第一次习题课（一元多项式）

一、判断下列结论是否正确，并说明理由。

设$0 \neq f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in F[x]$，K为F的扩域.

√ (1) $f(x) \mid g(x)$在$F[x]$中成立当且仅当$f(x) \mid g(x)$在$K[x]$中成立. 除法不依赖于系数域的选择

× (2) 在$F[x]$和$K[x]$中最大公因式$(f(x), g(x))$相同。

× (3) 在$F[x]$和$K[x]$中$f(x)$、$g(x)$的最大公因式相同。

√ (4) 若$f(x)$、$g(x)$在C上有公共根，则在$F[x]$上$(f(x), g(x)) \neq 1$. a_1为根. 则$\bar{a}_1$为根. 有 $x^2-a_1\bar{a}_1$ 为公因式

√ (5) $f(x)$在C上有重根当且仅当在$F[x]$上$(f(x), f'(x)) \neq 1$。有重根x_1. 则有公因式$x-x_1$. 有公因式$x-x_1$. $f(x)$有$(x-x_1)^k$. 则$k-1>0 \Rightarrow k \geq 2$有重根

√ (6) 设$f(x)$为F上的不可约多项式，且$f(x), g(x)$有公共的复根，则$f(x) \mid g(x)$.

√ (7) $f(x), g(x)$的公共根恰好为$(f(x), g(x))$的根。

× (8) $\alpha \in C$为$f(x)$的2重根当且仅当$f'(\alpha) = 0, f''(\alpha) = 0$，但$f'''(\alpha) \neq 0$. 2重根则$f'(\alpha)=0$. $f''(\alpha)\neq 0$

√ (9) $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 当且仅当$(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$.

√ (10) $(f(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))(f(x), h(x))$.

√ (11) 若$x - 1 \mid f(x^n)$, 则$x^n - 1 \mid f(x^n)$.

× (12) 若$x + 1 \mid f(x^n)$, 则$x^n + 1 \mid f(x^n)$. 如 $n=2$. $f(x)=x-1$ 则 $x+1 \mid x^2-1$，$x^2+1 \nmid x^2-1$

二、设a, b, c 是三个不同的数，用$x - a$，$x - b$，$x - c$ 除一元多项式$f(x)$ 的余式依次为$r; s; t$，试求用$g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ 除$f(x)$ 的余式.

$f(a)=r$. $f(b)=s$. $f(c)=t$. $f(x)=g(x)t(x)+u(x)$ $u(a)=r$. $u(b)=s$ $u(c)=t$ $u(x)=r\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+s\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+t\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

三、求$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1$，$g(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$的公共根。

$(f(x), g(x)) = x^2+3x+1$. 故公共根为 $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

四、求$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x + 4$在$Q$上的~~标准分解式~~。有理根

$(x-1)(x+1)(x^3-3x^2+3x-4)$. 有理根为$\pm 1$

五、设$0 \neq f(x)$, $q(x) \in F[x]$，其中$q(x)$为F上首1的不可约多项式，证明：$q(x)$为$f(x)$的n重不可约因式的充要条件是$q(x) \mid f(x), q(x) \mid f'(x), \ldots, q(x) \mid f^{(n-1)}(x)$，但$q(x) \nmid f^{(n)}(x)$.

$q(x)$为f'的$k-1$重因式

$q(x)$为$f^{(2)}$的$k-2$重因式

六、证明：(1) $f(x) \mid g(x)$ 当且仅当$f(x)^n \mid g(x)^n$ (n为正整数).

(2) $(f(x), g(x)) = 1$当且仅当$(f(x)^m, g(x)^n) = 1$（m, n为正整数）。

(1) $f(x) \mid g(x)$

$\Rightarrow g(x)=f(x)\cdot r(x)$

$\Rightarrow g^n(x)=f^n(x)\cdot r^n(x)$

$\Rightarrow f^n(x) \mid g^n(x)$

$f^n(x) \mid g^n(x)$

$\Rightarrow$ ~~对f(x)的根~~ $f^n(x) \mid g^n(x)-f^n(x)$.

若$f(x) \nmid g(x)$. 则$f(x) \nmid g(x)-f(x)$

则 $f(x) \mid f^n(x) \Rightarrow f(x) \mid g^{n-1}(x)+g^{n-2}(x)f(x)+\cdots+f^{n-1}(x) \Rightarrow f(x) \mid g^{n-1}(x)$

$\Rightarrow f(x) \mid g^{n-1}(x)-f_1^{n-1}(x)$. 同理知$f(x) \mid g^{n-2}(x)$.

不断往下. 知$f(x) \mid g(x)$矛盾.

因此$f(x) \mid g(x)$.

(2) $(f(x), g(x))=1 \Rightarrow (f^m(x), g(x))=1 \Rightarrow (f^m(x), g^n(x))=1$

若$(f^m(x), g^n(x))=1$ 且$(f(x), g(x))=r(x)$.

则 $r(x) \mid f^m(x)$, $r(x) \mid g^n(x)$

$\Rightarrow (f^m(x), g^n(x)) \geq r(x)$

矛盾

因此$(f(x), g(x))=1 \Leftrightarrow (f^m(x), g^n(x))=1$

七 设$w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. 定义$F_n = (f_{st})_{n\times n}$, 其中$f_{st} = w^{(s-1)(t-1)}$. 这个矩阵称为Fourier矩阵. 令$\overline{F}_n$是$F_n$的共轭矩阵.

(1) F_n是一个对称矩阵(不是实对称)且$F_n\overline{F}_n = nI_n$.

(2) (离散Fourier变换DFT)考虑插值问题：求$n-1$次多项式函数$y = f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$,满足它经过$n$个点$(1,y_1),(w,y_2),\cdots,(w^{n-1},y_n)$, 即$f(w^{k-1}) = y_k$, $k = 1,\cdots,n$. (这里我们不使用Larange插值多项式计算，而是直接列方程组求a_i, 然后使用第一问结论)。

(1) $f_{st} = w^{(s-1)(t-1)} = w^{(t-1)(s-1)} = f_{ts}$

考虑 $A = F_n\overline{F}_n$ 的 i 行 j 列元素 a_{ij} 若 $i, j \neq 1$.

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{kj} f_{ik}$

$= \sum_{k=1}^{n} w^{(k-1)(j-1)} \cdot w^{(k-1)(i-1)}$

$= w^{(i-1)(j-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (w^{k-1})^2$.

$w^n = 1$ $\quad \sum_{k=1}^{n} (w^{k-1})^2 = (\sum_{k=1}^{n} w^{k-1})^2 - 2(\sum a_i a_j) = 0 - 0 = 0$

故 $a_{ij} = 0$.

若 $i=1$, $j\neq 1$. $\quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} w^{(k-1)(j-1)} = w^{j-1}\sum_{k=1}^{n} w^{k-1} = 0$.

同理 $i\neq 1$. $j=1$ $\quad a_{ij}=0$

若 $i=1$, $j=1$. $\quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

故 $F_n\overline{F}_n = nI_n$.

(2)
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 w + \cdots + a_{n-1} w^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_{n-1} w^{(n-1)(n-1)} = y_n \end{cases}$$

$$F_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$nI_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \overline{F}_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$na_i = y_1 + y_2\overline{w}^{i} + \cdots + y_n\overline{w}^{i(n-1)}$$

$$a_i = \frac{1}{n}(y_1 + y_2\overline{w}^{i} + y_3\overline{w}^{2i} + \cdots + y_n\overline{w}^{(n-1)i})$$