清華大學 Tsinghua University

2023010747 刘一铭 计32

微积分习题 5.2

3. (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{\sqrt{n^n}}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}\to 0,\ n\to+\infty$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{\sqrt{n^n}}$ 收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3}=\dfrac{e}{3}<1$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛.

(3) $p>1$ 收敛 $p<1$ 发散

$p=1$ $q>1$ 收敛 $q<1$ 发散

$p=1$. $q=1$. $r>1$ 收敛. $r\le 1$ 发散

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\dfrac{n+2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=2$ 又 $\dfrac{4}{3}>1$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\dfrac{n+2}{n}$ 收敛

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\right)^n$ 收敛

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln(n+1)!}{(n+1)!}}{\frac{\ln(n!)}{n!}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)+\ln(n!)}{(n+1)\ln(n!)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n!)}+\dfrac{1}{n+1}\right)=0<1$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n!}$ 收敛

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{e^{-\frac{n^2+1}{n+1}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-\frac{n^2+1}{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-1}=\dfrac{1}{e}<1$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2+1}{n+1}}$ 收敛

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(\ln^n n)\,n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n\cdot\sqrt[n]{n!}}{n}$ 又令 $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ 则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\dfrac{1}{e}$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$ $n\to+\infty$

$\cancel{又\ \sqrt[n]{n!}=\sqrt[2n]{(n\cdot1)((n-1)\cdot2)\cdots(1\cdot n)}<\sqrt[2n]{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}}=\frac{n+1}{2}}$ 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n\sqrt[n]{n!}}{n}\to+\infty$

$\cancel{又\ \frac{\ln n\sqrt[n]{n!}}{n}\quad \ln\left(\frac{\ln n\cdot\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\ln\ln n+\frac{\ln n+\ln(n-1)+\cdots+\ln 1}{n}-\ln n}$

~~故该级数发散~~

(9) $\dfrac{3n-1}{2^n+2^{-n}}<\dfrac{3n}{2^n}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3n}{2^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3n}}{2}=0<1$.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{2^n}$ 收敛. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{2^n+2^{-n}}$ 收敛.

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{1+a^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{1+a^n}}<1$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛.

$\cancel{当\ a>1\ 时\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+a^n}}=\frac{1}{a}<1.\ 故收敛.}$

$\cancel{当\ a\le1\ 时\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+a^n}}<}$

5. nu_n 有界. 故 $\forall n$ 有 $nu_n\le C\Rightarrow u_n\le\dfrac{C}{n}$

$\cancel{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}\ 故\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}}$ 故 $\dfrac{u_n}{n}\le\dfrac{C}{n^2}$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 收敛

8. (1) $\dfrac{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{n+1})}}{\frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{n})}}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n+1}}$. 又 $n\left(\dfrac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}-1\right)=\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}\to+\infty,\ n\to+\infty$

故存在 $\rho>1$ 使 n 充分大时有 $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\ge\rho$. 故该级数收敛.

9. (1) 令 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}=x$. 原式 $=x-\sqrt{\ln(1+x^2)}=\dfrac{x^2-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x+\sqrt{\ln(1+x^2)}}\sim x^3$

因此 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\sim\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $n\to+\infty$ 且 $\dfrac{3}{2}>1$

故级数收敛.

(2) $n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\dfrac{\ln n}{n^2+1}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^2+1}\cdot n^{\frac{3}{2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$ 且 $\dfrac{3}{2}>1$

因此级数收敛

2023010747 刘一鹏 计32

微积分习题 5.3

3. 不能. 如令 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则由 Leibniz 判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛

又令 $v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, 则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}}=1$, 但由于 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n-v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}}_{\frac{1}{n}}$ 发散. 故 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散

4. (2) 绝对收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 令 $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}=\frac{2n+1}{2n+2}<1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(3) 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n-\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 由 Leibniz 判别法知收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 发散. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{n+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. 令 $a_n=\frac{n}{n+1}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1$. 故发散.

(6) 绝对收敛

$0<\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{n(\ln n)^3}\cos\frac{n\pi}{4}\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$ 又 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$ 收敛. 故原式收敛

(13) 发散

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n-1}$. 又 $\frac{2\sqrt{n}}{n-1}\sim\frac{2}{\sqrt{n}}$ $(n\to+\infty)$. 又 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ 发散. 故原式发散.

(14) 绝对收敛

$\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2n^2}$ $(n\to+\infty)$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛. 故原式收敛

6. $(a_n+b_n)^2\le 2(a_n^2+b_n^2)$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}2(a_n^2+b_n^2)$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛.

$\left|\frac{a_n}{n}\right|\le a_n^2+\frac{1}{4n^2}$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$ 均收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

7. $0\le c_n-a_n\le b_n-a_n$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n-a_n+a_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+(-1)^n u_n)$ 发散 $\Rightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 发散.

9. $\{u_n\}\downarrow$ 且为正. 故 u_n 收敛. 若为0. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. 矛盾. 故 $\lim_{n\to+\infty}u_n=a>0$

收敛

$\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n\le\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$

又 $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a}\right)^n}=\frac{1}{1+a}<1$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.