2023010747 刘一铭

线性代数附加题:

1. (1) 注意到 $J_{\sqrt{\lambda_0},m}$ 特征值为 $\sqrt{\lambda_0}$, $J^2_{\sqrt{\lambda_0},m}$ 特征值为 λ_0 且 $\lambda_0 \neq 0$

故存在 P 使 $P^{-1}J_{\lambda_0,m}P = J^2_{\sqrt{\lambda_0},m} \Rightarrow J_{\lambda_0,m} = PJ_{\sqrt{\lambda_0},m}\cdot P^{-1}\cdot P\cdot J_{\sqrt{\lambda_0},m}\cdot P^{-1} = (PJ_{\sqrt{\lambda_0},m}P^{-1})^2$

因此任一Jordan块均有平方根

又 $A = QJQ^{-1} = Q\begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_t\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} J_{\sqrt{\lambda_1},m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\sqrt{\lambda_t},m_t}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_t\end{bmatrix}Q^{-1} = (Q\begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_t\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} J_{\sqrt{\lambda_1},m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\sqrt{\lambda_t},m_t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_t\end{bmatrix}Q^{-1})^2 = B^2$

(2) $J^2_{0,2r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0\end{bmatrix}$ $\lambda=0$. 且 $r((J^2_{0,2r})^{r-1}) + r((J^2_{0,2r})^{r+1}) - 2r((J^2_{0,2r})^{r}) = 2$

故 $J^2_{0,2r}$ 与 $\begin{bmatrix} J_{0,r} & \\ & J_{0,r}\end{bmatrix}$ 相似

类似知 $J^2_{0,2r+1}$ 阶数为 r 的Jordan块数目为1,故 $J^2_{0,2r+1}$ 与 $\begin{bmatrix} J_{0,r} & \\ & J_{0,r+1}\end{bmatrix}$ 相似

(3) 若 A 有平方根 B, $B^2=A$.

则 B 的Jordan标准型 J_B 有 J_B^2 相似于 $J_{0,r}$.

$J_{0,r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$ $J_B^2 = \begin{pmatrix} J_{0,m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{0,m_t}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} J^2_{0,m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J^2_{0,m_t}\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(J_{0,r}) = r-1$

$\mathrm{rank}(J_B^2) = \sum_{i=1}^{t}\mathrm{rank}(J^2_{0,m_i}) \le r-2$. 因此 $\mathrm{rank}(J_{0,r}) \neq \mathrm{rank}(J_B^2)$.

故 A 没有平方根

2. A 是幂零矩阵,特征值为0

$A = PJP^{-1} \Rightarrow I+A = P(I+J)P^{-1}$. $e^A = Pe^JP^{-1}$. 只需证 e^J 与 $I+J$ 相似

又 $e^J - I$ 为幂零. e^J 特征值为1. 且 $\mathrm{rank}((e^J-I)^{n+1}) + \mathrm{rank}((e^J-I)^{n-1}) - 2\mathrm{rank}((e^J-I)^n) = 1$

故 e^J 相似于 $I+J$

故 e^A 相似于 $I+A$

3. 设 $P^{-1}AP = J$. 则 $J = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$

$P^{-1}(\sin A)P = \sin(P^{-1}AP) = \sin J = \begin{pmatrix}\sin\lambda_1 & 0 \\ 0 & \sin\lambda_2\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 \\ 0 & \sin\lambda_0\end{pmatrix}$

又若 $\sin A = \begin{pmatrix}1 & 2023 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 则 $\sin\lambda_1 = \sin\lambda_2 = 1$ 或 $\sin\lambda_0 = 1$

均得到 $P^{-1}(\sin A)P = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = I \Rightarrow \sin A = I$ 矛盾.

故不存在 A 使 $\sin A = \begin{pmatrix}1 & 2023 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

4. 设极小多项式 $m_A(\lambda) = (\lambda-u_1)^{m_1}(\lambda-u_2)^{m_2}\cdots(\lambda-u_s)^{m_s}$. $P^{-1}AP = J$. 则 $J = \begin{pmatrix} J_{u_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{u_s}\end{pmatrix}$

设特征多项式为 $m_A(\lambda) = (\lambda-u_1)^{n_1}\cdots(\lambda-u_s)^{n_s}$.

则 若 $u_i \neq 0$ $\mathrm{rank}(J_{u_i}) = n_i \ge m_i$. 若 $u_i = 0$ $\mathrm{rank}(J_{u_i}) = n_i - t$ (t为块的数量). 又最大块大小 $m_i \le n_i - (t_i - 1)$

故 $\mathrm{rank}(J_{u_i}) \ge m_i - 1$

因此 $r(A) = \sum_{i=1}^{s}\mathrm{rank}(J_{u_i}) \ge \sum_{i=1}^{s} m_i - 1 \Rightarrow$ 极小多项式次数 $\le r(A)+1$