度；
- 三大公式：针对封闭积分域；



1.1 矢量分析

1.1.4 场量函数的积分

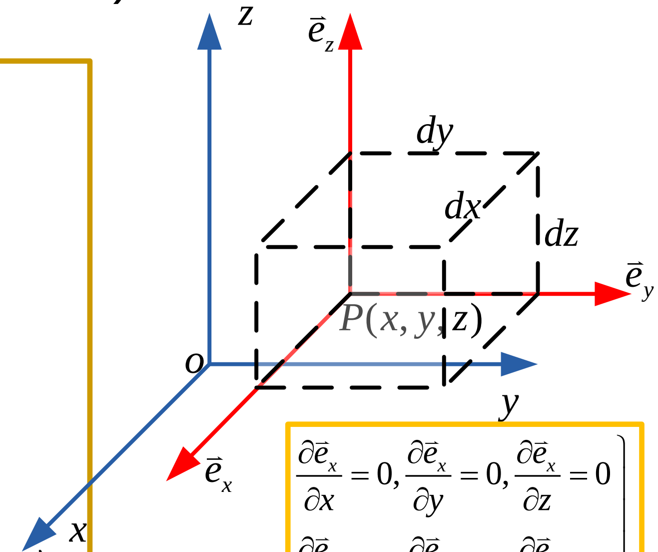
如 $\boxed{\int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}, \quad \int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \int \rho\mathrm{d}V}$



其中：$\mathrm{d}\vec{l}, \mathrm{d}\vec{S}$ 和 $\mathrm{d}V$ 称为微分元。

1.1.4.1 直角坐标系 (Rectangular coordinate system)

坐标	(x, y, z)
矢量	$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = \vec{a}_x A_x + \vec{a}_y A_y + \vec{a}_z A_z$
线元	$d\vec{l}_x = dx\vec{a}_x; \quad d\vec{l}_y = dy\vec{a}_y; \quad d\vec{l}_z = dz\vec{a}_z$
	$d\vec{l} = dx\vec{a}_x + dy\vec{a}_y + dz\vec{a}_z$
面元	$d\vec{S}_x = dydz\vec{a}_x; \quad d\vec{S}_y = dxdz\vec{a}_y; \quad d\vec{S}_z = dxdy\vec{a}_z;$
体元	$dV = dxdydz$



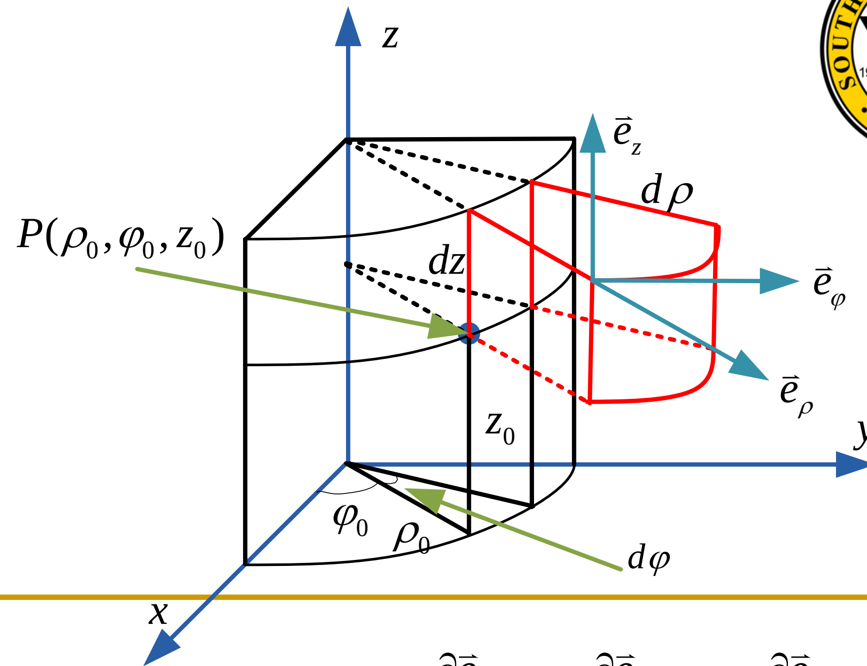
$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \vec{e}_x}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial \vec{e}_x}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial \vec{e}_x}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial \vec{e}_y}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial \vec{e}_y}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial \vec{e}_y}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0
\end{array}\right\}$$

1.1 矢量分析

1.1.4 场量函数的积分

1.1.4.2 圆柱坐标系

(Cylindrical coordinate system)



坐标 (R,φ,z)

矢量 $\vec{A}=\vec{A}_R+\vec{A}_\varphi+\vec{A}_z=\vec{a}_R A_R+\vec{a}_\varphi A_\varphi+\vec{a}_z A_z$

线元 $d\vec{l}_R=dR\vec{a}_R;\quad d\vec{l}_\varphi=Rd\varphi\vec{a}_\varphi;\quad d\vec{l}_z=dz\vec{a}_z$

$d\vec{l}=dR\vec{a}_R+Rd\varphi\vec{a}_\varphi+dz\vec{a}_z$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho}=0,\ \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}=\vec{e}_\varphi,\ \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\rho}=0,\ \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\vec{e}_\rho,\ \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\rho}=0,\ \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial\vec{e}_z}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}$$

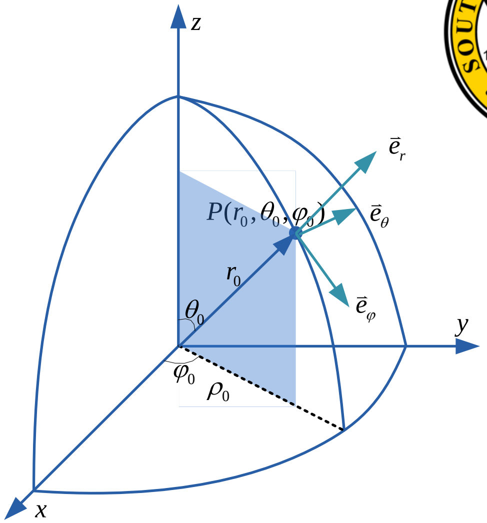
面元 $d\vec{S}_R=d\vec{l}_\varphi\times d\vec{l}_z=Rd\varphi dz\vec{a}_R;\quad d\vec{S}_\varphi=dRdz\vec{a}_\varphi;\quad d\vec{S}_z=Rd\varphi dR\vec{a}_z;$

体元 $dV=dl_R\cdot dl_\varphi\cdot dl_z=RdRd\varphi dz$

1.1 矢量分析

1.1.4 矢量积分运算

1.1.4.3 球坐标系 (Spherical coordinate system)



坐标 (r,θ,φ)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}=\vec{e}_\theta,\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}=\vec{e}_\varphi\sin\theta \\
&\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}=-\vec{e}_r,\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}=\vec{e}_\varphi\cos\theta \\
&\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}=0,\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-\vec{e}_\theta\cos\theta-\vec{e}_r\sin\theta
\end{aligned}\right\}$$

矢量 $\vec{A}=\vec{A}_r+\vec{A}_\theta+\vec{A}_\varphi=\vec{a}_r A_r+\vec{a}_\theta A_\theta+\vec{a}_\varphi A_\varphi$

线元 $d\vec{l}_r=dr\vec{a}_r;\quad d\vec{l}_\theta=rd\theta\vec{a}_\theta;\quad d\vec{l}_\varphi=r\sin\theta d\varphi\vec{a}_\varphi$

$$d\vec{l}=dr\vec{a}_r+rd\theta\vec{a}_\theta+r\sin\theta d\varphi\vec{a}_\varphi$$

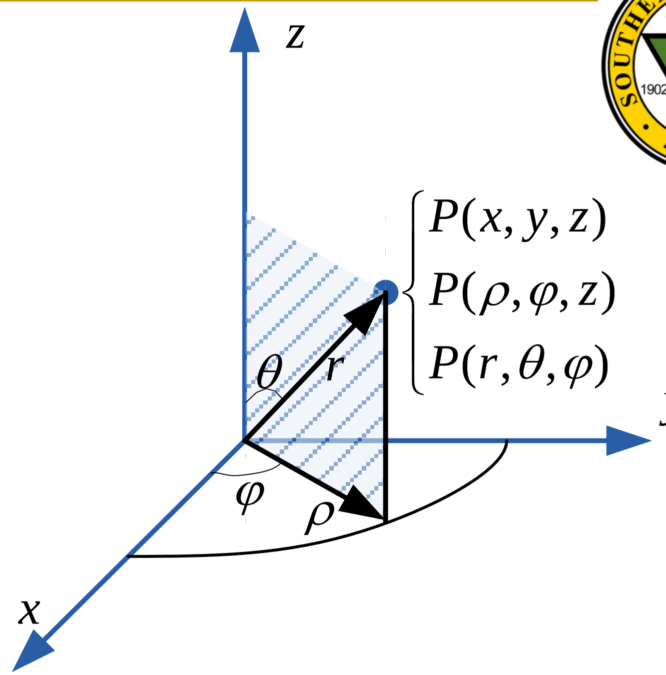
面元 $d\vec{S}_R=r^2\sin\theta d\theta d\varphi\vec{a}_r;\quad d\vec{S}_\theta=r\sin\theta drd\varphi\vec{a}_\theta;\quad d\vec{S}_\varphi=rdrd\theta\vec{a}_\varphi;$

体元 $dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

1.1 矢量分析

1.1.4 矢量积分运算

1.1.4.4 三种坐标系的转换



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \phi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \vec{e}_\rho\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi \\ \vec{e}_y = \vec{e}_\rho\sin\varphi + \vec{e}_\varphi\cos\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \vec{e}_r\sin\theta + \vec{e}_\theta\cos\theta \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \vec{e}_r\sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi \\ \vec{e}_y = \vec{e}_r\sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_\theta\cos\theta\sin\varphi + \vec{e}_\varphi\cos\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

1.1.4 矢量积分运算

1.1.4.5 广义正交曲线坐标系：

在正交曲线坐标系中，其坐标变量 (u_1,u_2,u_3)不一定都是长度，其线元必然有一个修正系数，这些修正系数称为拉梅系数，若已知其拉梅系数 h_1,h_2,h_3，就可正确写出其线元、面元和体元。

- 线元： $\mathrm{d}\vec{l} = h_1\mathrm{d}u_1\vec{a}_{u_1} + h_2\mathrm{d}u_2\vec{a}_{u_2} + h_3\mathrm{d}u_3\vec{a}_{u_3}$
- 面元： $\mathrm{d}\vec{S}_1 = h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\vec{a}_{u_1}$

  $\mathrm{d}\vec{S}_2 = h_1h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3\vec{a}_{u_2}$

  $\mathrm{d}\vec{S}_3 = h_1h_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\vec{a}_{u_3}$
- 体元： $\mathrm{d}V = h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$

