2023010747 刘一鸣 计32

离散数学作业 11

2. 要证其为半群，只需证 $((a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2))\cdot(c_1,c_2)=(a_1,a_2)\cdot((b_1,b_2)\cdot(c_1,c_2))$

$LHS=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2)\cdot(c_1,c_2)=(a_1\cdot b_1\cdot c_1,a_2\cdot b_2\cdot c_2)$

$RHS=(a_1,a_2)\cdot(b_1\cdot c_1,b_2\cdot c_2)=(a_1\cdot b_1\cdot c_1,a_2\cdot b_2\cdot c_2)$

因此 $LHS=RHS$

当 S 有单位元 e 时，则 $(a_1,a_2)\cdot(e,e)=(a_1\cdot e,a_2\cdot e)=(a_1,a_2)$

$(e,e)\cdot(a_1,a_2)=(e\cdot a_1,e\cdot a_2)=(a_1,a_2)$

故 (e,e) 为 $S\times S$ 的单位元

4. 任意整数 a，$a\times1=a$，且 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$，故 $(Z,\times,1)$ 是幺群

又 $\{0\}\subseteq Z$，且 $(Z,\times)$ 是半群，$0\times0=0$，在 × 运算下 $\{0\}$ 封闭，故 $(\{0\},\times)$ 是子半群。

又 $e=1\notin\{0\}$，故 $(\{0\},\times)$ 不为子幺群

7. G 是群，设 G 为 $(S,\cdot)$，则 $\forall a\in S$，有 $a^{-1}=a$

故 $e=a^{-1}a=a\cdot a$.

故 $(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=e$ 有 $a\cdot b=(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}=b\cdot a$，因此 G 为交换群

8. $k_1m+k_2m=(k_1+k_2)m$，$(G,+)$ 具有封闭性

$(k_1m+k_2m)+k_3m=k_1m+(k_2m+k_3m)$ 具有结合律.

$0+km=km+0=km$，有单位元 0

$km+(-km)=(-km)+km=0$ 任意元素均为可逆元.

故 $(G,+)$ 为群