离散数学题解(AxMath 版)

2023010747 刘一铭 计 32

1、下列是命题的选项是:

A、 离散数学怎么这么难学!

B、希望离散数学能简单一些。

C、为什么离散数学这么难呢?

D、 离散数学确实很难学。

题解：选 D

A 是感叹句，B 是祈使句，C 是疑问句，只有 D 是能判断真假（其真值与讨论问题的范围有关）的陈述句。

考点：命题概念的辨析

难度：2

2、形式化下列自然语句：

1、除非张三学习好，否则上不了清华。

2、只有张三学习好，才能上北大。

3、只要张三学习好，张三就上北大，除非上清华

4、如果张三学习好，则张三上北大，否则上清华

令P:张三学习好, Q:张三上清华, R:张三上北大

(1)$\neg P\to\neg Q$或$Q\to P$

题解：(2)$R\to P$

(3)$\neg Q\to(P\to R)$或$(\neg Q\wedge P)\to R$

(4) $(P\to R)\wedge(\neg P\to Q)$

考点：命题联结词的使用、命题形式化

难度：3

3、将下列公式转换为波兰式或逆波兰式：

（1）将$(R\to\neg(P\leftrightarrow Q))\to S$转换为波兰式

（2）将$(P\wedge Q)\vee(\neg P\to R)$转换为逆波兰式

题解：（1） $\to\to R\neg\leftrightarrow PQS$

（2）$PQ\wedge P\neg R\to\vee$

考点：波兰式、逆波兰式的转换

难度：3

4、我们知道与非、或非联结词单独都可以构成联结词的完备集，事实上，对所有二元联结词，只有与非、或非才能构成完备集。请证明双条件词（等价）和异或联结词都不能单独构成联结词的完备集。

题解：

1. 异或门不能构成完全集。

$X \bigoplus Y = X + Y (mod\,2)$

仅用异或逻辑可以实现的所有逻辑函数可以表示成若干个$X, Y, 1, 0$的异或运算的累加，即

$$\begin{aligned} F &= m_1 X + m_2 Y + m_3 \cdot 1 + m_4 \cdot 0 \\ &= m_1 X + m_2 Y + m_3 \end{aligned}$$

如果异或门可以构成完全集，那么可以实现与逻辑。按照与逻辑的真值表

X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

得

$$\begin{cases} m_3 \equiv 0 \\ m_2 \equiv 0 & (mod\,2) \\ m_1 \equiv 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 \equiv 1 \end{cases}$$

矛盾。所以异或门不能单独构成完全集。

2. 同或门和异或门的等价性。

异或门串联一个非门即得同或门，而非门可以用异或门实现，方法是异或门的一端接高电平。

因此同或门和异或门都不可以单独构成完全集。

类似的可证等价也无法单独构成完备集。

There is a result in Robert Reckhow's thesis that characterizes the adequate sets of connectives. The result says that for a set of connectives to be complete one needs the following:

F and T (or formulas with these values),

an odd connective (a connective is called odd if some fixing of its input variables with T and F except two input variables has odd number of Ts in its truth table),

a non-monotone connective (a connective that turning an F to a T will make its value change from T to F).

在 William Wernick 的论文 *Complete Sets of Logical Functions* 对完备集作了充分的探讨，并得出了以下结论：

M. We may summarize our results and translate them into the more familiar language of the calculus of sentences:

1. There are just two complete sets of single functions: *e*; *b′*; which are Sheffer's stroke function and its dual,—*joint rejection* and *alternate rejection*.

2. There are just 9 complete sets of two functions—those named in Table VI:

negation, *implication*; *negation*, *non-implication*;
negation, *conjunction*; *negation*, *disjunction*;
falsity, *implication*; *non-equivalence*, *implication*;
verity, *non-implication*; *equivalence*, *non-implication*;
implication, *non-implication*.

3. There are just six complete sets of three functions—those named in Table X, or, in translation:

falsity, *conjunction*, *equivalence*;
falsity, *disjunction*, *equivalence*;
verity, *conjunction*, *non-equivalence*;
verity, *disjunction*, *non-equivalence*;
conjunction, *equivalence*, *non-equivalence*;
disjunction, *equivalence*, *non-equivalence*.

