2023010747 刘一铭 计32.

线性代数作业8.

1. $A=PJP^{-1}$

则 $A^m=PJ^mP^{-1}$

故只需求出其Jordan标准型

A特征值只有1. 因 $\mathrm{rank}(A+I)=1 \Rightarrow \dim\ker(A+I)=2. \Rightarrow J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

再解出 $\ker(A+I)$ 的一组基 $(A+I)v_1, v_2$.

可得 $P=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$A^m=PJ^mP^{-1}=(-1)^{m-1}\begin{pmatrix}3m-1&6m&-15m\\m&2m-1&-5m\\m&2m&-5m-1\end{pmatrix}$$

2. A有特征值 $-1, 2$. 代数重数为1, 3.

$\mathrm{rank}(A-2I)=3. \Rightarrow J=\begin{pmatrix}-1&&&\\&2&1&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}$

$\ker(A+I)$ 的基为 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\ker(A-2I)$ 的基为 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$. 解 $(A-2I)^2v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $(A-2I)v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

知 $P=\begin{pmatrix}0&0&1&5\\0&0&-2&-9\\1&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$

3. $m_A(\lambda)$ 次数为 n. 故. $f_A(\lambda)=m_A(\lambda) \Rightarrow$ λ的Jordan块的最大阶数 = λ的Jordan块阶数和

因此λ的Jordan块只有一个. 因此各个Jordan块对角线元素不同

4. $m_A(\lambda) \mid x^2-x \Rightarrow m_A(\lambda)$ 无重根 $\Rightarrow$ A可对角化.

又 x^2-x 根为0或1. 因此A特征值为0或1

因此 $\mathrm{rank}(A)$ 为1的个数. 故 $|\lambda I-A|=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$

5. $e^{At}=e^{PJP^{-1}}=Pe^JP^{-1}$

$At=PJP^{-1} \Rightarrow J=\begin{pmatrix}ati&\\&-ati\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{At}=\begin{pmatrix}\cos at&-\sin at\\\sin at&\cos at\end{pmatrix}$

6. $e^A=I+A+\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots=I+A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{3!}A+\cdots=I+eA$

$\sin A=A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5+\cdots=(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots)A=(\sin 1)A$

$\cos A=I-\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{4!}A^4-\cdots=I-\frac{1}{2!}A+\frac{1}{4!}A-\cdots=I+(\cos 1-1)A$

7. $e^{Bt}=(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(Bt)^i}{i!})$, 又由于 $AB=BA$. 故,

$Ae^{Bt}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A(Bt)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{AB^it^i}{i!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B^it^iA}{i!}=e^{Bt}A.$

8. $(e^A)^H=(I+A+\frac{1}{2}A^2+\cdots)^H=I+A^H+\frac{1}{2}A^{H^2}+\cdots=e^{A^H}$

$(iA)^H=(-i)A^H$. 若 $A^H=A$. 则 $(iA)^H=-iA$

$(e^{iA})(e^{iA})^H=e^{iA}\cdot e^{(iA)^H}=e^{iA}\cdot e^{-iA}=e^0=I$