Λεωνίδας Μπατσινάδης

Θέμα 2.

Επειδή έχουμε δυαδικό classification, θα χρησιμοποιήσω ότι το μέγιστο FDR προκύπτει, όταν

$$w = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$$

$$S_w = \sum_{i=1}^{c} P_i \Sigma_i = \frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$w = S_w^{-1}(\mu_1 - \mu_2) = \begin{pmatrix} 13/2 & 9/2 \\ 9/2 & 13/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{42.25 - 20.25} \begin{pmatrix} -\frac{15 \cdot 13}{2} & -\frac{10 \cdot 9}{2} \\ \frac{15 \cdot 9}{2} & \frac{13 \cdot 10}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -285 \\ 265 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Θέμα 4ο

α) Γνωρίζουμε ότι η k-dimension κανονική κατανομή είναι:

$$N(\mu,\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \cdot |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Για να βρω το σύνορο απόφασης πρέπει:

$$P(\omega_1)\cdot P(x|\omega_1) = P(\omega_2)\cdot P(x|\omega_2) =$$

$$P(\omega_1) \cdot \frac{1}{2\pi|\Sigma_1|^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \cdot \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)\right) =$$

$$= P(\omega_2) \cdot \frac{1}{2\pi|\Sigma_2|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \cdot \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)\right) \quad (1) \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} |\Sigma_1| &= (1.2)^2 - (0.4)^2 \\ |\Sigma_2| &= (1.2)^2 - (0.4)^2 \end{aligned}\right\} |\Sigma_1| = |\Sigma_2|$$

Λογαριθμίζοντας τη σχέση (1)

$$\ln\left(\frac{P\omega_1}{P\omega_2}\right) + (x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) = (x-\mu_2)^T \cdot \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) \quad (2)$$

Τώρα.

$$\Sigma_1^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma_1)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9375 & .3125 \\ .3125 & .9375 \end{bmatrix}$$

Ομοίως

$$\Sigma_2^{-1} = \begin{bmatrix} .93 & -.31 \\ -0.31 & .93 \end{bmatrix}$$

Τώρα για το $(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1} (x_1-\mu_1) =$

$$= (x_1-3, x_2-3) \begin{bmatrix} 0.93 & 0.31 \\ 0.31 & 0.93 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{pmatrix} =$$

$$= [0.93(x_1-3)+0.31(x_2-3), 0.31(x_1-3)+(x_2-3)0.93] \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.93x_1+0.31x_2-2.79-0.93, 0.31x+0.93x_2-2.79-0.93] \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.93x_1+0.31x_2-3.72, 0.31x_2+0.93x_2-3.72] \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_1-3)(0.93x_1+0.31x_2-3.72)+(x_2-3)(0.31x_1+0.93x_2-3.72) =$$

$$= 0.93x_1^2+0.62x_1x_2-7.44x_1+0.93x_2^2-7.44x_2+22.32$$

Scanned with CamScanner

Για το

$(x-\mu_2)^T \cdot \Sigma_0^{-1}(x-\mu_2)=$

$$= (x_1-6,\ x_2-6)\begin{pmatrix}0.93 & -0.31\\ -0.31 & 0.93\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-6\\ x_2-6\end{pmatrix} =$$

$$=[(x_1-6)0.93-(x_2-6)0.31,\ -0.31(x_1-6)+0.93(x_2-6)]\begin{bmatrix}x_1-6\\ x_2-6\end{bmatrix}=$$

$$=[0.93x_1-5.58-0.31x_2+1.86,\ -0.31x_1+1.86+0.93x_2-5.58]\begin{bmatrix}x_1-\\ x_2-6\end{bmatrix}=$$

$$=[0.93x_1-0.31x_2-3.72,\ -0.31x_1+0.93x_2-3.72]\begin{bmatrix}x_1-6\\ x_2-6\end{bmatrix}=$$

$$=(x_2-6)(0.93x_1-0.31x_2-3.72)+(-0.31x_1+0.93x_2-3.72)(x_2-6)=$$

$$=0.93x_1^2-7.44x_1+0.93x_2^2-7.44x_2+44.64-0.62x_1x_2$$

Από (2).

$$\ln\left(\frac{P_{w1}}{P_{w2}}\right)-\frac{1}{2}\left(0.93x_1^2+0.62x_1x_2-7.44x_1+0.93x_2^2-7.44x_2+22.32\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(0.93x_1^2-0.62x_1x_2-7.44x_1+0.93x_2^2-7.44x_2+44.64\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{P_{w1}}{P_{w2}}\right)-0.62x_1x_2+11.16=0 \Rightarrow$$

$$x_2x_1=\frac{\ln(P_{w1}/P_{w2})}{0.62}+18$$

e)

Επαναλαμβάνοντας για $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.93 & -0.31 \\ -0.31 & 0.93 \end{bmatrix}$$

όμοια με το (α) εξετάζω το

$$(x-\mu_1)^T \cdot \Sigma^{-1} (x-\mu_1) =$$

$$= [x_1-3, x_2-3] \begin{bmatrix} 0.93 & -0.31 \\ -0.31 & 0.93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= [(x_1-3)0.93 - 0.31(x_2-3), -0.31(x_1-3) + 0.93(x_2-3)] \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.93x_1 - 2.79 - 0.31x_2 + 0.93, -0.31x_1 + 0.93 + 0.93x_2 - 2.79] \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.93x_1 - 0.31x_2 - 1.86, -0.31x_1 + 0.93x_2 - 1.86] \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_1-3)(0.93x_1 - 0.31x_2 - 1.86) + (x_2-3)(-0.31x_1 + 0.93x_2 - 1.86) =$$

