



电磁场与电磁波

第三章 静态电磁场的分析

李顺礼

lishunli621@seu.edu.cn



内容导言

- Maxwell方程组表明了电场磁场之间相互依存紧密作用的统一关系。但在某些情况下，电场和磁场能够单独表现出来。
- 从Maxwell方程也可以看出，当场量不随时间变化时，电场矢量满足的方程和磁场矢量满足的方程是相互独立的，电场和磁场是各自独立存在的，可以分别讨论。
- 静态电磁场是电磁场的一种特殊的形式。当场源（电荷、电流）不随时间变化时，所激发的电场、磁场也不随时间变化并且相互独立存在，称为**静态电磁场**。
- 本质区别：电场和磁场分离，时间和空间分离；
- 静态场研究场随空间的变化规律；
- 静态场本身是重要的，也为动态场奠定基础；

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$



内容导言

- 静止的电荷在介质中产生的**静电场**； $\rho(\vec{r}, t) \xrightarrow{\text{静态场}} \rho(\vec{r}) : \left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right\} \text{无旋场}$
- 在导电媒质中恒定运动电荷形成的**恒定电场**，**电荷运动场恒定**； $\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right\}$
- 恒定电流在媒质中产生的**静磁场**； $\vec{J}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\text{静态场}} \vec{J}(\vec{r}) : \left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \text{无散场}$
- **静电场，恒流电场和静磁场属于静态电磁场**；

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \xrightarrow{\text{静态场}} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right. \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \xrightarrow{\text{电磁分离}} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{介质中} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right. + \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \text{导体中} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right. + \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{array} \right. \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \text{媒质中} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{array} \right. + \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right.
 \end{array}$$



内容导言

- 静电场，恒流电场和静磁场属于静态电磁场；
- 亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“套路”；
- 此后，在各种情况下求解场方程是主要内容；
- 求解场方程是边值问题；

$$\text{静态电磁场} \left\{ \begin{array}{l} \text{静电场} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right. \\ \text{恒流电场} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right. \\ \text{静磁场} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



静态电磁场的分析

■ 3.1 静电场

- 3.1.1 静电场的基本方程
- 3.1.2 电位
- 3.1.3 电位方程
- 3.1.4 静电场的边界条件
- 3.1.5 导体系统的电容
- 3.1.6 电场的能量

(1) 基本方程：电场强度，电位移矢量，电势满足的方程；
(2) 边界条件：求解方程所必需；
(3) 能量关系：物质能量信息

■ 3.2 恒定电流电场

- 3.2.1 导电回路中电源内的局外电场
- 3.2.2 恒定电场的基本方程
- 3.2.3 恒定电场的边界条件
- 3.2.4 恒定电场与静电场的比拟



静态电磁场的分析

- 3.3 恒定磁场
 - 3.3.1 恒定磁场的基本方程
 - 3.3.2 恒定磁场的位函数
 - 3.3.3 恒定磁场的边界条件
 - 3.3.4 电感
 - 3.3.5 恒定磁场的能量



3.1 静电场

亥姆霍兹定理，揭示了研究
电磁场的“套路”。

3.1.1 静电场的基本方程

积分形式

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$
$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

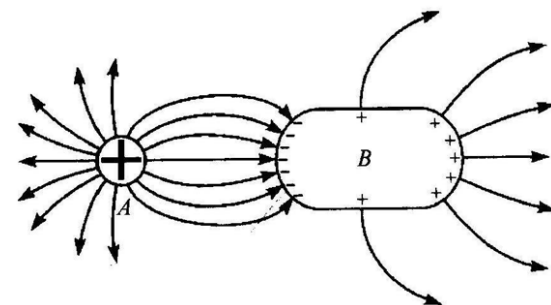
微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

本构关系

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

- 静止电荷是静电场的源；
- 静电场是有源的场，电荷是通量源；
- 静电场是无旋场，是保守场；
- 电场线从正电荷出发，终止于负电荷；
- 静电场关心存在的状态，不关心形成的过程；
- 静电场存在于介质中，导体中不存在静电场；
- 静电场中，普通导体与理想导体几乎没有差异；



面临的问题：实际中源分布不易知道；直接求解上述方程并不容易！



3.1 静电场

亥姆霍兹定理，揭示了研究
电磁场的“**套路**”。

3.1.1 静电场的基本方程

积分形式

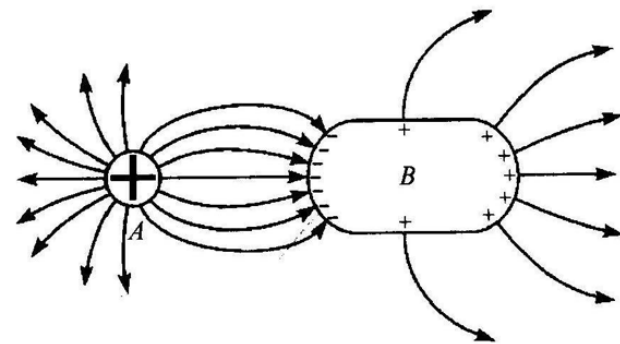
微分形式

本构关系

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$
$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$



- 场分布不仅与电荷有关，还与空间中的导体和介质有关；
- 电荷分布不易知道，尤其是导体上的电荷分布；
- 电荷分布和电场同时求解—边值型问题；
- 只有简单情况（点电荷，线电荷等）的时候—分布型问题；
- 本章中只涉及分布型问题，第四章涉及边值型问题的求解；

面临的问题：实际中源分布不易知道；直接求解上述方程并不容易！

3.1 静电场

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{a}_r$$

$$\varphi_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

矢量直接叠加

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon R}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

标量叠加

求解静电场的两个路径！

- 这两个路径：**源分布已知**；边界简单（无限大或对称有界）；
- 实际上是求解的分布型问题，边值型问题求解在第四章中阐述；
- 对称的情况，可以给出高斯面，通常根据高斯定理先求场分布；
- 限制：需要对称源分布和对称边界；需要进行**矢量积分**；
- 能否简化呢？-----标量计算？进一步的不需要知道源分布？



3.1 静电场

3.1.2 电位

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

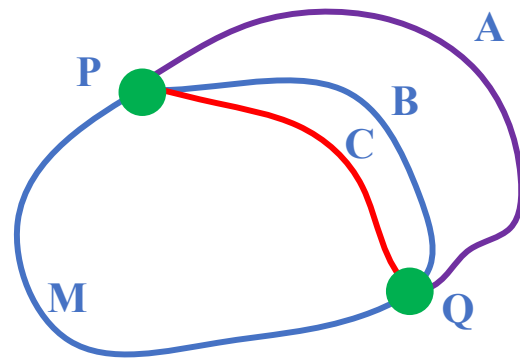
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

- 已经知道源分布；
- 化难为繁；
- 辅助函数；

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \nabla u = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{辅助函数 } \varphi} \vec{E} = -\nabla \varphi$$

- 辅助函数称为标量电位（电势），静电场的电场强度矢量等于负的电位梯度；
- 如果能够求出标量电位，则电场强度可求；
- 电位函数是标量，计算应该简单——数学严谨；
- 电位函数有没有物理含义呢？
- 电场强度是电位的微分，电位是电场强度的积分；

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{静电场}} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



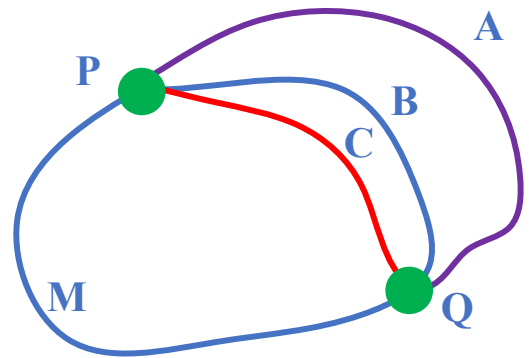


3.1 静电场

3.1.2 电位

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \nabla u = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{辅助函数 } \varphi} \vec{E} = -\nabla \varphi$$

- 静电场的电场强度矢量等于负的电位梯度；
- 电位函数有没有物理含义呢？
- 电场强度是电位的微分，电位是电场强度的积分；
- 电场力的路径积分代表电场力的功；
- 电场力的功只与**在场中的初末位置**有关，与路径无关；
- 那么，赋予初末位置一个物理量来表示这个特性；



$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{静电场}} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \xrightarrow{\text{电场力的功}} W = \oint_l q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{PAQMP} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{PAQ} q\vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{QMP} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{PBQ} q\vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{QMP} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{路径无关}} \int_{PAQ} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{PBQ} q\vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{初末位置}}{=} \int_P^Q q\vec{E} \cdot d\vec{l} = W(Q) - W(P)$$



3.1 静电场

3.1.2 电位

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \nabla u = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{辅助函数 } \varphi} \vec{E} = -\nabla \varphi$$

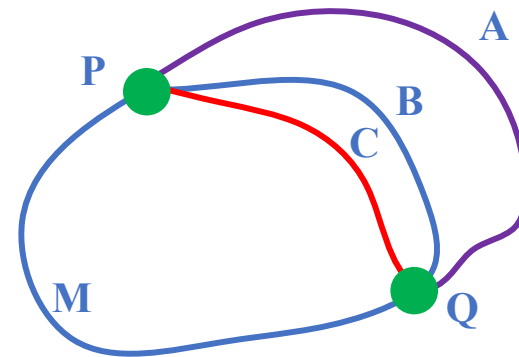
- 电场力的路径积分代表电场力的功；
- 电场力的功只与**在场中的初末位置**有关，与路径无关；
- 那么，赋予初末位置一个物理量来表示这个特性；
- 把单位电荷一点移动到另一点所做的功，这个数值与路径无关，表明了初末位置之间的一个场关系，称这个数值为两点之间的电位差，也叫电势差；
- 时变场中，电场旋度不再为零，电压与积分路径有关，不具有唯一性，但我们仍然使用电压，只是需要指定积分路径；

$$\int_P^Q q \vec{E} \cdot d\vec{l} = W(Q) - W(P)$$

$$\Rightarrow \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{W(Q) - W(P)}{q} \triangleq U_{PQ}$$

$$\Rightarrow U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q (-\nabla \varphi) \cdot d\vec{l} = -\int_P^Q \frac{\partial \varphi}{\partial l} \cdot dl = -[\varphi(Q) - \varphi(P)]$$

$$\Rightarrow U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi(P) - \varphi(Q)$$



3.1 静电场

3.1.2 电位

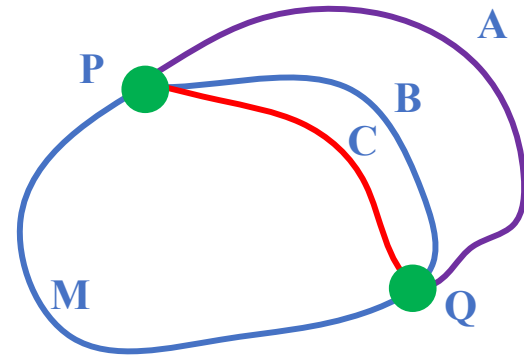
$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi(P) - \varphi(Q)$$

- 电位差反映了电场中两点空间位置差异造成的电场能量差异；
- 电位差越大，电场能量差越大；
- 电位差是差值；
- 选择一个零电位作为参考电位，根据电位差可以给出每一点的电位；
- 参考电位确定后，电场中每一点就有了一个确定的电位与之对应；
- 参考零电位的选择：不要选在源处，最好有一定的统一性（大地面），能使得表达式简洁；
- 一般选择无限远处为参考零电位，也可以选择有限远处为参考零电位；

$$U_{PQ} = \varphi_P - \varphi_Q, \text{ 若 } \varphi_Q = 0$$

$$\varphi(P) = \varphi_P = \varphi_P - 0 = \varphi_P - \varphi_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$





3.1 静电场

- 点电荷场的电位（参考点在无穷远处）：

$$\varphi_{PQ} = \int_P^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{a}_R \cdot dR \vec{a}_R = \int_{R_P}^{R_Q} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{R_Q} \right)$$

$$\xrightarrow[\text{无穷远处为零电位}]{Q\text{点在无穷远}} \varphi_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_P}$$

$$\Rightarrow \varphi_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_P} \leftrightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon R}$$

- 电荷系的电位（分布在有限空间，参考点在无穷远处）：标量叠加原理；

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon R} dV'$$

- 电荷系的电位（电荷分布至无限远）：在有限空间非源点处选取零电位点；
- 任意情况的电位都可以通过点电荷与叠加原理求出；

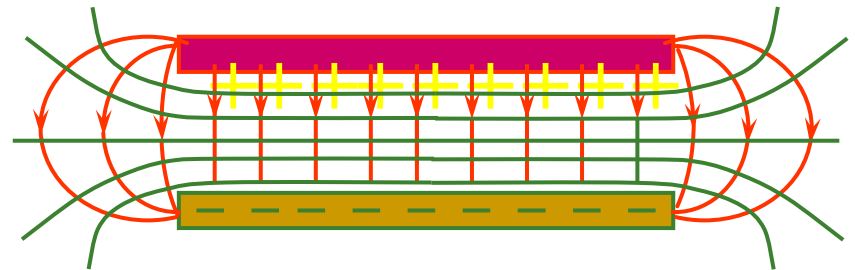
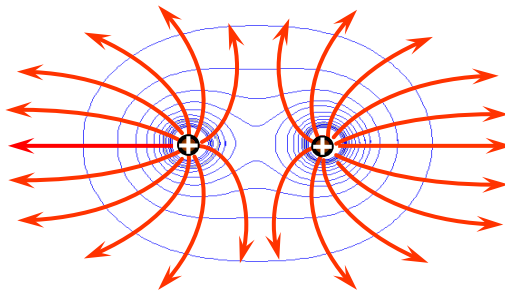
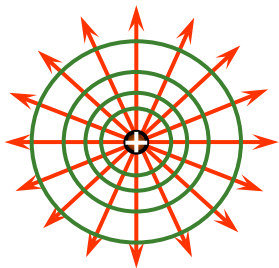
3.1 静电场

3.1.2 电位

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \nabla u = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{辅助函数 } \varphi} \vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array}$$

- 静电场的电场强度矢量等于负的电位梯度；
- 任意情况的电位都可以通过点电荷与叠加原理求出；
- 电位函数是标量，计算应该简单—数学严谨；
- 电位表示电场力对单位电荷做功—物理明确；
- 电场强度指向电位降低最快的方向，大小是单位长度电位的减少量；
- 求出电位，则电场强度可以求出；



3.1 静电场

3.1.2 电位

(1) 在等势面上移动电荷电场力不作功

$$A_{ab} = q(u_a - u_b) = 0$$

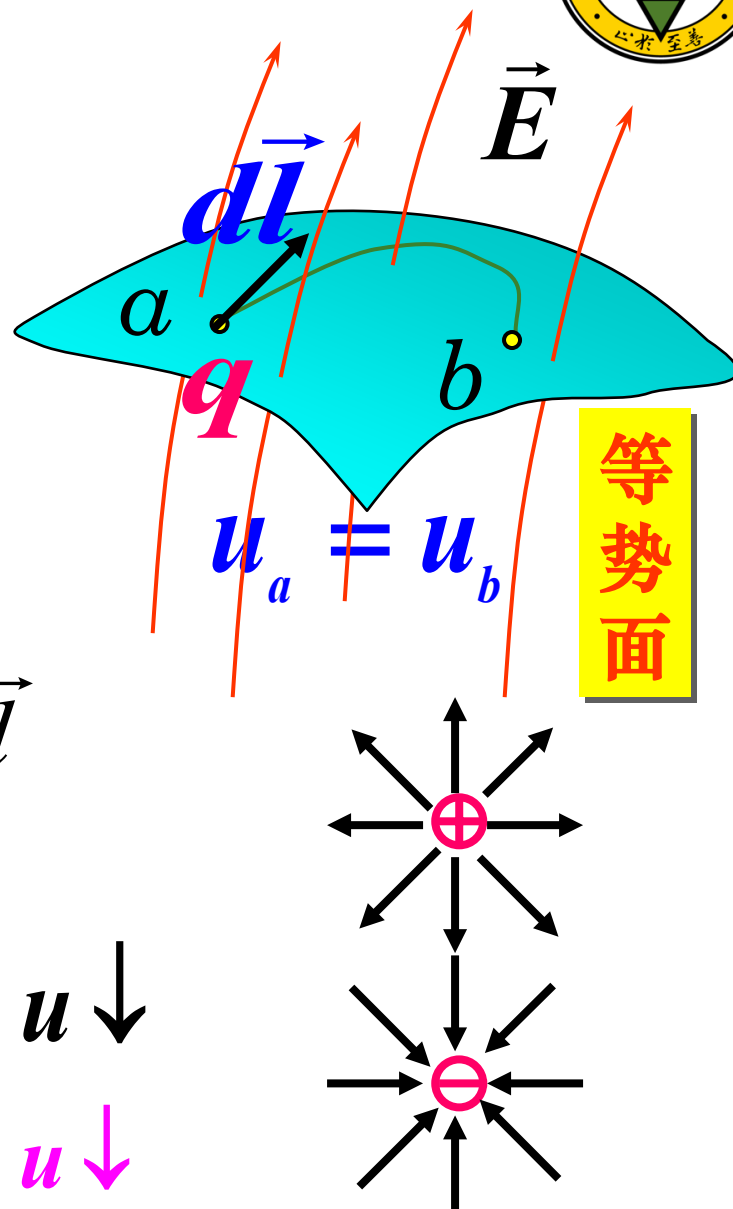
(2) 等势面与电力线正交

$$dA = q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \xrightarrow{q \neq 0}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \xrightarrow{\quad} \vec{E} \perp d\vec{l}$$

