2023010747 刘一铭 计32.

线代作业4

1. $T\left[\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$

$T\left[\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}\right]=2\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$

$T\left[\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}\right]=3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$

故$\mathbb{C}^3$的所有子空间均为不变子空间

2. $\varphi(k_1(e_1+2e_2)+k_2(e_2+e_3+2e_4))=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&4&-2\\2&-1&0&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\2k_1+k_2\\k_2\\2k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\2k_1+k_2\\k_2\\2k_2\end{pmatrix}=k_1(e_1+2e_2)+k_2(e_2+e_3+2e_4)$

故由e_1+2e_2和$e_2+e_3+2e_4$生成的子间空是φ的不变子空间

3. (1) $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

$V\alpha=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1+a_2\\ \lambda a_2+a_3\\ \vdots\\ \lambda a_{n-1}+a_n\\ \lambda a_n\end{pmatrix}$

若有子空间含e_n为不变子空间, 则$\alpha=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$时$V\alpha$应在子空间内. 此时$V\alpha=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \lambda\end{pmatrix}$

故e_{n-1}也在子空间内. 令$\alpha=e_{n-1}$, 则$V\alpha=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \lambda\\ 0\end{pmatrix}$在子空间内. 故$e_{n-2}$在子空间内.

重复令$\alpha=e_{n-2},e_{n-3},\cdots,e_1$知$e_1,e_2,\cdots,e_n$均在子空间内. 故$V$中不变子空间为$V$

(2) 若不包含e_1, 则若α在不变子空间中, $V\alpha$也在不变子空间中且$\lambda a_1+a_2=0$. 已知$a_1=0$. 故$a_2=0$.

因此子空间中也不包含e_2. 则$\lambda a_2+a_3=0$, $a_2=0\Rightarrow a_3=0$. 同理知子空间不包含$e_3,e_4,\cdots,e_n$.

故子空间为空. 矛盾.

故该不变子空间包含e_1

(3) 假设. $V=V_1\oplus V_2$且V_1,V_2非零.

则由(2)知$e_1\in V_1$, $e_1\in V_2$. 故$V_1\cap V_2\neq\phi$. 矛盾.

因此V不能写成两个非平凡不变子空间直和

4. $(f(x),g(x))=1\Rightarrow\exists u(x),v(x).\ u(x)f(x)+v(x)g(x)=1\Rightarrow f(\sigma)u(\sigma)+g(\sigma)v(\sigma)=I$

$\forall v\in V\ v=Iv=f(\sigma)u(\sigma)v+g(\sigma)v(\sigma)v$

$g(\sigma)f(\sigma)u(\sigma)v=0\Rightarrow f(\sigma)u(\sigma)v\in Ker(g(\sigma))$.

$f(\sigma)g(\sigma)v(\sigma)v=0\Rightarrow g(\sigma)v(\sigma)v\in Ker(f(\sigma))$

若有$v\in Ker(g(\sigma))$且$v\in Ker(f(\sigma))$. 则$\begin{cases}g(\sigma)v=0\\ f(\sigma)v=0\end{cases}\Rightarrow(f(\sigma),g(\sigma))v=0\Rightarrow Iv=0\Rightarrow v=0$

因此$V=V_1\oplus V_2$

5. (1) 注意到每行加起来是1. 故有特征值1

又列不独立. 故有特征值0.

且特征值相加为1. 故特征值代数重数为2.

算出A. A^2. $A-I$的核空间基. 知

$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1\\ \frac{2}{3}&0&1\\ 1&1&1\end{bmatrix}$

(2) 特征值为$-1,-1,3$

算出$A+I$. $(A+I)^2$. $A-3I$的特征向量知

$P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&2\\1&0&2\end{bmatrix}$

(3) 特征值为$0,0,2,2$

算出A. A^2. $A-2I$. $(A-2I)^2$特征向量知

$P=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$