2023010747 刘一錡 计32

线性代数附加题3.

1. A可对角化 ⟺ Jordan标准型的block大小均为1

⟺ 初等因子组均为一次项.

⟺ $\lambda I_n - A$ 的初等因子均是一次多项式

2. (1) 考虑 $F_{f(\lambda)}$ 的 k阶子式的行列式，当 $k=1,2,\cdots,(k-1)$ 时，$D_k(\lambda) \left| \begin{vmatrix} -1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix} \right|_{k\times k} \Rightarrow D_k(\lambda)=1$.

$k=k$时，λI_k 的行列式 $=f(\lambda)$，因此 $D_1(\lambda)=\cdots=D_{k-1}(\lambda)=1$，$D_k(\lambda)=f(\lambda)$

因此 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{k-1}(\lambda)=1$，$d_k(\lambda)=f(\lambda)$

(2) Smith标准型对角线元素为不变因子，因此Smith标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$

(3) $F_{f(\lambda)}$ 的极小多项式为 $d_k(\lambda)$，又 $d_k(\lambda)=f(\lambda)=|\lambda I_k - F_{f(\lambda)}|$，因此得证.

(4) $\lambda I_n - A$ 的不变因子组为 $1,1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$，因此A相似于 $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & d_1(\lambda) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & d_k(\lambda) \end{pmatrix}$

由于 $F_{f(\lambda)}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda) \end{pmatrix}$

故 $F=\begin{pmatrix} F_{d_1(\lambda)} & & \\ & \ddots & \\ & & F_{d_k(\lambda)} \end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & d_1(\lambda) & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & d_2(\lambda) & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & d_k(\lambda) \end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_1(\lambda) & \\ & & & \ddots \\ & & & & d_k(\lambda) \end{pmatrix}$ 相似于A.

3. (1) 我们希望求含 $\vec{v}$ 的T-不变子空间C，故 $A\vec{v}\in C$，$A^2\vec{v}\in C$，$\cdots$，$A^{k-1}\vec{v}\in C$，又 $\vec{v},\cdots,A^{k-1}\vec{v}$ 线性无关.

因此该子空间 $\supseteq \mathrm{span}\{\vec{v},\cdots,A^{k-1}\vec{v}\}=C_{\vec{v}}$.

下证 $C_{\vec{v}}=\mathrm{span}\{\vec{v},\cdots,A^{k-1}\vec{v}\}$ 是T-不变子空间

这是由于对 $\vec{w}=a_1\vec{v}+a_2A\vec{v}+\cdots+a_kA^{k-1}\vec{v}\in C_{\vec{v}}$.

$$A\vec{w}=a_1A\vec{v}+a_2A^2\vec{v}+\cdots+a_kA^k\vec{v}$$

由于 $\vec{v},A\vec{v},\cdots,A^k\vec{v}$ 线性相关，故 $A^k\vec{v}$ 可被 $\vec{v},\cdots,A^{k-1}\vec{v}$ 表出，故 $A\vec{w}\in C_{\vec{v}}$.

(2) 由第2题知 $\lambda I_k - F$ 的Smith标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$，$f(\lambda)=\lambda^k-C_{k-1}\lambda^{k-1}-C_{k-2}\lambda^{k-2}-\cdots-C_1\lambda-C_0$

又 $f(A)\vec{v}=0$，故A与F相似.

5. 设 $a_1,\cdots,a_k$ 为特征值，代数重数为 $m_1,\cdots,m_k$，广义特征子空间为 $V_1,\cdots,V_k$

由中国剩余定理，$\exists\, p(x)$，$p(x)\equiv a_i \pmod{(x-a_i)^{m_i}}$，$p(x)\equiv 0 \pmod{x}$

设 $q(x)=x-p(x)$.

则 $(p(A)-a_iI)V_i=0$，令 $p(A)=D$，$q(A)=A-D=N$.

则D可对角化，N特征值均为0，为幂零矩阵.