1.1 矢量分析

注意：

a. 在直角坐标系中，x,y,z 均为长度量，其拉梅系数均为1，

$$\boxed{h_1 = h_2 = h_3 = 1}$$

b. 在柱坐标系中，坐标变量为 (R,φ,z)，其中 φ为角度，

其对应的线元 $Rd\varphi\vec{a}_\varphi$，可见拉梅系数为：

$$\boxed{h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = 1}$$

c. 在球坐标系中，坐标变量为(r,θ,φ)，其中θ,φ均为角度，其拉梅系数为：

$$\boxed{h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta}$$

- 为何是这三种坐标系？--对应了常见的实际应用：传输线和辐射；
- 还有其他坐标系吗？--抛物柱面坐标系，椭圆柱坐标系，长球面坐标系，双球坐标系…

电磁场的数学物理基础

- 1.1　矢量分析
  - 1.1.1　　标量和矢量
  - 1.1.2　　矢量代数运算
  - 1.1.3　　矢量微分运算
  - 1.1.4　　矢量积分运算
- 1.2　场分析
  - 1.2.1　　标量场和矢量场
  - 1.2.2　　标量场的几何表示与梯度
  - 1.2.3　　矢量场的散度
  - 1.2.4　　矢量场的旋度
  - 1.2.5　　两个重要的零恒等式
  - 1.2.6　　亥姆霍兹定理

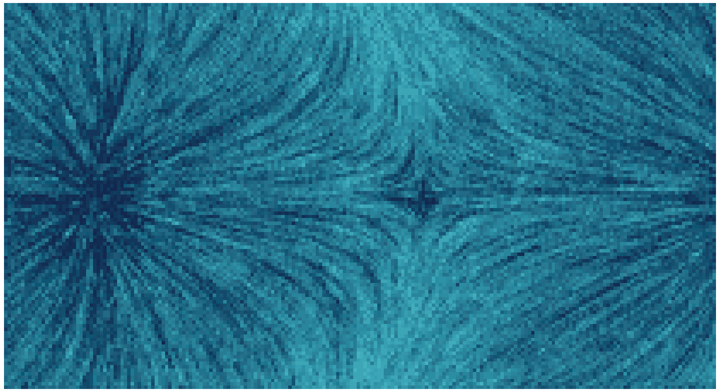
电磁场随空间和时间的变化规律

参考教材P300-P338
参考谢树艺《矢量分析与场论》

数学描述，运算过程与物理现象的统一

1.2 场分析

1.2.1 标量场和矢量场

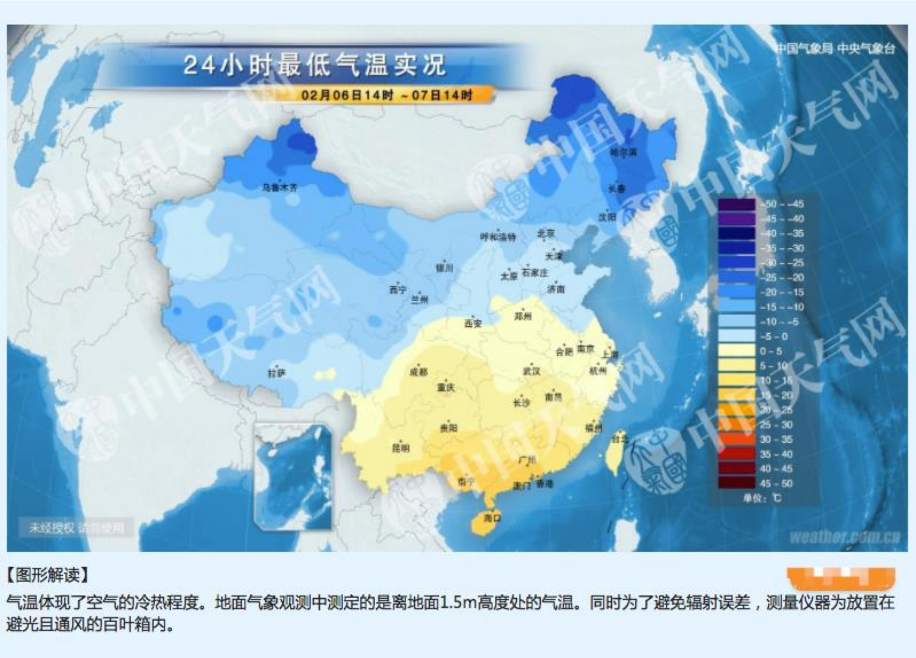
- 标量场：在指定的时刻，空间每一点可以用一个标量唯一地描述，则该标量函数定出标量场。（例如物理系统中的温度、压力、密度等可以用标量场来表示。）

- 矢量场：在指定的时刻，空间每一点可以用一个矢量唯一地描述，则该矢量函数定出矢量场。（例如流体空间中的流速分布等可以用矢量场来表示。）

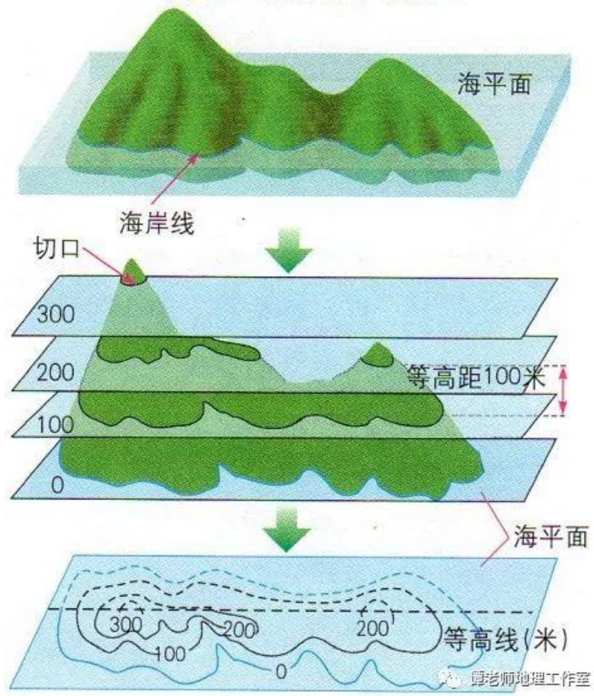
1.2 场分析

1.2.2 标量场的几何表示与梯度

1.2.2.1 标量场的等值面



等高线绘法示意图



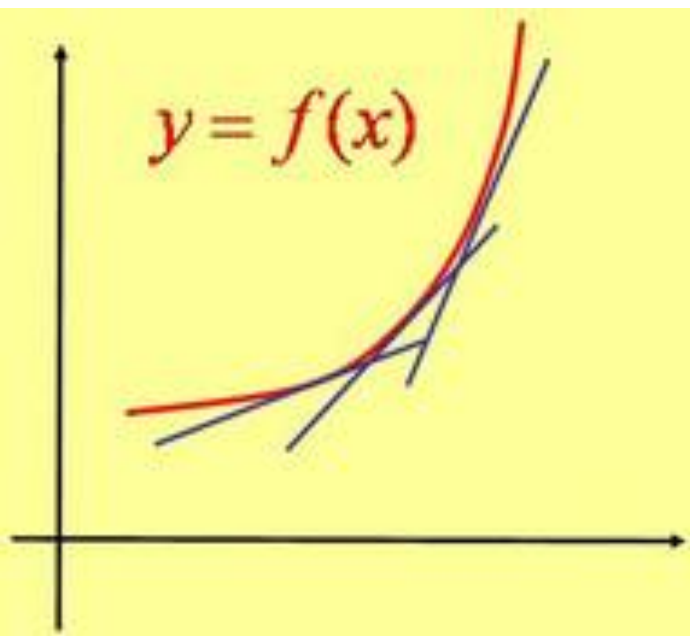
可以看出：标量场的函数是单值函数，各等值面是互不相交的。

1.2　场分析

1.2.2 标量场的几何表示与梯度

1.2.2.1 标量场的等值面

- 等值面：场值是多少?
- 场的变化规律?
- 变化带来信息!



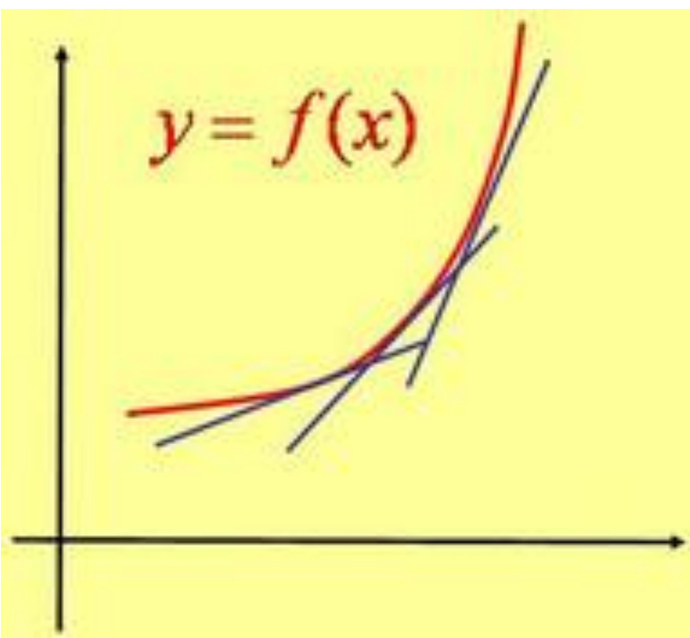
- 不同的方向坡度不同!
- 哪个方向变化最剧烈?

1.2 场分析

1.2.2 标量场的几何表示与梯度

1.2.2.1 标量场的等值面

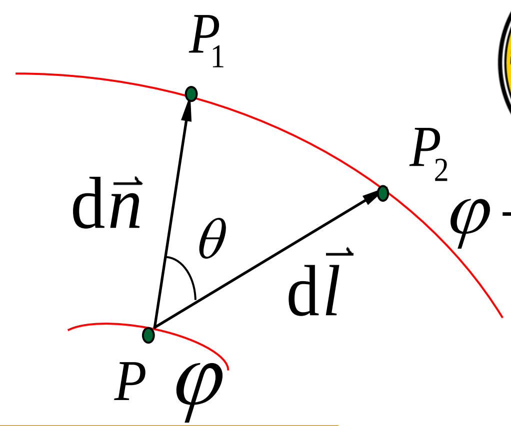
- 等值面：场值是多少?
- 场的变化规律?
- 变化带来信息!



- 不同的方向坡度不同!
- 哪个方向变化最剧烈?
- 一维情况：左导数+右导数；
- 二维情况呢?
- 无穷多个！---选择最大的那个!

