1. (20 points) 设 $\mathscr{R}$ 由三个元素 r_1,r_2 和 r_3 组成，有 $r_3 \prec r_2 \prec r_1$, 效用函数为 $U(r_3) = 0$,$U(r_2) = u$, 及 $U(r_1) = 1$, 其中 $0 < u < 1$
   (a) 若 $P = (p_1, p_2, p_3)$，$Q = (q_1, q_2, q_3)$ 为 $\mathscr{P}$ 中的两个元素（$\mathscr{R}$ 上的两个分布），陈述使 $P \prec Q$ 的数值条件（根据 p_i,q_j 和 u）
   (b) 假设 $(0.3, 0.3, 0.4) \prec (0.5, 0, 0.5)$, 那么 $(0.2, 0.5, 0.3)$ 与 $(0.4, 0.2, 0.4)$ 的关系如何？ u 为多少？

答:

(a) 对 $P \prec Q$ 有:

$p_1 + up_2 < q_1 + uq_2$

(b) $(0.3, 0.3, 0.4) \prec (0.5, 0, 0.5)$，有:

$0.3 + 0.3u < 0.5$，即 $0.3u < 0.2$,$u < 2/3$

对于 $(0.2, 0.5, 0.3)$ 与 $(0.4, 0.2, 0.4)$ 有:

$(0.2 + 0.5u) - (0.4 + 0.2u) = 0.3u - 0.2 < 0$, 即 $(0.2, 0.5, 0.3) \prec (0.4, 0.2, 0.4)$

2. (20 points) Robin 先生决定他的财产变化的效用函数在区间 $-100 \leqslant r \leqslant 500$ 时为

$$U(r) = (0.62)log[0.004r + 1]$$

   (a) 在获得 100 美元与以 2/3 的概率获得 0 美元和 1/3 的概率得 500 美元之间，他应选择哪一个？
   (b) 如要付 100 美元才能参加（a）中后一个博弈的话，他应该参加吗？

答:

(a) 获得 100 美元对于 Robin 的效用为:

$U(100) = (0.62)log[0.004 * 100 + 1] = 0.62 * log1.4$

以 2/3 的概率获得 0 美元和 1/3 的概率得 500 美元对于 Robin 的效用为:

$1/3 * U(500) = 1/3 * (0.62)log[0.004 * 500 + 1] = 1/3 * 0.62 * log3$

有 $0.62 * log1.4 < 1/3 * 0.62 * log3$，故 Robin 应选择以 2/3 的概率获得 0 美元和 1/3 的概率得 500 美元

(b) 此时以 2/3 的概率获得 0 美元和 1/3 的概率得 500 美元对于 Robin 的效用为:

$1/3 * U(400) + 2/3 * U(-100) = 1/3 * 0.62 * log2.6 + 2/3 * 0.62 * log0.6$

有 $0.62 * log1.4 > 1/3 * 0.62 * log2.6 + 2/3 * 0.62 * log0.6$，故 Robin 不应选择后一个博弈

3. (40 points) 某人有赌金 m>0 美元，他把赌金分别押在事件 A 及其补事件 A^c 上，A 发生的概率固定为 α(0<α<1)。令 $x(0 \leqslant x \leqslant m)$ 为押在事件 A 上的赌金，故押在 A^c 的赌金为 m-x。当 A 或 A^c 中的一个发生时，所得报酬即为所押赌金。他可在所以形为 $[\alpha(x) + (1 - \alpha)(m - x)]$ 的博弈中做选择。经过对 α 和 m 值各种可能情况的精心考虑，若定义在区间 [0,m] 的钱的效用函数 U 按以下方式给出时，找出 m 美元的最优分配方案。

(a) $U(r) = r^{\beta}, \beta > 1$

(b) $U(r) = r$

(c) $U(r) = r^{\beta}, 0 < \beta < 1$

(d) $U(r) = log(r + 1)$

答:

(a) 当 $2\alpha - 1 > 0$ 时：$x = m$，当 $2\alpha - 1 < 0$ 时：$x = 0$，当 $2\alpha - 1 = 0$ 时：$x = 0$，$x = m$

(b) 当 $2\alpha - 1 > 0$ 时：$x = m$，当 $2\alpha - 1 < 0$ 时：$x = 0$，当 $2\alpha - 1 = 0$ 时：x 可以取 $0 - m$ 任意值

(c) $U(r) = r^{\beta}, 0 < \beta < 1$ 时：有期望回报为：

$\alpha x^{\beta} + (1 - \alpha)(m - x)^{\beta}$, 此时求导后求得极值点为：

$x = \frac{m}{1 + \sqrt[\beta-1]{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$

(d) $U(r) = log(r + 1)$ 时：有期望回报为：

$\alpha log(x + 1) + (1 - \alpha) log(m - x + 1)$, 此时求导后求得极值点为：

$x = \alpha m + 2\alpha - 1$

当 $\alpha(2 + m) - 1 < 0$ 时：$x = 0$，当 $\alpha(2 + m) - 1 > m$ 时：$x = m$，当 $0 < \alpha(2 + m) - 1 < m$ 时：$x = \alpha(2 + m) - 1$

4. (20 points) 某投资者有 1000 美元投资于具有风险的股票事业。他将以 m 美元购买股票 A，1000-m 美元购买股票 B。股票 A 有 0.6 的可能性增值一倍，有 0.4 的可能使投资化为乌有；而股票 B 的以上两种可能分别为 0.7 及 0.3。投资者财产改变 x 的效用函数为 $U(x) = log[0,0007x + 1], -1000 \leqslant x \leqslant 1000$

(a) $\mathscr{R}$ 是什么（对固定的 m）?（它由四个元素组成）

(b) 根据前往效用，m 的最优值为多少?

（注：这也许可以说明为什么大多数投资者购买多种不同的股票和有价证券。）

答:

(a) r_1 代表 A 增值，B 也增值时的回报，r_2 代表 A 增值，B 亏损时的回报，r_3 代表 A 亏损，B 增值时的回报，r_4 代表 A 亏损，B 也亏损时的回报

(b) $U(r_1) = log[0,0007r_1 + 1] = log1.7$

$U(r_2) = log[0,0007r_2 + 1] = log(0.0007(2m - 1000) + 1)$

$U(r_2) = log[0,0007r_2 + 1] = log(0.0007(1000 - 2m) + 1)$

$U(r_1) = log[0,0007r_1 + 1] = log0.3$

此时的期望回报为：

$E(U) = 0.6 * 0.7 * U(r_1) + 0.6 * 0.3 * U(r_2) + 0.4 * 0.7 * U(r_3) + 0.4 * 0.3 * U(r_4)$

得 $E(U) = 0.42 * log1.7 + 0.12 * log0.3 + 0.18 * log(0.0014m + 0.3) + 0.28 * log(1.7 - 0.0014m)$

求极值得 $m \approx 344.7$

或按照以下损失计算:

$U(r_1) = log[0, 0007r_1 + 1] = log2.4$

$U(r_2) = log[0, 0007r_2 + 1] = log(0.0007(2m) + 1)$

$U(r_2) = log[0, 0007r_2 + 1] = log(0.0007(2000 - 2m) + 1)$

$U(r_1) = log[0, 0007r_1 + 1] = log1$

此时的期望回报为:

$E(U) = 0.6 * 0.7 * U(r_1) + 0.6 * 0.3 * U(r_2) + 0.4 * 0.7 * U(r_3) + 0.4 * 0.3 * U(r_4)$

得 $E(U) = 0.42 * log2.4 + 0.12 * log1 + 0.18 * log(0.0014m + 1) + 0.28 * log(2.4 - 0.0014m)$

求极值得 $m \approx 236$