(3) 电力线的方向是电势下降的方向

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \begin{array}{ll} q > 0 & \begin{array}{l} \text{red } r \uparrow \\ u \downarrow \end{array} \\ q < 0 & \begin{array}{l} r \downarrow \\ \text{pink } u \downarrow \end{array} \end{array} \right.$$





3.1 静电场

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{a}_r$$

$$\varphi_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

矢量叠加

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon R}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

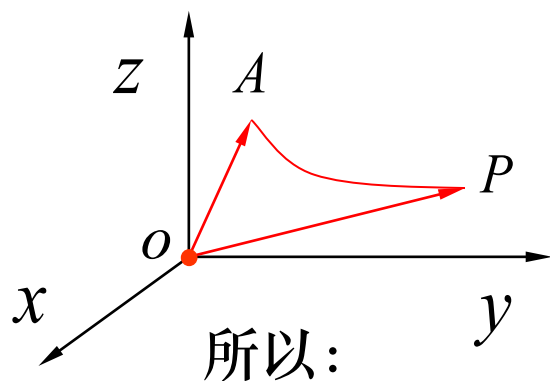
标量叠加

求解静电场的两个路径！

- 这两个路径：源分布已知；边界简单（无限大或对称有界）；
- 实际上是求解的分布型问题；
- 边值型问题求解在第四章中阐述；
- 对称的情况，可以给出高斯面，通常根据高斯定理先求场分布；
- 非对称的情况，通常根据库仑定律先求电势；

课后范例

例1：计算原点处一点电荷 q 产生的电场中 AP 之间的电位差。



解：选取球坐标系，点电荷 q 产生的电场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \vec{a}_R, \quad \varphi_{AP} = -\int_P^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = dR\vec{a}_R + R d\theta\vec{a}_\theta + R \sin\theta d\varphi\vec{a}_\varphi$$

$$\varphi_{AP} = \int_A^P \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{a}_R \cdot dR\vec{a}_R = \int_{R_A}^{R_P} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_P} \right)$$

■ 空间两点的电位差只与两点所在位置有关，而与积分路径无关。

若选P点处为零电位参考点： $\varphi_A = \varphi_A - \varphi_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_P} \right)$

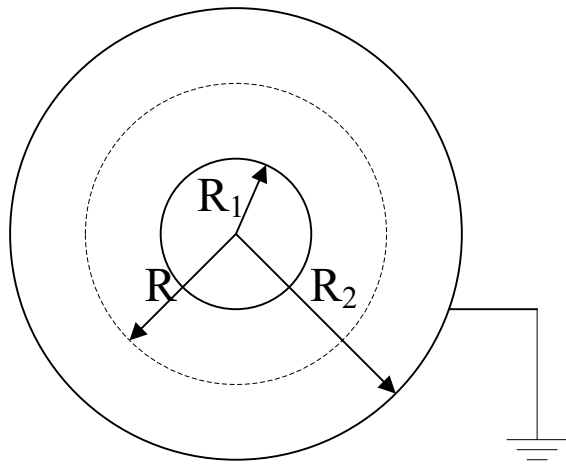
若选无穷远处为零电位参考点： $\varphi_A = \varphi_A - \varphi_\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_A}$

■ 零电位参考点只要不选在电荷所在点，则场中任意点的电位值均为确定的。

课后范例

例2：无限长同轴传输线内、外导体半径分别为 R_1 和 R_2 ，内外导体间电压为 U ，设外导体电位为0，求内外导体间电场和电位分布。

解：设内外导体电荷线密度为 ρ_l ，选取圆柱坐标系，应用高斯定律



$$\vec{E} = \vec{a}_R \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon R} \quad (R_1 \leq R \leq R_2)$$

$$\varphi_{R_1} = \int_{R_1}^{R_2} E_R dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon R} dR = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} = U$$

$$\rho_l = \frac{2\pi\epsilon U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

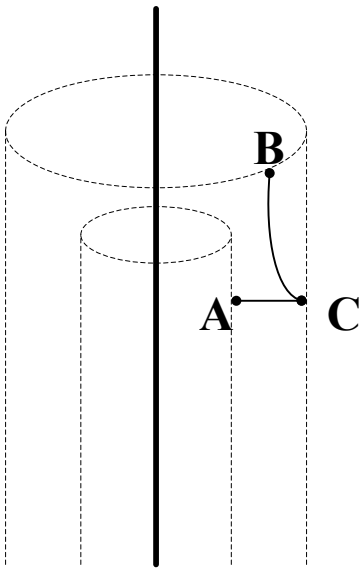
$$\varphi = \int_R^{R_2} E_R dR = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R} = \frac{U \ln \frac{R_2}{R}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

故：

$$\vec{E} = \vec{a}_R \frac{U}{R \ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad \varphi = \frac{U \ln \frac{R_2}{R}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

课后范例

例3：电荷均匀分布在一无限长直导线上，电荷线密度为 ρ_l ，求空间各点的电位。 解：选取圆柱坐标系，应用高斯定律



$$\vec{E} = \vec{a}_R \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon R}$$

$$\varphi_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varphi_{AB} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon R} dR = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

选与线电荷距离 R_0 处为零电位点，则任一点电位为：

$$\varphi_A = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_0}{R_A}$$

课后范例

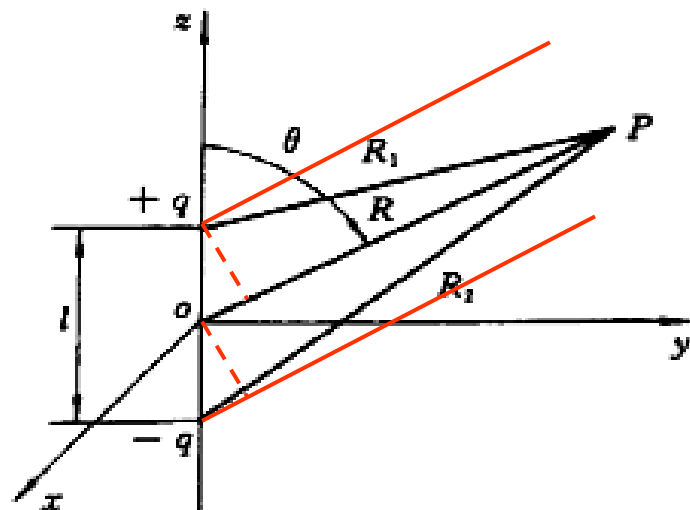
例4：有一对等量异号相距很近的电荷构成电偶极子，如图，求P点的电位和电场。

解：取球坐标系，P点的电位

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

因为： $l \ll R$ $R_1 \approx R - \frac{l}{2} \cos \theta$

则： $R_2 \approx R + \frac{l}{2} \cos \theta$



$$R_2 - R_1 \approx l \cos \theta$$

电场强度：

$$R_2 R_1 \approx R^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta \approx R^2 \quad \vec{E} = -\nabla \varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \vec{a}_R + \frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{\partial \varphi}{R \sin \theta \partial \alpha} \vec{a}_\alpha \right)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l \cos \theta}{R^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E} = \frac{ql \cos \theta}{2\pi\epsilon R^3} \vec{a}_R + \frac{ql \sin \theta}{4\pi\epsilon R^3} \vec{a}_\theta$$



3.1 静电场

3.1.3 电位方程

这两个路径要求：

- (1) 源分布已知；
- (2) 边界简单（无限大或对称有界）

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon \vec{E} = -\epsilon \nabla \cdot \nabla \varphi = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\xrightarrow{\text{无源区}} \nabla^2 \varphi = 0$$

- 已经知道，先求解电位是简单的计算方法；
- 电位的泊松Poisson方程；
- 电位的拉普拉斯Laplace方程；
- 电位满足的是标量方程；
- 泛定方程+边界条件=边值型问题；



3.1 静电场

3.1.4 静电场的边界条件

1. 一般情况下静电场量的边界条件

$$\begin{aligned} n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \\ n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho_S \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ D_{1n} - D_{2n} &= \rho_S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \\ n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_S \\ n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho_S \\ n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0 \end{aligned}$$

当分界面上不存在自由电荷时

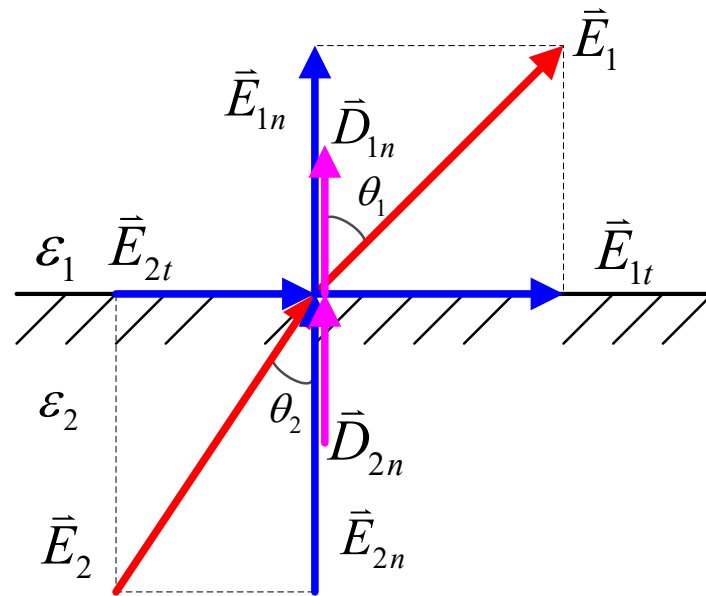
$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \\ \varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

可得

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

静电场电力线
的折射定律

静电场电力线的折射角度只和分界面两侧的媒质有的介电常数关





3.1 静电场

静电场介质-导体分界面的边界条件

- 在理想导体表面上产生静电感应现象，达到**静电平衡状态时**，自由电荷聚集在导体表面，导体内部电场为零。
- 对于静电场，实际导体（充足的自由电子，可忽略的豫驰时间）完全可以视作理想导体；
- 整个导体具有同一电位，其表面为一等位面，在导体和电介质的分界面上，电介质内电场强度矢量垂直于导体表面。
- 电介质与导体的边界条件为：

$$\left. \begin{aligned} n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \\ n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho_s \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{介质-导体分界面}} \left\{ \begin{aligned} E_t &= 0 \\ D_n &= \rho_s \end{aligned} \right.$$

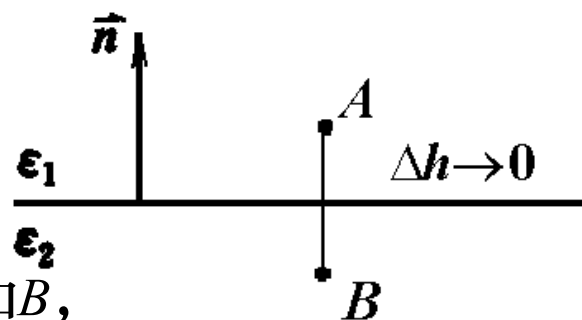
若已知铜的密度 $\rho=8.9 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ，摩尔质量 $M=0.064 \text{kg/mol}$ ，阿伏加德罗常数 $N_A=6.02 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$ ，可以认为平均每个铜原子贡献一个自由电子，试估算铜的自由电荷密度 N ，及其可能产生的最大电场强度。

备注：真空中，每毫米距离上电压大于3000伏特会产生放电现象。

3.1 静电场

3. 标量电位的边界条件

在两种媒质分界面上取两点，分别为A和B，
如图，从标量电位的物理意义出发



$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1n} \frac{\Delta h}{2} + E_{2n} \frac{\Delta h}{2}$$

$$\Delta h \rightarrow 0 \quad \varphi_A - \varphi_B = 0 \quad \text{即} \quad \boxed{\varphi_A = \varphi_B}$$

- 在两种媒质分界面处，
标量电位是连续的；
- 能量 (qU) 不能突变；

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla \varphi \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_S$$

在理想导体(媒质2)表面上: $\varphi = C$ (常数) $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\rho_S}{\epsilon}$

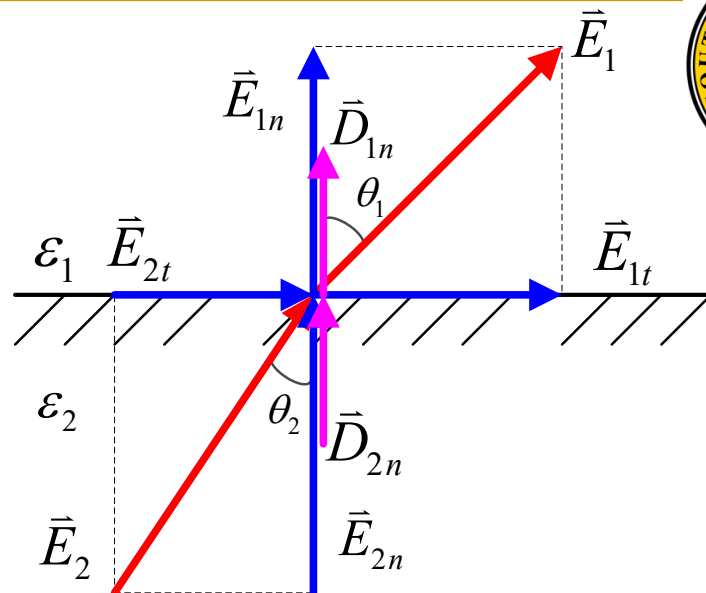
3.1 静电场

3.1.4 静电场的边界条件

1. 场量的边界条件

$$\begin{aligned} n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \\ n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho_S \end{aligned}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



静电场在导体表面的边界条件

$$\begin{aligned} E_t &= 0 \\ D_n &= \rho_S \end{aligned}$$

2. 标量电位的边界条件

- 第一类边界条件：位函数已知；
- 第二类边界条件：位函数的法向导数已知；
- 第三类边界条件：部分边界上位函数已知，部分边界上位函数的法向导数已知；

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 &\Leftrightarrow n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \rho_S \Leftrightarrow n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S \end{aligned}$$



3.1 静电场

3.1.4 静电场的边界条件

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \nabla \cdot \nabla \varphi = \rho \\ \Rightarrow \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \xrightarrow{\text{无源区}} \nabla^2 \varphi &= 0\end{aligned}$$

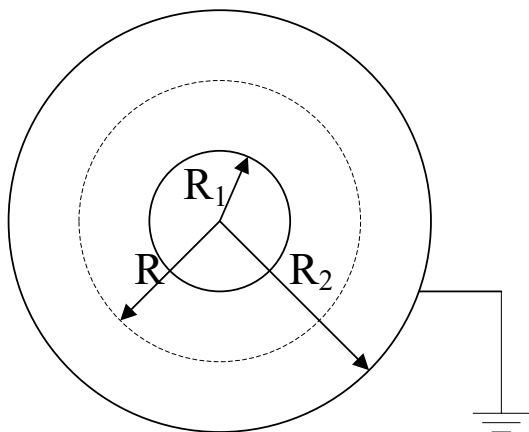
$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_2 \Leftrightarrow n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \rho_s \Leftrightarrow n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s\end{aligned}$$

- 边值问题：泛定方程+边界条件=定解；

课后范例

例5：无限长同轴传输线内、外导体半径分别为 R_1 和 R_2 ，内外导体间电压为 U ，设外导体电位为0，求内外导体间电场和电荷分布。

解：设内外导体电荷线密度为 ρ_1 和 $-\rho_1$ ，选取圆柱坐标系。



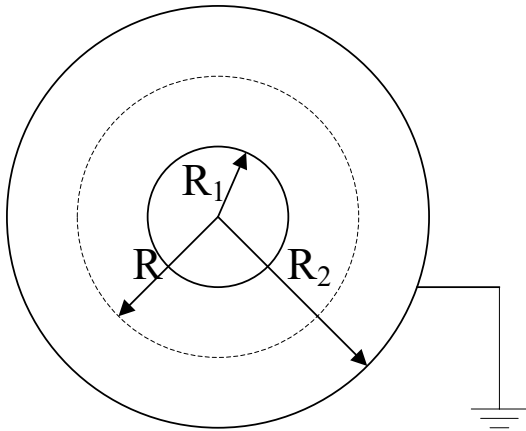
$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\varphi}{dR} \right) = 0\end{aligned}$$

通解为： $\varphi(R) = C_1 \ln R + C_2$

根据
边界条件

$$\begin{cases} \varphi(R_1) = C_1 \ln R_1 + C_2 = U \\ \varphi(R_2) = C_1 \ln R_2 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{U}{\ln(R_1/R_2)} \\ C_2 = -\frac{U \ln R_2}{\ln(R_1/R_2)} \end{cases}$$