1.2 场分析

1.2.2.2 标量场的方向导数和梯度



标量场的场函数为 $\varphi(x,y,z,t)$

数学上的关系：由点P沿着l方向移动到点P_2

$$\left.\begin{array}{l} P\xrightarrow{l}P_2 \\ \varphi\to\varphi+d\varphi \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{d\varphi}{\mathrm{d}l}\overset{\text{全微分}}{=}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\Rightarrow d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow d\varphi=\left(\vec{a}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{a}_x dx+\vec{a}_y dy+\vec{a}_z dz\right)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} \nabla\varphi=\vec{a}_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{a}_y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{a}_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\doteq grad\varphi \\ d\vec{l}=\vec{a}_x dx+\vec{a}_y dy+\vec{a}_z dz \end{array}\right\}\Rightarrow d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\vec{l}\Rightarrow\frac{d\varphi}{dl}=\nabla\varphi\cdot\vec{a}_l$$

$\dfrac{d\varphi}{dl}=\nabla\varphi\cdot\vec{a}_l$： φ沿任意方向的变化率等于矢量$\nabla\varphi$ 在该方向上的投影

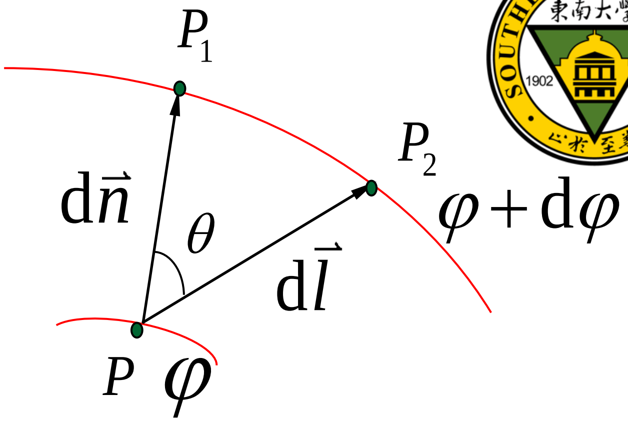
- φ是一个标量场，$\nabla\varphi$是一个矢量场！
- 矢量一定大于该矢量在任意方向的投影；
- 无穷多个！ --选择最大的那个！$\nabla\varphi$ 就是最大的那个方向导数---确定了最大的变化率和变化方向；

1.2 场分析

1.2.2.2 标量场的方向导数和梯度

标量场的场函数为 $\varphi(x,y,z,t)$

数学上的关系：由点P沿着l方向移动到点P_2

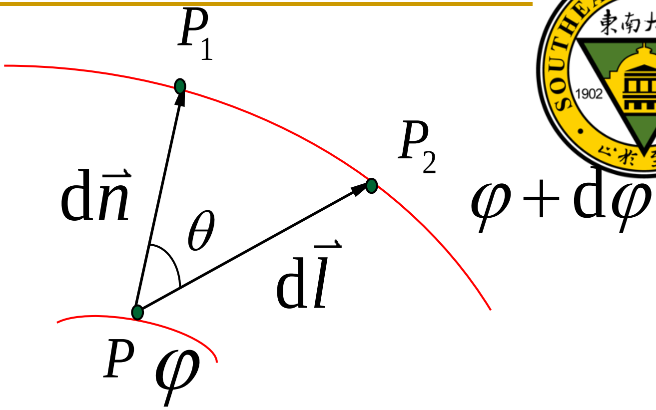


$$\boxed{\frac{d\varphi}{dl}=\nabla\varphi\cdot\vec{a}_l=\left(\vec{a}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot\vec{a}_l}$$

- 标量场沿着某一方向的方向导数可以表示为某一固定矢量在该方向上的投影；
- 这一固定矢量反映了该标量场变化最快的方向和变化率；
  --该固定矢量称为梯度；

1.2 场分析

1.2.2.2 标量场的方向导数和梯度



标量场的场函数为 $\varphi(x,y,z,t)$

a.方向导数

定义：标量场自该点沿某一方向上的变化率，称为方向导数。

$$\boxed{\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_P=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi(P_2)-\varphi(P)}{\Delta l}}$$

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\vec{a}_n$$

b.梯度 gradient

定义：标量场中某点梯度的大小为该点最大的方向导数，

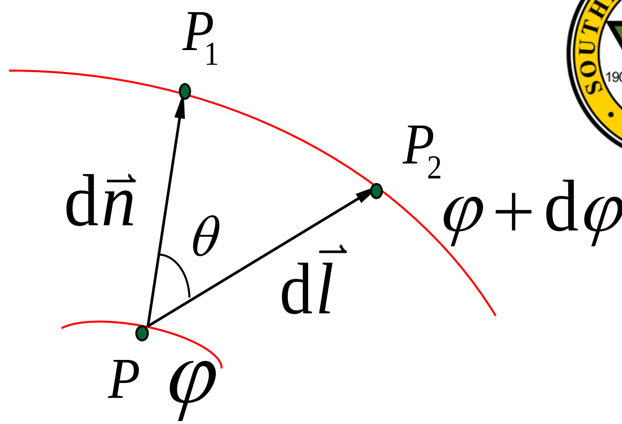
其方向为该点所在等值面的法线方向。——是个矢量

$$\boxed{grad\varphi=\nabla\varphi=\vec{a}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

- 梯度是标量场变化规律的完整描述；

1.2 场分析

1.2.2.2 标量场的方向导数和梯度



梯度的性质：

- 标量函数φ的梯度为一矢量函数；

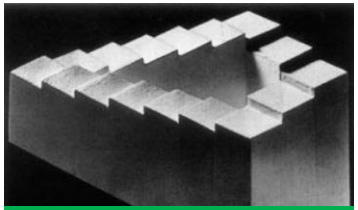
运算的转化，复杂到简单

- 函数φ在给定沿l方向的方向导数等于φ的梯度在l方向上的投影；

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dl}=\nabla\varphi\cdot\vec{a}_l}$$

- 标量场的梯度方向为过该点等值面的法线方向。 $\boxed{\vec{n}_0=\dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}}$

- 梯度函数在闭合路径上的线积分为零。 $\boxed{\oint_C \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0}$



闭合环路下降？

- 梯度的线积分为积分路径无关。

- 梯度只由标量函数本身决定。

1.2 场分析

∇ ：哈密顿算符 $\boxed{\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}}$

1.2.2.3 在不同的坐标系中，梯度的计算公式：

在直角坐标系中： $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{a}_z$

在柱坐标系中： $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{a}_R + \frac{\partial\varphi}{R\partial\varphi}\vec{a}_\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{a}_z$

在球坐标系中： $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}\vec{a}_\theta + \frac{\partial\varphi}{r\sin\theta\partial\varphi}\vec{a}_\varphi$

在任意正交曲线坐标系中：

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{h_1\partial u_1}\vec{a}_{u1} + \frac{\partial\varphi}{h_2\partial u_2}\vec{a}_{u2} + \frac{\partial\varphi}{h_3\partial u_3}\vec{a}_{u3}$$

1.2　场分析

1.2.2.4　梯度的应用

何必奔冲山下去，
因有梯度在世间。

崎岖有悬步，委曲饶荒寻

梯度下降法，也称为最陡下降法。要使用梯度下降法找到一个函数的局部极小值，必须向函数上当前点对应梯度（或者是近似梯度）的反方向的规定步长距离点进行迭代搜索—优化算法。

如何减小变化率？

方向导数！

$$\frac{d\varphi}{dl}=\nabla\varphi\cdot\vec{a}_l$$

作业

要求：独立完成；过程详细；可以呈现思考过程。

0.1求标量场 $\varphi=(x+y)^2-z$ 通过点M（1,0,1）的等值面方程，绘制该等值面方程。

0.2求标量场 $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ 在点N（1,1,2）处的梯度及其沿着 $\vec{l}=\vec{e}_x+2\vec{e}_y+2\vec{e}_z$ 方向的方向导数。

0.3 r 是矢量 $=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$ 的模，求函数r和函数r^{-1}的梯度（结果形式尽可能简化）。

电磁场的数学物理基础

- 1.1　矢量分析
  - 1.1.1　标量和矢量
  - 1.1.2　矢量代数运算
  - 1.1.3　矢量微分运算
  - 1.1.4　矢量积分运算
- 1.2　场分析
  - 1.2.1　标量场和矢量场
  - 1.2.2　标量场的几何表示与梯度
  - 1.2.3　矢量场的散度
  - 1.2.4　矢量场的旋度
  - 1.2.5　两个重要的零恒等式
  - 1.2.6　亥姆霍兹定理

电磁场随空间和时间的变化规律

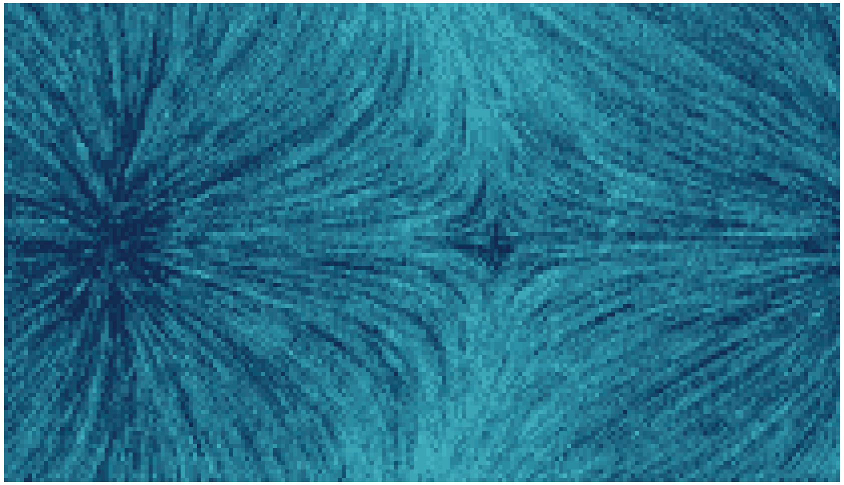
参考教材P300-P338
参考谢树艺《矢量分析与场论》

数学描述，运算过程与物理现象的统一

1.2 场分析

假设我置身知识的荒原，环顾四周，
我是否能够找到正确的方向、开辟出直通真理的坦途呢?

矢量场的矢量线



- 假设现在还没有人研究过矢量场…
- 我应该怎么思考才能开辟出道路呢?
- 我希望我开辟的道路直通真理，这样的话经过多少年之后，我开辟的道路越来越宽，而不是早已被遗忘;

找到方法，
找到好方法!

1.2　场分析

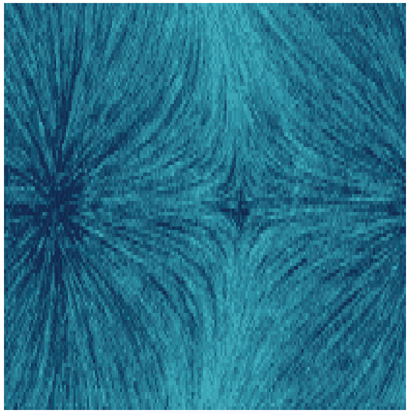
假设我置身知识的荒原，环顾四周，
我是否能够找到正确的方向、开辟出直通真理的坦途呢?

- 假设现在还没有人研究过矢量场…
- 我应该怎么思考才能开辟出道路呢?
- 我希望我开辟的道路直通真理，这样的话经过多少年之后，我开辟的道路越来越宽，而不是早已被遗忘;

找到方法，
找到好方法!

