离散数学作业week4 by 2023010747 刘一铭

第五题

$$
\begin{gathered}
\text{合取范式}: \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P} \\
\text{析取范式}: \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P} \\
\text{主合取范式}: \text{无} \\
\text{主析取范式}: \bigvee_{0;1} \\
\text{公式为真的解释}: \{\mathrm{P}=\mathrm{T}\} \\
\{\mathrm{P}=\mathrm{F}\}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{合取范式}: (\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{P} \leftrightarrow \neg \mathrm{Q}) \\
= \neg(\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q}) \vee ((\mathrm{P} \rightarrow \neg \mathrm{Q}) \wedge (\neg \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P})) \\
= (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee ((\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{P}))\ [\text{摩根律}] \\
= ((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q})) \wedge ((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \vee \mathrm{P}))\ [\text{分配律}] \\
= ((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee \neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) \wedge ((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee \mathrm{Q} \vee \mathrm{P})\ [\text{摩根律}] \\
= \mathrm{T} \wedge ((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee \mathrm{Q} \vee \mathrm{P})\ [\text{补余律}] \\
= \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}\ [\text{同一律}+\text{吸收律}] \\
\text{析取范式}: (\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{P} \leftrightarrow \neg \mathrm{Q}) \\
= \neg(\neg \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \\
= (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})\ [\text{摩根律}] \\
\text{主合取范式}: \bigwedge_{3} \\
\text{主析取范式}: \bigvee_{1;2;3} \\
\text{公式为真的解释}: \{\mathrm{P}=\mathrm{T}, \mathrm{Q}=\mathrm{T}\} \\
\{\mathrm{P}=\mathrm{T}, \mathrm{Q}=\mathrm{F}\} \\
\{\mathrm{P}=\mathrm{F}, \mathrm{Q}=\mathrm{T}\}
\end{gathered}
$$

第六题

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\text{永真}: (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})) \rightarrow ((\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R})) \\
& = (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})) \rightarrow (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}))\ [\text{分配律}] \\
& = \mathrm{T} \\
& \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}\text{永假}: (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})) \wedge \neg((\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R})) \\
& = (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})) \wedge \neg(\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}))\ [\text{分配律}] \\
& = \mathrm{F}\ [\text{补余律}] \\
& \text{解释法}: (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})) = \mathrm{T} \\
& \text{从而有}\mathrm{P}=\mathrm{T}, \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}=\mathrm{T}\text{或者}\mathrm{P}=\mathrm{F} \\
& \text{若}\mathrm{P}=\mathrm{T}, \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}=\mathrm{T}, \text{则}\mathrm{Q}=\mathrm{F}\text{或}\mathrm{Q}=\mathrm{R}=\mathrm{T} \\
& \quad \text{若}\mathrm{Q}=\mathrm{F}, \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}=\mathrm{F}, (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R})=\mathrm{T} \\
& \quad \text{若}\mathrm{Q}=\mathrm{R}=\mathrm{T}\text{则}\ (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q})=(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R})=\mathrm{T}, (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R})=\mathrm{T} \\
& \text{若}\mathrm{P}=\mathrm{F}, \text{则}\ (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q})=(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R})=\mathrm{T}, (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{R})=\mathrm{T}
\end{aligned}
$$

第七题

$P \rightarrow (Q \rightarrow R), \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \rightarrow R$

$(1) \neg S \vee P$ [前提引入]

$(2) S \rightarrow P$ [(1)置换]

$(3) P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ [前提引入]

$(4) S \rightarrow (Q \rightarrow R)$ [(2) (3)三段论]

$(5) Q \rightarrow (S \rightarrow R)$ [(4)置换]

$(6) Q$ [前提引入]

$(7) S \rightarrow R$ [(5) (6)分离]

第八题

$A =$ 北京队第三

$B =$ 上海队第二

$C =$ 天津队第四

$D =$ 沈阳队第一

$A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg D \vee A, B \Rightarrow D \rightarrow C$

$(1) \neg D \vee A$ [前提引入]

$(2) D \rightarrow A$ [(1)置换]

$(3) D$ [附加前提引入]

$(4) A$ [(2) (3)分离]

$(5) A \rightarrow (B \rightarrow C)$ [前提引入]

$(6) B \rightarrow C$ [(4) (5)分离]

$(7) B$ [前提引入]

$(8) C$ [(6) (7)分离]

$(9) D \rightarrow C$ [条件证明规则]