1 系统概述

对于单输入单输出系统，将输入信号称为激励 (excitation)，输出信号称为响应 (response)，并将时域信号分别用 $e(t), r(t)$ 表示，如果系统用字母 H 表示，可以记 $r(t) = H[e(t)]$，或更简洁地，$r(t) = He(t)$.H 是函数空间上的映射。如果 H 是线性的，即

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall e_1(t), e_2(t), H[ae_1(t) + be_2(t)] = aH[e_1(t)] + bH[e_2(t)]$$

就说系统是**线性系统** (linear system)，且满足叠加法则 (principle of superposition)。有时将线性系统记为 L.

一个系统在 e(t)=0 时，也可能有响应，这样的响应称为**零输入响应** (zero input response,$r_{z.i}(t)$)。相应地，r(t) 在没有激励时为 0，则输入 e(t) 产生的响应称为**零状态响应** (zero state response,$r_{z.s}(t)$)，对于线性系统显然零输入响应为 0，此时我们定义零状态响应有线性性的系统为线性系统。**全响应** $r(t) = r_{z.i}(t) + r_{z.s}(t)$.

当 $e(t) = \delta(t)$ 时，$r_{z.s}(t)$ 为**单位脉冲响应**，在不涉及零输入响应时就说 r(t) 为单位脉冲响应。当 $e(t) = u(t)$ 时，响应 r(t) 称为**单位阶跃响应**。习惯上，将单位脉冲响应记为 h(t)，单位阶跃响应记为 g(t).

系统还有一些其他的特性，下面一一进行说明。

1. **时不变性**：表示一个系统的输出不依赖于输入信号施加于系统的时间，输入信号发生时移，输出信号也发生相同的时移，即 $\forall b \in \mathbb{R}, H[e(t-b)] = r(t-b)$, 用第二章中定义的时移算子的符号，时不变性可以记为 $H\tau_b = \tau_b H$，换言之，时移和经过系统可交换，这与我们的直观相符。**线性时不变系统** (Linear Time-invariant System,LTI) 满足 $r(t) = (h * e)(t)$，h 为单位脉冲响应，将在后文介绍。在考虑系统的初始状态时，只要零状态响应具有线性和时不变性，就说系统是线性时不变系统。

2. **因果性**：表示一个系统在有激励时，才会出现响应，或者说 $r(t_0)$ 仅依赖于 e(t) 在 $t < t_0$ 时的值（这里不等号不取等是标准的定义方式，我们马上会看到它的作用），即

$$\forall t_0, (e_1(t) = e_2(t)\ for\ t < t_0) \Rightarrow (r_1(t) = r_2(t)\ for\ t < t_0) \tag{1}$$

这个条件称为**因果性条件** (casuality condition)。对于线性系统，容易看出其因果性条件等价于

$$\forall t_0, (e(t) = 0\ for\ t < t_0) \Rightarrow (r(t) = 0\ for\ t < t_0) \tag{2}$$

如果系统还有时不变性，则因果性条件等价于

$$(e(t) = 0\ for\ t < 0) \Rightarrow (r(t) = 0\ for\ t < 0) \tag{3}$$

或者更简便的

$$h(t) = 0\ for\ t < 0 \tag{4}$$

其中 h 为单位脉冲响应。只要取 $t_0 = 0$，就从因果性条件推出条件3；用时不变性，条件3可以推出条件2。对于单位脉冲响应，从 $\delta = 0\ for\ t < 0$ 可以推出 $h(t) = 0\ for\ t < 0$；如果 $h(t) = 0, e(t) = 0\ for\ t < 0$, 则根据**??**中的结果，有 $r(t) = (h * e)(t) = 0\ for\ t < 0$.