课后范例



$$\varphi(R) = \frac{U \ln \frac{R}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}},$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\vec{a}_R \frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\vec{a}_R C_1 \frac{1}{R} = \vec{a}_R \frac{U}{R \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

在导体表面: $D_n = \rho_s$

因此

$$\rho_s(R_1) = \frac{\varepsilon U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad \rho_s(R_2) = -\frac{\varepsilon U}{R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

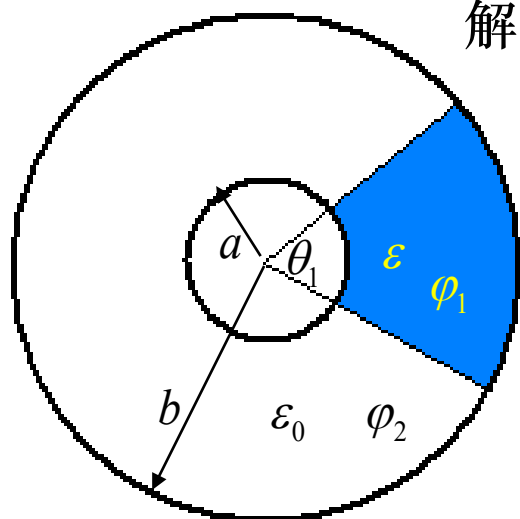
结果同前例2

$$\rho_l(R_1) = 2\pi R_1 \rho_s(R_1) = \frac{2\pi \varepsilon U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad \rho_l(R_2) = 2\pi R_2 \rho_s(R_2) = -\frac{2\pi \varepsilon U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

电位方程 → 解的一般形式 → 边界条件求解 → 求场分量等参数

课后范例

例6: 半径分别为 a 和 b 的同轴线，外加电压 U 。圆柱电极间在图示 θ_1 角部分填充介电常数为 ε 的介质，其余部分为空气，求内外导体间的电场。



解：设内外导体电荷线密度为 ρ_l 和 $-\rho_l$ ，选取圆柱坐标系。
由上题得：

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi(R) = \frac{U \ln \frac{R}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}, \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = -\nabla \varphi = \vec{a}_R \frac{U}{R \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

内导体表面单位长度的电荷 $\rho_l = \frac{D_{1n}}{\rho_{S1}} a \theta_1 + \frac{D_{2n}}{\rho_{S2}} a (2\pi - \theta_1)$

根据边界条件

$$D_{1n} = D_{1r} = \varepsilon E_r$$

$$D_{2n} = D_{2r} = \varepsilon_0 E_r$$

得 $\rho_l = \frac{U \varepsilon \theta_1}{\ln \frac{b}{a}} + U \varepsilon_0 \frac{2\pi - \theta_1}{\ln \frac{b}{a}}$

同轴线单位长度上的电容

$$C_0 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{\varepsilon \theta_1 + \varepsilon_0 (2\pi - \theta_1)}{\ln \frac{b}{a}}$$



3.1 静电场

导体表面可以有自由电荷，电荷产生了电场和电势，随着电荷的增加，电场和电势都在增加；而这个变化的过程中，电荷与电势的比值（都是标量）保持不变，这个比值表明了导体系统的一个能力。

3.1.5 导体系统的电容

电容是导体系统的一种基本属性，它是描述导体系统储存电荷能力的物理量。

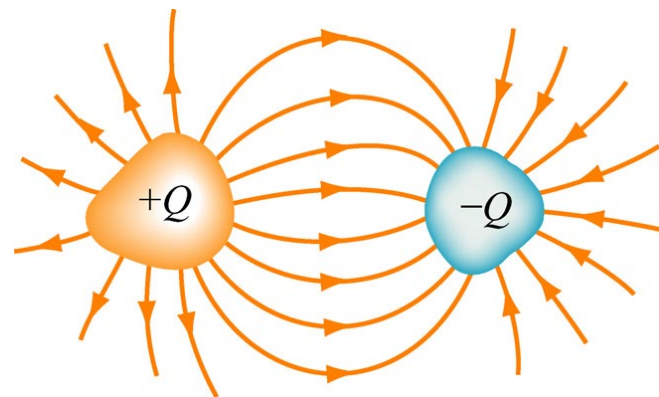
$$C = \frac{Q}{U} \quad (F)$$

其值仅决定于两导体形状、大小、相对位置及空间媒质的介电常数，而与两导体所带电量以及两导体间电位差无关。此比值为常数，这是一个线性系统。

到此为止：电磁场（信号）与媒质（系统）

两导体间电容的计算：

1. 根据导体的几何形状，选取合适的坐标系；
2. 假定导体上带有的异性电荷 $+Q$ 和 $-Q$ ；
3. 通过假定的电荷求出电场强度
4. 通过 $U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 计算两导体间电位差 U
5. 按定义，取电量 Q 和电位差 U 的比值得到电容 C





3.1 静电场

3.1.5 导体系统的电容

电容是导体系统的一种基本属性，它是描述导体系统储存电荷能力的物理量。

其值仅决定于两导体形状、大小、相对位置及空间媒质的介电常数，而与两导体所带电量以及两导体间电位差无关。此比值为常数，这是一个线性系统。

到此为止：电磁场（信号）与媒质（系统）

- 电阻电容电感都是系统的属性；
- 不管有无电场和磁场，这些系统参数都是存在的；
- 计算系统参量的时候，要根据激励和响应来计算；
- 敲鼓-听声音----听声辨鼓；



3.1 静电场

3.1.5 导体系统的电容

➤ 部分电容

多导体之间的电容计算，引入部分电容的概念。

每个导体的电位不仅与导体本身电荷有关，还与其他导体上的电荷有关。设空间存在 n 个导体，各导体的电荷分别为 q_k 。

总电荷量为0，即 $\sum_{k=1}^n q_k = 0$ ，构成一个封闭系统。

对于空间任意一点的电位 φ_A ，有：

$$\varphi_A = \sum_{k=1}^n \varphi_{Ak} = \sum_{k=1}^n \alpha_{Ak} q_k$$



3.1 静电场

3.1.5 导体系统的电容

➤ 部分电容

则各个导体的电位为：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots + \alpha_{1k}q_k + \cdots + \alpha_{1n}q_n \\ \cdots \\ \varphi_k = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \cdots + \alpha_{kk}q_k + \cdots + \alpha_{kn}q_n \\ \cdots \\ \varphi_n = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \cdots + \alpha_{nk}q_k + \cdots + \alpha_{nn}q_n \end{cases}$$

自电位系数：

$$\alpha_{kk} = \left. \frac{\varphi_k}{q_k} \right|_{q_i=0, i \neq k, q_k \neq 0}$$

互电位系数：

$$\alpha_{jk} = \left. \frac{\varphi_j}{q_k} \right|_{q_i=0, i \neq k, q_k \neq 0}$$

则各个导体上的电荷为：

$$\begin{cases} q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots + \beta_{1k}\varphi_k + \cdots + \beta_{1n}\varphi_n \\ \cdots \\ q_k = \beta_{k1}\varphi_1 + \beta_{k2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{kk}\varphi_k + \cdots + \beta_{kn}\varphi_n \\ \cdots \\ q_n = \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{nk}\varphi_k + \cdots + \beta_{nn}\varphi_n \end{cases}$$

自静电感应系数： 互静电感应系数：

$$\beta_{kk} = \left. \frac{q_k}{\varphi_k} \right|_{\varphi_i=0, i \neq k, \varphi_k \neq 0}$$

$$\beta_{jk} = \left. \frac{q_j}{\varphi_k} \right|_{\varphi_i=0, i \neq k, \varphi_k \neq 0}$$

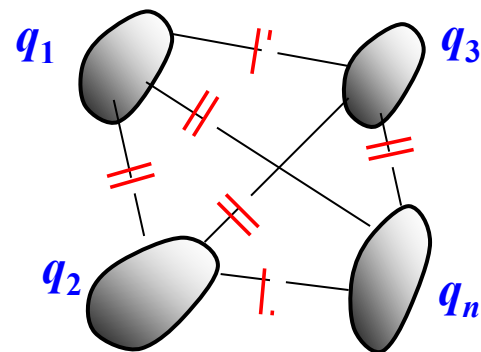
3.1 静电场

3.1.5 导体系统的电容

➤ 部分电容

也可以写成：

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}U_{12} + \cdots + C_{1k}U_{1k} + \cdots + C_{1n}U_{1n} \\ \cdots \\ q_k = C_{k1}U_{k1} + C_{k2}U_{k2} + \cdots + C_{kk}\varphi_k + \cdots + C_{kn}U_{kn} \\ \cdots \\ q_n = C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \cdots + C_{nk}U_{nk} + \cdots + C_{nn}\varphi_n \end{cases}$$



自部分电容：

$$C_{kk} = \left. \frac{q_k}{\varphi_k} \right|_{U_{ki}=0, i \neq k, \varphi_k \neq 0}$$

互部分电容：

$$C_{kj} = \left. \frac{q_k}{U_{kj}} \right|_{\varphi_k=0, U_{ki}=0, i \neq k, U_{kj} \neq 0}$$



3.1 静电场

能量 \Leftrightarrow 做功
状态量 过程量

3.1.6 电场的能量

3.1.6.1 静电场的能量

静电场的能量来源于**建立电荷系统的过程**中外界克服电场力所做的功。

在电场建立过程中，各点的电荷密度按其终值的同一比例因子 α 增加，则各点的电位也将按同一因子增加。

即在某一时刻电荷分布为 $\alpha\rho$ 时，其电位分布为 $\alpha\varphi$ 。 α 的变化为0~1。

外电源对系统所作的功即提供的总能量为：（参考前面电位差的定义）

$$A = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (\alpha \varphi_k) (d\alpha q_k) = \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k = W_e$$

如果是连续分布的带电体，整个充电过程外界对整个系统提供的总能量为：

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV, \text{ 此处 } \frac{1}{2} \text{ 源于建立过程}$$



3.1 静电场

3.1.6.2 能量密度

应用高斯定律, $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) \phi dV$

由矢量恒等式, $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{A}$

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_V [\nabla \cdot (\phi \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla \phi] dV \\ &= \frac{1}{2} \oint_S \phi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV \xrightarrow{\frac{1}{2} \oint_S \phi \vec{D} \cdot d\vec{S} \propto \frac{1}{r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0} = 0 + \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV \\ \Rightarrow w_e &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (J/m^3) \end{aligned}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV \Leftarrow \text{源量表示}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV \Leftarrow \text{场量表示}$$

对于静态场, 两种观点均可

对于时变场, 能量存在场中

介电常数也称为**电容率**,
容存电场的能力

- 计算公式不是定义式, 不能说明物理意义;
- 计算正确的原因, 电荷是场源, 水池里的水量可以通过水龙头流进和排水口流出的水量计算, 但水储存在水池中;
- 源量形式只适合静电场; 场量形式适合静电场和时变场;



3.1 静电场

3.1.6.2 能量密度

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E^2 dV$$

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (J / m^3)$$

- 静电场情况下，没有随时间变化的电场能量，因此没有功率的流动；
- 静电场情况下，只有储能；
- 安全高密度的储存电场能是关键！
 - 储能的重要性
 - 储能要求：高密度、安全、快速充放、环境友好（包括生产过程在内的全过程无污染、重复使用）、低成本
 - 电化学
 - 储电能还是磁能



课后范例

例8：半径为a的球形空间均匀分布着体电荷密度为 ρ 的电荷，试求电场能量。

解一：根据高斯定律，有

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV$$

$$\vec{E}_1 = \vec{a}_R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad r \leq a$$

$$\vec{E}_2 = \vec{a}_R \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad r \geq a$$

所以

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_{V_1} \epsilon_0 E_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \epsilon_0 E_2^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \epsilon_0 \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^\infty \epsilon_0 \left(\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{2\pi \rho^2 a^5}{45\epsilon_0} + \frac{2\pi \rho^2 a^5}{9\epsilon_0} = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0} \end{aligned}$$



课后范例

例8：半径为a的球形空间均匀分布着体电荷密度为 ρ 的电荷，试求电场能量。

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV$$

解二：电位分布为：

$$\varphi_1 = \int_r^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^a \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \quad r \leq a$$

$$\varphi_2 = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \quad r \geq a$$

所以

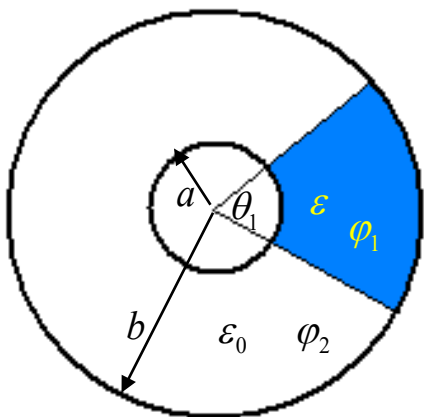
$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho \varphi_1 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a \left(\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} \right) r^2 dr = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\varepsilon_0} \end{aligned}$$

例9: 如例 6 中部分填充介质的同轴线，求介质与空气中单位长度内的电场能量。

解：设同轴线内导体电位 $\varphi_1 = U$ 外导体电位 $\varphi_2 = 0$ ，则同轴线内外导体间单位长度的能量：

$$W_e = \frac{1}{2} q_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} q_1 U$$

$$W_e = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



由例6 可知，内导体表面单位长度的电荷：

用电容来表示

$$q_1 = \rho_l = U [\varepsilon \theta_1 + \varepsilon_0 (2\pi - \theta_1)] / \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{所以 } W_e = \frac{1}{2} U^2 [\varepsilon \theta_1 + \varepsilon_0 (2\pi - \theta_1)] / \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} C_0 U^2$$

<Ex.6>

或：

由例 6 可知，介质和空气中的电场强度为： $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{a}_r \left(U / \ln \frac{b}{a} \right) \frac{1}{r}$

介质中的能量密度、能量为：

空气中的能量密度、能量为：

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon E_1^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \left(U / \ln \frac{b}{a} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

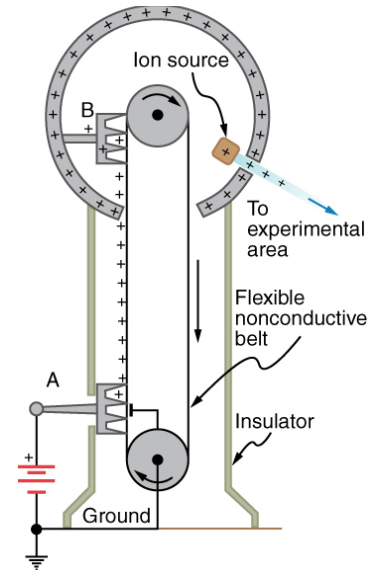
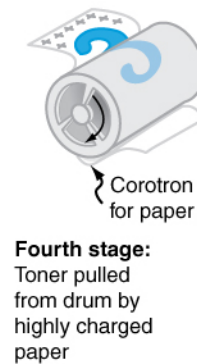
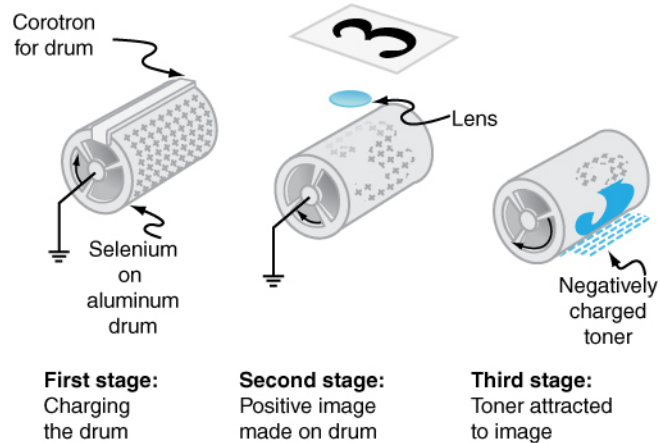
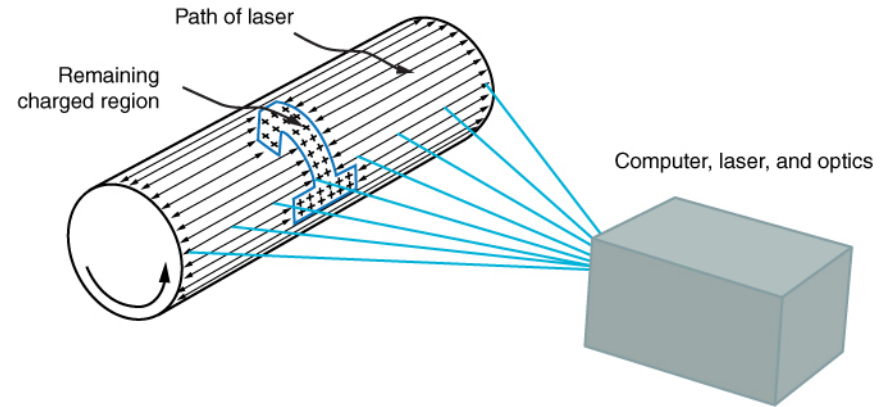
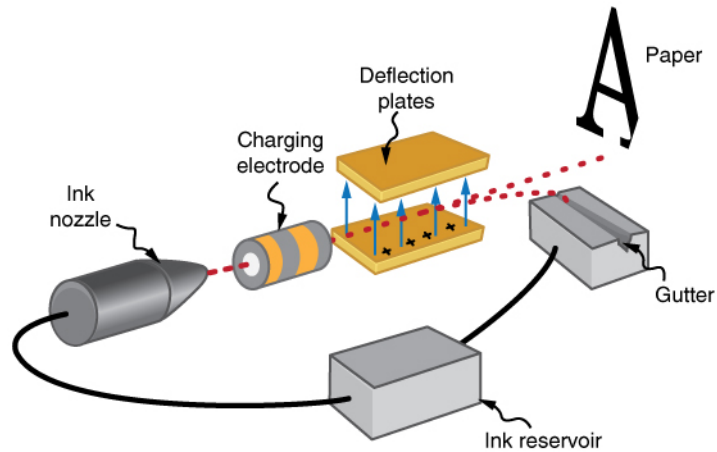
$$w_{e2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(U / \ln \frac{b}{a} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_1} \int_a^b \varepsilon E_1^2 r dr d\varphi = \frac{1}{2} U^2 \varepsilon \theta_1 / \ln \frac{b}{a}$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi-\theta_1} \int_a^b \varepsilon_0 E_2^2 r dr d\varphi = \frac{1}{2} U^2 \varepsilon_0 (2\pi - \theta_1) / \ln \frac{b}{a}$$

