2023010727 刘一锦 计32

离散数学. 作业3.

习题2.18. 我们证明 $\forall i\neq j$. 有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$.

否则. 设. $d(v_1)+d(v_2)\leq n-1$

则 $m\leq C_{n-2}^2+n-1=\frac{n^2-3n+4}{2}$

又 $m\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2=\frac{n^2-3n+6}{2}$ 矛盾.

因此. $\forall i\neq j$. 有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$. 由Ore定理知G存在H回路.

20. 我们将n个人作为n个顶点. 若两个人认识, 则将两顶点间连边.

我们只需证明存在哈密顿圈. 故只需证不相邻顶点 v_i. v_j 均有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n$

考虑任意两个不相邻顶点(若不存在. 则得证). v_i, v_j.

因为任两人合起来认识剩下的 $n-2$ 个人. 则对 $\forall k\neq i$, $k\neq j$.

(v_i,v_k)、(v_j,v_k) 至少有一个边存在. 不妨设 $(v_i,v_k)\in E(G)$

若 $(v_j,v_k)\notin E(G)$. 则 v_k. v_j 均不与 v_i 相邻矛盾.

故 (v_i,v_k), (v_j,v_k) 均存在. 故 $d(v_i)+d(v_j)\geq (n-2)+(n-2)=2n-4\geq n$ (因为 $n\geq 4$)

22.

不能.

将方块的角块和每个面的中心块标为A块. 剩余标为B块.

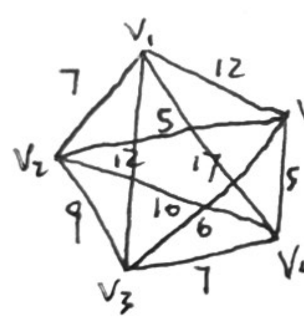
将27个块作为顶点 若从一个块能移动到下一个块. 则在顶点间连边

故题目问题为是否存在一条哈密顿链 从右上角A块出发. 中心B块结束

我们知道A块只能到达B块. B块只能到达A块. A→B→⋯→B

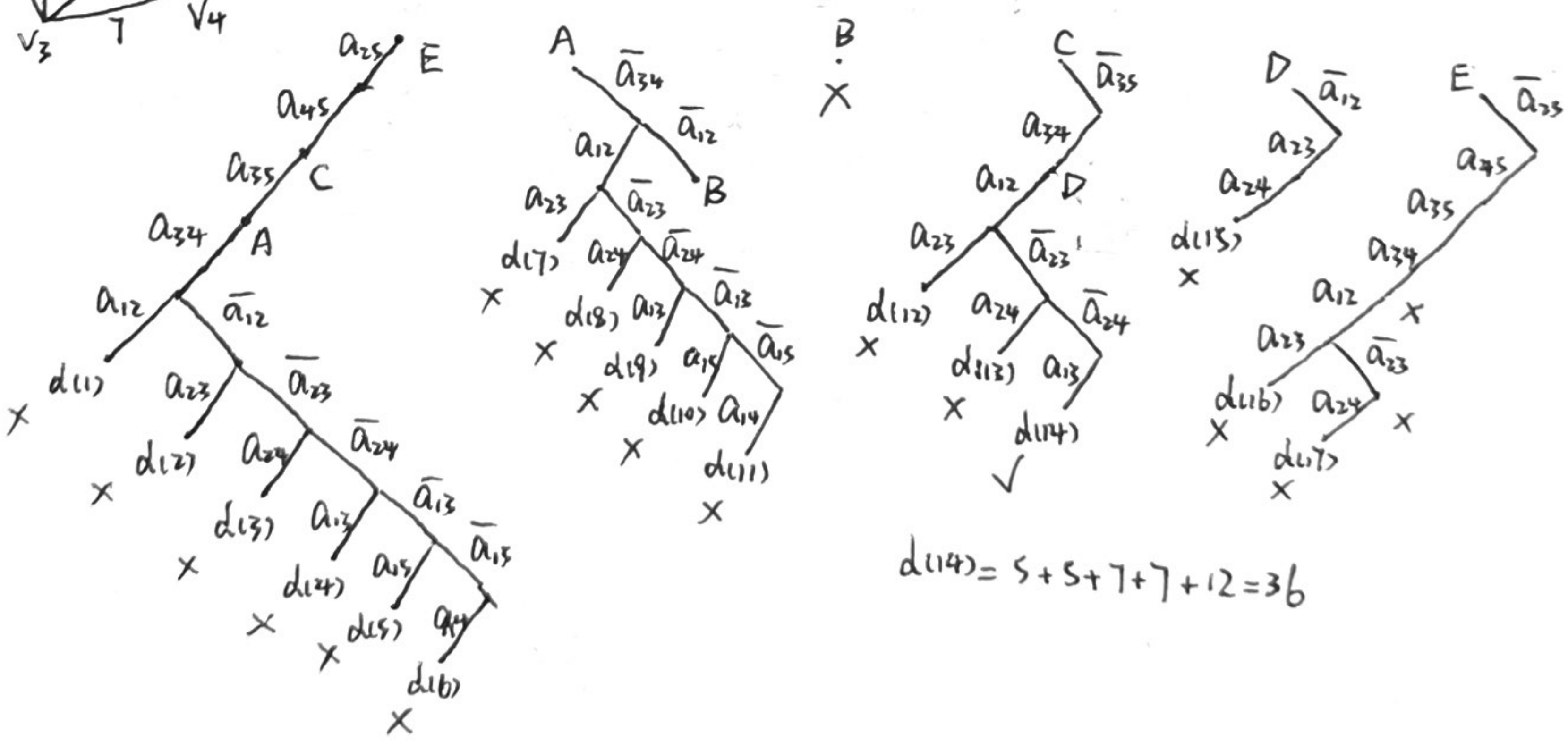
故若存在, 则A. B块数目相同. 又知A块有14个. B块有13个. 矛盾. 故不存在.

