离散数学 HW10 2023010747 刘一[illegible]

1\. 1.(1) $A \cap B = \{0,2\}$

$R = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

(2) $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

2\. $A \times B = \{\langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$

因此所有从A到B的关系为 ϕ. $\{\langle a,d\rangle\}$. $\{\langle b,d\rangle\}$. $\{\langle c,d\rangle\}$. $\{\langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle\}$. $\{\langle a,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$. $\{\langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$. $\{\langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$

2\. $A \cup B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

$\mathrm{dom}(A \cup B) = \{1,2,3,4\}$.

$A \cap B = \{\langle 2,4\rangle\}$.

$\mathrm{ran}(A \cap B) = \{4\}$

3\. (1) 对任意x有 $x \in \mathrm{dom}(R \cup S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in (R \cup S))$

$\Leftrightarrow (\exists y)((\langle x,y\rangle \in R) \vee (\langle x,y\rangle \in S))$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R) \vee (\exists y)(\langle x,y\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(R) \vee x \in \mathrm{dom}(S)$

$\Leftrightarrow x \in (\mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{dom}(S))$

因此 $\mathrm{dom}(R \cup S) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{dom}(S)$

(2) 对任意x有 $x \in \mathrm{dom}(R \cap S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in (R \cap S))$

$\Leftrightarrow (\exists y)((\langle x,y\rangle \in R) \wedge (\langle x,y\rangle \in S))$

$\Rightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R) \wedge (\exists y)(\langle x,y\rangle \in S)$

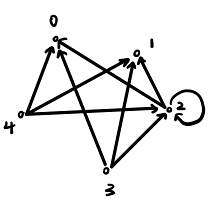
$\Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(R) \wedge x \in \mathrm{dom}(S)$

$\Leftrightarrow x \in (\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S))$

因此 $\mathrm{dom}(R \cap S) \subseteq \mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S)$

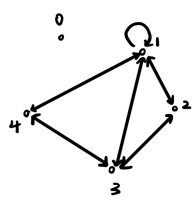
5\. (1)

$$M(R_1) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$



(2)

$$M(R_2) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&1&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$



6\. 对任意 $\langle x,y\rangle$ 有 $\langle x,y\rangle \in R \circ (S \cup T)$

$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x,z\rangle \in (S \cup T) \wedge \langle z,y\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((\langle x,z\rangle \in S \vee \langle x,z\rangle \in T) \wedge \langle z,y\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((\langle x,z\rangle \in S \wedge \langle z,y\rangle \in R) \vee (\langle x,z\rangle \in T \wedge \langle z,y\rangle \in R))$

$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x,z\rangle \in S \wedge \langle z,y\rangle \in R) \vee (\exists z)(\langle x,z\rangle \in T \wedge \langle z,y\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (R \circ S) \vee \langle x,y\rangle \in (R \circ T)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in ((R \circ S) \cup (R \circ T))$

因此 $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$