3. **稳定性**：表示一个系统在激励信号有界时，响应也是有界的，即 bounded-input bounded-output(BIBO)。工程上，一个实用系统在所有可能条件下都保持稳定时至关重要的。

4. **记忆性**：表示一个系统在 t_0 时刻的响应不仅与该时刻的输入有关，还与其他时刻的输入有关，此时称系统是**记忆系统/动态系统**，与之相对的是**即时系统**，在 t_0 时刻的响应仅与 t_0 时刻的激励有关。

5. **可逆性**：H（作为映射）如果是单射，则也是双射（因为我们不关注其值域），于是 H 是可逆的。换句话说，一种响应仅可能对应唯一的激励。

以下列举一些常见的线性系统。

例 1.1. 时域乘积：

$$r(t) = f(t)e(t) \tag{5}$$

例如描述开关开闭的系统，$f(t) = \Pi_T(t)$ 或 $u(t)$，描述取样的系统，$f(t) = \text{III}(t)$.

例 1.2. 矩阵乘法：对于 n 维的离散激励信号 $\mathbf{v}$，

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v}, A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \tag{6}$$

例如，线性动力系统中，初值问题 $\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$ 的解为 $H[\mathbf{v}] = e^{At}\mathbf{v}$. 线性代数中，如果一个线性算子 L 的在某一组基下的矩阵表示是 A，则将 L 的转置定义为用 A^T 表示的线性算子，其中 T 表示矩阵的转置，如果矩阵 A 是对称的，则算子 L 称为对称算子；L 的共轭转置定义为用 A^H 表示的算子，其中 H 表示矩阵的共轭转置，如果 A 是埃尔米特的 (Hermitian)，即 $A^H = A$，则称算子 L 是埃尔米特的，并说 L 是**自伴算子** (self-adjoint operator). 对于矩阵乘法系统，可以根据 A 的性质定义 **对称系统**、**自伴系统**。

例 1.3. 积分：

$$r(t) = \int_a^b k(x,y)e(y)\,dy \tag{7}$$

其中，$k(x,y)$ 称为核函数 (kernel)，$\int_a^b k(x,y)e(y)\,dy$ 称为对核积分 (integrating against a kernel). 对核积分非常类似于连续版本的矩阵乘积，我们同样可以定义：

- 上述系统的转置系统描述为 $e(t) \mapsto \int_a^b k(y,x)e(y)\,dy$
- 如果 $k(x,y) = k(y,x)$，称 k 是对称的并将系统称为**对称系统**
- 如果 $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$，称 k 是埃尔米特的并将系统称为**自伴系统**。

例 1.4. 卷积

取定连续信号 $g, r(t) = g * e(t)$; 取定周期离散信号 $\mathbf{h}, r[n] = \mathbf{h} * \mathbf{e}[n]$. 在标准正交基底下，卷积系统的矩阵是一个循环矩阵 (circulant matrix) 或托普利兹矩阵 (Toepliz matrix)：

$$\begin{pmatrix} h[0] & h[N-1] & \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] & \cdots & h[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & \cdots & h[0] \end{pmatrix}$$

例 1.5. 信号平移：取定时延 b，$r(t) = e(t-b)$; 取定整数 m，$r[n] = e[n-m]$.

例 1.6. 傅里叶变换：$r(t) = \mathcal{F}e(t)$. 在一些光学仪器中可以实现空间上的傅里叶变换，这是变量 t 是多维的空间变量，例如矩孔夫琅禾费衍射装置。作为径向对称函数的傅里叶变换的特例，零阶汉克尔变换可以用圆孔夫琅禾费衍射装置实现。对于这两个变换，见**??**和**??**.

下面介绍系统的**级联** (cascade)。设有两线性系统 K,L, 将两系统级联之后，构成的新系统仍构成线性系统：

$$LK[ae_1 + be_2] = L[aK[e_1] + bK[e_2]] = aLK[e_1] + bLK[e_2]$$

对于周期离散信号，两个系统都是矩阵乘法，则级联系统的矩阵是两矩阵的乘积，这正是定义矩阵乘法的原因之一；类似地，对于连续信号，如果两个系统都是对核积分系统：

$$K[e(t)](x)=\int_a^b k(x,y)e(y)\,dy, L[e(t)](x)=\int_a^b l(x,y)e(y)\,dy$$

则级联系统 $H=LK$ 也是对核积分系统，并且核函数为

$$h(x,z)=L_y(k(y,z))(x)=\int_a^b l(x,y)k(y,z)\,dy \tag{8}$$

这里 L_y 表示 $k(x,y)$ 作为 y 的函数输入系统 L，输出为 x,y 的双变量函数。

Proof:

$$\begin{aligned}H[e(z)](x)&=LK[e(z)](x)\\&=\int_a^b l(x,y)\left(\int_a^b k(y,z)e(z)\,dz\right)dy\\&=\int_a^b e(z)\,dz\int_a^b l(x,y)k(y,z)\,dy\\&=\int_a^b h(x,z)e(z)\,dz\end{aligned}$$

