微积分作业

习题 6.1

2.(8) 对任一 $x>0$，令 $a_n=\frac{x^n}{1+x^{2n}}$　$x=1$ 时发散. $x>1$ 或 $x<1$ 时 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{1+x^{2n}}}=0$. 收敛

因此对 $x>0, x\neq 1$ 均有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 收敛 又对 $x<0$. 令 $y=-x$. 则 $y>0$. $a_n=\frac{(-1)^n y^n}{1+y^{2n}}=\frac{(-1)^n}{\frac{1}{y^n}+y^n}$，若 $y=1$ 则发散. 否则. $\frac{1}{\frac{1}{y^n}+y^n}$ 随 n

增大递减 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y^n+\frac{1}{y^n}}=0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 故收敛域为 $x\neq\pm1$ 条件收敛的 x 范围为 $x\neq\pm1$，绝对收敛的 x 范围为 $x\neq\pm1$

(9) 对任一给定 x. $\frac{1}{n+x^2}$ 单调递减且趋于 0，由 Weierstrass 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 收敛

因此收敛域为 R. 但由于 $\left|\frac{1}{n+x^2}\right|\sim\left|\frac{1}{n}\right|$ $(n\to+\infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right|$ 对所有 x 均发散

因此条件收敛的 x 范围为 R，绝对收敛的 x 范围为空

10. 对 $\forall x\in[a,b]$. 由于 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调. 由对称性不妨设 $|u_n(a)|<|u_n(x)|<|u_n(b)|$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|$. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 收敛. 由习题 5.3.7（之前作业证过）知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 收敛.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对收敛. 又 $|u_n(x)|<|u_n(b)|$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 收敛. 由 Weierstrass 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛

习题 6.2

2. $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$　当 $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 时

$\left|\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{6}<\frac{1}{2^n}$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，因此 $S(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上一致收敛

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}2^n\left(-\ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot2^n}}{\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}}\right|=-\ln\left|\cos\frac{\pi}{6}\right|=-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 若 $x=0$. 则收敛. 若 $x\neq0$. 则对 $\forall x$. 有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}=x^2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}-1\right)=1$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\right|$ 对 $\forall x$ 均收敛. 即绝对收敛.

而由于 $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 连续而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 不连续. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 不一致连续

7. e^{-nx} 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 均单调递减. 且 $|e^{-nx}|\le1$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 一致连续，由 Abel 判别法知 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. 又 $\frac{e^{-nx}}{n^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续

$\left(\frac{e^{-nx}}{n^2}\right)'=-\frac{ne^{-nx}}{n^2}=-\frac{e^{-nx}}{n}$. $\forall a>0$. 对 $x\in[a,+\infty)$ 有 $\left|-\frac{e^{-nx}}{n}\right|=\frac{1}{ne^{nx}}\le\frac{1}{ne^{an}}\le\frac{1}{n(an+1)}$

又 $\frac{1}{n(an+1)}\sim\frac{1}{an^2}$ $(n\to+\infty)$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{an^2}$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

令 $a\to0$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}}{n^2}\right)'$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. 因此 $f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微

习题 6.3

1.(4) $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)4^n x^{2n+2}}{n\,4^{n-1}x^{2n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{4(n+1)x^2}{n}=4x^2<1$ 当 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时级数发散. 故级数的收敛域为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 收敛半径为 $\frac{1}{2}$

(5) $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln(n+1)}{n+1}\frac{n}{\ln n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)+\frac{n}{n+1}}{\ln n+\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{-2n-1}{n(n+1)}}{\ln n+\frac{n+1}{n}}\right)=1$

故收敛半径为 1. 又 $x=1$ 时发散. $x=-1$ 时收敛. 故收敛域为 $[-1,1)$

(6) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+4^n}=4$. 故收敛半径为 $\frac{1}{4}$. 又 $x=\pm\frac{1}{4}$ 时发散. 故收敛域为 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

(7) $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^p}{n^p}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|^p=1$. 故收敛半径为 1. 又 $x=1+1$ 时 $\begin{cases}p>1\text{ 时 收敛.}\\ p\le1\text{ 时 发散}\end{cases}$　$x=1-1$ 时收敛.

故 $\begin{cases}p>1 & \text{收敛域为 }[0,2]\\ 0<p\le1 & \text{收敛域为 }[0,2)\end{cases}$

2.(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n(n-1)}{(n+1)n}\right|=1$，且 $x=\pm1$ 时收敛，故收敛域为 $[-1,1]$

$S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}\quad x\in(-1,1)\qquad S'(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}\qquad S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$

$S'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)\qquad S(x)=\int_0^x-\ln(1-t)dt=-\left(t\ln(1-t)\Big|_0^x+\int_0^x\frac{t}{1-t}dt\right)=-(x\ln(1-x)-x-\ln(1-x))=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n(n+1)}{2}\frac{2}{n(n-1)}\right|=1$，且 $x=\pm1$ 时发散，故收敛域为 $(-1,1)$

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}\quad x\in(-1,1)\qquad$ 令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2}x^n\qquad h(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2}\quad x\in(-1,1)$

$h'(x)=g(x)$，$g'(x)=S(x)$，又 $h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)$，故 $g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)$，$S(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$

3.(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\int_0^x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$，收敛域为 $[-1,1]$

5. $f(x)=x-3+\frac{6}{x+2}=x-3+6\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x+1)^n$

又 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n\Rightarrow f^n(-1)=6(-1)^n n!$ 这里 $n\geq2$，因 $f^{(1)}(-1)=1-\frac{6}{(x+2)^2}=-5$

$g(x)=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)x^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$

又 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\Rightarrow f^n(0)=\frac{n!}{3}\left(-1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$