31. 我们将 $(0,0)$. $(2,5)$, $(9,3)$, $(8,9)$, $(6,6)$ 作为点 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 并边权设置为两点间最短行进距离. (哈密顿距离)



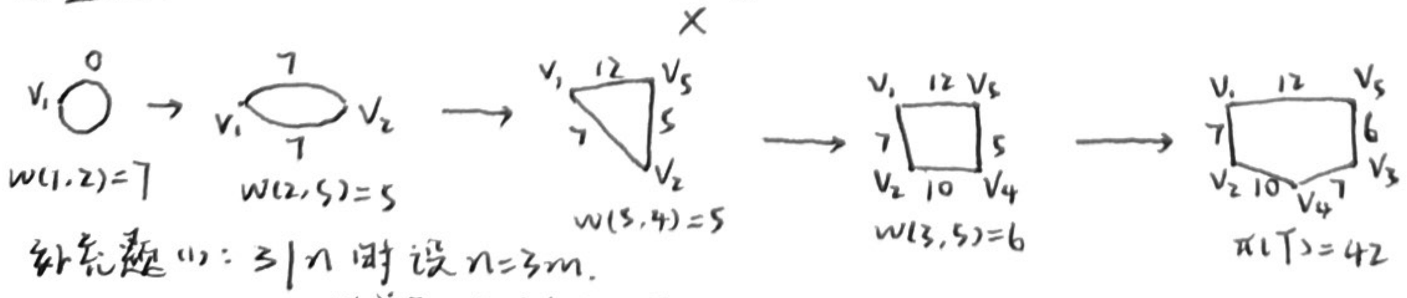
分支定界法:

a_{25}	a_{45}	a_{35}	a_{34}	a_{12}	a_{23}	a_{24}	a_{13}	a_{15}	a_{14}
5	5	6	7	7	9	10	12	12	17



$d(14)=5+5+7+7+12=36$

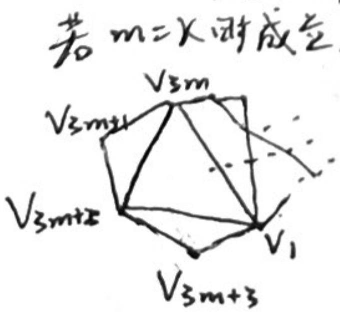
便宜法:



补充题(1): $3\mid n$ 时设 $n=3m$.

$m=1$ 时成立. 归纳证明.

若 $m=k$ 时成立. $m=k+1$ 时



$v_1\sim v_{3m}$ 由假设.

可一笔画. $v_1\to\cdots\to v_1$

连 (v_1,v_{3m+2}). (v_{3m},v_{3m+2}). 此时有 $n-3$ 个对角线

则 $v_1\to\cdots\to v_1\to v_{3m+3}\to v_{3m+2}\to v_{3m+1}\to v_{3m}\to v_{3m+2}\to v_1$ 可一笔画

归纳成立.

下证若存在一个剖分图则能一笔画.

$n-3$条对角线(不相交)将图分成许多个三角形

我们对三角形进行染色. 由于没有两个以上三角形共用边

故可染为红. 蓝两色.

由于图能一笔画. 故每个顶点均为偶顶点. 与奇数个三角形相连 故. 以多边形边为边的三角形同色

不妨设以多边形的边为边的三角形染为红色. 共有m条边, $3|m$

同时设蓝色三角形共有v条边. 则$3|v$

又$m=v+n$.

故$3|n$. 得证.

(2) 在哈密顿回路中去掉k个点及其连接的边. 则图至多分成k个不连通的区域

若原图中有哈密顿回路. 则去掉下图中两点及其关联的边. 得到了3个不连通的区域. 矛盾.

因此不存在哈密顿回路.

(也可对顶点标注A.B.

通过A.B数量相等推矛盾)