可以看到，只要我们使用的函数满足富比尼定理 (Fubini's thoerem) 的条件，就可以交换积分次序，并得到前文中断言的证明。

线性系统 H 的**脉冲响应**定义为 $h(x,y)=H_x[\delta(x-y)]$，这与前文中定义的单变量函数 $h(t)$ 略有区别。利用**??**中的结果，信号与 δ 的卷积仍为它本身：

$$f(t)=(f*\delta)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)\,dx$$

因此可以说，信号先经过了一个与 δ 卷积的系统才进入系统 H。配合前文中关于级联系统的结果，如果系统 H 是对核的无穷限积分，就有**叠加定理** (superposition thoerem) 或称**施瓦兹核定理** (Schwartz kernel thoerem):

$$r(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)e(y)\,dy \tag{9}$$

Proof:

$$\begin{aligned}H[e(y)]&=H[e*\delta(y)]\\&=H[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)e(y)\,dy]\\&=\int_{-\infty}^{\infty} H[\delta(x-y)]e(y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)e(y)\,dy\end{aligned}$$

反过来，如果一个系统是激励信号与脉冲响应的含参积分，那么这个系统也是线性的，这得自积分的线性性。

对于时不变系统，这个定理具有更加优美的形式。沿用前面的定义，时不变系统的脉冲响应为

$$h(x,y)=H_x[\delta(x-y)]=H[\tau_y\delta(x)]=\tau_y H[\delta(x)]$$

按照单变量的脉冲响应的定义，这就是 $\tau_y h(x) = h(x-y)$，它只依赖于 x、y 的差值，带入叠加定理：

$$\begin{aligned} r(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y)e(y)\,dy \\ &= (h*e)(t) \end{aligned}$$

也就是说，信号经过线性时不变系统相当于与这个系统的单位脉冲响应做卷积。下面来验证，如果一个系统是激励信号与脉冲响应的卷积，那么这个系统也是线性时不变系统。线性性是显然的，我们来验证 $H\tau_b = \tau_b H$:

$$H[\tau_b e(y)](x) = (h*\tau_b e)(x) = \tau_b(h*e)(x) = \tau_b H[e(y)]$$

总之，“一个系统是线性系统”等价于“响应是激励对脉冲响应积分”，而“是线性时不变系统”等价于“响应是激励与脉冲响应的卷积”。

看到卷积的结构，当然会想到对 $r(t) = (h*e)(t)$ 做傅里叶变换，用对应的大写字母表示，即 $R(\xi) = H(\xi)E(\xi)$ 或 $R(\omega) = H(\omega)E(\omega)$，也就是说，在频域上线性时不变系统就是乘以脉冲响应的频域形式。

例 1.1. 求线性时不变系统的单位阶跃响应 $g(t)$：

$$\begin{aligned} g(t) &= H[u(t)] = (u*h)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-y)h(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(y)\,dy \end{aligned}$$

可以看到，单位阶跃响应就是单位脉冲响应的积分，利用这个性质，可以快速地求出单位阶跃响应，在使用卷积来描述线性时不变系统时，这个性质很容易得到，但在一些其他的线性时不变系统中很难想到具有这样的性质，例如下一节将讨论的系统。

2 微分方程

除了上一节中提到的几种系统，还有一种典型的具有因果性的线性时不变系统是用常系数线性微分方程表示的，在学习数学分析时我们曾遇到过这种微分方程，下面先回忆在数学分析中对于这种方程的处理方法。一个形如