4. There is no complete set of more than three functions[17].

考点：联结词的完备集

难度：7

5、 求$P \to (Q \to R) \to S$的主析取范式和主合取范式

题解：

$$
\begin{aligned}
&\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \vee S \\
&=(P \wedge \neg(\neg Q \vee R)) \vee S \\
&=(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee S \\
&=(P \wedge S) \vee (Q \wedge S) \vee (\neg R \wedge S) \\
&= M_{15} \vee M_{13} \vee M_{11} \vee M_9 \vee M_7 \vee M_5 \vee M_1 \\
&= \bigvee\nolimits_{1,5,7,9,11,13,15} (\text{主析取范式}) \\
&= \bigwedge\nolimits_{(\{0,1,\ldots,15\}-\{1,5,7,9,11,13,15\}\text{补})} \\
&= \bigwedge\nolimits_{(\{0,1,\ldots,15\}-\{14,10,8,6,4,2,0\})} \\
&= \bigwedge\nolimits_{1,3,5,7,9,11,12,13,15} (\text{主合取范式})
\end{aligned}
$$

考点：范式概念，主析取范式，主合取范式及主析取范式和主合取范式之间的转化

难度：4

6、 使用推理规则证明$P \wedge (P \to (Q \vee R)) \wedge (Q \to S) \Rightarrow \neg S \to R$

题解：

$P \wedge (P \to (Q \vee R)) \wedge (Q \to S) \Rightarrow \neg S \to R$

(1)P　　前提引入

(2)$P \to (Q \vee R)$　　前提引入

(3)$Q \vee R$　　(1) (2)分离

(4)$Q \to S$　　前提引入

(5)$\neg S \to \neg Q$　　(4)置换

(6)$\neg S$　　附加前提引入

(7)$\neg Q$　　(5) (6)分离

(8)$\neg Q \to R$　　(3)置换

(9)R　　(7) (8)分离

(10)$\neg S \to R$　　条件证明规则

考点：归结推理法

难度：6

7、 用罗素公理系统证明$\vdash (P \vee P) \to (P \wedge P)$

题解：

$$\vdash (P \vee P) \to (P \wedge P)$$

证明: $(1)\vdash (P \vee P) \to P$ 公理1

$(2)\vdash ((P \vee P) \to P) \to (\neg P \to \neg (P \vee P))$ 定理3.2.7

$(3)\vdash \neg P \to \neg (P \vee P)$ (1) (2)分离

$(4)\vdash \neg\neg P \to \neg (\neg P \vee \neg P)$ (3)代入$\frac{P}{\neg P}$

$(5)\vdash \neg\neg P \to (P \wedge P)$ (4)置换

$(6)\vdash P \to \neg\neg P$ 定理3.2.5

$(7)\vdash P \to (P \wedge P)$ (5) (6)置换

$(8)\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 定理3.2.1

$(9)\vdash (P \to (P \wedge P)) \to (((P \vee P) \to P) \to ((P \vee P) \to (P \wedge P)))$ (8)代入$\frac{P}{P \vee P}\frac{Q}{P},\frac{R}{P \wedge P},$

$(10)\vdash ((P \vee P) \to P) \to ((P \vee P) \to (P \wedge P))$ (7) (9)分离

(11) $(P \vee P) \to (P \wedge P)$ (1) (10)分离

考点：罗素公理系统

难度：9

8、令$L(x,y)$表示“x 男生喜欢 y 女生”，则下列式子能表示“任何男生都只有一个喜欢的女生”的式子是：

A、$\forall x \exists y \exists z (((x \neq y) \to L(x,y)) \wedge ((x \neq z) \to \neg L(x,z)))$

B、$\forall x \exists y (L(x,y) \wedge \forall z ((z \neq y) \to \neg L(x,z)))$

C、$\forall x \exists y \forall z ((L(x,y) \wedge L(x,z)) \to (y = z))$

D、$\exists x \forall y (L(x,y) \wedge \forall z ((z \neq y) \to \neg L(x,z)))$

题解：A 选项代表“任何男生都有喜欢的女生和不喜欢的女生”，B 选项代表“任何学生都有喜欢的学生，且除了这个学生之外都不喜欢”，C 选项代表“任何男生都有不喜欢的女生”，D 选项代表在学校女生多于一个时候无法成立。因此答案是 B。

考点：谓词逻辑的基本概念；自然语句的形式化

难度：4

9、求$(\forall z)(\neg(\exists x)(\forall y)P(a,x,y,z) \to \neg(\exists x)(\forall y)Q(b,x,y,z)) \wedge \neg(\exists z)R(z)$的 Skolem 范式