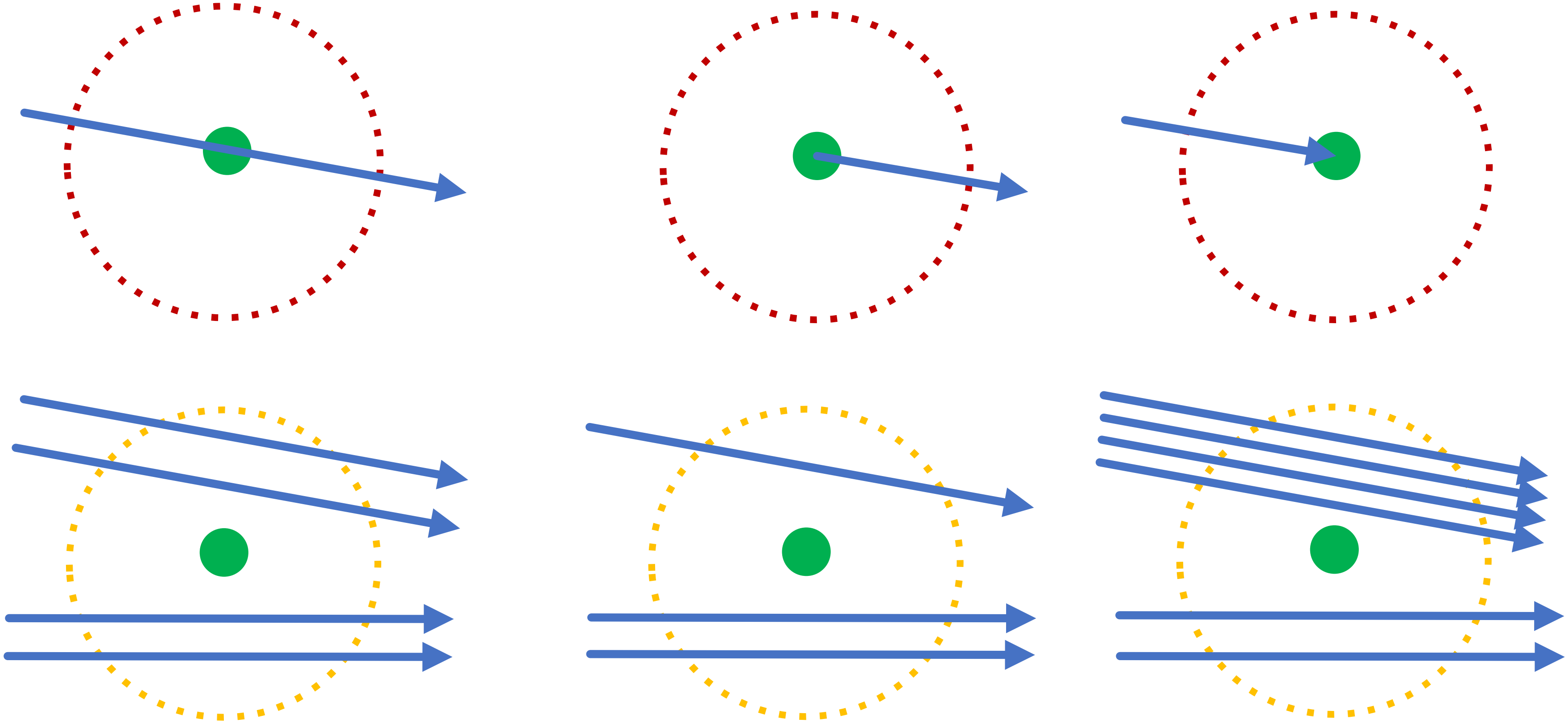
- 假设现在还没有人研究过…
- 我应该怎么思考才能开辟出道路呢? -从简单形态开始
- 我希望我开辟的道路直通真理，这样的话经过多少年之后，我开辟的道路越来越宽，而不是早已被遗忘; -建立从简单到复杂的重复关系

1.2　场分析



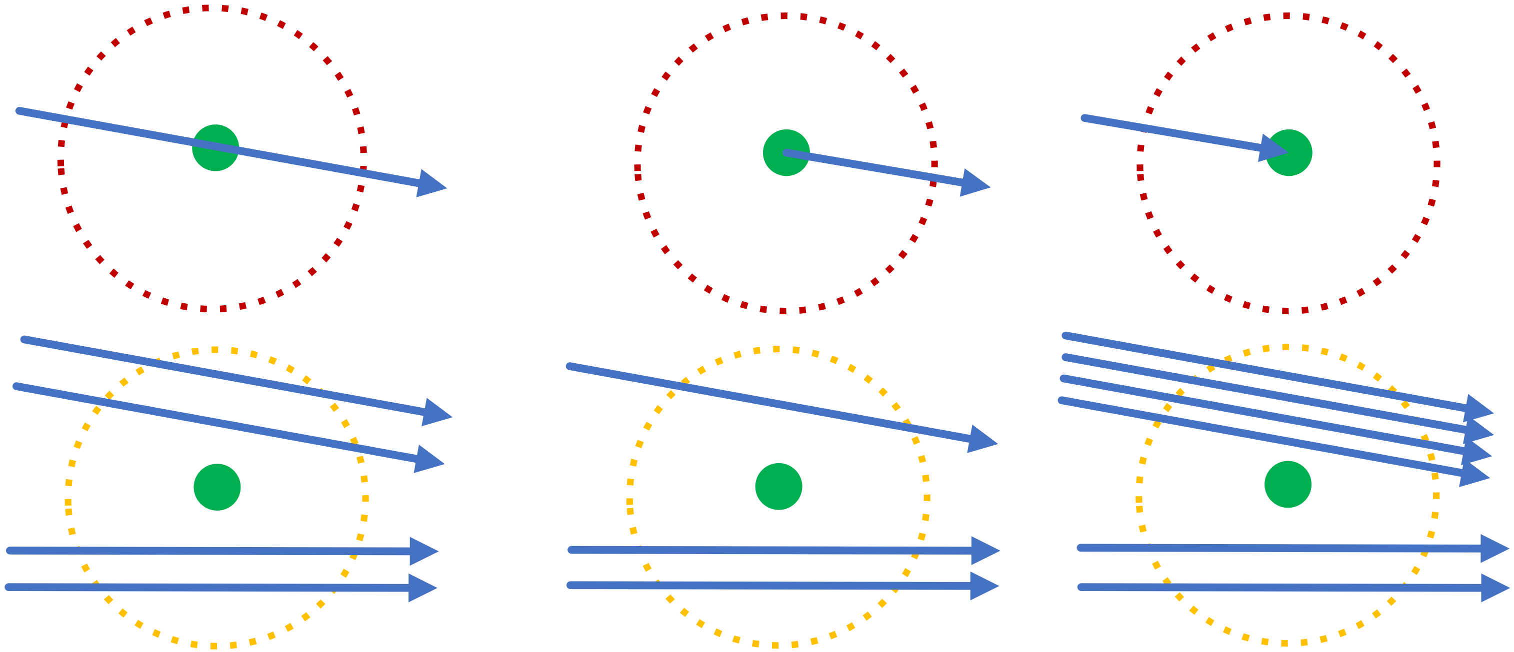
- 矢量场的几何表示；
- 矢量线与场点的关系；
- 矢量线与场点：穿过与绕过；
- 穿过：如何穿过?
- 绕过：如何绕过?

矢量场的矢量线



1.2 场分析

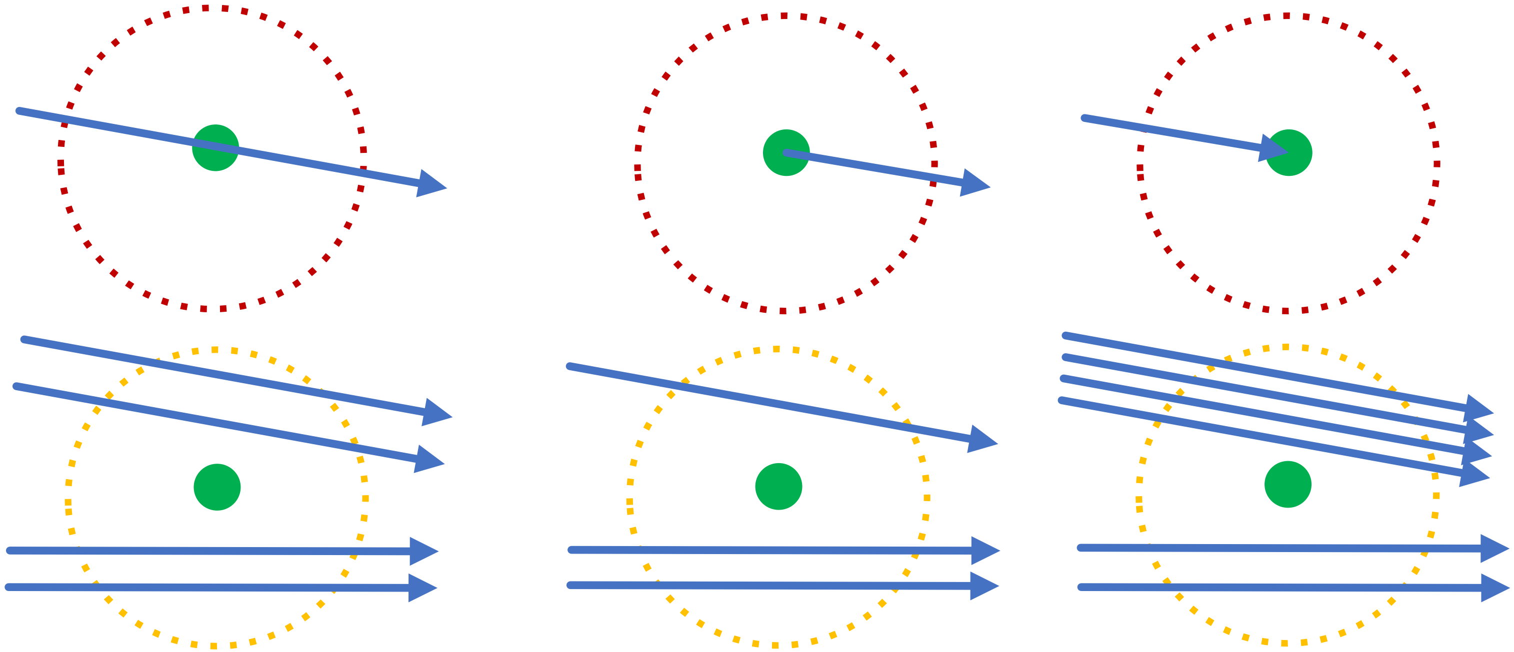
矢量场的矢量线



- 矢量线与场点：穿过与绕过（二分法）；
- 穿过：实际上是对球皮的拉扯，是该点平动、源宿的趋势；
- 如何穿过？穿过该点，起始于该点，终止于该点
- 绕过：线与线外一点确定一个面；哪个面内呢？
- 绕过：两边相同？这边比那边少？这边比那边多？是该点转动的趋势
- 绕过的描述，比穿过的描述，要复杂！---选择最大的那个！

1.2 场分析

矢量场的矢量线

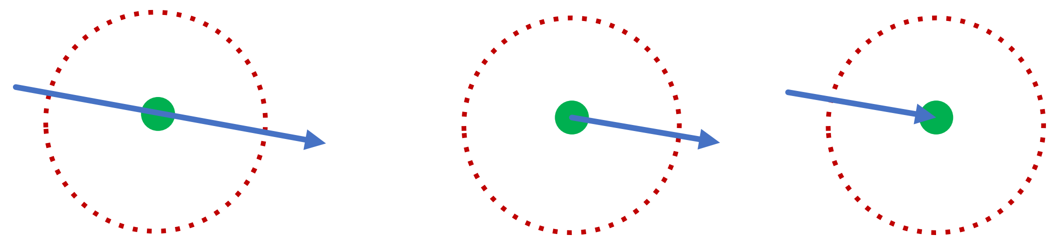


- 矢量线与场点：穿过与绕过；
- 只有穿过与绕过；描述了穿过与绕过—完备性；
- 亥姆霍兹定理：描述穿过与绕过是对矢量场的完备描述；

- 数学基于物理，意义明确；物理终于数学，逻辑严谨；

1.2　场分析

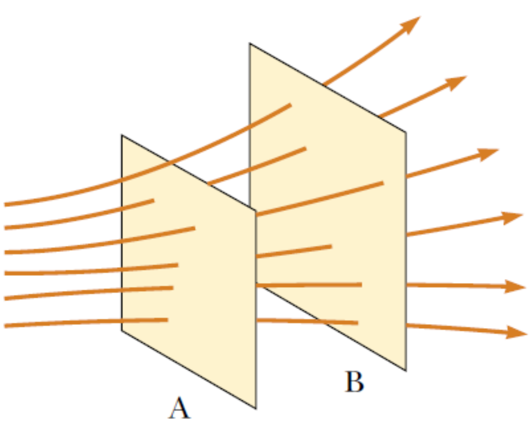
1.2.3 矢量场的散度

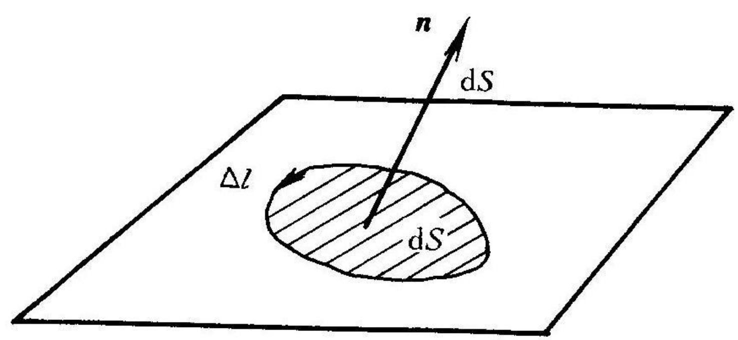


1.2.3.1 矢量的通量

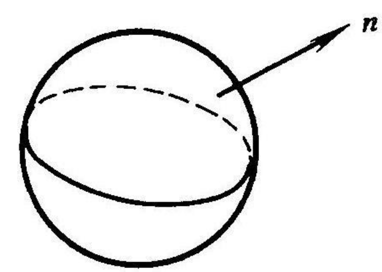
在描述矢量场的性质时，矢量穿过一个曲面的通量是一个很重要的概念。

将曲面的一个面元用矢量 $d\vec{S}$ 来表示：　$d\vec{S} = \vec{n} dS$





(a)