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdot + a_1 y' + a_0 y = f$$

称为 **n 阶常系数线性微分方程**，等式左侧的 y 和 f 都是 t 的函数，特别地，如果 $f(t) = 0$，称之为 **n 阶常系数线性齐次微分方程**。不难看出，如果找到了 n 阶常系数线性齐次微分方程的两个解 y_1, y_2，则 $ay_1 + by_2$ 也是方程的解；另外，如果带入 $y = e^{\lambda t}$ 并消去这一项，则微分方程化为其**特征方程**：

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

根据代数基本定理，λ 在复数域 $\mathbb{C}$ 中有 n 个解（称之为**特征根**），即微分方程一定有 n 个形如 $e^{\lambda t}$ 的解。因此，对于常系数线性微分方程，我们的标准处理方法是：

1. 先令 $f(t) = 0$，得到其对应的**齐次方程**，解其方程的特征方程得到 n 个**齐次解** (homogeneous solution)，记为 $y_h(t)$；

2. 找到一个**特解** (particular solution) 使得它恰好满足原方程，记为 $y_p(t)$；

3. 将齐次解的线性组合与特解相加，得到**完全解**：$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$。

对于特解，需要一定的配凑技巧，特别地，如果 f 为一个 t 的多项式与某个齐次解的乘积，则需要带入固定形式的特解求解其中的参数（以下默认 P、Q 为多项式）：

- 如果 $f(t) = c$，c 为常数，则特解 $y_p(t)$ 也为常数；
- 如果 $f(t) = e^{\beta t}$，β 不是特征根，则特解 $y_p(t) = ce^{\beta t}$，c 为常数；
- 如果 $f(t)$ 为关于 t 的 n 次多项式，则特解 $y_p(t)$ 也为 t 的 n 次多项式；
- 如果 $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$，λ 为 k 重特征根，则特解 $y_p(t) = t^k Q(t)e^{\lambda t}$，其中 Q 是与 P 次数相同的多项式，即 $degQ = degP$；
- 如果 $f(t) = (P_1(t)\cos(\omega t)+P_2(t)\sin(\omega t))e^{\lambda t}$,$\lambda \pm i\omega$ 是 k 重特征根,则特解 $y_p(t) = t^k(Q_1(t)\cos(\omega t)+Q_2(t)\sin(\omega t))e^{\lambda t}$，其中 $degQ_1 = degQ_2 = max\{degP_1, degP_2\}$

如果确定了一组初始条件 $y(t_0), y'(t_0), \cdots, y^{(n-1)}(t_0)$，则微分方程有唯一的解，因为完全解中的特解部分是确定的，而齐次解部分的 n 个解对应着 n 个系数，只要给定 n 个初始条件，就相当于给出了 n 个方程，可以解出所有的系数。

下面介绍一些信号与系统课程中会用到的术语。

一个用常系数线性微分方程描述的系统，就是指激励为 $e(t) = f(t)$，响应为微分方程的完全解 $y(t)$ 的系统，齐次解 $y_h(t)$ 相当于在激励为 0 时系统的响应。其中，齐次解又称为 **自由响应** (natural response)，它不依赖于激励的形式，而特解又称为 **强迫响应** (forced response)。注意区分它们与1中介绍的零状态响应、零输入响应，后者对于一般的系统都有定义，对于用微分方程描述的系统，齐次解和特解、零输入响应和零状态响应也是不同的分类方式。

例 2.1. 由微分方程及初始条件

$$y' + 2y = 10, y(0) = 1$$

描述的系统，采用数学的解法，可以求出其特征方程 $\lambda+2 = 0$ 的解 $\lambda = -2$，从而有齐次解 $y_h(t) = Ce^{-2t}$，C 为常数，特解 $y_p(t) = 5$，完全解 $y(t) = y_h(t)+y_p(t) = 5+Ce^{-2t}$，带入 $y(0) = 1$ 得 $5+C = 1, C = -4$，因此最终的解为

$$y(t) = 5 - 4e^{-2t}$$

采用系统响应分解，求零输入响应时，应求齐次方程满足初始条件得解，即令 $y_h(0) = C = 1$，得到 $C = 1, y_{z.i.}(t) = e^{-2t}$；而求零状态响应时，则应该求原方程在初始条件为 0 向量情况下的解，即在前面得到的完全解中令 $y(0) = 5 + C = 0$, 得到 $C = -5$，$y_{z.s.}(t) = 5 - 5e^{-2t}$，将零输入响应、零状态响应相加，又得到了原来的解 $y(t) = 5 - 4e^{-2t}$。

