2023010747 刘一[illegible]

1. 由 Riesz 表示定理 $u_i = \varphi_i(\vec{e}_1)\vec{e}_1 + \varphi_i(\vec{e}_2)\vec{e}_2 + \varphi_i(\vec{e}_3)\vec{e}_3$

将 $1, x, x^2$ 正交化后知 $P_2(\mathbb{R})$ 的一组正交基为 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3})$

因此 $u_1 = -\frac{15}{8}x^2 + \frac{9}{8}$，$u_2 = \frac{3}{2}x$

2. (1) 若 $c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x) = 0$. 令 $x = b_1$ 知 $c_1 = 0$. 同理有 $c_2 = c_3 = 0$. 故 $p_1(x)$. $p_2(x)$. $p_3(x)$ 均为0

(2) 对偶积 $(p_1^*(x), p_2^*(x), p_3^*(x))$ 有 $\langle p_i^*(x), p_j(x)\rangle = \delta_{ij}$. $f(x) = c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x)$

$\langle p_i^*(x), f(x)\rangle = c_i$ 令 $x = b_i$ 知 $f(b_i) = c_ip_i(b_i) = c_i \Rightarrow p_i^*(f) = f(b_i)$

(3) $f(x) = f(b_1)p_1(x) + f(b_2)p_2(x) + f(b_3)p_3(x)$. 又 $f(b_i) = y_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{3} y_ip_i(x)$ 唯一

3. g. h 在基下矩阵为 A. B. $g(x,y) = x^TAy$ $h(x,y) = x^TBy$

若 φ 在基下表示矩阵为 P. 则 $g(\varphi(x), y) = (\varphi(x))^TAy = x^TP^TAy$. 又 $g(\varphi(x), y) = h(x,y)$ 对所有 x, y 均成立.

因此 $P^TA = B \Rightarrow P^T = BA^{-1} \Rightarrow P = (BA^{-1})^T$. 又 $P = (BA^{-1})^T$ 时 $g(\varphi(x), y) = x^TBA^{-1}Ay = x^TBy = h(x,y)$ 成立. 因此 φ 表示矩阵为 $(BA^{-1})^T$

4. 设 $\vec{u} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 是光向量. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 是时间向量. $g(\vec{u},\vec{u}) = 0 \Rightarrow c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = c_4^2$ $g(\vec{x},\vec{x}) < 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2$

$$g(x,u) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 - x_4c_4$$

由柯西不等式知 $|x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3| \le \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)} < \sqrt{c_4^2x_4^2} = |c_4x_4|$. 故 $g(x,u) \neq 0$. 光向量和时间向量不正交