1. (20 points) 某公司必须决定是接受还是拒绝一批进口零件（分别将它们记为行为 a_1 及 a_2），零件分三种类型：θ_1（很好的）；θ_2（可接受的）；θ_3（差的）。做决策所承担的损失 $L(\theta_i，a_j)$ 由下表给出：

	a_1	a_2
θ_1	0	3
θ_2	1	2
θ_3	3	0

先验信念为 $\pi(\theta_1) = \pi(\theta_2) = \pi(\theta_3) = \frac{1}{3}$

(a) 什么是贝叶斯行为?

(b) 什么是极小化极大非随机化行为?

答:

(a) 行为 a 的贝叶斯期望损失为:

$\rho(\pi, a_1)$=$\frac{1}{3}$*0+$\frac{1}{3}$*1+$\frac{1}{3}$*3=$\frac{4}{3}$

$\rho(\pi, a_2)$=$\frac{1}{3}$*3+$\frac{1}{3}$*2+$\frac{1}{3}$*0=$\frac{5}{3}$

故有 $\rho(\pi, a_1)$<$\rho(\pi, a_2)$, 即 a_1 是贝叶斯行为

(b) 对决策有

$\sup\limits_{\theta} L(\theta, a_1) = \max\{0,1,3\}=3$

$\sup\limits_{\theta} L(\theta, a_2) = \max\{3,2,0\}=3$

既有 $\sup\limits_{\theta} L(\theta, a_1) = \sup\limits_{\theta} L(\theta, a_2)$

即 a_1 和 a_2 都是极小化极大非随机化行为。

2. (30 points) 某职业垒球队考虑他们来年的参赛安排，要决定是否进行一场 50 万美元的宣传活动。如果这个队是强队，大约会有 4 百万美元的出场年收入（不管是否进行宣传活动）。令 θ 表示这个队的胜率，若 $\theta \geq 0.6$，这个队将是一个强队；若 $\theta < 0.6$，且不进行宣传活动，他们的年出场收入为 $1 + 5\theta$ 百万美元，而进行宣传活动的话，年出场收入为 $2 + (10/3)\theta$ 百万美元。θ 为 $\mathscr{U}(0\ 1)$ 分布

(a) 描述 $\mathscr{A}$、Θ 及 $L(\theta, a)$。

(b) 什么是贝叶斯行为?

(c) 什么是极小化极大非随机化行为?

答:

(a) 决策空间 $\mathscr{A}$=$\{a_1$,$a_2\}$, 其中 a_1 表示进行宣传活动，a_2 表示不进行宣传活动；

参数空间 Θ=$\{\theta_1$,$\theta_2\}$, 其中 θ_1 表示 $\theta<0.6$,θ_2 表示 $\theta\geq 0.6$；

对应的损失函数 $L(\theta,a)$ 为：

	a_1	a_2
θ_1	$-(1.5+\frac{10}{3}\theta)$	$-(1+5\theta)$
θ_2	-3.5	-4

(b) 行为 a 的贝叶斯期望损失为:

$\rho(\pi,a_1)$=$\int_0^{0.6}-(1.5+\frac{10}{3}\theta)d\theta$+$0.4*(-3.5)$=$-2.9$

$\rho(\pi,a_2)$=$\int_0^{0.6}-(1+5\theta)d\theta$+$0.4*(-4)$=$-3.1$

故有 $\rho(\pi,a_1)$>$\rho(\pi,a_2)$, 即 a_2 是贝叶斯行为

(c) 对决策有

$\sup\limits_{\theta} L(\theta,a_1)=\max\{\max\limits_{0<\theta<0.6}-(1.5+\frac{10}{3}\theta)$,-3.5$\}$=-1.5

$\sup\limits_{\theta} L(\theta,a_2)=\max\{\max\limits_{0<\theta<0.6}-(1+5\theta)$,-4$\}$=-1

既有 $\sup\limits_{\theta} L(\theta,a_1)<\sup\limits_{\theta} L(\theta,a_2)$

即 a_1 都是极小化极大非随机化行为。

3. (50 points) 滑雪板店的老板必须为下一个滑雪季节订购滑雪板。订单以 25 付为单位。如订购 25 付，每付 50 美元；如订购 50 付，每付 45 美元；如订购 75 付，每付 40 美元。每付滑雪板卖给顾客的零售价为 75 美元，年终之后剩下的每付滑雪板（保证）还能卖 25 美元一付。如果正在滑雪季节。店铺的滑雪板卖光了，老板将承受对来买的顾客的“信誉”损失，他估计，对每一位来购买而没有买到的顾客，信誉损失为 5 美元。为了简化，老板认为对滑雪板需求量为 30，40，50，60 付的概率分别为 0.2，0.4，0.2，0.2。

(a) 描述 $\mathscr{A}$、Θ、损失矩阵和先验分布。

(b) 哪些行为是容许的?

(c) 什么是贝叶斯行为?

(d) 什么是极小化极大非随机化行为?

答:

(a) 决策空间 $\mathscr{A}$=$\{a_1$,a_2,$a_3\}$, 其中 a_1 表示订购 25 付，a_2 表示订购 50 付，,a_3 表示订购 75 付；

参数空间 Θ=$\{\theta_1$,θ_2,θ_3,$\theta_4\}$, 其中 θ_1 表示滑雪板需求量为 30,θ_2 表示滑雪板需求量为 40,θ_3 表示滑雪板需求量为 50,θ_4 表示滑雪板需求量为 60；

对应的损失函数 $L(\theta, a)$ 为：

	a_1	a_2	a_3
θ_1	-600	-500	-375
θ_2	-550	-1000	-875
θ_3	-500	-1500	-1375
θ_4	-450	-1450	-1875

先验分布为 $\pi(\theta_1) = 0.2$，$\pi(\theta_2) = 0.4$，$\pi(\theta_3) = 0.2$，$\pi(\theta_4) = 0.2$

(b) 未出现所有 θ 取值严格的情况，故三种行为都是容许的

(c) 行为 a 的贝叶斯期望损失为:

$\rho(\pi, a_1)$=0.2*$-$600+0.4*$-$550+0.2*$-$500+0.2*$-$450 $= -530$

$\rho(\pi, a_2)$=0.2*$-$500+0.4*$-$1000+0.2*$-$1500+0.2*$-$1450 $= -1090$

$\rho(\pi, a_3)$=0.2*$-$375+0.4*$-$875+0.2*$-$1375+0.2*$-$1875 $= -1075$

故有 $\rho(\pi, a_2)$<$\rho(\pi, a_3)$<$\rho(\pi, a_1)$, 即 a_2 是贝叶斯行为

(d) 对决策有

$\sup\limits_{\theta} L(\theta, a_1) = \max\{-600,-550,-500,-450\}$=$-450$

$\sup\limits_{\theta} L(\theta, a_2) = \max\{-500,-1000,-1500,-1450\}$=-500

$\sup\limits_{\theta} L(\theta, a_3) = \max\{-375,-875,-1375,-1875\}$=-375

既有 $\sup\limits_{\theta} L(\theta, a_2) < \sup\limits_{\theta} L(\theta, a_1) < \sup\limits_{\theta} L(\theta, a_3)$

即 a_2 都是极小化极大非随机化行为。