清華大學
Tsinghua University

2023010727 刘一凝 计22

线性代数附加题6.

1. (1) V的一组基可以是 $\left\{ \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{C}{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}} \right\}$.

则 V 中任意矩阵 M 有 $M = x_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = x_1A + x_2B + x_3C$

由于 $A^H = A, B^H = B, C^H = C$ $\quad trA = trB = trC = 0$. 因此 $M^H = M$ 且 $trM = 0$

(2) 由V定义可知 $\forall H \in V \Rightarrow \begin{matrix} H^H = H \\ tr(H) = 0 \end{matrix}$. 若 $H \in V$.

则有 $AH^HA^{-1} = AHA^{-1} \Rightarrow (AH^HA^{-1})^H = AHA^{-1}$, 又 $tr(AHA^{-1}) = 0$. 故 $AHA^{-1} \in V$

$|H|^2 = \langle H, H \rangle = X^TX = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -det(H)$

$|AHA^{-1}|^2 = -det(AHA^{-1}) = -det(A)det(H)det(A^{-1}) = -det(H)$

故 $|H|^2 = |AHA^{-1}|^2$, T为正交变换.

(3) 由于 $H^H = H$ 且 $tr(H) = 0$. 故H特征值为 a和-a 且 $a \in R$. $a > 0$.

将H对角化, $PHP^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ 且P为酉阵. $|P|^2 = -1$, $|P| = e^{i\theta}$. 令 $A = e^{i(-\frac{\theta}{2})}P$. 则 $AHA^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ 且 $|A| = 1$

2. 我们只需先转为标准正交基下表示矩阵，再通过换基转为另一组基

A和 A^H 变换后为 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}A^HP$. 则 $(P^{-1}AP)^H = P^HA^HP^{-H} \neq P^{-1}A^HP$