题解：

$$\begin{aligned}
&(\forall z)(\neg(\exists x)(\forall y)P(a,x,y,z) \to \neg(\exists x)(\forall y)Q(b,x,y,z)) \wedge \neg(\exists z)R(z) \\
&=(\forall z)(\neg\neg(\exists x)(\forall y)P(a,x,y,z) \vee \neg(\exists x)(\forall y)Q(b,x,y,z)) \wedge (\forall z)R(z) \\
&=(\forall z)((\exists x)(\forall y)P(a,x,y,z) \vee (\forall x)(\exists y)\neg Q(b,x,y,z)) \wedge (\forall z)R(z) \\
&=(\forall z)((\exists x)(\forall y)P(a,x,y,z) \vee (\forall u)(\exists v)\neg Q(b,u,v,z)) \wedge (\forall z)R(z) \\
&=(\forall z)(((\exists x)(\forall y)P(a,x,y,z) \vee (\forall u)(\exists v)\neg Q(b,u,v,z)) \wedge R(z)) \\
&=(\forall z)(\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)((P(a,x,y,z) \vee \neg Q(b,u,v,z)) \wedge R(z)) \\
&=(\forall z)(\forall y)(\forall u)((P(a,f(z),y,z) \vee \neg Q(b,u,g(z,y,u),z)) \wedge R(z))
\end{aligned}$$

考点：Skolem 标准形；范式、前束范式；量词分配等值式
难度：5

10、用谓词逻辑的推理规则和归结法证明：人都想上清华，但是不是所有的人都想上北大。因此存在想上清华但不想上北大的人。

题解：（1）推理规则证明：

$F(x)$: x是人, $G(x)$: x想上清华, $H(x)$: x想上北大

前提: $(\forall x)(F(x)\to G(x))$, $\neg(\forall x)(F(x)\to H(x))$

结论: $(\exists x)(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

证明: (1) $(\forall x)(F(x)\to G(x))$　前提

(2)$\neg(\forall x)(F(x)\to H(x))$　前提

(3)$\neg(\forall x)(\neg F(x)\vee H(x))$　(2)置换

(4) $(\exists x)(F(x)\wedge\neg H(x))$　(3)置换

(5)$F(a)\wedge\neg H(a)$　(4)存在量词消去

(6)$F(a)$　(5)

(7)$\neg H(a)$　(5)

(8)$F(a)\to G(a)$　(1)全称量词消去

(9)$G(a)$　(6) (8)分离

(10)$F(a)\wedge G(a)\wedge\neg H(a)$　(6) (7) (9)

(11) $(\exists x)(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$　(10)存在量词引入

（2）归结法证明：

$F(x)$: x是人, $G(x)$: x想上清华, $H(x)$: x想上北大

$(\forall x)(F(x)\to G(x))\wedge\neg(\forall x)(F(x)\to H(x))\Rightarrow(\exists x)(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

$(\forall x)(F(x)\to G(x))\wedge\neg(\forall x)(F(x)\to H(x))\wedge\neg(\exists x)(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

$(\forall x)(F(x)\to G(x))=(\forall x)(\neg F(x)\vee G(x))$　子句集为$\{\neg F(x),\ G(x)\}$

$\neg(\forall x)(F(x)\to H(x))=(\exists x)\neg(\neg F(x)\vee H(x))=(\exists x)(F(x)\wedge\neg H(x))$　子句集为$\{F(a),\ \neg H(a)\}$

$\neg(\exists x)(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))=(\forall x)\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

$=(\forall x)(\neg F(x)\vee\neg G(x)\vee H(x))$　子句集为$\{\neg F(x)\vee\neg G(x)\vee H(x)\}$

归结: (1)$\neg F(x)\vee\neg G(x)\vee H(x)$

(2)$F(a)$

(3)$\neg G(a)\vee H(a)$　(1) (2)归结

(4)$G(x)$

(5)$H(a)$　(3) (4)归结

(6)$\neg H(a)$

(7)$\square$　(5) (6)归结

考点：基本的推理公式及其证明方法；推理演算与推理规则；谓词逻辑的归结推理法
难度：6

11、下列式子不正确的一项是：

A、$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

B、$A \in B \Leftrightarrow P(A) \in P(B)$

C、$A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

题解：选 B。通过课本 P142、143 知 A、C 成立，B 不正确，$A \in B \Rightarrow P(A) \in P(B)$ 并不一定成立。D 选项本来想出 $A = B \Leftrightarrow A^{+} = B^{+}$，但是成立条件和证明比较复杂，在 *Successor Sets and The Axioms of Peano* 中有详细的讨论。