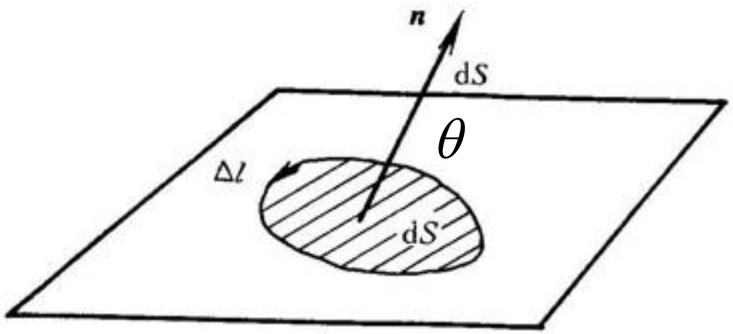
(b)

开曲面　　闭曲面

沿闭合曲线方向 右螺旋关系　　闭合面的外法向方向

1.2.3矢量场的散度

在矢量场中 $\vec{A}$ ，取一个面元 $d\vec{S}$ ，因为dS 很小，其各点上的值可视为相同，取标量积：



$$\boxed{\psi = \vec{A}\cdot d\vec{S} = A\cos\theta dS}$$

称为 $\vec{A}$ 穿过$d\vec{S}$ 的通量。

那么，$\vec{A}$ 穿过曲面 $\vec{S}$ 的通量为：

$$\boxed{\psi = \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_S A\cos\theta dS}$$

如果$\vec{S}$ 是一个闭合面，则 $\vec{A}$ 穿过 $\vec{S}$ 的通量为：

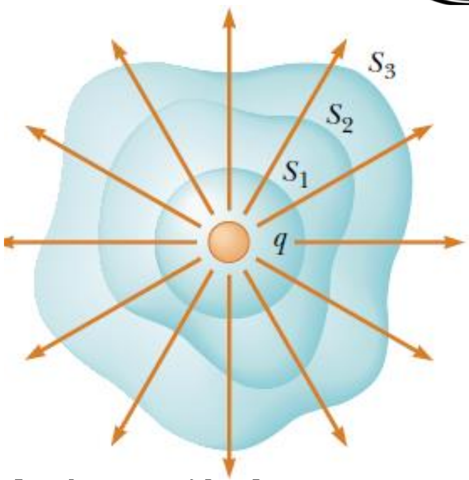
$$\boxed{\psi = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_S A\cos\theta dS}$$

1.2.3矢量场的散度

意义：

a. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi > 0$

说明穿出闭合面的通量大于穿入曲面的通量，意味着闭合面内存在正的通量源。

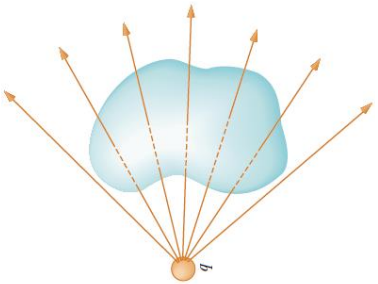


b. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi < 0$

说明穿入的通量大于穿出的通量，那么必然有一些矢线在曲面内终止了，意味着闭合面内存在负源或称"汇"或"宿"。

c. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi = 0$

说明穿入的通量等于穿出的通量。

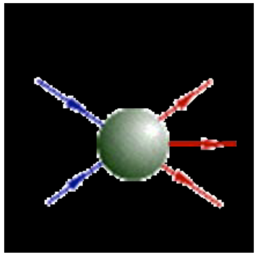


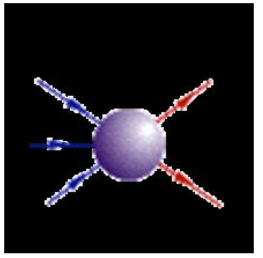
但是，通量仅能表示闭合面中源的总量，它不能显示源的分布特性（具体在何处？）。为此需要研究矢量场的散度。

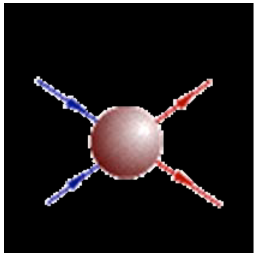
1.2.3矢量场的散度

1.2.3.2 矢量的散度　（divergence）

通量不能描述体积内每点的性质。为研究一个点附近的 $\vec{A}$ 的通量的性质，取如下极限，称为 $\vec{A}$ 在该点的散度：







表达式:

$$\boxed{div\vec{A}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta\tau}}$$

表示从该点单位体积内散发出来的 $\vec{A}$ 的通量

矢量场中某点处**通量的体密度**称为该点的散度

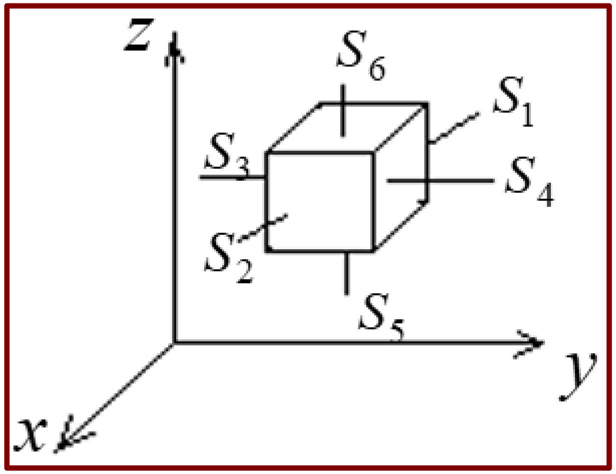
- 通量是宏观量，散度是微观量；
- 两者是面积分和体积分的关系；

1.2.3矢量场的散度

如果在直角坐标系中： 对于一个体积微分元

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{A}\cdot d\vec{S}_2 + \ldots + \int_{S_6} \vec{A}\cdot d\vec{S}_6$$ 泰勒级数展开并近似

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta\tau = \nabla\cdot\vec{A}\,\Delta\tau$$



$$div\vec{A} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta\tau} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$div\vec{A} = \left(\vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)\cdot\left(\vec{a}_x A_x + \vec{a}_y A_y + \vec{a}_z A_z\right) = \nabla\cdot\vec{A}$$

1.2.3矢量场的散度

1.2.3.3 常用坐标系中，散度的计算公式

直角坐标系中：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- 散度描述了场分量在各自坐标变量方向上的变化率；

柱坐标系中：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{R}\frac{\partial(A_R R)}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

球坐标系中：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

正交曲线坐标系中：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(A_{u_1}h_2h_3\right)}{\partial u_1}+\frac{\partial(A_{u_2}h_1h_3)}{\partial u_2}+\frac{\partial(A_{u_3}h_1h_2)}{\partial u_3}\right]$$

1.2.3矢量场的散度

1.2.3.4 高斯公式（Divergence Theorem）

$$\int_\tau \nabla\cdot\vec{A}d\tau=\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

物理意义：

矢量场穿过一封闭曲面的总通量等于矢量散度的体积分。

证明：对于有限大体积τ，可将其按如图进行分割，对每一体积元有：

$$div\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta\tau}$$

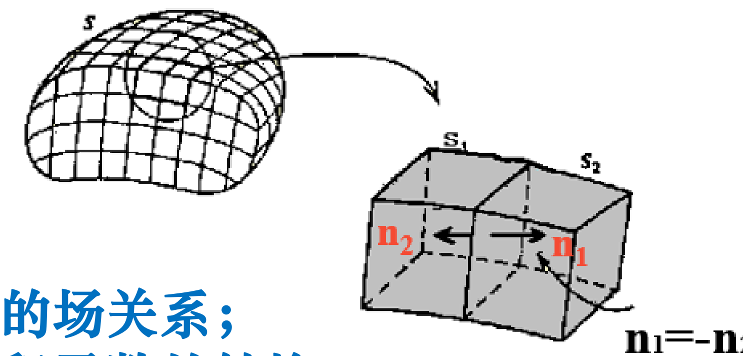
$$divA\Delta\tau_1=\oint_{s_1}\vec{A}\cdot d\vec{S}_1$$

$$divA\Delta\tau_2=\oint_{s_2}\vec{A}\cdot d\vec{S}_2$$

$$\vdots$$

叠加：+ 内部面积分抵消

$$\int_\tau div\vec{A}d\tau=\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$



- 高斯公式给出了封闭区域中表面与内部区域的场关系；
- 高斯公式实现了积分区域的转换，实现了被积函数的转换；
- 若一个矢量场的散度**处处为零**，则称为无散场；

1.2.3矢量场的散度

1.2.3.5 拉普拉斯算子 ∇^2

$$\boxed{\nabla^2\psi=\nabla\cdot(\nabla\psi)}$$

在直角坐标系中：$\nabla^2\psi=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

在圆柱坐标系中：$\nabla^2\psi=\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}(R\dfrac{\partial\psi}{\partial R})+\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

在球坐标系中：

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

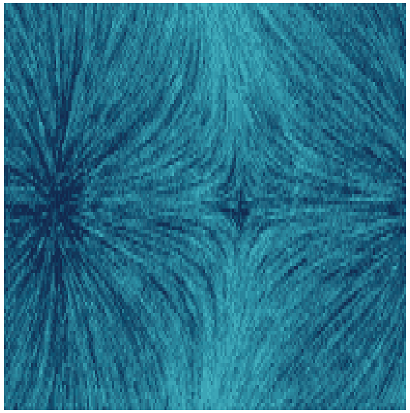
在广义正交曲线坐标系中：

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2})+\frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3})\right]$$