3.1 静电场

静电场的应用



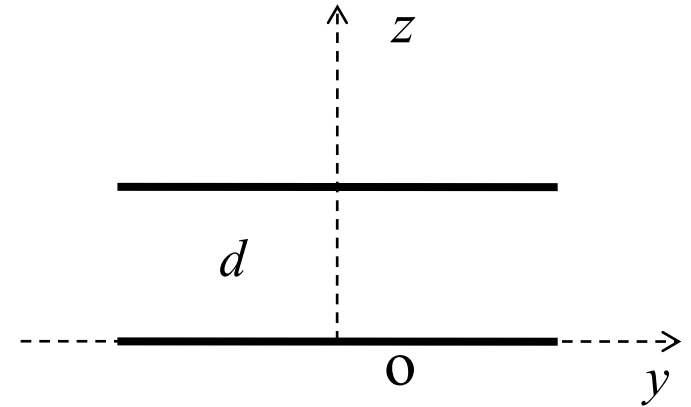


作业

附加题：在导体平板 ($z=0$, $z=d$) 之间传输电磁波：

$$\vec{E} = \vec{a}_y E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) \quad \text{V/m} ; \quad k_x, E_0 \text{ 为常数}$$

1. 求板间的位移电流 \vec{J}_d
2. 求磁场强度 \vec{H}
3. 求两导体表面上的面电流密度 \vec{J}_s



P66 习题2.10 (注意是用电位方程求解)



电磁场与电磁波

第三章 静态电磁场的分析-恒流电场

李顺礼

lishunli621@seu.edu.cn



静态电磁场的分析

■ 3.1 静电场

- 3.1.1 静电场的基本方程
- 3.1.2 电位
- 3.1.3 电位方程
- 3.1.4 静电场的边界条件
- 3.1.5 导体系统的电容
- 3.1.6 电场的能量

■ 3.2 恒定电流电场

- 3.2.1 导电回路中电源内的局外电场
- 3.2.2 恒定电场的基本方程
- 3.2.3 恒定电场的边界条件
- 3.2.4 恒定电场与静电场的比拟

- (1) 基本方程;
- (2) 边界条件;
- (3) 能量关系



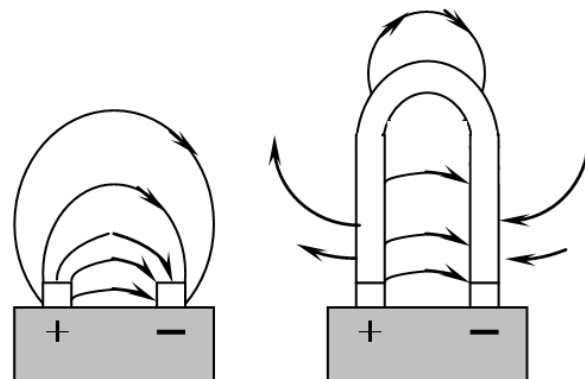
静态电磁场的分析

- 3.3 恒定磁场
 - 3.3.1 恒定磁场的基本方程
 - 3.3.2 恒定磁场的位函数
 - 3.3.3 恒定磁场的边界条件
 - 3.3.4 电感
 - 3.3.5 恒定磁场的能量

3.2 恒定电流电场

- 电荷的流动形成电流；
- 导电媒质内电荷流动形成传导电流，在真空或空气中电荷流动形成运流电流；
- 本章主要关注导体中的传导电流；
- 当电流密度矢量分布不随时间变化，仅是空间坐标的函数，则构成恒定电流，**导体中的**电荷密度分布也不随时间变化，并且没有净电荷聚集；
- 根据导体的本构关系，与恒定电流对应的是恒定电流电场；
- 恒定电流也产生磁场，磁场与电场是独立的，可以分别研究；

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}
 \end{aligned} \right\} \begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \xrightarrow[\text{电源外部}]{\text{恒流电场}} \left\{ \begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E} &= 0 \\
 \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\
 \nabla \cdot \vec{J} &= 0
 \end{aligned} \right\} \begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} - \text{导体中} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} - \text{介质中} \end{cases}$$





3.2 恒定电流电场

3.2.1 导电回路中电源内的局外电场

- 静电场是保守场，其闭合回路积分为零；
- 电荷在保守场中运动一个环路后能量不变；
- 静电场在导体中不能维持同一个方向的稳恒电流，故恒定电流不能由静电场产生；

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \xrightarrow{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \oint_l \vec{J} \cdot d\vec{l} = 0$$

\Rightarrow 任意环路，必有反复 \Rightarrow 静电场不支持恒定电流

- 恒定电流的产生条件：沿电流方向的任一段导体上存在电位差；
- 电荷在导体中运动，受晶格碰撞损失能量，必然有外加场源和非电场能转化为电场能，即非静电力做功；
- 提供非静电力并将其它形式的能量转为电能装置称为电源；



3.2 恒定电流电场

3.2.1 导电回路中电源内的局外电场

- 提供非静电力并将其它形式的能量转为电能装置称为电源；
- 电源内部非电形式的能量作用下将正电荷从负极推向正极；
- 电源对电荷的作用力可以定义一个等效的局外场；
- 当局外场 \vec{E}_s =电荷电场 \vec{E}_q 时，达到平衡，此时有恒定电流；
- 电荷电场为无旋场（保守场）；
- 局外电场为非保守场；

$$\begin{aligned} A &= \oint_C q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{电源内}} q \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{电源外}} q \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= q \int_{\text{电源内}} (\vec{E}_s + \vec{E}_q) \cdot d\vec{l} + q \int_{\text{电源外}} \vec{E}_q \cdot d\vec{l} \\ &= q \int_{\text{电源内}} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + q \oint_C \vec{E}_q \cdot d\vec{l} \xrightarrow{\oint_C \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = 0} A = q \int_{\text{电源内}} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} \\ \Rightarrow \xi &= \frac{A}{q} = \int_{\text{电源内}} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$



3.2 恒定电流电场

3.2.2 恒定电场的基本方程

- 提供非静电力并将其它形式的能量转为电能装置称为电源；
- 电源不是电磁场，在这门课中通常不关注；
- 由于需要电流存在，更多关注的是**导电媒质中**的情况；

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \xrightarrow[\text{电源外部}]{\text{恒流电场}} \left\{ \begin{aligned} \text{介质中: } &\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \end{aligned} \right\} + \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \text{导体中: } &\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned} \right\} + \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{aligned} \right.$$



3.2 恒定电流电场

3.2.2 恒定电场的基本方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \Rightarrow p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{F} \cdot \vec{v} \text{ 功率}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \xrightarrow{\text{高斯公式}} \text{KCL}$$

- 恒流电场在导电媒质中，不包括局外场；
- 局外场是非电磁量，因此不关心，等价于无源区；
- 在无源区，电场强度是无旋的；在无源区，电流密度是无源的；
- 在无源区，电位满足拉普拉斯方程；
- 在无源区，恒流电场与静电场的位函数方程相同---静电比拟法；
- 欧姆定律反映了导体对于电磁能的热损耗-电场力做功提高电荷动能—动能增加了吗？--去哪里了？；
- 导体损耗能量，为何称为导体，导线？
- 基尔霍夫电流定律；

世界上本没有“路”，
“场”简化的多了，就形成了“路”。

3.2 恒定电流电场

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \xrightarrow{\text{在导体中电磁场损耗的功率密度}} \vec{E} \cdot \vec{J}$$

- 恒流电场情况下，导体中的功率转化为热能；
- 导体本身是能量的消耗装置！
- 导体的引导作用-导线-传输线；
- 高压线减小损耗的方法？





3.2 恒定电流电场

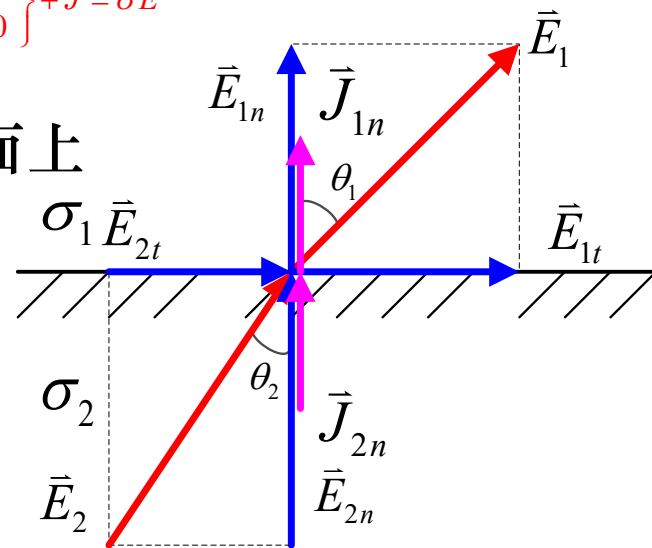
3.2.3 恒定电场的边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{介质中: } \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \end{array} \right\} + \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{导体中: } \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right\} + \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

1. 不同导电媒质分界面上或两非理想介质分界面上

- 导电媒质：导电特性为主，但非理想导体；
- 非理想介质：介质特性为主，但非理想介质；
- 导电媒质和非理想介质都是实际媒质；
- 不同媒质电导率的变化范围非常大；
- 不同媒质的相对介电常数变化范围相对较小；
- 导电媒质-导电媒质；
- 导电媒质-非理想介质；
- 非理想介质-非理想介质；



$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad \text{或} \quad J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \Rightarrow \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \xrightarrow{\sigma_2 \gg \sigma_1} \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \approx 0 \rightarrow \theta_1 \approx 0$$

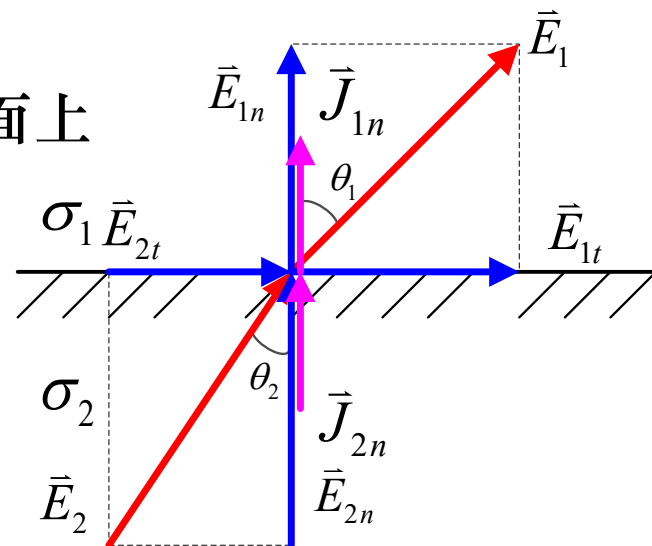
$$\text{非理想介质中 } D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_S$$

- 如果2媒质的电导率远大于1媒质的电导率，则**电流几乎垂直入射到1媒质中**；
- 导线与电阻分界面即是这种情况；

3.2 恒定电流电场

3.2.3 恒定电场的边界条件

1. 不同导电媒质分界面上或两非理想介质分界面上



$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad \text{或} \quad J_{1n} = J_{2n}$$

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_S$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \rho_S \\ \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_S = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) J_{2n}$$

$$\text{如果 } \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}, \quad \rho_S = 0$$

- 实际媒质分界面上一般会存在自由面电荷；
- 这个自由面电荷是恒流电场建立的时候聚集的；
- 介电常数与电导率的比值相同时没有自由面电荷存在，一般不会出现这样的情况；
- 介电常数和电导率的比值表明非理想介质的特性；

3.2 恒定电流电场

2. 导电媒质与理想介质分界面上

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

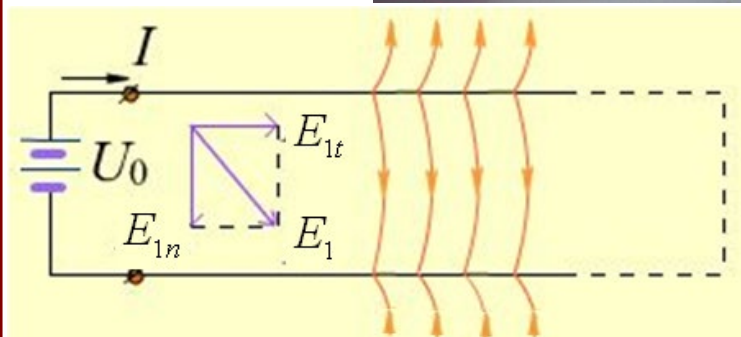
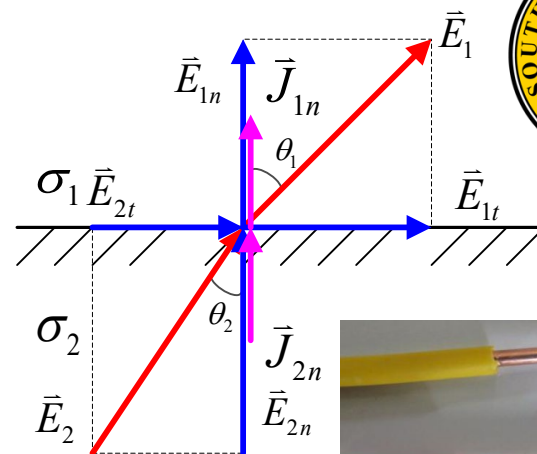
$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad \text{或} \quad J_{1n} = J_{2n}$$

$$\sigma_1 = 0 \Rightarrow \vec{J}_1 = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n} = 0 \xrightarrow{\vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2} E_{2n} = 0$$

$$\sigma_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{J}_2 \neq 0 \Rightarrow J_{2t} \neq 0 \Rightarrow E_{2t} = E_{1t} \neq 0$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S, \quad E_{2n} = 0 \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \rho_S \Rightarrow E_{1n} = \frac{\rho_S}{\epsilon_1} \neq 0$$

$$J_{2n} = 0 \Rightarrow E_{2n} = 0$$



载流导体表面的电场

- 这是一种特殊情况，没有电流流入理想介质；
- 导电媒质中电流沿着分界面流动，电场也只有切向分量，否则法向分量使得分界面上聚集无穷大面电荷；
- 分界面上有自由面电荷存在；
- 理想介质中，电场既有切向分量，也有法向分量，有耗分界面上电场线前倾；
- 导线与绝缘层，导线与真空；



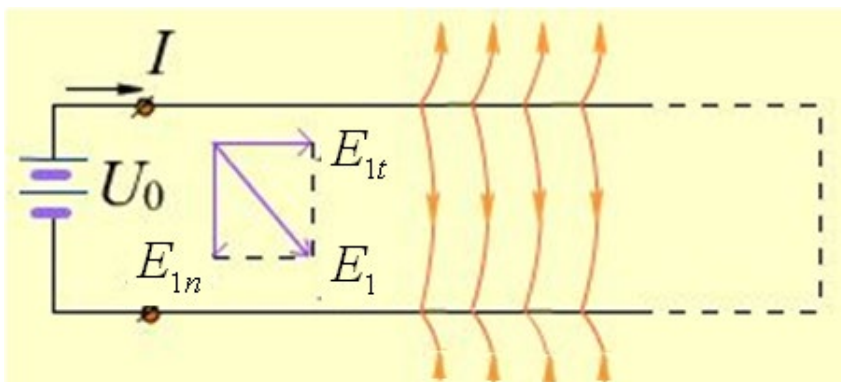
3.2 恒定电流电场

2. 导电媒质与理想介质分界面上

$$\begin{aligned} P &= \oint_l (\vec{E}_s + \vec{E}_c) \cdot I d\vec{l} \\ &= I \oint_l (\vec{E}_s + \vec{E}_c) d\vec{l} \\ &= I \oint_l \vec{E}_s d\vec{l} = \xi I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV \leftarrow \text{源量表示, 能量的来源} \\ W_e &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV \leftarrow \text{场量表示, 能量的所在} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{loss}} &= \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \vec{E}_c \cdot \vec{J} dV \\ &= \int_V \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot \vec{J} dV = \int_V \frac{J}{\sigma} \cdot J dV \\ &= \int_l \frac{JS}{\sigma S} \cdot JS dl = \int_l \frac{I}{\sigma S} \cdot I dl \\ &= I^2 \int_l \frac{dl}{\sigma S} = I^2 r \end{aligned}$$

