2023010724 刘一铭 计32.

线性代数作业7.

1. 若 $C_{\vec v}$ 是极大循环子空间，下证 $v \notin \mathrm{Im}T$.

若 $v \in \mathrm{Im}T$，则 $\exists w$ 使 $T(w)=v$. 则若 $C_{\vec v}$ 基为 $\vec v, T(\vec v), \cdots, T^{k}(\vec v)$，$C_{\vec w}$ 基为 $\vec w, T(\vec w), \cdots, T^{k+1}(\vec w)$

故 $C_{\vec v} \subseteq C_{\vec w}$ 且 $C_{\vec v} \neq C_{\vec w}$.

因此 $C_{\vec v}$ 不为极大，矛盾，故 $v \notin \mathrm{Im}T$

若 $\vec v \notin \mathrm{Im}(T)$，下证 $C_{\vec v}$ 为极大循环子空间.

否则，$\exists w$ 使 $C_{\vec v} \subsetneq C_{\vec w}$，不妨设 $\dim C_{\vec v} = m$，$\dim C_{\vec w} = n > m$

由于 $\vec v \in C_{\vec w}$，故 $\vec v = a_0\vec w + a_1T(\vec w) + \cdots + a_{n-1}T^{n-1}(\vec w)$

又由 $\vec v \notin \mathrm{Im}T$，则 $a_0 \neq 0$，又 $\dim C_{\vec v} = m$，故 $T^m(\vec v)=0$

故 $a_0T^m(\vec w) + a_1T^{m+1}(\vec w) + \cdots + a_{n-1}T^{m+n-1}(\vec w) = 0$，又 $T^k(\vec w)=0$ 当 $k \geq n$ 时

故 $a_0T^m(\vec w) + \cdots + a_{n-m-1}T^{n-1}(\vec w) = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-m-1} = 0$ 与 $a_0 \neq 0$ 矛盾.

因此 $C_{\vec v}$ 为极大循环子空间

2. (1) 由于对称性，$\lambda I_n - A$ 与 $\lambda I_n - A^T$ 拥有相同的行列式因子，不变因子，

因此拥有相同的 Smith 标准形

故 A 与 A^T 相似

(2) P 为 $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$ 即满足 $P^{-1}JP = J^T$

3. 特征值为 a 且几何重数为 1.

故 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$

4. 由于 A 秩为 1，故 $\exists U, V^T$ 使 $A = UV^T$

$A^2 = AA = UV^TUV^T = U(V^TU)V^T = \mathrm{tr}(A)\,UV^T = \mathrm{tr}(A)\,A$

5. $J_{0,5}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Jordan 块个数为 $5-3=2$

，因此 $J_{0,5}^2$ Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

6. (1) $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7. 有两个不同特征值 $u_1=-2$，$u_2=2$. J_{u_1} 的各块阶数和为 4. J_{u_2} 的各块阶数和为 2.

1+1+1+1　　1+1

2+1+1　　2

2+2

3+1

4

因此 J 有 $5\times 2 = 10$ 种可能.

8. 只需证明 A 的 Jordan 标准形有 $\lim\limits_{m\to+\infty} J^m = 0$

若 $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ 则由于 $|\lambda_i|<1$，故 $\lim\limits_{m\to+\infty} J^m = 0$. 若 $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$，分块计算知 $\lim\limits_{m\to+\infty}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}^m = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} J^m = 0$

若 $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 I + N$，$J^m = (\lambda_1 I + N)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i (\lambda_1 I)^i N^{m-i} = \frac{m(m-1)}{2}\lambda_1^{m-2}N^2 + m\lambda_1^{m-1}N + \lambda_1^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & m\lambda_1^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2}\lambda_1^{m-2} \\ & \lambda_1^m & m\lambda_1^{m-1} \\ & & \lambda_1^m \end{pmatrix}$

由于 $|\lambda_1|<1$，故 $\lim\limits_{m\to+\infty} m\lambda_1^{m-1} = \lim\limits_{m\to+\infty}\frac{m(m-1)}{2}\lambda_1^{m-2} = \lim\limits_{m\to+\infty}\lambda_1^m = 0$

故 $\lim\limits_{m\to+\infty} J^m = 0$

因此 $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m = 0$