2023010747 刘一鹤

线性代数附加题 3.

1.(1) 由于 V 是 3 维空间，故 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_4$ 线性相关，则有 $\sum_{i=1}^{4} c_i\vec{v}_i=0$

令 $\vec{u}=\sum_{c_i>0} c_i\vec{v}_i=\sum_{c_j<0}(-c_j)\vec{v}_j$ 若两边均不为 $\vec{0}$，则 $\left(\sum_{c_i>0} c_i\vec{v}_i, \sum_{c_i>0} c_i\vec{v}_i\right)=\left(\sum_{c_i>0} c_i\vec{v}_i, \sum_{c_j<0}(-c_j)\vec{v}_j\right)<0$ 矛盾.

因此有 $\vec{u}=\sum_{c_i>0} c_i\vec{v}_i=0$，$(\vec{u},\vec{v}_5)=\left(\sum_{c_i>0} c_i\vec{v}_i,\vec{v}_5\right)<0$ 矛盾，因此不存在.

(2) $\vec{v}_1=(1,0,0)$

$\vec{v}_2=(-1,1,0)$

$\vec{v}_3=(-1,-2,1)$

$\vec{v}_4=(-1,-2,-8)$ 即成立.

(3) 若有 3 个向量线性相关，不妨设为 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 且 $\sum_{i=1}^{3} c_i\vec{v}_i=0$

若 c_i 均大于 0 或均小于 0，$\left(\sum_{i=1}^{3} c_i\vec{v}_i,\vec{v}_4\right)=0$，又 $\left(\sum_{i=1}^{3} c_i\vec{v}_i,\vec{v}_4\right)<0$ 矛盾.

因此 c_i 有正有负.

不妨设 $c_2>0$

由对称性不妨设 $c_1>0$，$c_2<0$，$c_3<0$. 则 $c_1\vec{v}_1=(-c_2)\vec{v}_2+(-c_3)\vec{v}_3$ $(c_1\vec{v}_1, c_1\vec{v}_1)>0$.

又 $(c_1\vec{v}_1, c_1\vec{v}_1)=(c_1\vec{v}_1, (-c_2)\vec{v}_2+(-c_3)\vec{v}_3)<0$ 矛盾.

故 3 个向量线性无关，设 $\vec{v}_4=\sum_{i=1}^{3} c_i\vec{v}_i$，若有 $c_i>0$.

则 $\vec{v}_4+\sum_{c_i<0}(-c_i)\vec{v}_i=\sum_{c_i>0} c_i\vec{v}_i$ 两边和 $\vec{v}_4+\sum_{c_i<0}(-c_i)v_i$ 内积，知矛盾. 因此 $c_i<0$

故第 4 个向量是前 3 个向量负系数线性组合.

3. 给定 V 的一组标准正交基 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$，则 $\vec{u}=(\vec{u},\vec{e}_1)\vec{e}_1+\cdots+(\vec{u},\vec{e}_n)\vec{e}_n$

$\vec{v}=(\vec{v},\vec{e}_1)\vec{e}_1+\cdots+(\vec{v},\vec{e}_n)\vec{e}_n$

令 $a_i=T(\vec{e}_i)$，$c_i=(\vec{v},\vec{e}_i)$，则 $T(\vec{v})=\sum_{i=1}^{n} c_i a_i$

$(\vec{v},\vec{u})=\sum_{i=1}^{n} c_i(\vec{u},\vec{e}_i)$，又因为对 $\forall\vec{v}\in V$ 均成立，故 $(\vec{u},\vec{e}_i)=a_i$，因此 $\vec{u}$ 存在且唯一

4. 由第三题知 $u(x)=T(\vec{e}_1)\vec{e}_1+T(\vec{e}_2)\vec{e}_2+T(\vec{e}_3)\vec{e}_3$

$T(\vec{e}_1)=\int_{-1}^{1}\cos\pi x\,dx=0$

$T(\vec{e}_2)=\int_{-1}^{1}x\cos\pi x\,dx=0$

$T(\vec{e}_3)=\int_{-1}^{1}x^2\cos\pi x\,dx=-\frac{4}{\pi^2}$

故 $u(x)=-\frac{4}{\pi^2}x^2$