2023010747 刘一[illegible] 计32

线性代数作业12.

1. (a) 错. 令 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 特征值为 $\pm i$, 则 $A+iI_n=\begin{pmatrix}i&1\\-1&i\end{pmatrix}$ 特征值为 $0, 2i$. 不可逆

(b) 对 $A^H=A$. 故 $\bar{\lambda}_i=\lambda_i \Rightarrow \lambda_i\in R$. 故 $A+iI_n$ 特征值为 $\lambda_1+i,\cdots$ 且 $\lambda_j+i\neq 0$. 故 $A+iI_n$ 可逆

(c) 错. 反例同(a)

(d) 对. $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha} \Rightarrow \overline{A\vec{\alpha}}=\overline{\lambda\vec{\alpha}} \Rightarrow \bar{A}\bar{\vec{\alpha}}=\bar{\lambda}\bar{\vec{\alpha}}$

2. $P^H=\begin{pmatrix}0&0&-i\\-i&0&0\\0&-i&0\end{pmatrix}$ $P^HP=I\Rightarrow P$ 为酉阵. P 可逆. P 不为 Hermit 阵.

特征多项式为 $x^3=-i$ 解得 $x_1=e^{\frac{\pi}{2}i}$, $x_2=e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $x_3=e^{\frac{11\pi}{6}i}$ 各不相同. P 可对角化.

故 $P^{100}=U\begin{pmatrix}e^{50\pi i}&&\\&e^{\frac{350\pi}{3}i}&\\&&e^{\frac{550\pi}{3}i}\end{pmatrix}U^H=U\begin{pmatrix}1&&\\&e^{\frac{2\pi}{3}i}&\\&&e^{\frac{4\pi}{3}i}\end{pmatrix}U^H=(-i)P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

3. A 的特征值为 $2i$ 和 $-i$. 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1+i\\-1\end{pmatrix}$ 故 A 可对角化.

将特征向量归一化. 则 $U=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1+i\\1-i&1\end{pmatrix}$. $U^HAV=\begin{pmatrix}2i&\\&-i\end{pmatrix}$

4. M 是 Hermite 阵 $\Leftrightarrow (A+iB)^H=A+iB \Leftrightarrow A^H-iB^H=A+iB \Leftrightarrow A^H=A.\ B^H=-B$

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}$ 是实对称阵 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}^H=\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}A^H&B^H\\-B^H&A^H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^H=A.\ B^H=-B$

5. $A^HA=AA^H \Rightarrow (0\ \ -i\ \ \bar{x})\begin{pmatrix}1+i\\0\\i\end{pmatrix}=(i\ \ 0\ \ x)\begin{pmatrix}1-i\\-i\\0\end{pmatrix} \Rightarrow i\bar{x}=i+1 \Rightarrow x=1+i$

$A=\begin{pmatrix}1+i&i&0\\&1+i&i\\i&0&1+i\end{pmatrix}=(1+i)I+\begin{pmatrix}0&i&0\\0&0&i\\i&0&0\end{pmatrix}$

则由2题知 $U^HAU=\begin{pmatrix}1+i+e^{\frac{\pi}{2}i}&&\\&1+i+e^{\frac{7\pi}{6}i}&\\&&1+i+e^{\frac{11\pi}{6}i}\end{pmatrix}$ $U=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&e^{\frac{2\pi}{3}i}&e^{\frac{4\pi}{3}i}\\1&e^{\frac{4\pi}{3}i}&e^{\frac{2\pi}{3}i}\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}0&i&1\\-i&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. 特征方程为 x^3-2x. 特征值为 $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. 对应特征向量为 $\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-i\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-i\\1\end{pmatrix}$

故归一化知 $U=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{i}{\sqrt{2}}&-\frac{i}{2}&-\frac{i}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

7. 我们先证 Hermite 矩阵特征值为实数. 这是因为 $A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow \alpha^HA\alpha=\lambda\alpha^H\alpha \Rightarrow \alpha^HA^H\alpha=\lambda^H\alpha^H\alpha \Rightarrow \alpha^HA\alpha=\lambda^H\alpha^H\alpha$

又 $\alpha^H\alpha$ 为实数且不为0. 故 $\bar{\lambda}=\lambda \Rightarrow \lambda$ 为实数

又若 A 为 skew-Hermite 阵. 则 iA 为 Hermite 阵. 故 A 的特征值为 $\frac{实}{i}$ 为0或纯虚数

8. 设 $D=Q^{-1}AQ$. 则令 $B'=Q^{-1}BQ$. $DB'=Q^{-1}AQQ^{-1}BQ=Q^{-1}BQQ^{-1}AQ=B'D$ 故 B' 为对角阵.

设 $E=P^{-1}BP$. 则 $B'=Q^{-1}PEP^{-1}Q=Y^{-1}EY \Rightarrow B'$ 可对角化 $\Rightarrow B'=\begin{bmatrix}B_1'&&\\&B_2'&\\&&\ddots&\\&&&B_k'\end{bmatrix}$ 有 X_i 使 $X_i^{-1}B_i'X_i$ 为对角阵. 令 $X=\begin{bmatrix}X_1&&\\&X_2&\\&&\ddots&\\&&&X_k\end{bmatrix}$

则 $F=X^{-1}B'X$; $G=X^{-1}DX$ 均为对角阵. 令 $S=QX$.

则 $F=X^{-1}Q^{-1}BQX=S^{-1}BS$, $G=X^{-1}Q^{-1}AQX=S^{-1}AS$

因此 A. B 可被同时对角化