可见，$y_h(t) \neq y_{z.i.}(t), y_p(t) \neq y_{z.s.}(t)$。尽管从数学上我们先得到了齐次解和特解才进一步求出零输入响应、零状态响应，但解的这两种划分都是有意义的，后者揭示了：响应中有一部分齐次解用来使响应满足初始条件，而另一部分齐次解会与特解叠加得到无关初始条件、仅依赖于方程形式的解。

由于我们对输入激励建模时，常常认为激励是瞬间施加到系统上的，并且经常认为激励施加的时间就是 0 时刻，我们需要区分 0 的左、右邻域内的系统状态，为此将激励接入之前的瞬间系统的状态称为 0_- **状态**或**起始状态**，记为

$$y_{(k)}(0_-) = [y(0_-), y'(0-), \cdots, y^{(n-1)}(0_-)]$$

将激励接入之后的瞬间系统的状态称为 0_+ **状态**或**初始状态**，记为

$$y_{(k)}(0_+) = [y(0_+), y'(0+), \cdots, y^{(n-1)}(0_+)]$$

注意此时我们是允许一些条件发生突变的。
例 2.2.RLC 振荡电路中，对于电感，$u_L = Ldi_L/dt$，施加于电感两侧的电压不会无穷大，其电流 $i_L(t)$ 总是连续的，即 $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0)$，而其电压则可以不连续；对于电容，$i_C = Cdu_C/dt$，通过电容的电流不会无穷大，其电压 $u_C(t)$ 总是连续的，即 $u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0)$，而其电流可以不连续。电感电流、电容电压不突变的这个结果，称为换路定则。

如果激励 $f(t)$ 不连续，并不一定意味着 $y(t)$ 多次连续可导，但 $y^{(n)}(t)$ 的性质突然变差以至于 $f(t)$ 不连续（构造这样的函数是比较困难的，函数形式也将比较复杂），而是 $y(t)$ 不连续，这时需要将 y 视为一个分布来求导，见**??**。例如 $f(t) = g(t)u(t)$ 时，完全解中可能含有 $u(t)$ 及其导数 $\delta(t)$。

物理中的受迫振动，以及电路分析中的二阶电路，都是用二阶常系数线性微分方程描述的系统的例子，从直观上看，如果使激励（施加于系统的力，或者电源提供的电压、电流）经过一段时间后变为 0，则响应一定也会随时间的增大而趋于 0。因此，又将响应分为 **稳态响应** (steady state response)$y_{ss}(t)$ 和**暂态响应** (transient state)$y_t(t)$，完全解中，$t \to \infty$ 时保留下来的分量称为稳态响应，例如一个常数，趋于 0 的分量为稳态响应，例如 $e^{-\lambda t}$。

由常系数线性齐次微分方程描述的系统，如果初始状态为 0 向量，验证其时不变性是十分简单的。设一个系统描述为

$$a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdot + a_1 r' + a_0 r = e$$

并且对于给定的激励 $e(t)$ 找到了完全解 $r(t)$，那么

$$\begin{aligned}
\tau_b e &= \tau_b(a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdot + a_1 r' + a_0 r) \\
&= a_n \tau_b r^{(n)} + a_{n-1} \tau_b r^{(n-1)} + \cdot + a_1 \tau_b r' + a_0 \tau_b r \\
&= a_n (\tau_b r)^{(n)} + a_{n-1} (\tau_b r)^{(n-1)} + \cdot + a_1 (\tau_b r)' + a_0 (\tau_b r)
\end{aligned}$$