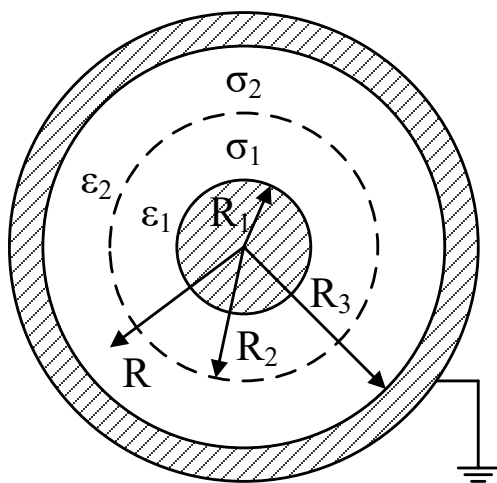


- 这种电场切向分量导致的前倾，使得坡印廷矢量有一个分量指向导体：电场和磁场的叉乘；
- 有电流的地方才有能量？--能量密度定义
- 能量在导体内流动并被损耗？
- 能量在介质中传输，进入导体的是损耗；
- 与静电场的对比；

课后范例

例10: 无限长同轴传输线内外导体半径分别为 R_1 和 R_3 , 中间填充有两层非理想介质, 分界面半径为 R_2 , 内层和外层的介电常数和导电率为 ϵ_1 、 ϵ_2 、 σ_1 、 σ_2 , 内外导体间电压为 U , 设外导体电位为0, 求内外导体间电场和介质分界面和同轴线内外导体表面的自由电荷面密度。

解: 设同轴线单位长度的径向漏电流为 I , 选取圆柱坐标系,



$$\vec{J}_1 = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi R} \quad (R_1 \leq R \leq R_2), \quad \vec{J}_2 = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi R} \quad (R_2 \leq R \leq R_3)$$

$$J_{1n} = J_{2n}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_1 = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi\sigma_1 R} \quad (R_1 \leq R \leq R_2), \quad \vec{E}_2 = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi\sigma_2 R} \quad (R_2 \leq R \leq R_3)$$

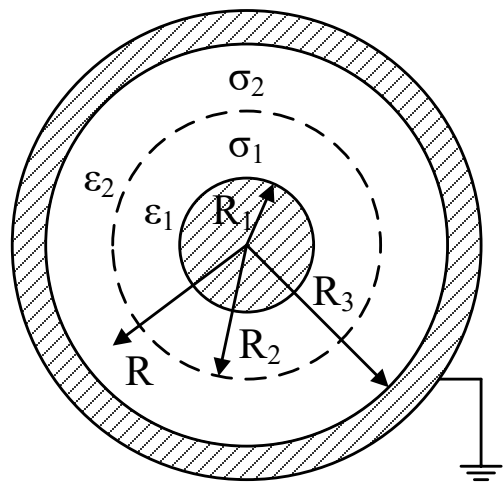
$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{R} + \int_{R_2}^{R_3} \vec{E}_2 \cdot d\vec{R} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi\sigma_1 R} dR + \int_{R_2}^{R_3} \frac{I}{2\pi\sigma_2 R} dR$$

$$= \frac{I}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right) \Rightarrow I = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2 U}{\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

课后范例

因此由

$$\vec{E}_1 = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi\sigma_1 R} \quad (R_1 \leq R \leq R_2), \quad \vec{E}_2 = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi\sigma_2 R} \quad (R_2 \leq R \leq R_3)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\sigma_2 U}{\left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right) R} \quad (R_1 \leq R \leq R_2) \\ \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1 U}{\left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right) R} \quad (R_2 \leq R \leq R_3) \end{cases}$$

介质分界面上的自由电荷面密度为：

内外导体上的自由电荷面密度为：

$$\begin{aligned} \rho_s &= \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) J_{2n} \\ &= \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2 U}{2\pi R_2 \left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right)} \\ &= \frac{-U\epsilon_1\sigma_2}{R_2 \left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right)} + \frac{U\sigma_1\epsilon_2}{R_2 \left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{s1} &= \epsilon_1 E_{1n} = \frac{U\epsilon_1\sigma_2}{R_1 \left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right)} \\ \rho_{s2} &= -\epsilon_2 E_{2n} = -\frac{U\epsilon_2\sigma_1}{R_3 \left(\sigma_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right)} \end{aligned}$$

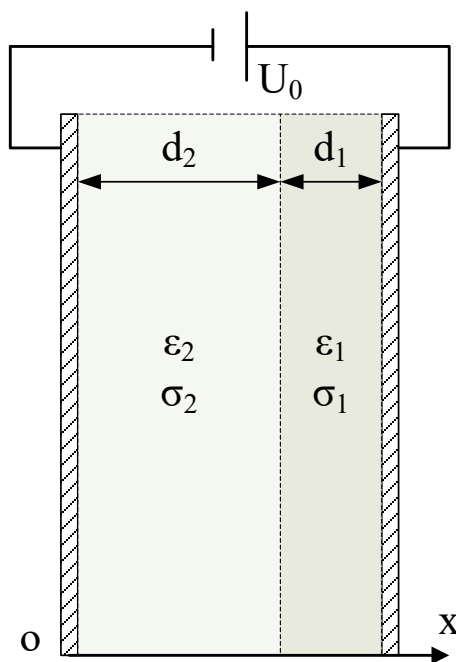
$$\rho_s \cdot 2\pi R_2 = -\rho_{s1} \cdot 2\pi R_1 - \rho_{s2} \cdot 2\pi R_3$$



课后范例

例11：极板面积为S的平行电容器上外加电压 U_0 ，两极板间填充有两种有损耗电介质，其厚度、介电常数和电导率分别为： d_1 、 d_2 、 ε_1 、 ε_2 和 σ_1 、 σ_2 。求：(1) 介质中的电流和电场分布；(2) 两种电介质上的电荷面密度；(3) 两极板间的电阻。

解：如图，这是个一维问题，媒质1和2中电位方程满足： $\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} = 0$



媒质1和媒质2中的电位通解分别为：

$$\varphi_1(x) = A_1x + A_2; \quad \varphi_2(x) = B_1x + B_2$$

媒质1和媒质2中的电场分别为：

$$\vec{E}_1 = -\vec{a}_x \frac{d\varphi_1}{dx} = -\vec{a}_x A_1; \quad \vec{E}_2 = -\vec{a}_x \frac{d\varphi_2}{dx} = -\vec{a}_x B_1$$

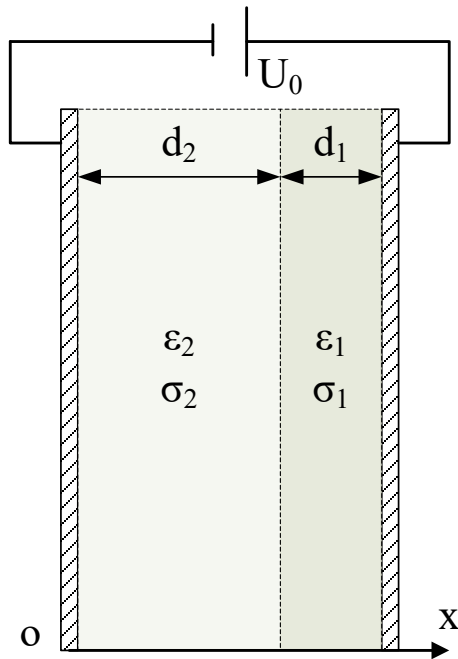
媒质1和媒质2中的电流密度分别为：

$$\vec{J}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1 = -\vec{a}_x \sigma_1 A_1; \quad \vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2 = -\vec{a}_x \sigma_2 B_1$$

课后范例

根据边界条件有:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = d_1 + d_2: \quad \varphi_1(x = d_1 + d_2) = A_1(d_1 + d_2) + A_2 = U_0 \\ x = 0: \quad \varphi_2(x = 0) = B_2 = 0 \\ x = d_2: \quad \varphi_1(x = d_2) = A_1d_2 + A_2 = B_1d_2 + B_2 = \varphi_2(x = d_2) \\ x = d_2: \quad J_1(x = d_2) = -\sigma_1A_1 = -\sigma_2B_1 = J_2(x = d_2) \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = U_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1d_2 + \sigma_2d_1}; \quad A_2 = U_0 \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)d_2}{\sigma_1d_2 + \sigma_2d_1} \\ B_1 = U_0 \frac{\sigma_1}{\sigma_1d_2 + \sigma_2d_1}; \quad B_2 = 0 \end{array} \right.$$

课后范例



(1) 损耗媒质内的电流和电场分别为:

$$I = J_1 S = J_2 S = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U_0 S}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

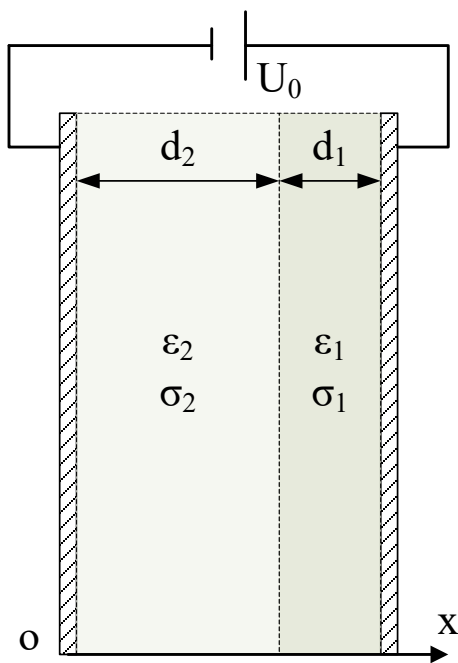
$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{a}_x U_0 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}; \quad \vec{E}_2 = -\frac{\vec{a}_x U_0 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1};$$

(2) 两损耗媒质交界面上的电荷面密度为:

$$\rho_s = D_{1n} - D_{2n} = \frac{U_0 (\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

(3) 极板间电阻R为:

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}{\sigma_1 \sigma_2 S}$$





3.2 恒定电流电场

具有相同数学形式的物理规律，说明自然的奇妙！

3.2.4 恒定电场与静电场的比拟

1. 基本方程和边界条件

	均匀导电媒质中的恒定电场（电源以外）	均匀电介质中的静电场（ $\rho=0$ 的无源区域）
基本方程	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$
	$\nabla \times \vec{E} = 0$ $\nabla \cdot \vec{J} = 0$	$\nabla \times \vec{E} = 0$ $\nabla \cdot \vec{D} = 0$
本构关系	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
位函数	$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$



3.2 恒定电流电场

3.2.4 恒定电场与静电场的比拟

	均匀导电媒质中的恒定 电场（ 电源以外 ）	均匀电介质中的静电场 （ $\rho=0$的无源区域 ）
通量方程	$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$	$q = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$
边界条件	$E_{1t} = E_{2t}$ $J_{1n} = J_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t}$ $D_{1n} = D_{2n}$
	$\varphi_1 = \varphi_2$ $\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$	$\varphi_1 = \varphi_2$ $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$



3.2 恒定电流电场

2. 对应关系

- 静电比拟法，只适用于无源区
- 相似的结构和媒质分布

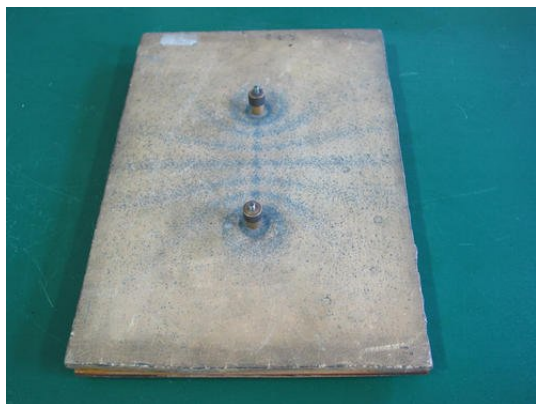
均匀导电媒质中的恒定电场 (电源以外)	均匀电介质中的静电场 ($\rho=0$ 的区域)	
$\vec{E}_{\text{恒}}$	$\vec{E}_{\text{静}}$	
$\varphi_{\text{恒}}$	$\varphi_{\text{静}}$	
\vec{J}	\vec{D}	
I	q	
σ	ε	
$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}}{\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\sigma \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}}$	$\frac{G}{\sigma} = \frac{C}{\varepsilon}$	$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\varepsilon \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}}$

相同条件下静电场解已知— 利用对偶关系直接写出恒定电场的解

3.2 恒定电流电场

2. 对应关系

- 相同条件下静电场解已知— 利用对偶关系直接写出恒定电场的解
- 静电比拟法，只适用于无源区
- 相似的结构和媒质分布；
- 两种场在计算、分析上“合二为一”，求解方法和结果直接互用；
- 由于电流场中的电流、电位分布易于测定，故可用相应的电流场模型来研究待求的静电场问题(静电场造型)，此种方法亦称电流场模拟



课后范例

例12: 同轴传输线内外导体半径分别为 R_1 和 R_2 ，中间填充非理想介质，介电常数和导电率为 ϵ 、 σ ，内外导体间电压为 U ，设外导体电位为0，求单位同轴线的绝缘电阻。

解一：设同轴线单位长度的漏电流为 I ，选取圆柱坐标系，

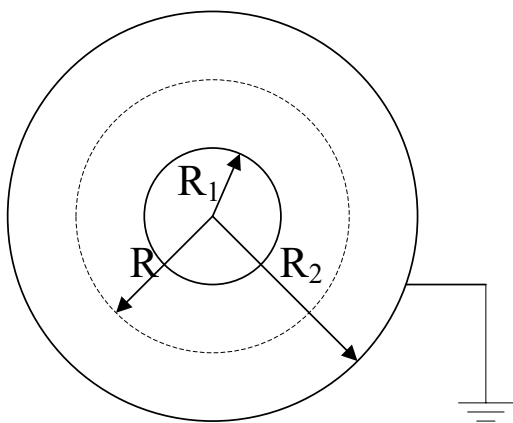
$$\text{漏电流密度为: } \vec{J} = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi R}$$

$$\text{电场强度为: } \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{a}_R \frac{I}{2\pi\sigma R}$$

则

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{R} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi\sigma R} dR = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow I = \frac{2\pi\sigma U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\text{单位长度绝缘电阻为: } R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\Omega/m)$$



设

$$I \xrightarrow{\int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = I} \vec{J} \xrightarrow{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \vec{E} \xrightarrow{U = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{l}} I \xrightarrow{R = \frac{U}{I}} R \xrightarrow{G = \frac{1}{R}} G$$

课后范例

例12：同轴传输线内外导体半径分别为 R_1 和 R_2 ，中间填充非理想介质，介电常数和导电率为 ε 、 σ ，内外导体间电压为 U ，设外导体电位为0，求单位同轴线的绝缘电阻。

解二：用静电比拟法：

前面得到单位长度电容为：

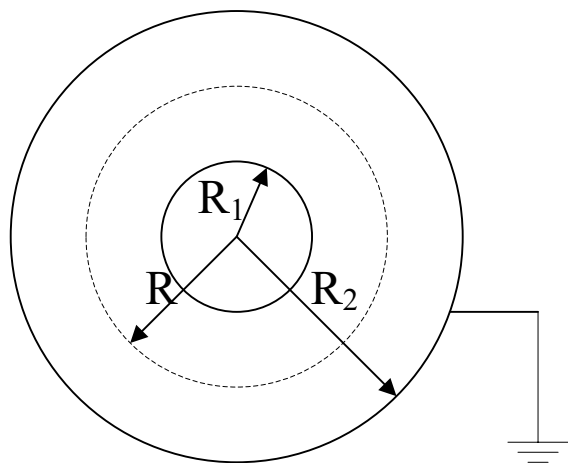
$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

对偶得单位长度电导为：

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

则单位长度绝缘电阻为：

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\Omega/m)$$



P67 习题2.16

P67 条件如习题2.18 中所描述，且**媒质1为理想介质**，

- (1) 试用**电位方程**求解介质1和2中的电场分布；
- (2) 两种电介质分界上的是否有自由面电荷？若有，求之。



电磁场与电磁波

第三章 静态电磁场的分析-静磁场

李顺礼

lishunli621@seu.edu.cn



静态电磁场的分析

■ 3.1 静电场

- 3.1.1 静电场的基本方程
- 3.1.2 电位
- 3.1.3 电位方程
- 3.1.4 静电场的边界条件
- 3.1.5 导体系统的电容
- 3.1.6 电场的能量

