2023010747 刘一铭 计32

线性代数作业5

1. (1) $\forall x \in C(A^{k+1})$，则$\exists y$使得 $x = A^{k+1}y = A^k(Ay)$.

故 $x \in C(A^k)$

因此有 $C(A^{k+1}) \subseteq C(A^k)$

又已知 $C(A) \subseteq \mathbb{C}^n$.

因此 $\mathbb{C}^n \supseteq C(A) \supseteq \cdots \supseteq C(A^k) \supseteq \cdots$

(2) $C(A^k)$序列维数是不增序列. 且始终小于等于 n. 大于等于 0

若不存在 $C(A^{k_0}) = C(A^{k+1})$

则知 $C(A^{n+10})$ 维数为负. 不可能.

因此有 $k_0 \geq 1$. $C(A^{k_0}) = C(A^{k_0+1})$

(3) 若 $C(A^{k_0}) = C(A^{k_0+1})$

则 $\forall x$. $\exists y$ 有 $A^{k_0}\vec{x} = A^{k_0+1}\vec{y}$ 且 $\forall x$, $\exists y$. 有 $A^{k_0+1}\vec{x} = A^{k_0}\vec{y}$

故 $\forall x$. $\exists y$. 有 $A^{k_0+1}\vec{x} = A^{k_0+2}\vec{y}$ 且 $\forall x$. $\exists y$ 有 $A^{k_0+2}\vec{x} = A^{k_0+1}\vec{y}$. 因此 $C(A^{k_0+1}) = C(A^{k_0+2})$

2. (1) 若我们已知 $(A-\lambda_0 I)^k \vec{v} = 0$

则 $(A-\lambda_0 AA^{-1})^k \vec{v} = 0 \Rightarrow A^k(I-\lambda_0 A^{-1})^k \vec{v} = 0 \Rightarrow \lambda_0^k A^k(\lambda_0^{-1}I - A^{-1})^k \vec{v} = 0$.

又A可逆且 $\lambda_0 \neq 0$. 故有 $(\lambda_0^{-1}I - A^{-1})^k \vec{v} = 0$. 同理可证若 $(A^{-1}-\lambda_0^{-1}I)^k \vec{v} = 0$. 则有 $(\lambda I - A)^k \vec{v} = 0$. 因此 $G_{\lambda_0}(T) = G_{\lambda_0^{-1}}(T^{-1})$

(2) 对$\forall$特征值λ. 有 $G_\lambda = V_\lambda$ 故 $\dim G_\lambda = \dim V_\lambda$

因此λ的代数重数和几何重数相等

故A可对角化

(3) $A^2 = A$. 故特征值为0或1

$V_0(T) = \mathrm{Ker}(A)$

$G_0(T) = \mathrm{Ker}(A) \cup \mathrm{Ker}(A^2) \cdots = \mathrm{Ker}(A)$

$V_1(T) = \mathrm{Ker}(A-I)$

$G_1(T) = \mathrm{Ker}(A-I) \cup \mathrm{Ker}(A-I)^2) \cdots = \mathrm{Ker}(A-I)$

$((A-I)^2 = A^2 - 2A + I^2 = I - A)$

因此由(2)知T可对角化

3. 若 $A^k = 0$. 则 $\lambda^k = 0$ 知所有特征值均为0

若所有特征值均为0. 则将A用 $N_\infty(A)$ 和 $R_\infty(A)$ 的基进行块对角化.

因为 $R_\infty(A)$ 产生的块是可逆的. 因此会有非0特征值. 与条件矛盾. 故 $R_\infty(A)$ 的块不存在. $R_\infty(A)$ 为0维.

故 $\mathbb{C}^n = N_\infty(A) \oplus R_\infty(A) = N_\infty(A)$ 有 $A^k = 0$ $(k \leq n)$

4. $A^k = 0$. 故所有特征值为0

因此 A^2 特征值也均为0、$tr(A^2) = 0$

5. $A^3 = B^3 = 0$ 但 $A^2 \neq 0$, $B^2 \neq 0$

故A. B均为偏移变换. 均相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

故A. B相似

6. $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I - A^k = I$

故 $I-A$ 是可逆的 并且有 $(I-A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{k-1}$

又 $A^k = 0$ 知特征值均为0. $I-A$ 特征值均为1. 故 $|I-A| = 1$

7. A相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. 若$\exists$B使 $B^2 = A$. 则 $(P^{-1}BP)^2 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. 令 $C = P^{-1}BP$. 则 $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

由Schur定理. C相似于上三角阵. 上三角阵平方为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \\ & \ddots & & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. 故 $\mathrm{rank}(C^2) \leq n-2$

又 $\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right) = n-1$. 矛盾.

因此不存在 $B^2 = A$.