离散数学 HW

1. 给出最多的等价类的等价关系是 $\{\langle x,x\rangle \mid \forall x\in A\}$.

能给出 $|A|$ 个等价类.

给出最少的等价类的等价关系是全关系

能给出 1 个等价类

2. $aTa \Leftrightarrow aRa \wedge aRa$

已知 R 是 A 上传递和自反的关系. $\langle a,a\rangle \in R$

故 $\langle a,a\rangle \in T$. T自反.

若 $\langle a,b\rangle \in T$. $(a\neq b)$

$bTa \Leftrightarrow bRa\wedge aRb \Leftrightarrow aRb\wedge bRa \Leftrightarrow aTb$

知 $\langle b,a\rangle \in T$. T对称.

对 $\langle a,b\rangle \in T$. $\langle b,c\rangle \in T$

$aTc \Leftrightarrow aRc\wedge cRa$

$aTb \Leftrightarrow aRb\wedge bRa$

$bTc \Leftrightarrow bRc\wedge cRb$

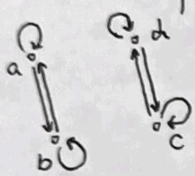
又R传递. 故 $aRb\wedge bRc \Rightarrow aRc$

$bRa\wedge cRb \Rightarrow cRa$

因此 $aTb\wedge bTc \Rightarrow aTc$, $\langle a,c\rangle \in T$. T传递.

综上. T是等价关系

3.



$[a]_R=[b]_R=\{a,b\}$

$[c]_R=[d]_R=\{c,d\}$

5. 1. 若R是等价关系

$\langle a,a\rangle \in R$. 故 $\langle a,a\rangle \in S$ (取c=a即知). S自反

~~若 $\langle a,b\rangle\in R$ 则 $\langle b,a\rangle\in R$~~

又 $aRb\wedge bRa \Leftrightarrow bRa\wedge aRb$

若 $\langle a,b\rangle \in S$. 则 $\langle b,a\rangle \in S$ S对称.

若 $\langle a,c\rangle \in R$ 且 $\langle c,b\rangle \in R$, 则 $\langle a,b\rangle \in R$

则若 $\langle a,b\rangle \in S$ 且 $\langle b,d\rangle \in S$. 知 $\langle a,b\rangle \in R$ 且 $\langle b,d\rangle \in R$

取 c=b, $aRb\wedge bRd \Rightarrow aRd \Leftrightarrow dRa$. $aRb\wedge bRd \Rightarrow aRd\wedge dRa$

因此 $\langle a,d\rangle \in S$. S传递

综上. S是等价关系

2. $x\cdot y = y\cdot x$

因此 $\langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle \in R$ R自反

$xv=yu \Leftrightarrow vx=uy$

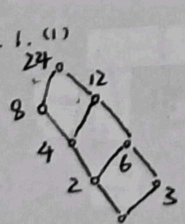
因此若 $\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle \in R$. 则 $\langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle \in R$. R对称.

$xv=yu$, $ur=vw$. 则 $xvur=yuvw$. 又 $u,v>0$. 故 $xr=yw$.

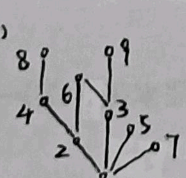
因此若 $\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle \in R$, $\langle\langle u,v\rangle,\langle w,r\rangle\rangle \in R$. 则 $\langle\langle x,y\rangle,\langle w,r\rangle\rangle \in R$ R传递.

综上知R是等价关系.

6. 1. (1)



(2)



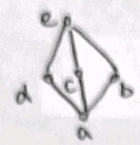
2. (1) 集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

偏序关系 $\{\langle a,b\rangle$, $\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle a,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle a,f\rangle,\langle c,g\rangle,\langle a,g\rangle\}\cup I_A$

(2) 集合 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

偏序关系 $\{<a,b>,<a,c>,<a,d>,<a,e>,<d,f>,<a,f>,<e,f>\}\cup I_A$

7. (1)



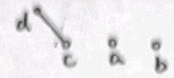
极大元是 e

极小元是 a

最大元是 e

最小元是 a

(2)



极大元是 d, a, b

极小元是 c, a, b

最大元不存在

最小元不存在.

8. T的上界为 $2520K$，其中 $K\in Z^+$

T的下界为 1

T的上确界为 2520

T的下确界为 1

9. 对B中的元素x.

有 $<x,x>\in B\times B$

又 $B\subseteq A$. 故 $x\in A \Rightarrow <x,x>\in R$.

因此 $<x,x>\in R\cap(B\times B)$.

对B中元素 x,y. $(x\neq y)$

有 $<x,y>\in B\times B$.

$<x,y>\in R$. 又R是A上的偏序关系.

故 $<y,x>\notin R$. 因此 $<x,y>\in R\cap(B\times B)$. $<y,x>\notin R\cap(B\times B)$

对B中元素 x,y,z.

$<x,y>\in B\times B$. $<y,z>\in B\times B$. $<x,z>\in B\times B$

若 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in R$.

则 $<y,z>\in R$.

因此 $(<x,y>\in R\cap(B\times B))\wedge(<y,z>\in R\cap(B\times B))\Rightarrow(<x,z>\in R\cap(B\times B))$

综上知 $R\cap(B\times B)$ 为偏序关系

11.