■ 3.2 恒定电流电场

- 3.2.1 导电回路中电源内的局外电场
- 3.2.2 恒定电场的基本方程
- 3.2.3 恒定电场的边界条件
- 3.2.4 恒定电场与静电场的比拟



静态电磁场的分析

■ 3.3 恒定磁场

- 3.3.1 恒定磁场的基本方程
- 3.3.2 恒定磁场的位函数
- 3.3.3 恒定磁场的边界条件
- 3.3.4 电感
- 3.3.5 恒定磁场的能量

- (1) 基本方程;
- (2) 边界条件;
- (3) 能量关系



3.3 恒定磁场

亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“套路”。

3.3.1 恒定磁场的基本方程

- 恒定电流产生恒定磁场；
- 恒定磁场的场量不随时间变化，仅是空间坐标的函数。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \vec{J} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \xrightarrow{\text{静磁场}} \left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \right\}$$

面临的问题：

上述方程组不易求解

前面的策略：位函数

- 恒定磁场是无通量源的场，即无散场；
- 恒定磁场是有旋场，旋涡源是恒定电流；
- 磁力线是与源电流相铰链的闭合曲线；



3.3 恒定磁场

3.3.2 恒定磁场的位函数

静电场的求解过程

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \nabla \varphi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla \varphi \\ C \\ W_e \end{array} \right.$$

静磁场的求解过程

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ L \\ W_m \end{array} \right.$$



3.3 恒定磁场

3.3.2 恒定磁场的位函数

3.3.2.1 矢量磁位

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

库伦规范 $0 = \nabla \cdot \vec{A}$

- 引入了矢量磁位；
- 规定了矢量磁位的散度—库伦规范；
- 注意规范都是针对矢量的限定；
- 给出矢量磁位的旋度和散度以唯一确定矢量。(亥姆霍兹定理)
- 矢量磁位满足泊松方程；

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \vec{B} = -\mu \nabla \times \vec{H}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \text{矢量形式的泊松方程}$$

$$\xrightarrow{\text{无源区}} \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad \text{矢量形式的拉普拉斯方程}$$



3.3 恒定磁场

3.3.2 恒定磁场的位函数

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$ 在直角坐标系里写为标量形式的泊松方程：

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu J_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu J_z$$

泊松方程的通解

令无穷远处 \vec{A} 为0，即C=0

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C_x$$

$$A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_y dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C_y$$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_z dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C_z$$

+

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_y dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_z dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

计算

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{C}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



3.3 恒定磁场

3.3.2 恒定磁场的位函数

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sim \frac{1}{r}$$

矢量单元

$$d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \sim \frac{1}{r}$$

$\vec{J}dV'$: 单元电流元

- 矢量磁位与电流密度是同方向的，即矢量磁位由同方向的电流密度决定，便于计算；
- 矢量磁位与距离是反比关系，磁感应强度与距离是平方反比关系；
- 标量电位与距离是反比关系，电场强度与距离是平方反比关系；

➤ 矢量磁位的计算：

a. 线电流的矢量磁位计算 b. 面电流的矢量磁位计算 c. 体电流的矢量磁位计算

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{l'} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}_s}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$



3.3 恒定磁场

3.3.2 恒定磁场的位函数

利用斯托克斯定理，

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

可以通过计算矢量磁位 \vec{A} 沿一个曲面周界C的线积分来计算这个曲面S的磁通量。

- 1831-1854年间，法拉第提出电紧张状态；
- 1851年开尔文勋爵引入矢量磁位的概念；
- 1854年麦克斯韦把矢量磁位与电紧张状态联系起来；
- 1865年麦克斯韦方程组中包含矢量磁位；
- 1884年亥维赛德与赫兹导出的麦克斯韦方程组中去掉了矢量磁位；
- 现在，矢量磁位是杨-米尔斯规范场论的内容，是重要的物理量；

对比标量电位与矢量磁位的引入过程及异同



3.3 恒定磁场

3.3.2 恒定磁场的位函数

对比标量电位与矢量磁位的引入过程及异同

静电场的求解过程

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \nabla \varphi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla \varphi \\ C \\ W_e \end{array} \right.$$

静磁场的求解过程

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ L \\ W_m \end{array} \right.$$

课后范例

例12：求无限长直线电流的矢量位A和磁感应强度B。

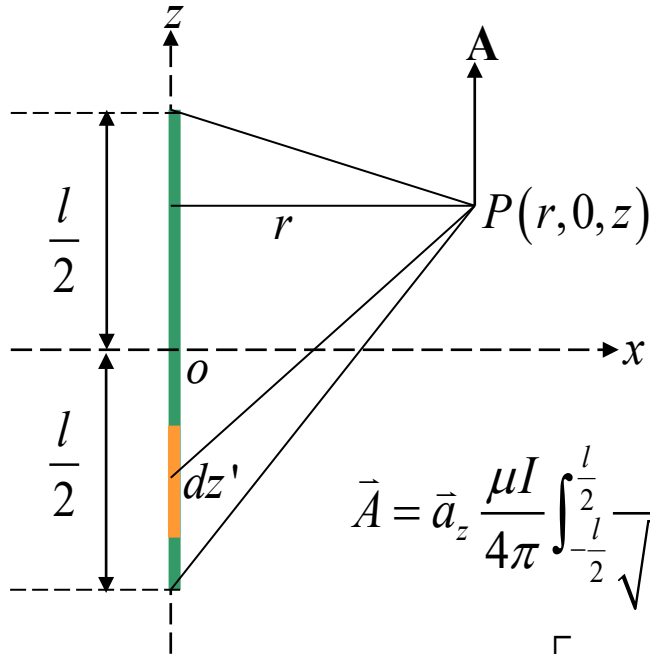
解：首先计算一根长度为 l 的长直线电流I产生的矢量位。(有限长度)

由线电流的矢位计算公式

$$d\vec{A} = \frac{\mu I d\vec{l}}{4\pi R} = \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi R} \left\{ \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \right\}$$

积分可得

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} + C = \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[(z' - z) + \sqrt{(z' - z)^2 + r^2} \right] \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} + C \\ &= \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{l}{2} - z \right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z \right)^2 + r^2}}{-\left(\frac{l}{2} + z \right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z \right)^2 + r^2}} \right] + C \end{aligned}$$





$$\vec{A} = \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{l}{2} - z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + r^2}}{-\left(\frac{l}{2} + z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + r^2}} \right] + C$$

若 l 为有限长, 令 $r \rightarrow \infty$ 时, $\vec{A} = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\text{则: } \vec{A} = \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{l}{2} - z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + r^2}}{-\left(\frac{l}{2} + z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + r^2}} \right]$$

若 l 为无限长, 令 $r = R_0$ 时, $\vec{A} = 0$

$$\begin{aligned} & \vec{A}(R = R_0) \\ &= \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{l}{2} - z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + R_0^2}}{-\left(\frac{l}{2} + z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + R_0^2}} \right] + C = 0 \\ & \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \vec{a}_z \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left(\frac{l}{R_0} \right)^2 + C = \vec{a}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left(\frac{l}{R_0} \right) + C = 0 \end{aligned}$$

即

$$C = -\vec{a}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left(\frac{l}{R_0} \right)$$

则:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{a}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left(\frac{l}{r} \right) - \vec{a}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left(\frac{l}{R_0} \right) \\ &= \vec{a}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left(\frac{R_0}{r} \right) \end{aligned}$$

此时:

磁感应强度 \vec{B} 等于

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\vec{a}_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial r} = \vec{a}_\varphi \frac{\mu I}{2\pi r}$$

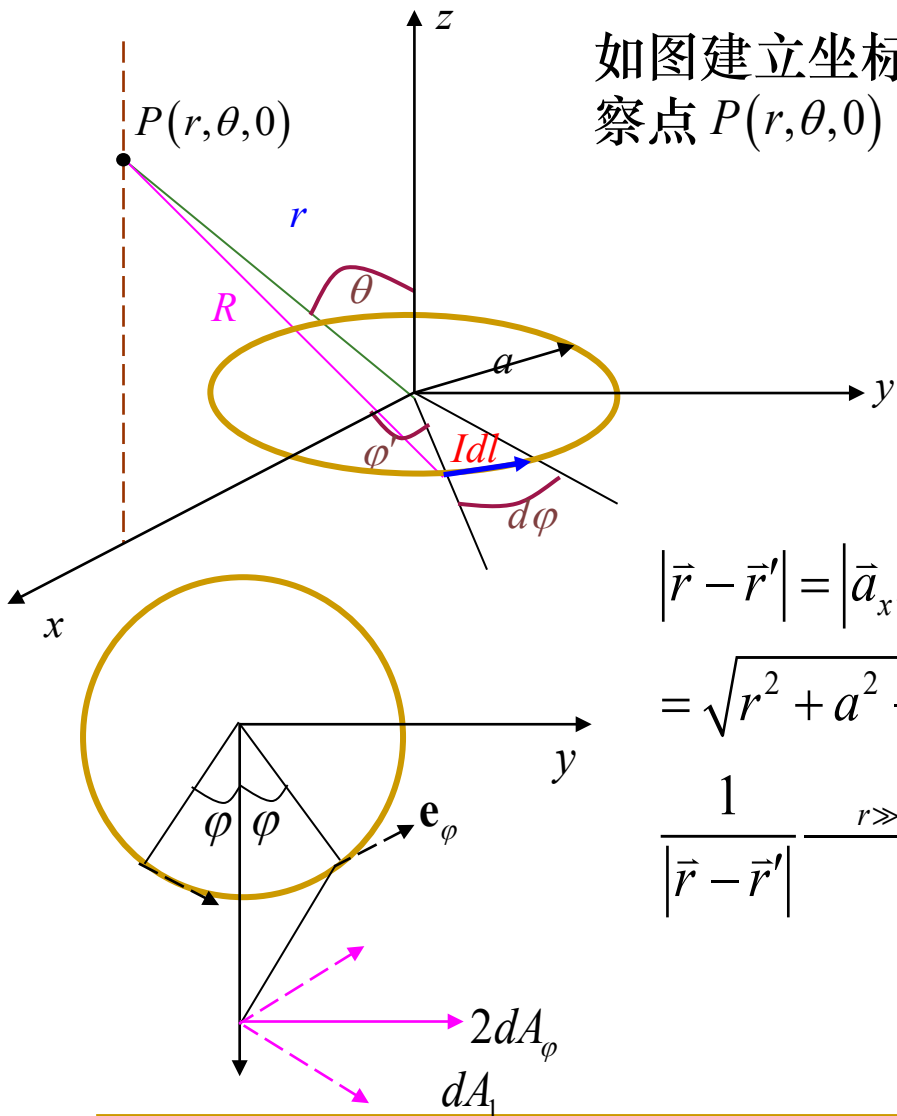
磁场强度 \vec{H} 等于

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{a}_\varphi \frac{I}{2\pi r}$$



课后范例

例13：求小圆环电流的矢量位A、磁感应强度B。



如图建立坐标系，与x轴对称的两个电流元 Idl 在考察点 $P(r, \theta, 0)$ 产生的合成矢位只有 φ 分量

$$\vec{r} = \vec{a}_r r = \vec{a}_x r \sin \theta + \vec{a}_z r \cos \theta$$

$$\vec{r}' = \vec{a}_r' r = \vec{a}_x a \cos \varphi' + \vec{a}_y a \sin \varphi'$$

$$dl' = \vec{a}_\varphi a d\varphi' = (-\vec{a}_x \sin \varphi' + \vec{a}_y \cos \varphi') a d\varphi'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{a}_x r \sin \theta + \vec{a}_z r \cos \theta - \vec{a}_x a \cos \varphi' - \vec{a}_y a \sin \varphi'|$$

$$= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi'}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \xrightarrow{r \gg a} \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi'}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi' \right)$$



因而远区矢量磁位为:

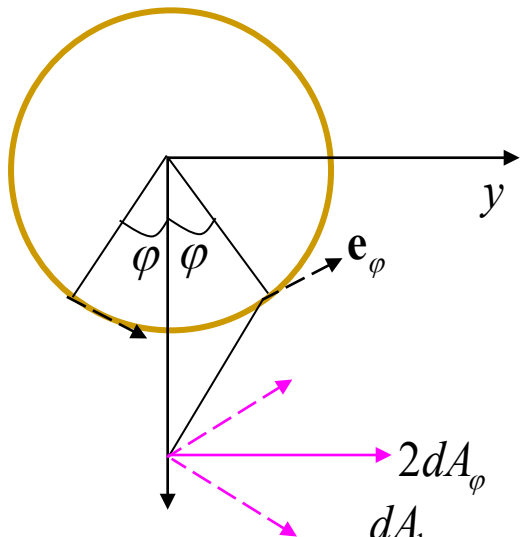
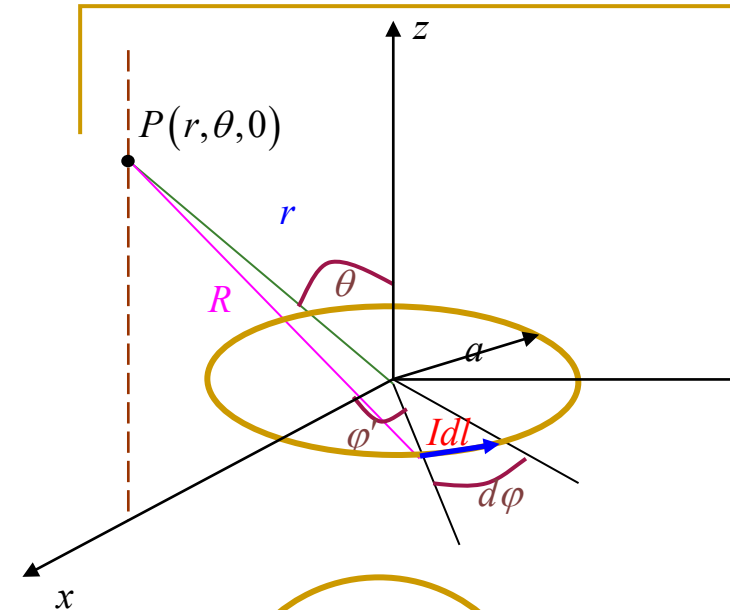
$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{l}' \\
 &= \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi' \right) (-\vec{a}_x \sin \varphi' + \vec{a}_y \cos \varphi') d\varphi' \\
 &= \vec{a}_y \frac{\mu I a}{4\pi} \left(\frac{a \sin \theta}{2r^2} \right) 2\pi = \vec{a}_y \frac{\mu I a^2 \pi \sin \theta}{4\pi r^2} \\
 &\xrightarrow{\text{在 } \varphi=0 \text{ 平面}} \vec{a}_y \frac{\mu I a^2 \pi \sin \theta}{4\pi r^2} = \vec{a}_\varphi \frac{\mu I S \sin \theta}{4\pi r^2}
 \end{aligned}$$

远区磁感应强度为:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \vec{a}_r \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} \right) + \vec{a}_\theta \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \\
 \vec{B} &= \frac{\mu I S}{4\pi r^3} (\vec{a}_r 2 \cos \theta + \vec{a}_\theta \sin \theta)
 \end{aligned}$$

称小圆环电流为为磁偶极子, 称 $\vec{p}_m = I\vec{S}$ 为磁距,

则有:
$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a}_\varphi \frac{\mu \sin \theta P_m}{4\pi r^2} = \frac{\mu}{4\pi r^3} \vec{p}_m \times \vec{r}$$



$$\vec{E} = \frac{q l}{4\pi \epsilon_0 R^3} (\vec{a}_r 2 \cos \theta + \vec{a}_\theta \sin \theta)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{l \cos \theta}{R^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$



3.3 恒定磁场

3.3.2 恒定磁场的位函数

3.3.2.2 标量磁位

若研究的空间没有电流分布,

$$\vec{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \xrightarrow{\text{静磁场}} \left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \right\}$$

同静电场相似, 令 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ φ_m 称为标量磁位

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{H} &= -\nabla \cdot \nabla \varphi_m = -\nabla^2 \varphi_m = 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 \varphi_m &= 0 \quad \text{满足拉普拉斯方程} \end{aligned}$$

矢量磁位是普遍适用的, 标量磁位仅适用于无源区。

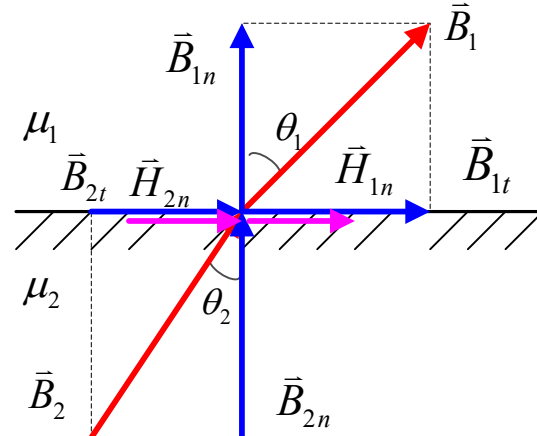
3.3 恒定磁场

3.3.3 恒定磁场的边界条件

3.3.3.1 磁感应强度和磁场强度的边界条件

若在不同媒质的分界面上存在着面电流, \vec{B} , \vec{H} 在分界面上满足的关系式为:

$$\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = J_S \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$$



若分界面上不存在面电流, 即 $\vec{J}_S = 0$, 则有:

$$\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2 \\ B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

■ 磁场分界面折射定律;