考点：幂集合的性质

难度：5

12、下列选项中所列式子不正确的一项是：

A、$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

B、$A \oplus (A \oplus B) = A \Leftrightarrow A \oplus B = \varnothing$

C、$A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

D、$A \times B = B \times A \Leftrightarrow B = C$

题解：A：
$$\begin{aligned} &A - B = A \cap -B \\ &A \cap -B = A \Leftrightarrow A \subseteq -B \\ &\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing \end{aligned}$$

B：
$$\left.\begin{aligned} A \oplus (A \oplus B) = A \\ A \oplus (A \oplus B) = B(\text{基本公式}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = B \Leftrightarrow A \oplus B = \varnothing$$

$$A \oplus B = \varnothing \Rightarrow A \oplus (A \oplus B) = A \oplus \varnothing = A$$

C：
$$A = B \Rightarrow A - B = B - A$$

$$A - B = B - A \Rightarrow \left\{\begin{aligned} (A - B) \cup A = (B - A) \cup A \Rightarrow A = B \cup A \Rightarrow B \subseteq A \\ (A - B) \cup B = (B - A) \cup B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = B$$

D：令 $A = \varnothing$ 知不等价

因此选 D

考点：集合运算性质和证明

难度：4

13、n 和 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 均为正整数，且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，按照无穷公理表示的自然数填出下列计算结果：

(1)$\cup n=$______

(2)$\cap n=$______

(3)$\cup\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}=$______

(4)$\cap\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}=$______

题解：

(1)$\cup n=\cup\{0,1,2,\cdots,n-1\}=\cup\{\varnothing,\{0\},\{0,1\},\cdots,\{0,1,\cdots,n-2\}\}=\{0,1,\cdots,n-2\}=n-1$

(2)$\cap n=\cap\{0,1,2,\cdots,n-1\}=\cap\{\varnothing,\{0\},\{0,1\},\cdots,\{0,1,\cdots,n-2\}\}=\varnothing=0$

(3)$\cup\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}=\cup\{\{0,1,\cdots,a_1-1\},\{0,1,\cdots,a_2-1\},\cdots,\{0,1,\cdots,a_n-1\}\}=\{0,1,\cdots,a_n-1\}=a_n$

(4)$\cap\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}=\cap\{\{0,1,\cdots,a_1-1\},\{0,1,\cdots,a_2-1\},\cdots,\{0,1,\cdots,a_n-1\}\}=\{0,1,\cdots,a_1-1\}=a_1$

考点：无穷公理和自然数集合

难度：3

14、设 R 是集合 A 上的等价关系，$|A|=n$，$|R|=r$，$|A/R|=t$，证明：$r\cdot t\geqslant n^2$

题解：

$$设A/R=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\},\ |A_i|=n_i那么\bigcup_{i=1}^{t}(A_i\times A_i)=R$$

$$故\sum_{i=1}^{t}n_i^2=r,\ 又知\sum_{i=1}^{t}n_i=n$$

$$根据柯西不等式r\cdot t=\sum_{i=1}^{t}n_i^2\cdot\sum_{i=1}^{t}1\geqslant\left(\sum_{i=1}^{t}n_i\right)^2=n^2,得证$$

考点：等价关系的概念；划分与等价关系

难度：6

15、对任意非空集合 A，R 是 A 上的关系，则$tsr(R)$, $trs(R)$, $str(R)$, $srt(R)$, $rst(R)$, $rts(R)$中________________一定是 A 上的等价关系

题解：$tsr(R)$, $trs(R)$, $rts(R)$是等价关系，$str(R)$, $srt(R)$, $rst(R)$不一定是等价关系。

这是因为若 R 是传递的，则$r(R)$是传递的而$S(R)$不一定是传递的

考点：等价关系的概念；闭包的性质及其构造方法

难度：5

16、设 A, B 为可数集，用等势的定义证明：

（1）$A\cup B$是可数集

（2）$A\times B$是可数集

题解：（1）不妨设$A\cap B=\varnothing$，若两个集合都是有穷集，如

$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\}$，$B=\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}\}$那么$\mathrm{card}(A\cup B)=n+m\leqslant\aleph_0$．如果其中一个

集合是有穷集，另一个是无穷可数集，如$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\}$，$\mathrm{card}(B)=\aleph_0$．如下构造双

射$h:A\cup B\to\mathbf{N}$．当$x\in A$时，$x=a_i,h(x)=i$；当$x\in B$时，

$x=b_j, j=0,1,\cdots,h(x)=j+n$. 如果$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)=\aleph_0$，那么存在双射

$f{:}A\to\mathbf{N}$和$g{:}B\to\mathbf{N}$. 如下构造双射函数$h{:}A\cup B\to\mathbf{N}$，

$h(x)=\begin{cases} 2i, & x\in A \text{ 且 } f(x)=i \\ 2j+1, & x\in B \text{ 且 } g(x)=j \end{cases}$. 因此$\mathrm{card}(A\cup B)=\aleph_0$.