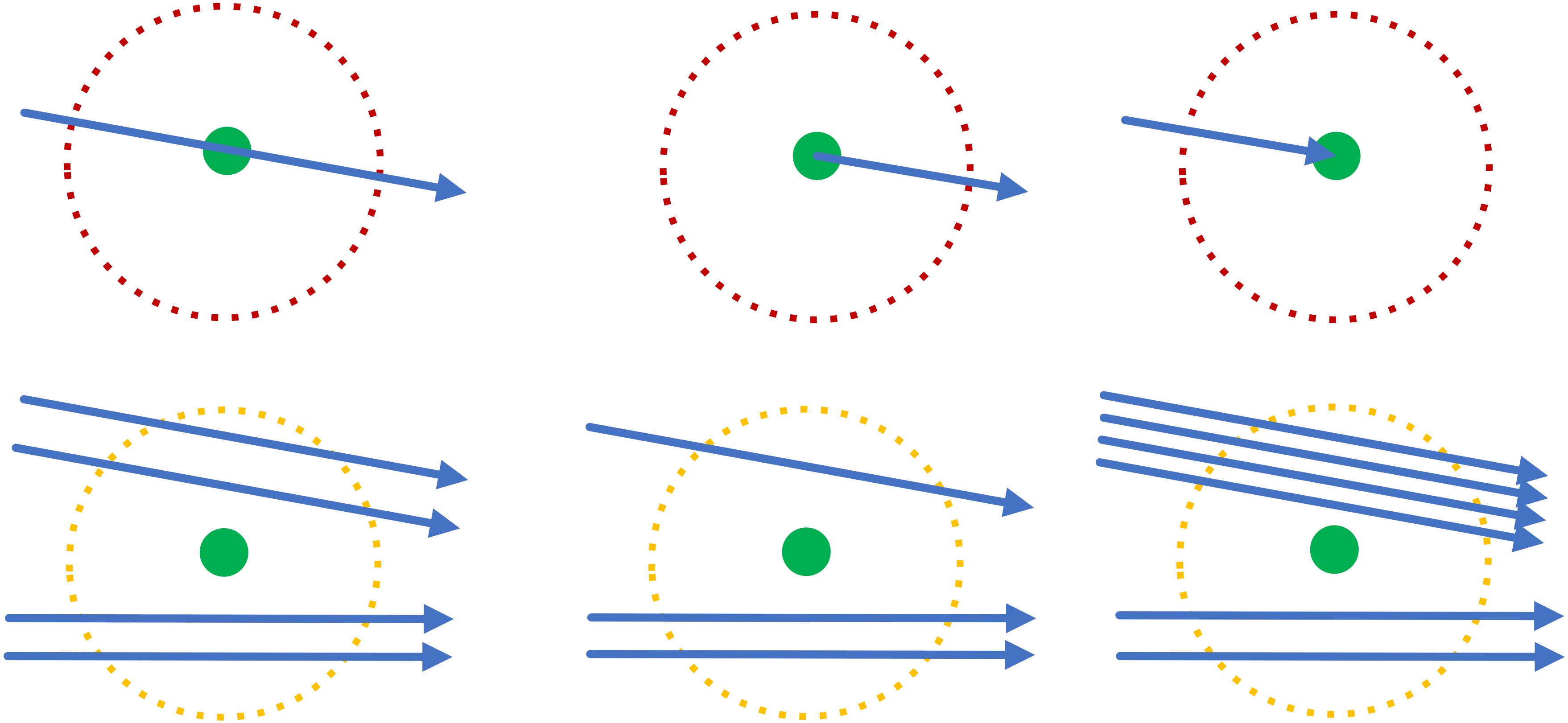
- **拉普拉斯算符是拉普拉斯方程，泊松方程和波动方程的基础；**

1.2 场分析

矢量场的矢量线

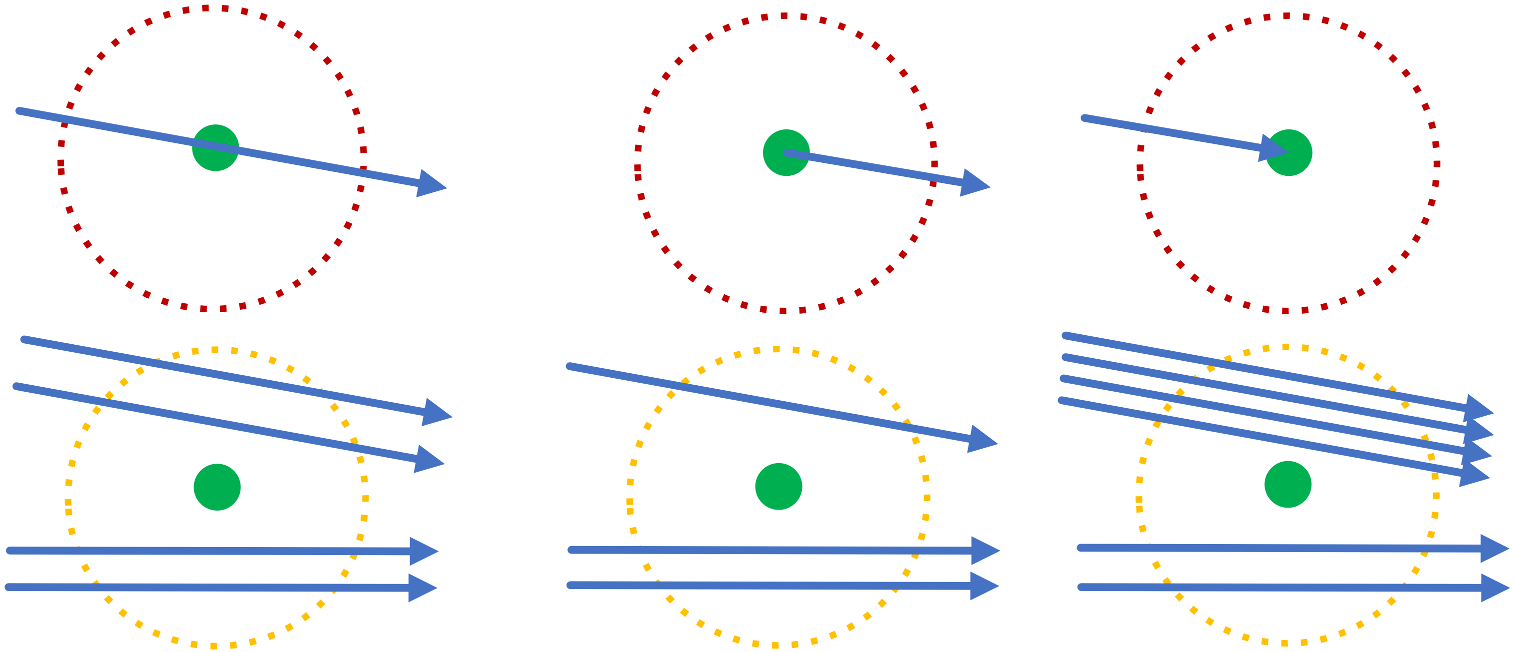


- 矢量场的几何表示；
- 矢量线与场点的关系
- 矢量线是否穿过场点？
- 穿过-纵向：如何穿过？
- 绕过-横向：如何绕过？



1.2　场分析

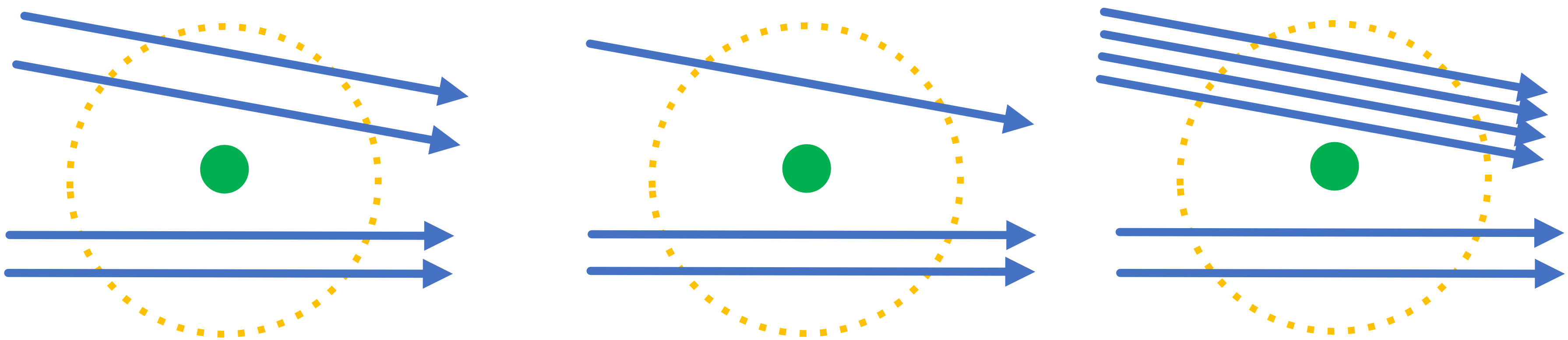
矢量场的矢量线



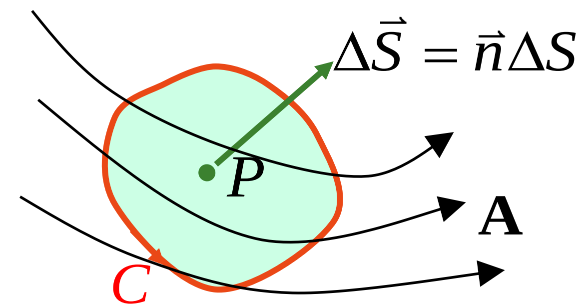
- 矢量线与场点：穿过与绕过（二分法）；
- 穿过：实际上是对球皮的拉扯，是该点平动、源宿的趋势；
- 如何穿过？穿过该点，起始于该点，终止于该点
- 绕过：线与线外一点确定一个面；哪个面内呢？
- 绕过：两边相同？这边比那边少？这边比那边多？是该点转动的趋势
- 绕过的描述，比穿过的描述，要复杂！---选择最大的那个！

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.1 矢量的环流



$$\Gamma = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C A\cos\theta \, dl$$



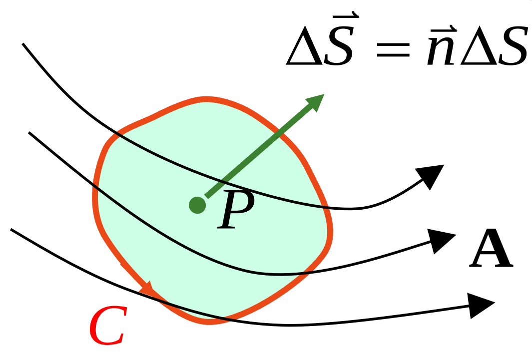
环流的计算

- 矢量的环流同样是描述矢量场的性质的重要的量；
- 定义：在矢量场中，任意取一闭合曲线，矢量沿该有向曲线积分称为环流。
- 环流的大小与环面选取和环面的方向有关；环流或环量是标量；

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.2 矢量场的旋度 (curl)

$$\boxed{\Gamma = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint_C A\cos\theta dl}$$

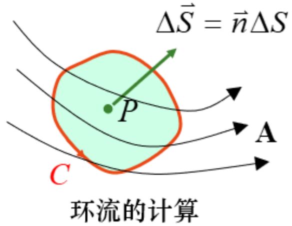


环流的计算

- 若在闭合有向曲线 l 上，矢量场 A 的方向与线元 dl 的方向保持一致，则环流 $\Gamma > 0$；若处处相反，则 $\Gamma < 0$；
- 可见，环流可以用来描述矢量场的旋涡特性；
- 旋涡特性是本地的运动特性；散度是进出本地的运动特性；
- 环流可以表示产生具有旋涡特性的源的强度；
- 但是，环流代表的是闭合曲线包围的区域内总的源强度，它不能显示某一点源的分布特性。为此，需要研究矢量场的旋度；

