2023010747 刘一[illegible] 计32.

线性代数附加题

1. (1) w_k 是 m 次单位根，故 $w_k^m=1$

故 w_k 是方程 $x^m-1=0$ 的根，$k=0,\cdots,m-1$，再比较首项系数，

故 $x^m-1=\prod_{k=0}^{m-1}(x-w_k)$

$\xi_k^m=-1$，故 ξ_k 是方程 $x^m+1=0$ 的根，$k=0,\cdots,m-1$，再比较首项系数，

故 $x^m+1=\prod_{k=0}^{m-1}(x-\xi_k)$

(2) $\cos\frac{k\pi}{2n+1}=-\cos(\pi-\frac{k\pi}{2n+1})=-\cos\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}$，对 k 为奇偶进行变换

故 $\prod_{i=1}^{2n}\cos\frac{2i\pi}{2n+1}=(-1)^n LHS^2$

设 w_k 是 $x^{2n+1}-1=0$ 的根，$x^{2n+1}-1=\prod_{k=1}^{2n}(x-w_k)$

$2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=w_k+\overline{w_k}$

$\prod_{i=1}^{2n}(w_i+\overline{w_i})=\prod_{i=1}^{2n}w_i(1+\frac{\overline{w_i}}{w_i})=\prod_{i=1}^{2n}(1+w_{2n+1-2i})=(-1)^{n}\prod_{i=0}^{2n}(1+w_i)=(-1)^{n-1}\cdot(-2)$

$LHS^2\cdot(-1)^n=\frac{(-1)^n\cdot 2}{2^{2n+1}}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\Rightarrow LHS=\frac{1}{2^n}$

2. ① 存在。

② 考虑基 $1,\sqrt{2}$ 变换后的坐标。$\forall z_0=a_0+b_0\sqrt{2}$.

$f_{z_0}(1)=a_0+b_0\sqrt{2}$，在 $1,\sqrt{2}$ 基下坐标为 $\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}$

$f_{z_0}(\sqrt{2})=2b_0+a_0\sqrt{2}$，在 $1,\sqrt{2}$ 基下坐标为 $\begin{pmatrix}2b_0\\a_0\end{pmatrix}$

故可定义 $\Phi(a+b\sqrt{2})=\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}$ 验证可知其满足 $\Phi(ab)=\Phi(a)\Phi(b)$

③ $H(a+bi+cj+dk)=\begin{pmatrix}a&-b&-c&-d\\b&a&-d&c\\c&d&a&-b\\d&-c&b&a\end{pmatrix}$

3. (1) $(g_1(x),g_2(x))=1\Rightarrow\exists\,u_1(x),u_2(x)$ $\quad g_1(x)u_1(x)+g_2(x)u_2(x)=1$

故 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u_1(x)f(x)g_1(x)+u_2(x)f(x)g_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}=\frac{u_1(x)f(x)}{g_2(x)}+\frac{u_2(x)f(x)}{g_1(x)}$.

$u_1(x)f(x)=t_1(x)g_2(x)+f_2(x)$ $\quad\deg(f_2(x))<\deg(g_2(x))$

$u_2(x)f(x)=t_2(x)g_1(x)+f_1(x)$ $\quad\deg(f_1(x))<\deg(g_1(x))$

$\Rightarrow f(x)=(t_1(x)+t_2(x))g(x)+f_1(x)g_2(x)+f_2(x)g_1(x)$. 由于 $\deg(g(x))>\deg(f(x))$，故 $t_1(x)+t_2(x)=0$

$\deg(f_1(x)g_2(x))<\deg(g(x))$.

$\deg(f_2(x)g_1(x))<\deg(g(x))$

故 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$.

(2) 不可约多项式无重根.

故 $(g(x),g'(x))=1$

$\exists\,u_1(x),u_2(x)$. $\quad u_1(x)g(x)+u_2(x)g'(x)=1$ $\quad f(x)u_2(x)g'(x)=t(x)g(x)+h_k(x)$；令 $f_{k-1}(x)=u_1(x)f(x)+t(x)$

$\deg(h_k(x))<\deg(g(x))$ $\quad\deg(f_{k-1}(x))<\deg(g^{k-1}(x))$

$\frac{f(x)}{g^k(x)}=\frac{u_1(x)f(x)}{g^{k-1}(x)}+\frac{u_2(x)f(x)g'(x)}{g^k(x)}=\frac{h_k(x)}{g^k(x)}+\frac{f_{k-1}(x)}{g^{k-1}(x)}$

(3) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{k}p_i^{n_i}(x)}=b(x)+\frac{a(x)}{\prod_{i=1}^{k}p_i^{n_i}(x)}$ 用(1)可分为 $b(x)+\frac{a_1(x)}{p_1^{n_1}(x)}+\cdots+\frac{a_k(x)}{p_k^{n_k}(x)}$.

对 $\frac{a_i(x)}{p_i^{n_i}(x)}$ 可用(2)分成 $\frac{h_{n_i}(x)}{p_i^{n_i}(x)}+\frac{a_{i_{k-1}}(x)}{p_i^{n_i-1}(x)}$ 其中 $\frac{a_{i_{k-1}}(x)}{p_i^{n_i-1}(x)}$ 还能用(2)往下分解直到分子次数小于分母

故有 $\frac{f(x)}{g(x)}=b(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{c_{ij}}{p_i^j}$