2023010747 刘一铭 计32.

离散数学作业7

1. 每点的度数 $d(v_i) \geq 3$

故 $2m \geq 3n$

若每个域边界数 ≥ 5. 则 $2m \geq 5d$

又知 $d = m-n+2$

故 $\frac{2m}{5} \geq m - \frac{2}{3}m + 2 \Rightarrow m \geq 30 \Rightarrow d = m+2-n \geq \frac{m}{3}+2 \geq 12$

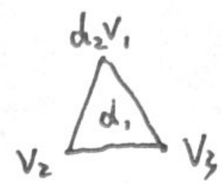
与 $d<12$ 矛盾

因此至少有一个域边界数 <5

2. 反证：假设有顶点 v_1 且 $d(v_1) < 3$.

则由于极大平面图连通 故 $d(v_1) = 1$ 或 2.

又极大平面图不存在割边. 故 $d(v_1) = 2$



设 v_1 与 v_2. v_3 相邻. 由于每个域的边界数均为3

故 v_2. v_3 相邻. 又 $n \geq 4$. 故存在其余顶点与 v_2. v_3 相邻

考虑 v_1 顶点在两个域的交界处. 这两个域为 d_1. d_2. 不妨设 v_1. v_2. v_3 围成的 $\triangle$ 为 d_1

由于无重边. 且存在 v_4 至少与 v_2. v_3 之一相邻. 因此 d_2 的边界数 ≥ 4. 矛盾.

因此对 $n \geq 4$ 的极大平面图. 每个点的度都 ≥ 3.

3. 设 G 的边数为 m_1, 顶点数为 n. $\bar{G}$ 的边数为 m_2. 若 G. $\bar{G}$ 均为平面图.

则 $m_1 \leq 3n-6$

$m_2 \leq 3n-6$

$m_1 + m_2 = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

故 $\frac{n(n-1)}{2} \leq 6n-12$

$n^2 - 13n + 24 \leq 0$

$(n - \frac{13}{2})^2 \leq \frac{73}{4}$

$n \leq \frac{13+\sqrt{73}}{2} < 11$

因此 $n \leq 10$. 矛盾.

故 G. $\bar{G}$ 至少有一个是非平面图

15. (1) 若每个面边界数都不同. 一共有 d 个面.

由于每个面边界数 ≥ 3. 因此至少有一个面边界数为 $3+d-1 = d+2$

又每两个面间最多有一条公共边. 因此 $d+2 \leq d-1$ 矛盾

因此至少有两个面有相同边界数

(2) 作出对偶图 G^*. 则 G^* 不含自环和重边. 且为连通平面图.

设 G^* 的边数为 m'. 域数目为 d'. 顶点数为 n'. $m'=m$. $d'=n$. $n'=d$

则 $m' \leq 3n'-6$ 且 $5d \leq 2m \Rightarrow m \leq 3d-6$ 且 $5d \leq 2m$

故 $d \geq 12$.

20. 画出对偶图. 若 G 能域 2 着色. 则对偶图 G^* 为偶图 (X,Y). G^* 无自环. 且除了一个顶点外其余顶点度数均为 d 的倍数. 不妨设 X_1 度数不为 d 倍数. 其余点度数均为 d 倍数. 则 $\sum d(X_i) \neq \sum d(Y_i)$ 矛盾

因此不能 2-着色.