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.2 矢量场的旋度 (curl)



环流的计算

- 从分析场的要求看，需要知道每个点附近的环流的情况；
- 收小闭合路径，取极限：

$$环量面密度=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

- **围绕一个点，只有一种面包围，但可以有无数种线环绕，对应了无数个环量面密度；**
- **定义：** 矢量场中某点P处的**最大环流密度**，其方向定义为该环曲面的法线方向，该矢量称为该点矢量场的旋度；

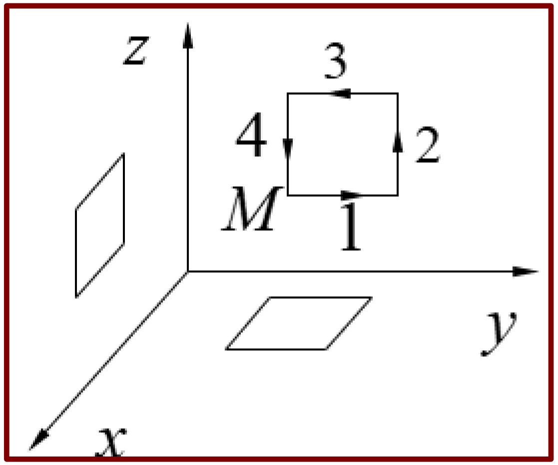
$$\boxed{rot\vec{A}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}[\vec{a}_n\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}\,]_{\max}}$$

- 旋度与小环的形状无关，只与矢量场和场点有关；
- 环量面密度是旋度的在各自方向上的投影；

梯度---方向导数；
散度---标量
旋度---环量密度；

1.2.4矢量场的旋度

$$rot\vec{A}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}[\vec{a}_n\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}\,]_{\max}$$



在直角坐标系下，

$$\vec{A}=A_x\vec{a}_x+A_y\vec{a}_y+A_z\vec{a}_z$$

$$\begin{cases} rot\vec{A}\text{在}\vec{a}_x\text{方向上投影}\Rightarrow \oint_{1234}\vec{A}\cdot d\vec{l}=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y\Delta z-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\Delta y\Delta z\Rightarrow \lim\limits_{\Delta S_x\to 0}\dfrac{\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S_x}=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ rot\vec{A}\text{在}\vec{a}_y\text{方向上投影}\Rightarrow \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}=\dfrac{\partial A_x}{\partial z}\Delta x\Delta z-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\Delta x\Delta z\Rightarrow \lim\limits_{\Delta S_y\to 0}\dfrac{\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S_y}=\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ rot\vec{A}\text{在}\vec{a}_z\text{方向上投影}\Rightarrow \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}\Delta y\Delta x-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\Delta x\Rightarrow \lim\limits_{\Delta S_z\to 0}\dfrac{\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S_z}=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$$

$$rot\vec{A}=\vec{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

- 旋度描述了场分量在垂直各自坐标变量方向上的变化率；

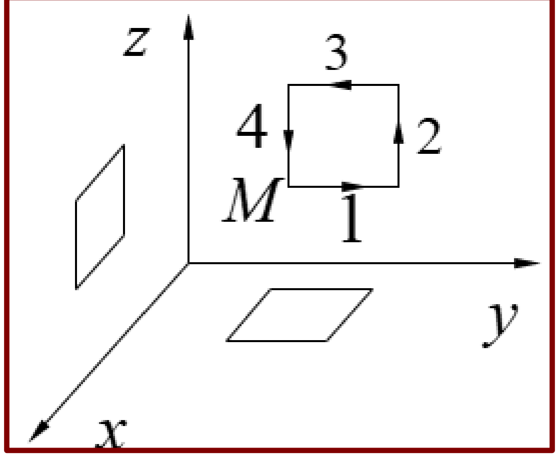
1.2.4矢量场的旋度

$$\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

$$rot\vec{A} = \vec{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\vec{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A}$$



1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.3 常用坐标系中，旋度的计算公式

在广义正交坐标系中旋度的计算公式:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{a}_{u_1} & h_2 \vec{a}_{u_2} & h_3 \vec{a}_{u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_{u_1} & h_2 F_{u_2} & h_3 F_{u_3} \end{vmatrix}$$

对于柱坐标、球坐标，已知其拉梅系数，代入公式即可写出旋度的计算公式。

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.4 斯托克斯公式 Stokes Theorem

$$\boxed{\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

物理含义：

一个矢量场旋度的面积分等于该矢量沿此曲面周界的曲线积分。

对于有限大面积S，可将其按如图进行分割，对每一小面积元有:

$$\oint_{c_1} \vec{A}\cdot d\vec{l} = (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}_1$$

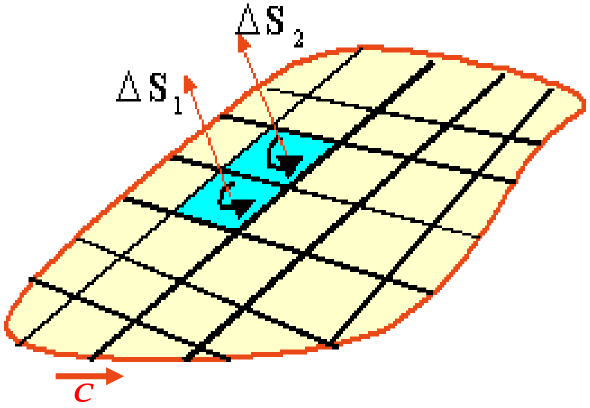
$$\oint_{c_2} \vec{A}\cdot d\vec{l} = (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}_2$$

$$\vdots$$

叠加：+ 内部抵消

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

$$rot\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}[\vec{a}_n \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}\,]_{\max}$$



- 闭合环路上环量为零—保守场；
- 斯托克斯公式给出了封闭区域中边沿与内部区域的场关系；
- 斯托克斯公式实现了积分区域的转换，实现了被积函数的转换；

1.2.4矢量场的散度和旋度

$$\vec{A}=A_x\vec{a}_x+A_y\vec{a}_y+A_z\vec{a}_z \Rightarrow \begin{cases} div\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\dfrac{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta\tau} \\ rot\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{1}{\Delta S}[\vec{a}_n\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}\,]_{\max} \end{cases}$$

$$\int_\tau \nabla\cdot\vec{A}d\tau=\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 散度和旋度都是针对矢量场定义的；
- 散度反映了矢量场在场点处的纵向变化规律，是标量；
- 旋度反映了矢量场在场点处的横向变化规律，是矢量；
- 高斯公式和斯托克斯公式都给出了封闭区域中边界与内部区域的场关系；
- 高斯公式和斯托克斯公式都实现了积分区域的转换，实现了被积函数的转换；

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.5 常用的矢量恒等式

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

$$\boxed{\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}}$$

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi \qquad \nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\times(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.5 常用的矢量恒等式-格林恒等式

$$\boxed{\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi)dV = \oint_S (\varphi\nabla\psi)\cdot d\vec{S} = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS}$$

其中**φ**，**ψ**是在**V**中具有连续二阶导数的任意标量函数。
格林第二恒等式的数学表达式为

$$\boxed{\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)dV = \oint_S (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\cdot d\vec{S} = \oint_S (\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n})\ dS}$$

二、其它积分定理—孙国安书P337

1) $\int_V \nabla\times\vec{B}dV = \oint_S (\vec{n}\times\vec{B})dS = \oint_S d\vec{S}\times\vec{B}$

证明：令高斯散度定理中$\vec{A}=\vec{B}\times\vec{C}$

这里$\vec{C}$是常矢量，代入高斯散度定理 $\int_V \nabla\cdot\vec{A}dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS$

$$\int_V \nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{C})dV = \oint_S (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{n}dS = \oint_S (\vec{B}\times\vec{C})\cdot d\vec{S}$$

1.2.4矢量场的旋度

1.2.4.5 常用的矢量恒等式

$$\int_V \nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{C})dV = \oint_S (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{n}dS = \oint_S (\vec{B}\times\vec{C})\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

$$(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{n} = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{n}) = \vec{C}\cdot(\vec{n}\times\vec{B})$$

$$(\vec{B}\times\vec{C})\cdot d\vec{S} = \vec{C}\cdot(d\vec{S}\times\vec{B})$$

$$\int_V \vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{B})dV = \oint_S \vec{C}\cdot(\vec{n}\times\vec{B})dS = \oint_S \vec{C}\cdot(d\vec{S}\times\vec{B})$$

将常矢量 $\vec{C}$ 提出积分号外，得

$$\vec{C}\cdot\int_V (\nabla\times\vec{B})dV = \vec{C}\cdot\oint_S (\vec{n}\times\vec{B})dS = \vec{C}\cdot\oint_S (d\vec{S}\times\vec{B})$$

因为$\vec{C}$是非零常矢量，得

$$\int_V \nabla\times\vec{B}dV = \oint_S (\vec{n}\times\vec{B})dS = \oint_S d\vec{S}\times\vec{B}$$

1.2.5 两个重要的零恒等式

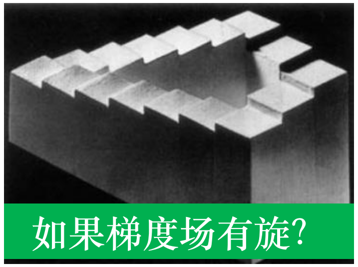
$$\text{物理场}\Rightarrow\begin{cases}\text{标量场}\varphi\Rightarrow\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\vec{a}_n\\ \text{矢量场}\vec{A}\Rightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{A}=div\vec{A}=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\dfrac{\oint_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\Delta\tau}\\ \nabla\times\vec{A}=rot\vec{A}=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{1}{\Delta S}[\vec{a}_n\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l}\,]_{\max}\end{cases}\end{cases}$$

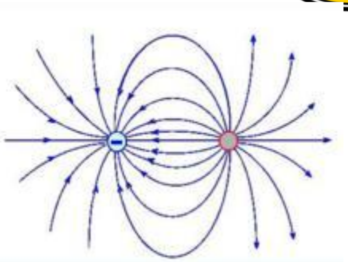
- 三度：梯度、散度和旋度；
- 三度都是微分运算，它们表示场在某点附近的变化特性，场中各点的梯度、散度或旋度可能不同；
- 三度是关于**空间变量**的运算，与**时间变量**不直接相关；
- 三度描述的是场的点特性或称为微分特性。函数的连续性是可微的必要条件；
- 在边界处场量通常是不连续的，也就不存在微分运算和三度，只能积分运算；
- 学习了矢量算符，不要忘记矢量运算的标量分解，**标量分解是根本！**

1.2.5两个重要的零恒等式

(1) $\nabla\times(\nabla\varphi)\equiv 0$

$$\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}=\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l}$$
$$\int_S(\nabla\times(\nabla\varphi))\cdot d\vec{S}=\oint_C\nabla\varphi\cdot d\vec{l}\equiv 0$$





- 其梯不旋；
- 任何标量场梯度的旋度恒为零，说明梯度场的环路积分为零；
- 对于一个矢量，如果知道它的旋度处处为零，称为无旋场，并且我们可以把它表示为一个标量函数的梯度；

$$\text{如果}\quad \nabla\times\vec{A}=0,\ \text{那么可令}\ \vec{A}=\nabla\varphi$$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\equiv 0$

$$\int_\tau\nabla\cdot\vec{A}d\tau=\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}$$
$$\int_\tau\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})d\tau=\oint_S\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}\equiv 0$$

- 其旋不散；
- 任何矢量场的旋度的散度恒为零，说明旋度场的矢量线是闭合的；
- 对于一个矢量，如果知道它的散度处处为零，称为无散场，并且我们可以把它表示为一个矢量函数的旋度；

$$\text{如果}\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \text{那么可令}\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

1.2.5两个重要的零恒等式

$$\boxed{(1)\ \nabla\times(\nabla\varphi)=\nabla\times F_s\equiv 0}$$

- 对于一个矢量，如果知道它的旋度处处为零，称为无旋场，并且我们可以把它表示为一个标量函数的梯度；

如果 $\nabla\times\vec{A}=0$, 那么可令 $\vec{A}=\nabla\varphi$

$$\boxed{(2)\ \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=\nabla\cdot\vec{F}_i\equiv 0}$$

- 对于一个矢量，如果知道它的散度处处为零，称为无散场，并且我们可以把它表示为一个矢量函数的旋度；

如果 $\nabla\cdot\vec{B}=0$, 那么可令 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

任意一个矢量，是否可以是无旋场和无散场的叠加呢?

