20230107247 刘一鹤

附加题 7.

1. (1) 若 $P^{-1}AP=B$. 令 $P=P_1+iP_2$ 其中 $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $A(P_1+iP_2)=(P_1+iP_2)B \Rightarrow AP_1=P_1B$. $AP_2=P_2B$

考虑 $f(x)=\det(P_1+P_2x)$. 则 $f(i)\neq 0$. 故 $f(x)$ 是非零多项式. 有 $x_0\in\mathbb{R}$ 使 $f(x_0)\neq 0$

又 $f(x)$ 的度数小于等于 n. 因此存在 $x_1\in\{0,1,\cdots,n\}$ 使 $f(x_1)\neq 0$. 故 $P_1+P_2x_1$ 可逆. 有 $A(P_1+P_2x_1)=(P_1+P_2x_1)B$

故有 $Q\in M_n(\mathbb{R})$ 使 $Q^{-1}AQ=B$

3. "$\Rightarrow$" A 为半正定实对称阵. 则 $A^TA=A^2$ 的特征值为 A 的特征值的平方. 又 A 特征值均 ≥ 0

故奇异值等于非零特征值

"$\Leftarrow$" A 的非零特征值与奇异值相同. 由于 A 特征值均 ≥ 0. 故 A 半正定

又 $A=U\Sigma V^T$. $\Sigma=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&& \\ &\lambda_2 &&&& \\ &&\ddots &&& \\ &&&\lambda_r && \\ &&&&0 & \\ &&&&&\ddots \\ &&&&&& 0\end{pmatrix}$ $AA^T=U\Sigma V^TV\Sigma U^T=U\begin{pmatrix}\lambda_1^2 &&&&& \\ &\ddots &&&& \\ &&\lambda_r^2 &&& \\ &&&0 && \\ &&&&\ddots & \\ &&&&& 0\end{pmatrix}U^T$

又 $r=\operatorname{rank}(A)$. $n-\operatorname{rank}(A)$ 为 $\operatorname{Ker}(A)$ 的维数. 恰好 $n-r$ 个特征值 0. 故 A 可对角化. 设 $A=PDP^{-1}$. $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&& \\ &\ddots &&&& \\ &&\lambda_r &&& \\ &&&0 && \\ &&&&\ddots & \\ &&&&& 0\end{pmatrix}$

$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2=\operatorname{trace}(A^TA)^{\frac{1}{2}}\operatorname{trace}(AA^T)^{\frac{1}{2}}\geq|\operatorname{trace}(A^2)|=|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2|=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2$

中间 Cauchy 不等式成立当 $A=tA^T\Rightarrow A^2=tAA^T\Rightarrow \operatorname{trace}(A^2)=t\operatorname{trace}(AA^T)\Rightarrow t=1$

因此 $A=A^T$