3.3 恒定磁场

3.3.3.3 矢量磁位的边界条件

可由 \vec{B} , \vec{H} 的边界条件得到等效的矢量磁位的边界条件。

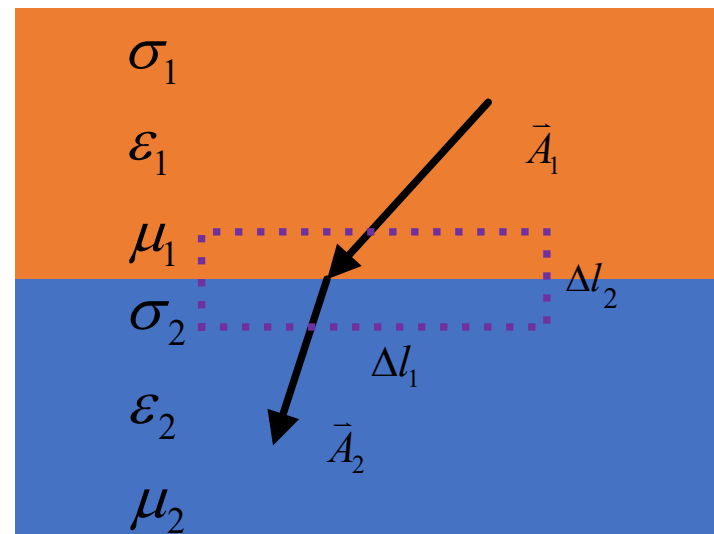
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\Delta l_2 \rightarrow 0} \mathbf{0} = A_{1t} \Delta l_1 - A_{2t} \Delta l_1 \Rightarrow A_{1t} = A_{2t}$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \mathbf{0} = A_{1n} \Delta s - A_{2n} \Delta s \Rightarrow A_{1n} = A_{2n}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{1t} &= A_{2t} \\ A_{1n} &= A_{2n} \end{aligned} \right\} \vec{A}_1 = \vec{A}_2$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

- 位函数在分界面上都是连续的，这是位函数良好数学特性的表现；
- 矢量磁位的连续包括矢量方向；





3.3 恒定磁场

3.3.3 恒定磁场的边界条件

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \xrightarrow{\text{无源区}} \nabla^2 \vec{A} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{1t} = A_{2t} \\ A_{1n} = A_{2n} \end{array} \right\} \vec{A}_1 = \vec{A}_2$$
$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

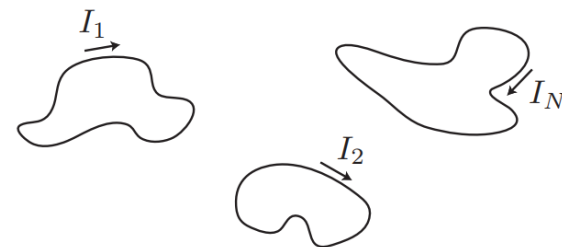
- 边值问题：泛定方程+边界条件=定解；

3.3 恒定磁场

3.3.4 电感



- 导体回路中可以有电流；
- 电流产生了磁场；
- 磁场在导体回路中产生了磁通量；
- 若电流的增加，磁场和磁通量都会增加；
- 这个变化的过程中，磁通量与电流的比值（都是标量）保持不变；



这个比值表明了导体回路的一个属性：**电感**

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ L \\ W_m \end{array} \right.$$

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$



3.3 恒定磁场

3.3.4 电感

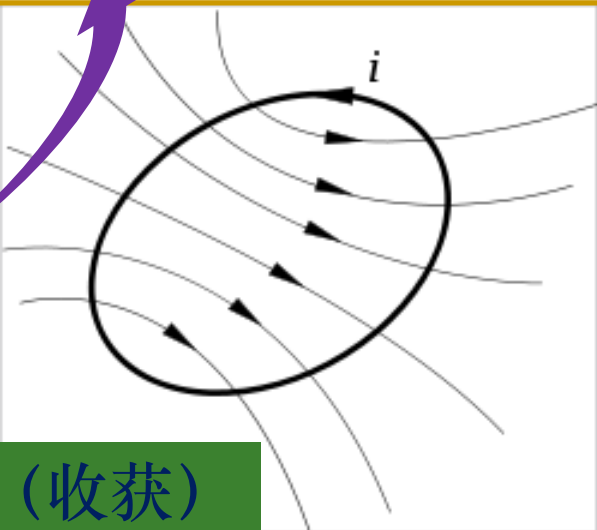
这个比值表明了导体回路的一个属性：**电感**

- 导体回路中可以有电流；
- 电流产生了磁场；
- 磁场在导体回路中产生了磁通量；
- 若电流的增加，磁场和磁通量都会增加；
- 这个变化的过程中，磁通量与电流的比值（**都是标量**）保持不变；

物理过程

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J} \\ \psi &= \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{线性系统} \\ \Rightarrow I \propto \psi \Rightarrow L = \frac{\psi}{I} \end{array}$$

数学描述



线性系统：人有多大胆（投入），地有多大产（收获）

3.3 恒定磁场

3.3.4 电感



在线性各向同性媒质中，电流回路的磁场与回路中的电流成正比，穿过回路的磁通也与回路中的电流成正比。

记： $\Psi = \sum_k \Phi_k$ 为磁链，是指与某电流交链的磁通，是各匝磁通之和。

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (H)$$

为回路的电感

I 为导线中的全部电流

电感只决定于回路的形状，尺寸和媒质的磁导率，而与回路电流大小无关（电感是系统的表征，与信号无关）。

到此为止：电磁场（信号）与媒质（系统）

- 电容：储存电荷与储存电场能；
- 电导：传导电流与损耗电场能；
- 电感：??

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon \Leftrightarrow C = \frac{\varepsilon S}{d} \\ \sigma \Leftrightarrow R = \frac{l}{\sigma S} \\ \mu \Leftrightarrow L = ? \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{线性系统}} \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{q}{U} \\ R = \frac{U}{I} \\ L = \frac{\Psi}{I} \end{array} \right.$$

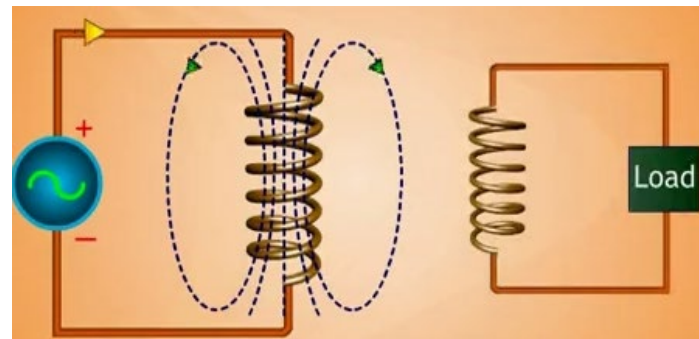
3.3 恒定磁场

3.3.4 电感

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (H)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

- 电感反映了对电流变化的反作用；
- 电感的定义是静态的，功能体现在动态过程中；

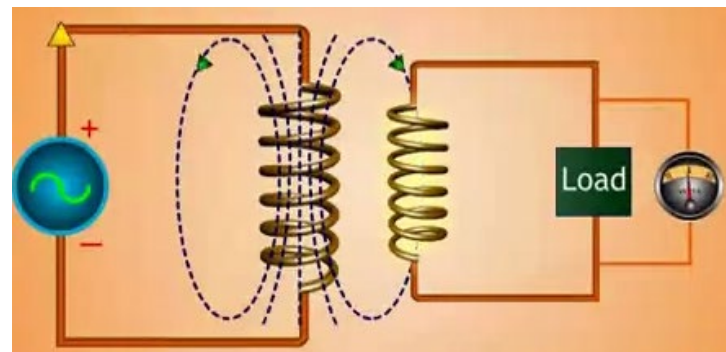


孤立回路的电感：自感

当一个线圈中的电流发生变化时，它产生的磁场在其本身也会激发出感应电动势，这种现象叫做自感现象；其在本身回路中产生的磁链与电流的比值称为回路的自感系数，简称自感。

回路之间的电感：互感

当一个线圈中的电流发生变化时，它产生的磁场在另一个回路也会激发出感应电动势，这种现象叫做互感现象；其在另一回路中产生的磁链与电流的比值称为回路间的互感系数，简称互感。



3.3 恒定磁场



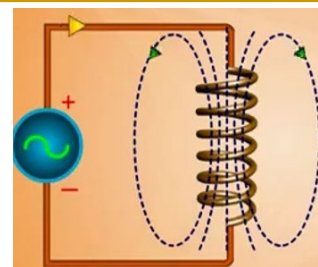
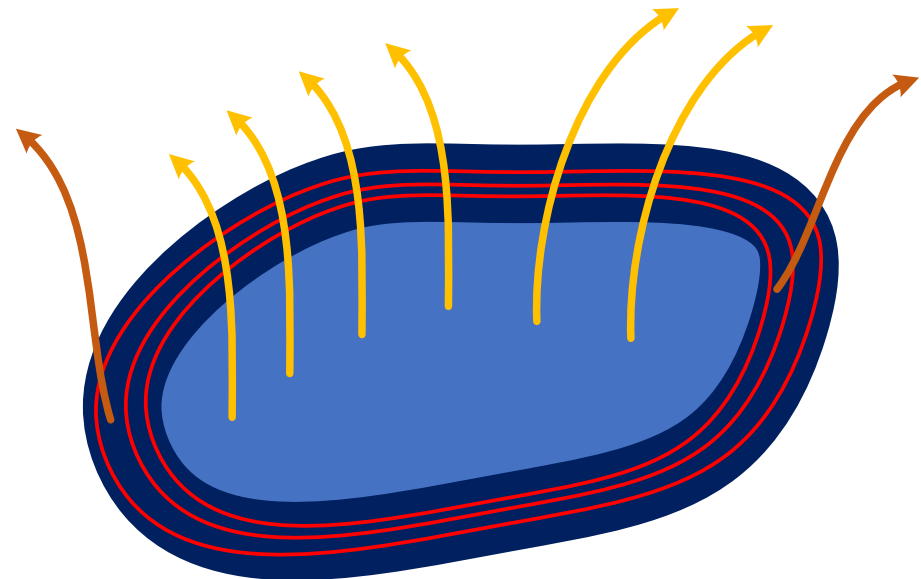
3.3.4 电感

回路的电感：自感

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (H)$$

全部在导体外部的磁链为外磁链 Ψ_e

全部在导体内部的磁链为内磁链 Ψ_i



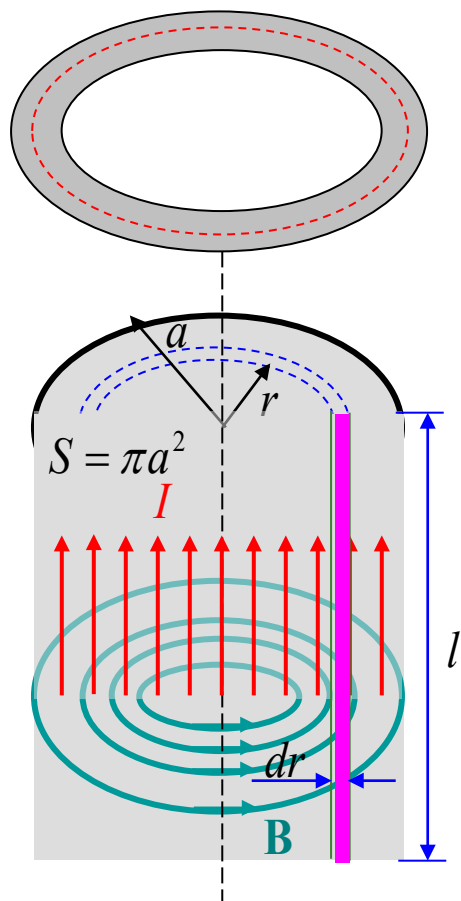
$$L = \begin{cases} L_e, & \text{外自感 } L_e = \frac{\Psi_e}{I} \\ + \\ L_i, & \text{内自感 } L_i = \frac{\Psi_i}{I}, \text{ 非磁性媒质常可忽略} \end{cases}$$

$$\text{电感} \begin{cases} \text{自感} \begin{cases} \text{外自感} \\ \text{内自感} \end{cases} \\ \text{互感} \end{cases}$$

3.3 恒定磁场

3.3.4 电感

长直导线的内自感



$$\begin{aligned} \text{假定电流均匀分布} \Rightarrow & \begin{cases} I' = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \\ \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\phi 2\pi r = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} = \vec{a}_\phi \mu \frac{I}{2\pi a^2} r & \Leftrightarrow \text{与 } r \text{ 圆带处的电流较链的 } \vec{B} \\ \Rightarrow d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B l dr & \Leftrightarrow \text{与 } I' \text{ 而非 } I \text{ 较链} \Leftrightarrow d\Psi = \frac{I'}{I} d\Phi \\ \Rightarrow d\Psi = \frac{r^2}{a^2} d\Phi = \frac{r^2}{a^2} \mu \frac{I}{2\pi a^2} r \cdot l dr & = \frac{\mu I l}{2\pi a^4} r^3 dr \\ \Rightarrow \Psi = \int_0^a \frac{\mu I l}{2\pi a^4} r^3 dr = \frac{\mu I l}{8\pi} \end{aligned}$$

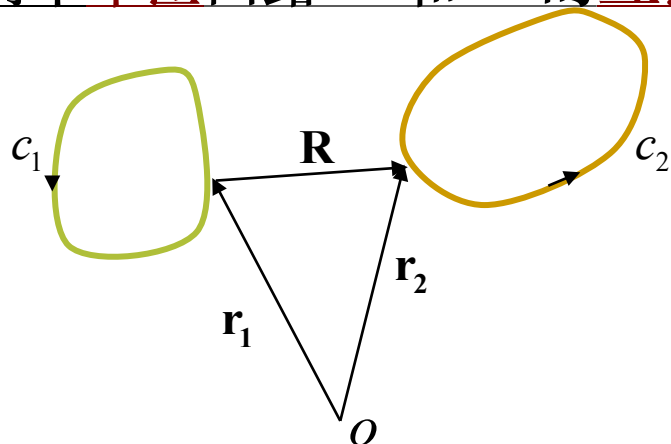
则单位长度的圆截面导线的内自感为

$$L = \frac{\mu}{8\pi}$$

3.3 恒定磁场

3.3.4 电感

两个单匝回路C1和C2的互感



$$\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

设C₁通过电流I₁，对C₂的互感磁链

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \oint_{C_2} \vec{A}_{21} \cdot d\vec{l}_2 \quad \text{而} \quad \vec{A}_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{R}$$

所以

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}$$

得到

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}$$

同理

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{R}$$

诺依曼公式 $M_{12} = M_{21} = M$



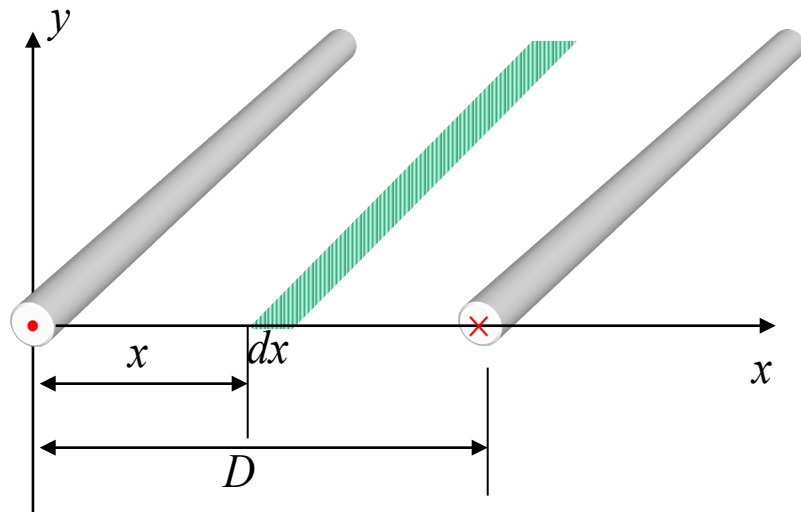
无论自身如何，关系是对等的



课后范例

例14: 求双线传输线单位长度的自感。导线半径为 a ，导线间距 $D \gg a$ 。

双导线之间平面上任一点总的磁感应强度：



$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) = \vec{a}_y \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(D-x)} \right)$$

$$\begin{aligned} \Psi_e &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{D-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(D-x)} \right) dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D-a}{a} \end{aligned}$$

单位长度的外自感为

$$L_e = \frac{\Psi_e}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-a}{a} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

单位长度的内自感为

$$L_i = 2 \times \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\text{总自感为 } L = L_i + L_e = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

解：坐标如图所示，由 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$
得二导线在 x 处产生的磁场分别为

$$\vec{H}_1 = \vec{a}_y \frac{I}{2\pi x}, \quad \vec{H}_2 = \vec{a}_y \frac{I}{2\pi(D-x)}$$