$$= 0.93x_1^2 + 0.93x_2^2 - 0.62x_1x_2 - 3.72x_1 - 3.72x_2 + 11.16.$$

Ομοίως με το A ερώτημα

$(x-\mu_2)\Sigma^{-1}(x-\mu_2) =$

$= 0.93x_1^2 + 0.93x_2^2 + 0.62x_1x_2 - 7.44x_1 - 7.44x_2 + 22.32$

Άρα αναδιατυπωθήσεως στη (2)

$$\ln\underbrace{\left(\frac{P\omega_1}{P\omega_2}\right)}_{\to A} - \frac{1}{2}\left(0.93x_1^2 + 0.93x_2^2 - 0.62x_1x_2 - 3.72x_1 - 3.72x_2 + 11.16\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(0.93x_1^2 + 0.93x_2^2 + 0.62x_1x_2 - 7.44x_1 - 7.44x_2 + 11.16\right) \Rightarrow$$

$$A - \frac{1}{2}\left(-1.24x_1x_2 + 3.72x_1 + 3.72x_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1.86x_1 - A}{0.62x_1 - 1.86} = \left(x_1 - \frac{A}{1.86}\right)\left(\frac{3}{x_1 - 1}\right)$$

Θέμα 6

$$l_1 = \lambda_{11} P(\omega_1) \cdot P(x|\omega_1) + \lambda_{21} P(\omega_2) \cdot P(x|\omega_2)$$

$$l_2 = \lambda_{22} P(\omega_2) P(x|\omega_2) + \lambda_{12} P(\omega_1) P(x|\omega_1)$$

Το όριο απόφασης βρίσκεται όταν $l_1 = l_2$.

$$\lambda_{21} \cdot \cancel{P(\omega_2)} \cdot P(x|\omega_2) = \lambda_{12} P(\omega_1) \cdot P(x|\omega_1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{8}} = x e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$-\ln 8 - \frac{x^2}{8} = -\frac{x^2}{2}$$

$$-2.07 = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) \Rightarrow$$

$$2.07 = \frac{3}{8} x^2 \Rightarrow$$

$$x = \pm 2.34$$

Αφού $x<0$ $P(x|\omega_1) = 0$ για $x = 2.34$

Αν δεν γνωρίζαμε ότι $x<0$, τότε θα έπρεπε να βάζαμε τις κατανομές για να δεχόμασταν τις λύσεις. Υπήρχε περίπτωση να δεχτούμε και τις δύο ή ~~την~~ μόνο μία

Θέμα 7ο

1)

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Για να βρω τις ιδιοτιμές του $X^T \cdot X$

$$|X^T \cdot X - \lambda I| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 7 \\ 7 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6-\lambda)(14-\lambda) = 49 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{260}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 10 + \sqrt{65} \\ \lambda_2 = 10 - \sqrt{65} \end{cases}$$

Για τα ιδιοδιανύσματα.

Για $\lambda = \lambda_1$

$$(X^T \cdot X - \lambda_1 I) \cdot V_1 = 0 \Rightarrow$$

Χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4-\sqrt{65} & 7 & 0 \\ 7 & 4-\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) =$$

Scanned with CamScanner

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4-\sqrt{65} & 7 & 0 \\ 7 & 4-\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1/-(4+\sqrt{65})}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{7}{(4+\sqrt{65})} & 0 \\ 7 & 4-\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4-\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 7 & 4-\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) \overset{R_2 \leftarrow R_2 - 7R_1}{=\!=}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4-\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα $v_{11} + \frac{4-\sqrt{65}}{7} v_{12} = 0$

Θέτοντας $v_{12} = 1$ έχουμε $v_{11} = \frac{-4+\sqrt{65}}{7}$

Άρα $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-4+\sqrt{65}}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$

Για το ιδιοδιάνυσμα όταν $\lambda = \lambda_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4+\sqrt{65} & 7 & 0 \\ 7 & 4+\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) \underset{=\!=}{R_1 \leftarrow R_1/(-4+\sqrt{65})}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4+\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 7 & 4+\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) \underset{=\!=}{R_2 \leftarrow R_2 - 7R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4+\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

όμοια με πριν $V_{22} = 1$ και $V_{21} = \frac{-4-\sqrt{65}}{7}$

Κανονικοποιούμε τα διανύσματα (για το ερώτημα 4)

$$V_{1,norm} = \frac{V_1}{|V_1|_2} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.86 \end{pmatrix}$$

$$V_{2,norm} = \frac{V_2}{|V_2|_2} = \begin{pmatrix} -0.86 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Άρα $V = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.86 \\ 0.86 & 0.5 \end{pmatrix}$

2)

$s_1 = \sqrt{\lambda_1} = 4.24$

$s_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.39$

άρα $\Sigma = \begin{pmatrix} 4.24 & 0 \\ 0 & 1.39 \end{pmatrix}$

3) Υπολογισμός του $X \cdot X^T$.

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot X \cdot V_{1,norm} = \frac{1}{4.24} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.86 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 12.48 \\ 10.32 \\ 17.28 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.43 \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

Ομοίως

$$U_2 = \dots = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.87 \\ 0.46 \end{pmatrix}$$

4| Η καλύτερη rank-1 προσέγγιση είναι για $s = 4.24$

και είναι:

$\hat{X} = s_1 \cdot U_1 \cdot V_{1,norm}^T$ όπου U_1 το ~~[illegible]~~ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για τον $X \cdot X^T$ και $V_{1,norm}$ το αντίστοιχο για το $X^T \cdot X$

$$\hat{X} = 4.24 \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.43 \\ 0.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.86 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.10 & 1.89 \\ 0.91 & 1.56 \\ 1.52 & 2.62 \end{pmatrix}$$