

2023010747 刘一铭 计32

离散数学作业

17. 若 $G = \langle a^r \rangle$, 则存在 x 使 $(a^r)^x = a$. 即 $a^{xr-1} = e \Rightarrow p \mid xr-1$

故 $\exists q$ 使 $pq = xr-1 \Rightarrow (p, r) = 1$.

又若 $(p, r) = 1$. 由 Bezout 定理知 $\exists q$ 使 $pq - xr = 1$. 故 $(a^r)^x = a \Rightarrow a^r$ 为生成元.

但我们已知 p 为素数. 因此对 $1 \leq r < p-1$ 均有 $(p, r) = 1$

故 G 的任何元 $b \neq e$ 为生成元

18. 构造映射 $f: x \rightarrow 2x$. 则 f 为 $G = (\mathbb{Z}, +)$ 到 $G' = (2\mathbb{Z}, +)$ 的双射

且对 $\forall x, y \in G$.

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

因此整数加群与偶数加群同构