2023010727 刘一鸣 计32

1. A的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $\lambda_i^k=0 \Rightarrow \lambda_i=0$，因此A的特征值均为0. $A=O_{n\times n}$

2. (1) $\overline{F_4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&\overline{w}&\overline{w}^2&\overline{w}^3\\1&\overline{w}^2&\overline{w}^4&\overline{w}^6\\1&\overline{w}^3&\overline{w}^6&\overline{w}^9\end{pmatrix}$ $F_4\overline{F_4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&w&w^2&w^3\\1&w^2&w^4&w^6\\1&w^3&w^6&w^9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&\overline{w}&\overline{w}^2&\overline{w}^3\\1&\overline{w}^2&\overline{w}^4&\overline{w}^6\\1&\overline{w}^3&\overline{w}^6&\overline{w}^9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4I$ 因此 $F_4^{-1}=\frac{1}{4}\overline{F_4}$

(2) $C_4F_4=\begin{pmatrix}p(1)&p(w)&p(w^2)&p(w^3)\\p(1)&wp(w)&w^2p(w^2)&w^3p(w^3)\\p(1)&w^2p(w)&w^4p(w^2)&w^6p(w^6)\\p(1)&w^3p(w)&w^6p(w^2)&w^9p(w^9)\end{pmatrix}=F_4\begin{pmatrix}p(1)&&&\\&p(w)&&\\&&p(w^2)&\\&&&p(w^3)\end{pmatrix}$

(3) $F_4^{-1}C_4F_4=\begin{pmatrix}p(1)&&&\\&p(w)&&\\&&p(w^2)&\\&&&p(w^3)\end{pmatrix}$ 令 $U=\frac{1}{2}F_4$，则 $U^HC_4U=\begin{pmatrix}p(1)&&&\\&p(w)&&\\&&p(w^2)&\\&&&p(w^3)\end{pmatrix} \Rightarrow C_4$ 为复正规矩阵.

3. (1) $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{2\pi}})=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}dx=1$ $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}})=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{2}\pi}dx=0$

$(\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}})=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2x}{\pi}dx=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=1$ $\cos x$ 同理. $(\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}})=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cos x}{\pi}dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2x}{2\pi}dx=0$

$(\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}})=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2x}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 2x\,dx=1$ $\cos 2x$ 同理 同理可知 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}$ 任意两个内积均为0

又 $V=\{c_0+c_1(\cos x+i\sin x)+c_2(\cos 2x+i\sin 2x)+c_{-1}(\cos x-i\sin x)+c_{-2}(\cos 2x-i\sin 2x)\}$ 可由 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}$ 表示

因此 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}$ 为一组标准正交基.

(2) 验证可得 $1,e^{ix},e^{-ix}$ 为W一组正交基 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}},\frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}}$ 为一组标准正交基

因此 $f(x)$ 在W上的正交投影为 $(f(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+(f(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix}+(f(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix}$

4. 若 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\vec{0}$，则成立. 否则，我们可以知道 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 分别为 $\lambda=0,2$ 的特征向量.

由T复正规知 $(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})=0 \Rightarrow a+b+c=0$

5. A为实正规矩阵 $\Rightarrow AA^T=A^TA$ 又 $A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\0&A_3\end{pmatrix}$ 故 $AA^T=A^TA$ 可得 $\begin{cases}A_1A_1^T+A_2A_2^T=A_1^TA_1\\A_2A_3^T=A_1^TA_2\\A_2^TA_2+A_3^TA_3=A_3A_3^T\end{cases} \Rightarrow A_2A_2^T=0 \Rightarrow A_2=0 \Rightarrow A_3^TA_3=A_3A_3^T$

因此 A_3 实正规

6. 特征值为 $\pm1,-2$. 故存在酉阵P使 $f=x^HAx \xrightarrow{\vec{x}=P\vec{y}} f=y^H\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}y$ 令 $y=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}z$，则 $f=z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_2}-z_3\overline{z_3}$

7. (1) 设 $A=C^HC$，$B=D^HD$. C, D均可逆 则 $AB=C^HCD^HD \Rightarrow (C^H)^{-1}ABC^H=CD^HDC^H=CD^H(CD^H)^H \Rightarrow AB$ 相似于正定阵 $\Rightarrow AB$ 特征值 >0

(2) $(AB)^H=B^HA^H=BA=AB \Rightarrow AB$ 为Hermite阵. 又由(1)知AB正定，故AB为正定Hermite阵.

8. A特征值最小为a，则令 $t=|a|+1$，故 $A+tI$ 特征值均大于0. 故 $A+tI$ 正定. 又 $(A+tI)^H=A^H+tI^H=A+tI$，故 $A+tI$ 为正定Hermite阵

9. $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ $A^TA=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&1\\5&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&5\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&6\\2&5&12\\6&12&30\end{pmatrix}$ 特征值为0, 1, 36. 对应特征向量分别为 $\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$

归一化为 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$ 因此奇异值分解为 $\overset{U}{\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}}\overset{\Sigma}{\begin{pmatrix}6&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}}\overset{V^T}{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}&-\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{5}{\sqrt{30}}&0&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}^T}$

令 $S=U\Sigma U^T=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ 为对称阵 $Q=UV^T=\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&\frac23\\\frac23&-\frac23&\frac13\\-\frac23&-\frac13&\frac23\end{pmatrix}$ 为正交阵 故极分解为 $SQ=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&\frac23\\\frac23&-\frac23&\frac13\\-\frac23&-\frac13&\frac23\end{pmatrix}$