

1. (1) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge (\forall x)R(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

前提 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)), (\forall x)R(x)$

结论 $(\forall x)P(x)$

证明: (1) $(\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$ 前提 (p)

(2) $Q(y) \rightarrow \neg R(y)$ (1) 全称量词消去 (UI)

(3) $R(y) \rightarrow \neg Q(y)$ (2) 置换

(4) $(\forall x)R(x)$ 前提 (p)

(5) $R(y)$ (4) 全称量词消去 (UI)

(6) $\neg Q(y)$ (3)(5) 分离

(7) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 前提 (p)

(8) $P(y) \vee Q(y)$ (7) 全称量词消去 (UI)

(9) $P(y)$ (6)(8) 析取三段式

(10) $(\forall x)P(x)$ (9) 全称量词引入 (UG)

(2) $P(x)$: x是男生, $Q(x)$: x在大学里, $R(x)$: x是本科生, $S(x)$: x是研究生, $T(x)$: x是高中生

前提: $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow ((\neg R(x) \wedge S(x)) \vee (R(x) \wedge \neg S(x))))$, $(\exists x)(P(x) \wedge T(x))$, $\neg S(\text{John}) \wedge T(\text{John})$

结论: $P(\text{John}) \wedge Q(\text{John}) \rightarrow R(\text{John})$

证明: (1) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow ((\neg R(x) \wedge S(x)) \vee (R(x) \wedge \neg S(x))))$ 前提 (p)

(2) $P(\text{John}) \wedge Q(\text{John}) \rightarrow ((\neg R(\text{John}) \wedge S(\text{John})) \vee (R(\text{John}) \wedge \neg S(\text{John})))$ (1) 全称量词消去 (UI)

(3) $P(\text{John}) \wedge Q(\text{John})$ 附加前提引入

(4) $(\neg R(\text{John}) \wedge S(\text{John})) \vee (R(\text{John}) \wedge \neg S(\text{John}))$ (2)(3) 分离

(5) $\neg S(\text{John}) \wedge T(\text{John})$ 前提 (p)

(6) $\neg S(\text{John})$ (5) 合取化简式

(7) $\neg S(\text{John}) \vee R(\text{John})$ (6) 析取附加式

(8) $\neg (S(\text{John}) \wedge \neg R(\text{John}))$ (7) 置换

(9) $R(\text{John}) \wedge \neg S(\text{John})$ (4)(8) 析取三段式

(10) $R(\text{John})$ (9) 合取化简式

(11) $P(\text{John}) \wedge Q(\text{John}) \rightarrow R(\text{John})$ 条件证明规则

2. (1) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge (\forall x)R(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) \wedge (\forall x)R(x) \wedge (\forall x)P(x)$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 子句集为 $\{P(x) \vee Q(x)\}$

$(\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x)) = (\forall x)(\neg Q(x) \vee \neg R(x))$ 子句集为 $\{\neg Q(x) \vee \neg R(x)\}$

$(\forall x)R(x) \wedge (\forall x)P(x) = (\forall x)R(x) \wedge (\forall y)P(y) = (\forall x)R(x) \wedge (\exists y)(\neg P(y)) = (\exists y)(\forall x)R(x) \wedge \neg P(y)$ 子句集为 $\{R(x), \neg P(x)\}$

归结: (1) $P(x) \vee Q(x)$

(2) $\neg P(x)$

(3) $Q(x)$ (1)(2) 归结

(4) $\neg Q(x) \vee \neg R(x)$

(5) $\neg R(x)$ (3)(4) 归结

(6) $R(x)$

(7) \square (5)(6) 归结

(2) $P(x)$: x是男生, $Q(x)$: x在大学里, $R(x)$: x是本科生, $S(x)$: x是研究生, $T(x)$: x是高中生

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow ((\neg R(x) \wedge S(x)) \vee (R(x) \wedge \neg S(x)))) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge T(x)) \wedge \neg S(\text{John}) \wedge T(\text{John}) \Rightarrow P(\text{John}) \wedge Q(\text{John}) \rightarrow R(\text{John})$

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow ((\neg R(x) \wedge S(x)) \vee (R(x) \wedge \neg S(x)))) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge T(x)) \wedge \neg S(\text{John}) \wedge T(\text{John}) \wedge \neg(P(\text{John}) \wedge Q(\text{John}) \rightarrow R(\text{John}))$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x) \longrightarrow ((\neg R(x) \wedge S(x)) \vee (R(x) \wedge \neg S(x))))$$

$$= (\forall x)(\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee ((\neg R(x) \wedge S(x)) \vee (R(x) \wedge \neg S(x))))$$

$$= (\forall x)((\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee ((R(x) \vee (\neg R(x) \wedge S(x))) \wedge (\neg S(x) \vee (\neg R(x) \wedge S(x)))))$$

$$= (\forall x)((\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee ((R(x) \vee \neg R(x)) \wedge (R(x) \vee S(x)) \wedge (\neg S(x) \vee \neg R(x)) \wedge (\neg S(x) \vee S(x))))$$

$$= (\forall x)((\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee (R(x) \vee S(x))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee (\neg S(x) \vee \neg R(x))))$$

$$\text{子句集为 } \{\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x) \vee S(x), \neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg S(x) \vee \neg R(x)\}$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge T(x)) \quad \text{子句集为 } \{P(x), T(x)\}$$

$$\neg S(\text{John}) \wedge T(\text{John}) \quad \text{子句集为 } \{\neg S(\text{John}), T(\text{John})\}$$

$$\neg(P(\text{John}) \wedge Q(\text{John}) \longrightarrow R(\text{John})) = (P(\text{John}) \wedge Q(\text{John})) \wedge \neg R(\text{John}) \quad \text{子句集为 } \{P(\text{John}), Q(\text{John}), \neg R(\text{John})\}$$

$$\text{归结: (1) } \neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x) \vee S(x)$$

$$(2) \neg S(\text{John})$$

$$(3) \neg P(\text{John}) \vee \neg Q(\text{John}) \vee R(\text{John}) \quad (1)(2) \text{ 归结}$$

$$(4) \neg R(\text{John})$$

$$(5) \neg P(\text{John}) \vee \neg Q(\text{John}) \quad (3)(4) \text{ 归结}$$

$$(6) P(\text{John})$$

$$(7) Q(\text{John})$$

$$(8) \neg Q(\text{John}) \quad (5)(6) \text{ 归结}$$

$$(9) \square \quad (7)(8) \text{ 归结}$$