1.2.6亥姆霍兹定理

运算定义千万种，
意义明确很重要。

（1）**亥姆霍兹定理**：一个矢量场所具有的性质，可以由它的散度和旋度来描述。可以证明，一个矢量场由其散度和旋度唯一地确定。

谢处方书第四版P29更新（恒流电场在导体内无源无旋，边界上有电荷）

（2）亥姆霍兹定理表明，一般矢量场可以表示为一个没有旋度，只有散度的**无旋场**$\vec{F}_i$ 和一个没有散度只有旋度的**旋转场**$\vec{F}_S$之和。

$$\boxed{\vec{F}=\vec{F}_i+\vec{F}_s \qquad \nabla\times\vec{F}_i=0 \qquad \nabla\cdot\vec{F}_s=0}$$

其中，无旋分量可由 $\vec{F}$ 的散度完全确定

$$\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}_i=\rho \qquad \text{发散源强度：}\rho(x,y,z)$$

旋转分量可由 $\vec{F}$ 的旋度完全确定

$$\nabla\times\vec{F}=\nabla\times\vec{F}_s=\vec{J} \qquad \text{旋涡源强度：}\vec{J}(x,y,z)$$

1.2.6亥姆霍兹定理

（3）亥姆霍兹定理表明，研究一个矢量场（定理适用范围）的性质时，**需要从矢量的散度和矢量的旋度两方面去研究**，得到像上两式那样的方程，称为场的基本方程；

（4）矢量场也可以从矢量沿一个闭合面的通量和矢量沿一个闭合回路的环流两方面去研究，得到积分形式的方程，称为基本方程的积分形式。

已知
- 矢量 $\vec{A}$ 的通量源密度
- 矢量 $\vec{A}$ 的旋度源密度
- 场域边界条件

$\xrightarrow[\text{在电磁场中}]{}$

- 电荷密度ρ
- 电流密度 $\vec{J}$　(矢量 $\vec{A}$ 唯一确定)
- 场域边界条件

亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“**套路**”。

人世间百媚千红，我独爱，爱你那一种--屠洪刚
积分形式千万种，电磁场，三度最成功--

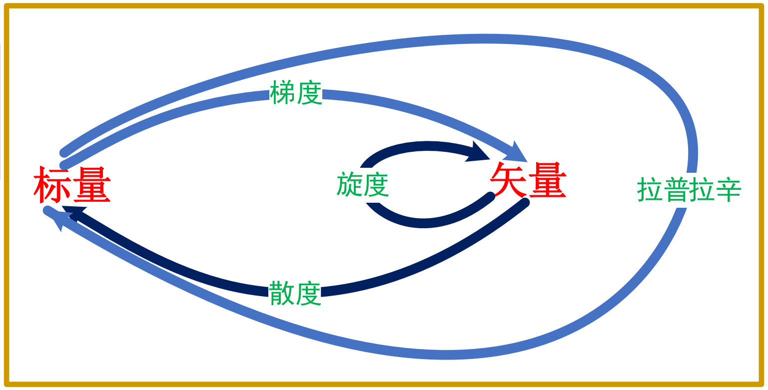
1.2.6亥姆霍兹定理

- 历史上曾经定义过多少种运算…
- 大浪淘沙，有多少已经被遗忘在历史长河中…

- 我希望我开辟的道路直通真理，这样的话经过多少年之后，我开辟的道路越来越宽，而不是早已被遗忘；

- 场量可以定义很多种运算，三度最成功；
- 成功的秘诀：数学严谨，物理意义清晰，一步一步直通真理；

人世间百媚千红，我独爱，爱你那一种--屠洪刚
积分形式千万种，电磁场，三度最成功--



电磁场的数学物理基础

- 1.1　矢量分析
  - 1.1.1　　标量和矢量
  - 1.1.2　　矢量代数运算
  - 1.1.3　　矢量微分运算
  - 1.1.4　　矢量积分运算
- 1.2　场分析
  - 1.2.1　　标量场和矢量场
  - 1.2.2　　标量场的几何表示与梯度
  - 1.2.3　　矢量场的散度
  - 1.2.4　　矢量场的旋度
  - 1.2.5　　两个重要的零恒等式
  - 1.2.6　　亥姆霍兹定理

电磁场随空间和时间的变化规律

参考教材P300-P338
参考谢树艺《矢量分析与场论》

数学描述，运算过程与物理现象的统一

课后范例

例 1　已知 $\vec{R}(x,y,z)=\vec{a}_x x+\vec{a}_y y+\vec{a}_z z$，$R=\left|\vec{R}\right|$，求 $\nabla\cdot\vec{R}$　和 $\nabla\times\vec{R}$　。

解：　在直角坐标系中：

$$\nabla\cdot\vec{R}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

$$\nabla\times\vec{R}=\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

在球坐标系中：

$$\vec{R}(x,y,z)=\vec{a}_x x+\vec{a}_y y+\vec{a}_z z=\vec{a}_r r,\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\nabla\cdot\vec{R}=\nabla\cdot\left(\vec{a}_r r\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2R_r)}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2r)}{\partial r}=3$$

$$\nabla\times\vec{R}=\nabla\times\left(\vec{a}_r r\right)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r\sin\theta\vec{a}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ R_r & rR_\theta & r\sin\theta R_\varphi\end{vmatrix}=0$$

课后范例

例 2 已知 $\vec{R}=\vec{a}_x(x-x')+\vec{a}_y(y-y')+\vec{a}_z(z-z')$，$R=|\vec{R}|$，

(1) 求 $\nabla|\vec{R}|$ ；(2) 若 $\vec{D}=\dfrac{\vec{R}}{R^3}$，在$R\neq 0$处求旋度和散度。

$$\boxed{\nabla R=\frac{\vec{R}}{R}}$$

解：(1) $R=|\vec{R}|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

$$\nabla|\vec{R}|=\nabla R=\vec{a}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\left[\vec{a}_x(x-x')+\vec{a}_y(y-y')+\vec{a}_z(z-z')\right]}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{\vec{R}}{R}$$

(2) $\vec{D}=\dfrac{\vec{R}}{R^3}$ ； $\nabla\times(\phi\vec{A})=\nabla\phi\times\vec{A}+\phi\nabla\times\vec{A}$ ； $\nabla\cdot(\phi\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\vec{A}$ ；

$$\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)=\frac{-3\vec{R}}{R^5},\quad \nabla\times\vec{R}=0,\quad \nabla\cdot\vec{R}=3$$

$$\boxed{\nabla f(R)=\frac{df(R)}{dR}\frac{\vec{R}}{R}}$$

$$\nabla\times\vec{D}=\nabla\times\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)=\frac{1}{R^3}\nabla\times\vec{R}+\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)\times\vec{R}\Rightarrow\nabla\times\vec{D}=\frac{-3\vec{R}}{R^5}\times\vec{R}=0\qquad(R\neq 0)$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)=\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R}+\vec{R}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)\Rightarrow\nabla\cdot\vec{D}=\frac{3}{R^3}+\vec{R}\cdot\frac{-3\vec{R}}{R^5}=0\qquad(R\neq 0)$$

可见无散度源，无旋度源，但在 $R\to 0$，$\vec{D}\to\infty$ ，表明在R=0处有一个点源

课后范例

例 3 已知矢量函数 $\vec{F}=\vec{a}_x(3y-c_1z)+\vec{a}_y(c_2x-2z)-\vec{a}_z(c_3y+z)$

(1) 如果 $\vec{F}$ 是无旋的,确定常数 $c_1,\ c_2,\ c_3$ ；

(2) 确定负梯度等于 $\vec{F}$ 的标量函数 φ 。

解：(1)对于无旋的 $\vec{F}$ ，$\nabla\times\vec{F}=0$,即

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3y-c_1z & c_2x-2z & -(c_3y+z)\end{vmatrix}=\vec{a}_x(-c_3+2)-\vec{a}_yc_1+\vec{a}_z(c_2-3)=0$$

$$\Rightarrow c_1=0,\ c_2=3,\ c_3=2$$

(2) 由 $\vec{F}=-\nabla\varphi=-\vec{a}_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\vec{a}_y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\vec{a}_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\vec{a}_x3y+\vec{a}_y(3x-2z)-\vec{a}_z(2y+z)$

$$\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-3y,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-(3x-2z),\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=2y+z$$

$$\Rightarrow\varphi=-3xy+2yz+\frac{z^2}{2}+C$$

课后范例

例 4 如果在某场域中，矢量场 $\vec{A}$ 的散度和旋度都等于0，即有

$\nabla\times\vec{A}=0,\ \nabla\cdot\vec{A}=0$ 称为调和场。

由于 $\vec{A}$ 是无旋场，所以在该区域中可以引入一个标量函数φ，使得 $\vec{A}=-\nabla\varphi$。

同时，由于 $\vec{A}$ 又是无散场，所以，$\nabla\cdot\vec{A}=-\nabla\cdot\nabla\varphi=0$

在直角坐标系中，有:

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

作业

0.4 求标量场 $u = xy + yz + zx$ 在点 M(1,2,3) 处沿矢径的方向导数。

0.5 已知矢量 $\vec{r} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y y + \vec{a}_z z$，$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，$\vec{E}_0$，$\vec{k}$ 为常矢量。求:

证明: (1) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$，$\nabla f(r)$； (2) $\nabla \cdot \vec{r}$，$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$，$\nabla \cdot \left(r\vec{k}\right)$

(3) $\nabla\left(\vec{k} \cdot \vec{r}\right) = \vec{k}$，$\nabla \cdot \left(\vec{E}_0 e^{\vec{k} \cdot \vec{r}}\right) = \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{\vec{k} \cdot \vec{r}}$

(4) $\nabla \times \vec{r}$，$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$，$\nabla \times \left[f(r)\vec{r}\right]$

(5) $\nabla \times \left(\frac{\vec{k}}{r}\right) = \frac{1}{r^3}\vec{k} \times \vec{r}$，$\nabla \times \left(\vec{E}_0 e^{\vec{k} \cdot \vec{r}}\right) = \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{\vec{k} \cdot \vec{r}}$

数学基础-小测验

标量场方向导数的最小值是多少？为何？

半径为R的球面s上的位置矢量为$\vec{r}=\vec{a}_x x+\vec{a}_y y+\vec{a}_z z$，求$\oint\!\!\oint_{s} \vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

提示：高斯定理

电磁场与电磁波

第一章 场量分析

李顺礼
lishunli621@seu.edu.cn