习题4

无限长同轴线，已知内导体半径为 a ，外导体内半径为 b ，内外导体间介质的介电常数和电导率为 ε, σ ，设外导体壁厚较小，求单位长度同轴线的电感。

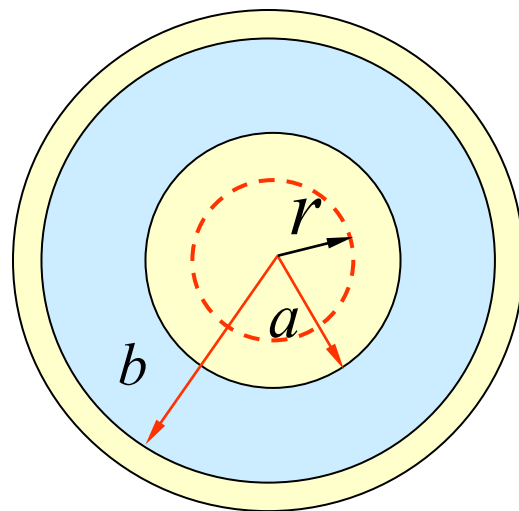
解：同轴线单位长度的电感可分为内导体中的内自感、内外导体之间的外自感和外导体中的内自感三部分。

(1) **内导体的内自感** ($0 \leq r \leq a$)

如图所示，由安培环路定律得

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I' \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\phi 2\pi r \\ I' = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{a^2} I \end{array} \right.$$

所以： $\vec{B}_i = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi$



单位长度内导体截面的磁通量为 $d\Psi_i = \vec{B}_i \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} dr$



$d\psi_i$ 只和半径为 r 的圆截面内的电流 I' 交链，与总电流 I 相交链的磁链为

:

$$I' = \frac{r^2}{a^2} I$$

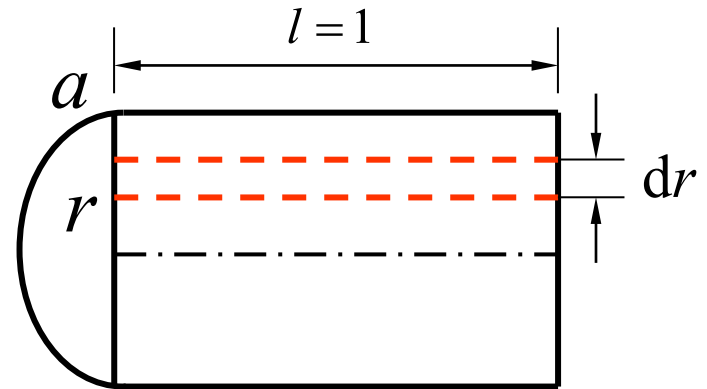
$$d\mathcal{A}_i = \frac{r^2}{a^2} d\psi_i = \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \right) dr = \frac{\mu_0 r^3 I}{2\pi a^4} dr$$

在内导体内的总磁链为：

$$\mathcal{A}_i = \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} r^3 dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

所以：内导体单位长度的内自感为

$$L_i = \frac{\mathcal{A}_i}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (\text{H/m})$$



(2) 内外导体间的外自感 $(a \leq r \leq b)$

根据安培环路定律

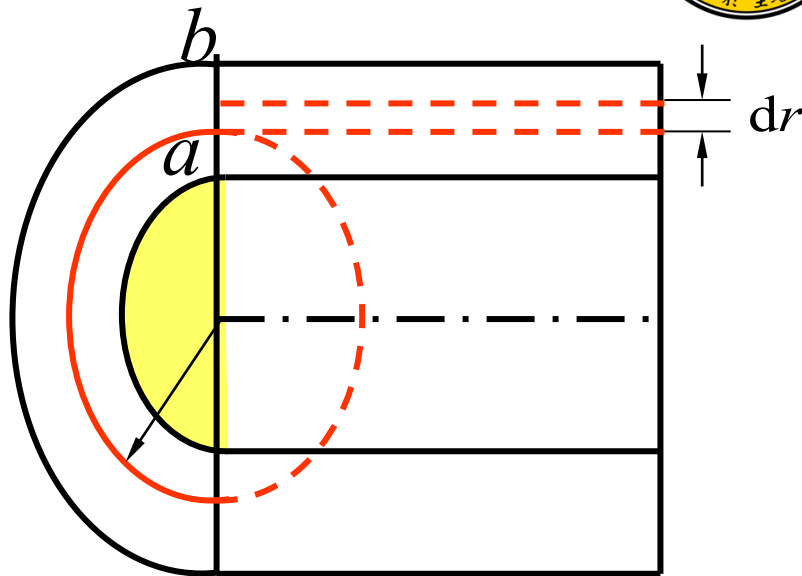
$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \longrightarrow \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

内外导体之间单位长度上的磁通为：

$$\Psi_0 = \int_s \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = \int_a^b \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi r} \right) dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

同轴线单位长度的外自感为：

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{H/m})$$



(3) 外导体中的内自感

按题意，外导体的壁很薄，可以认为电流只在 $r = b$ 的壁面上流动，这样外导体中的内自感为零。 $L_3 = 0$

于是同轴线单位长度的总电感为

$$L = L_i + L_0 = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{H/m})$$



3.3 恒定磁场

3.3.5 恒定磁场的能量

3.3.5.1 磁场能量

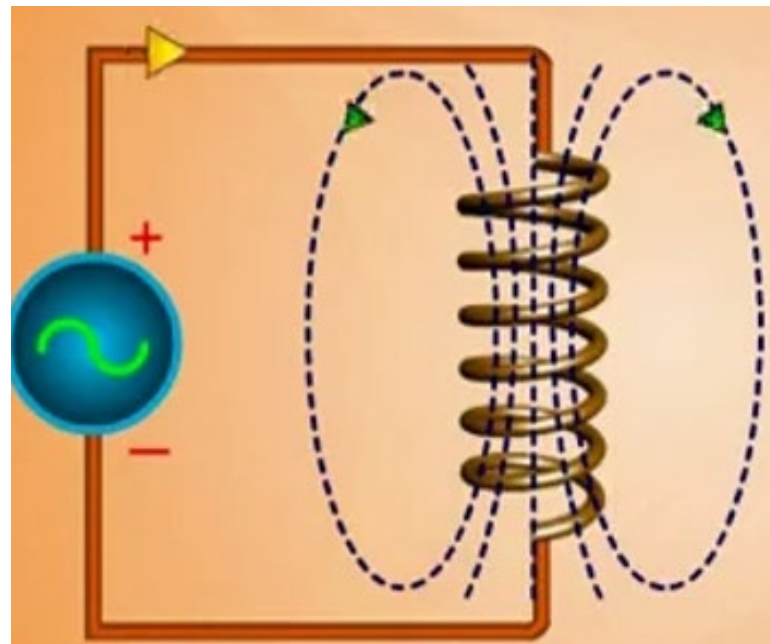
$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV \Leftarrow \text{源量表示, 能量的来源}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E^2 dV \Leftarrow \text{场量表示, 能量的所在}$$

磁场的能量来源于建立**电流**的过程中由电源提供的能量。

孤立回路的情况：

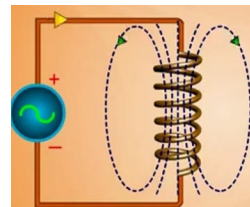
- 导体回路在**外电源**作用下出现电流；
- 电流产生了磁场并与电流比例增加；
- 导体回路中的磁通量随时间变化产生感应电动势；
- 该感应电动势阻碍电流进一步变化；
- 外电源克服感应电动势做功-**磁场能**；



3.3 恒定磁场

3.3.5 恒定磁场的能量

3.3.5.1 磁场能量



孤立回路的情况：

- 导体回路在**外电源**作用下出现电流；
- 电流产生了磁场并与电流比例增加；
- 导体回路中的磁通量随时间变化产生感应电动势；
- 该感应电动势阻碍电流进一步变化；
- 外电源克服感应电动势做功-**磁场能**；

i : 从零开始按照 αI 增加到 I

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$$

$$\Psi = \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d(\alpha\Psi)}{dt} = -\frac{\Psi d\alpha}{dt}$$

$$dA = -\varepsilon i dt = \frac{\Psi d\alpha}{dt} \cdot \alpha I \cdot dt = I\Psi \alpha d\alpha$$

物理过程

数学描述

$$A = \int_0^1 I\Psi \alpha d\alpha = I\Psi \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} I\Psi = \frac{1}{2} L I^2 = W_m$$

3.3 恒定磁场

孤立回路的情况：

$$W_m = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} L I^2$$

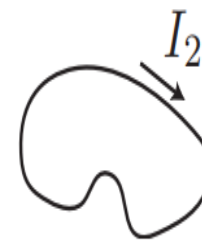
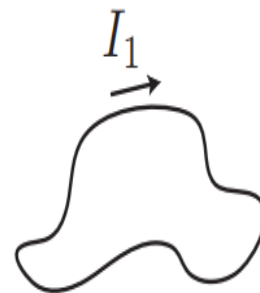
多个回路的情况：

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k$$

叠加原理

将磁链用电感来表示，则：

$$\Psi_k = \sum_{j=1}^n M_{kj} I_j \begin{cases} j \neq k \text{ 时, } M_{kj} \text{ 是互感系数} \\ j = k \text{ 时, } M_{kj} \text{ 是自感系数} \end{cases}$$



例如： $\Psi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + \cdots + M_{1j} I_j + \cdots + M_{1n} I_n$

3.3 恒定磁场

多个回路的情况：

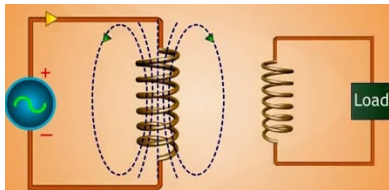
$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M_{kj} I_j I_k$$

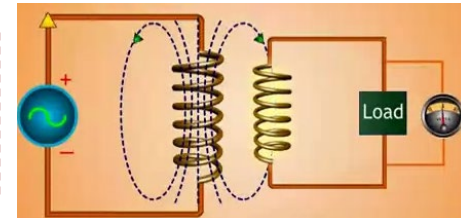
当n=1即单个回路情况下：

当n=2时：

$$W_m = \frac{1}{2} I_1^2 L_1$$



$$W_m = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2) + M I_1 I_2$$





3.3 恒定磁场

3.3.5.2 能量密度

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k \Psi_k \Rightarrow \text{源量表示}$$

由 $\Psi_k = \oint_{C_k} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ 可得:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \oint_{C_k} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} \vec{A} \cdot (I_k d\vec{l}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{V_k} \vec{A} \cdot \vec{J} dV \\ \Rightarrow W_m &= \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) dV \end{aligned}$$

根据恒等式 $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV \\ &= \frac{1}{2} \oint_S (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{平方反比律 } \mathbf{H} \sim \frac{1}{R^2}, \mathbf{A} \sim \frac{1}{R}]{\text{整个空间 } R \rightarrow \infty} W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV$$



3.3 恒定磁场

3.3.5.2 能量密度

$$W_m = \int_V \left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k \Rightarrow \text{源量表示} \Rightarrow \text{如何产生}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \Rightarrow \text{场量表示} \Rightarrow \text{存在哪里}$$

- 计算公式不是定义式，不能说明物理意义；
- 计算正确的原因，电荷是场源，水池里的水量可以通过水龙头流进和排水口流出的水量计算，但水储存在水池中；
- 静电场和静磁场能量的源量表示和场量表示都可行，但对于时变场不是这样；
- 静电场能量存在哪里—费恩曼书第二卷；
- 强调能量的场表示形式，因为在时变场情况下，场的表示形式依然正确；

课后范例

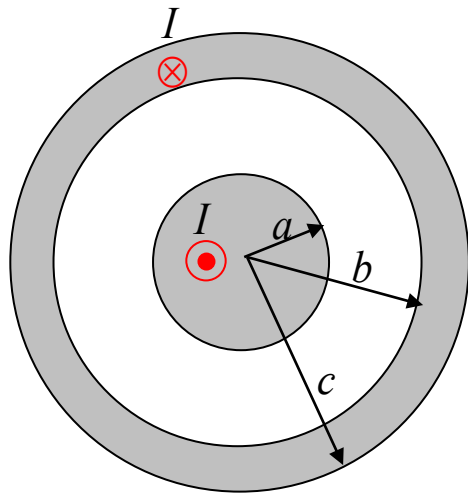
例15：求无限长同轴线单位长度内的磁场能量，导体和填充物的磁导率均为 μ_0

解：根据安培环路定律，

$$\vec{H}_1 = \vec{a}_\phi \frac{I \pi r^2}{\pi a^2} \frac{1}{2\pi r} = \vec{a}_\phi \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad (0 \leq r \leq a)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{a}_\phi \frac{I}{2\pi r} \quad (a \leq r \leq b)$$

$$\vec{H}_3 = \vec{a}_\phi \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \quad (b \leq r \leq c)$$



三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^a H_1^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{2} \int_0^a \left(\frac{I}{2\pi a} \right)^2 2\pi r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad (J/m)$$

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{2} \int_a^b H_2^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (J/m)$$



$$\begin{aligned} W_{m3} &= \frac{\mu_0}{2} \int_b^c H_3^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{2} \mu_0 \int_b^c \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)^2 2\pi r dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \quad (J/m) \end{aligned}$$

因此单位长度总磁场能量为：
$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3}$$

所以同轴线单位长度的总电感为：

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{2}{I^2} (W_{m1} + W_{m2} + W_{m3}) = L_{in} + L_0 + L'_{in} \quad (H/m)$$

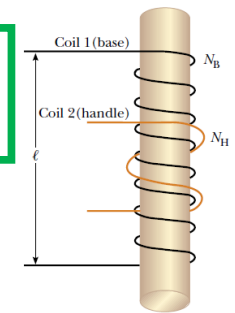
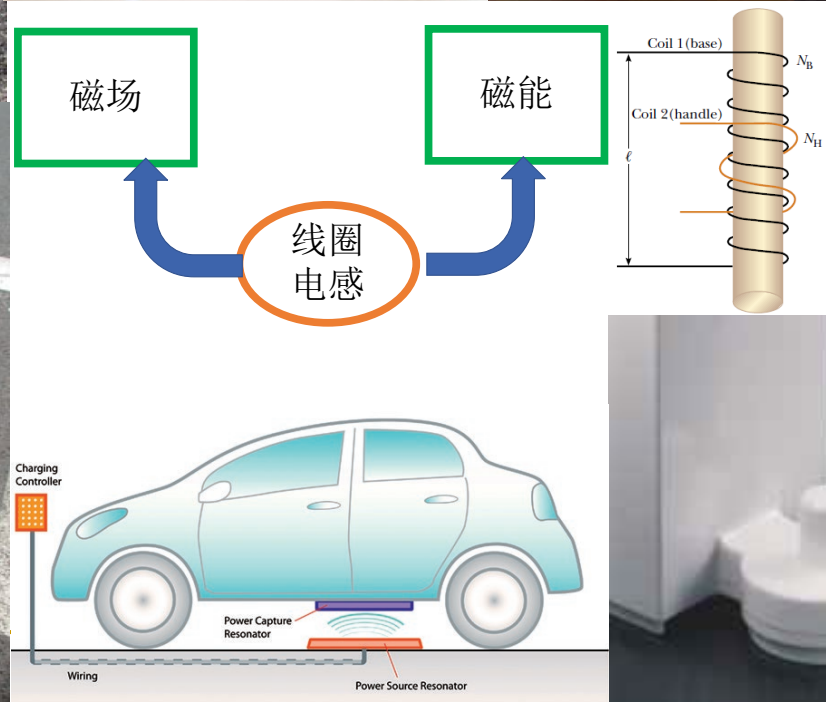
其中 $L_{in} = \frac{2}{I^2} W_{m1} = \frac{\mu_0}{8\pi}$ (内导体的内自感)

$L_0 = \frac{2}{I^2} W_{m2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ (内外导体间的外自感)

$L'_{in} = \frac{2}{I^2} W_{m3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - a^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - a^2)} \right]$ (外导体的内自感)

3.3 恒定磁场

3.3.6 恒定磁场的应用





3.3 恒定磁场-反思

静电场的求解过程

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \nabla \varphi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi \quad \left. \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = -\nabla \varphi \\ C \\ W_e \end{cases}$$

静磁场的求解过程

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ L \\ W_m \end{cases}$$

- 标量电位还适用于时变场吗？矢量磁位还适用于时变场吗？
- 位函数求解的优势，有没有可能推广到时变场？



内容导言

- 静电场，恒流电场和静磁场属于静态电磁场；
- 亥姆霍兹定理，揭示了研究电磁场的“套路”；
- 此后，在各种情况下求解场方程是主要内容；
- 场概念下定义的电容，电导和电感；
- 求解场方程是边值问题-第四章；
- 本章很多结论只适用于静态场，不可随意推广到时变场；

$$\text{静态电磁场} \left\{ \begin{array}{l} \text{静电场} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right. \\ \text{恒流电场} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{array} \right. \\ \text{静磁场} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



作业

P90 习题3.5

P90 习题3.6 (注意: 只求内外导体间的磁场能量和电感!)

另外:

(1) 根据磁场能公式求解长直圆柱导线的内自感; 并比较两种求解方法的异同; (论文中有多种解法; 学习检索论文, 锻炼获取信息的能力;)

(2) 回顾静电场, 恒流电场和静磁场的学习路线并对照总结为路线图; (锻炼自我总结的能力)