2023010747 刘一铭

线性作业11

1. 设 $T(\vec{e_3}) = a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}$. 由于 T 是正交变换. 因此 $\begin{pmatrix}\frac23 & \frac23 & a\\ \frac23 & -\frac13 & b\\ -\frac13 & \frac23 & c\end{pmatrix}$ 为正交阵.

解得 $a^2=\frac19$, $ab=-\frac29$, $ac=-\frac29$, $b^2=\frac49=c^2$

故 $T(\vec{e_3}) = \pm(-\frac13\vec{e_1}+\frac23\vec{e_2}+\frac23\vec{e_3})$

2. 若 $\vec\alpha=\vec\beta=0$. 则令 T 为恒等变换即可.

若 $|\vec\alpha|=|\vec\beta|\neq0$, 令 $\vec{e_1}=\frac{\vec\alpha}{|\vec\alpha|}$, $\vec{e_2}=\frac{\vec\beta}{|\vec\beta|}$. 扩充为一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$

令 $T(\vec{e_1})=\vec{e_2}$, $T(\vec{e_2})=\vec{e_1}$, $T(\vec{e_3})=\vec{e_3}$, $\cdots$, $T(\vec{e_n})=\vec{e_n}$ 则 $T(\vec\alpha)=|\vec\alpha|T(\vec{e_1})=|\vec\beta|e_2=\vec\beta$

$(T(\vec{e_1}),\cdots,T(\vec{e_n}))=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}0&1&&&\\1&0&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}$ → 为正交阵. 故 T 为正交变换.

3. (1) $|T_\beta(\vec\alpha)|^2=(\vec\alpha-2(\vec\beta,\vec\alpha)\vec\beta,\ \vec\alpha-2(\vec\beta,\vec\alpha)\vec\beta)=(\vec\alpha,\vec\alpha)-2(\vec\beta,\vec\alpha)(\vec\beta,\vec\alpha)-2(\vec\beta,\vec\alpha)(\vec\alpha,\vec\beta)+4(\vec\beta,\vec\alpha)^2=(\vec\alpha,\vec\alpha)=|\vec\alpha|^2$

故 $|T_\beta(\vec\alpha)|=|\vec\alpha|$, T_β 为正交变换.

(2) 设 $\vec{e_1}=\vec\beta,\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}$ 为一组标准正交基.

则 $(T_\beta(\vec{e_1}),\cdots,T_\beta(\vec{e_n}))=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}=A$ $|A|=-1$. 故 T_β 为第二类正交变换.

(3) A 只有特征值 1, -1. 且 1 的代数重数为 $n-1$.

若 $\vec{\beta_1},\cdots,\vec{\beta_n}$ 为另一组正交基. 则 $(T_\beta(\vec{\beta_1})\cdots T_\beta(\vec{\beta_n}))=(\vec{\beta_1},\cdots,\vec{\beta_n})P^HAP$ P 为正交阵. 故 P^HAP 也满足性质.

4. 正交阵 A. 有 $|A|=-1$

又 $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n$. 且 $|\lambda_i|=1$. 复数与共轭复数同时出现. 因此若 λ_i 为复数. 有 λ_j 使 $\lambda_i\lambda_j=1$.

又因为 $\lambda_1\cdots\lambda_n=-1$. 因此有奇数个 -1, 否则 $\lambda_1\cdots\lambda_n=1$. 故 -1 是特征值

5. U 是酉阵 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}A^HA & A^HB\\ B^HA & B^HB+C^HC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&0\\0&I\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^HA=I,\ A^HB=B^HA=0,\ B^HB+C^HC=I \Leftrightarrow B=0,\ A^HA=I,\ C^HC=I$

6. T 的矩阵是 A. 为正交阵. T^{-1} 的矩阵为 $A^{-1}=A^H$

又若 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. A^H 特征值为 $\bar\lambda_1,\cdots,\bar\lambda_n$. 故得证

7. $|A+B|=|A||I+A^HB|=|I+A^HB|$

又 A^H, B 均正交. A^HB 为正交阵. $|A^HB|=|A^H||B|=-1$. 由第4题知有特征值 -1. 故 $|I+A^HB|=0$

8. A 的特征多项式为 $(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=0 \Rightarrow x=\cos\theta\pm i\sin\theta \Rightarrow x=e^{\pm i\theta}$

因此有酉阵 U 使 $U^HAU=B$