2023010747 刘一鸣

离散数学

3. A、B均为有限集，且f为A到B的单射

又已知 $|A|=|B|$，若有 $y\in B$ 且不存在 x 使 $f(x)=y$，则 A 中元素映射到 $B-y$，又 $|A|>|B-y|$

故 $\exists x_1\neq x_2$，$f(x_1)=f(x_2)$ 与单射矛盾，故 f 必为满射

若 f 为满射，则若 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)=f(x_2)$，又 f 满射保证 B 中元素均有 A 中元素与之对应，故 $|A|>|B|$ 矛盾

因此 f 为单射

10. 自反性：$a+b=a+b \Rightarrow (a,b)\sim(a,b)$

对称性：$a+b=b+a \Rightarrow (a,b)\sim(b,a)$

传递性：$a+d=b+c,\ d+e=c+f \Rightarrow a+f=b+e$

$(a,b)\sim(c,d),\ (c,d)\sim(e,f) \Rightarrow (a,b)\sim(e,f)$

15. 定义 $f: S\to P$ 为 $f(a)=3$，$f(b)=2$，$f(c)=1$，且 f 为双射

则 $f(a*a)=f(a)=3=3\cdot3=f(a)\cdot f(a)$

$f(a*b)=f(b)=2=3\cdot2=f(a)\cdot f(b)$

$f(a*c)=f(c)=1=3\cdot1=f(a)\cdot f(c)$

同理可验证对 $\forall x,y\in S$，$f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$，因此 $(S,*)$ 与 $(P,\cdot)$ 同构