(2) 若两个集合都是有穷集，如$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\}, B=\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}\}$，那么

$\mathrm{card}(A\times B)=n\cdot m\leqslant\aleph_0$. 如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，如

$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\}$，$\mathrm{card}(B)=\aleph_0$. 如下构造双射$h{:}A\times B\to\mathbf{N}, h(\langle a_i,b_j\rangle)=i+jn$. 如

果$\mathrm{card}A=\mathrm{card}B=\aleph_0$，那么存在双射$f{:}A\to\mathbf{N}$和$g{:}B\to\mathbf{N}$. 如下构造双射函数

$h{:}A\times B\to\mathbf{N}$，$h(\langle x,y\rangle)=\dfrac{(i+j+1)(i+j)}{2}+i$，其中$f(x)=i, g(y)=j$. 因此

$\mathrm{card}(A\times B)=\aleph_0$.

考点：集合的等势；有限集合与无限集合的基数；可数集合

难度：7

17、用等势定义证明$R\approx[0,1)$

题解：构造双射函数$f{:}R\to[0,1)$，$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4x}, & \text{if } x>1 \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}x, & \text{if } 0<x\leqslant 1 \\ 0, & \text{if } x=0 \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x, & \text{if } -1<x<0 \\ \dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4x}, & \text{if } x\leqslant -1 \end{cases}$

考点：集合的等势；有限集合与无限集合的基数

难度：5

18、给定一个含有 n 个元素的集合 A，在 A 上能够定义出多少个不同的

（1）关系

（2）恒等关系

（3）自反关系

（4）非自反关系

（5）对称关系

（6）反对称关系

（7）自反且对称的关系

（8）自反且反对称的关系

（9）非自反且对称的关系

（10）非对称且反对称的关系
（11）当 n=0,1,2,3 时的传递关系
（12）当 n=0,1,2,3,4,5,6 时的等价关系
（13）当 n=0,1,2,3,4 时的偏序关系
（14）当 n=0,1,2,3,4 时的拟序关系
（15）全序关系

题解：用关系矩阵进行思考$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

（1） 有n^2个元素可选 0 或 1，因此有2^{n^2}种

（2） 均为 1，因此有 1 种

（3） 对角线均为 1，其他任选，因此有2^{n^2-n}种

（4） 对角线均为 0，其他任选，因此有2^{n^2-n}种

（5） 下三角任选（包括对角线），上三角由此确定，因此有$2^{\frac{n^2+n}{2}}$种

（6） 对角线任选，除对角线之外，一对对称的元素共有三种选择（0 和 0，1 和 0，0 和 1），因此有$2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$种

（7） 对角线均为 1，下三角任选，因此有$2^{\frac{n^2-n}{2}}$种

（8） 对角线均为 1，除对角线之外，一对对称的元素共有三种选择（0 和 0，1 和 0，0 和 1），因此有$3^{\frac{n^2-n}{2}}$种

（9） 对角线均为 0，下三角任选，因此有$2^{\frac{n^2-n}{2}}$种

（10） 对角线均为 0，除对角线之外，一对对称的元素共有三种选择（0 和 0，1 和 0，0 和 1），因此有$3^{\frac{n^2-n}{2}}$种

（11） 对任意的 n，并不存在这样的公式（但是可以递推），论文 *On the number of transitive relations on a set* 对此作了讨论。但是对 n=0,1,2 的情况，可以直接枚举知分别有 1,2,13,171 种

（12） 求等价关系即求不同的划分数目，答案是 Bell Number，可以通过递推得到。对 n=0,1,2,3,4,5,6 的情况，直接枚举知分别有 1,1,2,5,15,52,203 种

（13） 又是没有直接的公式，递推公式在 *The Number of Partially Ordered Sets* 中有详细的讨论，对 n=0,1,2,3,4 的情况，直接枚举知分别有 1,1,3,19,219 种

（14） 拟序关系与偏序关系数目相同，因此对 n=0,1,2,3,4 的情况，知分别有 1,1,3,19,219 种

（15） 直接排序即可，有$n!$种

考点：关系矩阵；二元关系的概念；等价关系和划分；偏序关系；全序关系

难度：8