即激励产生延时 b 时，零状态响应也产生延时 b。至于零输入响应，不会由于激励的改变而改变，它不仅会破坏系统的时不变性，还会破坏系统的线性性，因为在初始状态非 0 时，直接将两个完全解相加，则所得信号的初始条件变为给定初始条件的两倍，但由于零输入相应是易于研究的，并且只要指出了零输入响应，就可以认为系统的初始状态为 n 维零向量来进行研究，最后将所得的零状态响应与零输入响应叠加，因此我们约定：由常系数线性微分方程描述的系统总是线性时不变系统，不论初始状态是否为 0。从研究微分方程描述系统的线性、时不变性的过程可以看出，提出零状态响应、零输入响应的分解是必要的，并且我们还将很快看到这样的分解方式对于求解常系数线性微分方程的好处。

以线性时不变系统的视角来看微分方程，自然会想到求这个系统的单位脉冲响应，也就是说，令方程右侧的激励信号为 δ，看所得响应 $h(t)$，这样，根据上一小节中的结果，不论方程右侧的激励 $e(t)$ 变为何种形式，只要它与 $h(t)$ 的卷积是有定义的，就可以直接求出响应（或者说零状态响应）$r(t) = (h*e)(t)$，只要再叠加上零输入响应，就可以得到任意给定初始状态下方程的解，这是一个一劳永逸的工作，在实际问题中，我们经常给出系统的微分方程描述和初始条件，而激励则是任意的，现在就可以避开微分方程，直接计算卷积来求得系统的响应。数学上，这个脉冲响应 $h(t)$ 被称为**基本解** (fundamental solution)，它在偏微分方程、数学物理和线性系统理论等领域中都有广泛的应用。

那么，如何求这个单位脉冲响应呢？对于微分方程

$$a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdot + a_1 r' + a_0 r = \delta$$

要使等式右边出现 δ,$r(t)$ 中一定含有 δ 及其导数、积分,根据?? 中的结果,$u'=\delta$,而 $u(t)$ 的各阶积分都可以用 $P(t)u(t)$ 来表示,其中 $P(t)$ 是 t 的多项式,因此可以假定 $r(t)=f_1(t)u(t)+f_2(t)\delta(t)+f_3(t)\delta'(t)+\cdots$。我们知道,$\delta$ 具有取样性质:$\delta(t)f(t)=\delta(t)f(0)$,类似地,还推导过 δ' 与函数的乘积:$g\delta'=g(0)\delta'-g'(0)\delta$,不难想象,$\delta$ 的各阶导数与函数的乘积都是类似的(可以通过归纳法验证这一点),于是刚才的 $r(t)$ 简化为

$$r(t)=f(t)u(t)+a_1\delta+a_2\delta'+\cdots$$

我们知道,分布与函数乘积的求导也满足莱布尼兹法则,运用这一点,将上式带入激励取为 δ 的微分方程,可以通过待定系数法求出各个系数,并得到关于 $f(t)$ 的常规的微分方程。很明显,我们不总是需要 δ 及其高阶导数项,为此需要研究取到 $u(t)$ 的几阶导数就足以完成基于待定系数法的求解,我们通过一个简单的例子来说明这个问题。

例 2.3. 求微分方程

$$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e(t)$$

的单位脉冲响应。令 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=\delta$,如果 $r(t)$ 中含有 δ',则其各阶导数会因此含有 δ 的更高阶导数,这不是我们所需要的,因此,令 $r(t)=f(t)u(t)+a\delta$,求出其一阶、二阶导数:

$$\begin{aligned}
r'(t)&=f'(t)u(t)+f(t)\delta+a\delta'\\
&=f'(t)u(t)+f(0)\delta+a\delta'\\
r''(t)&=f''(t)u(t)+f'(t)\delta+f(0)\delta'+a\delta''\\
&=f''(t)u(t)+f'(0)\delta+f(0)\delta'+a\delta''
\end{aligned}$$

再带入原方程:

$$\begin{aligned}
r''(t)+3r'(t)+2r(t)=&[f''(t)u(t)+f'(0)\delta+f(0)\delta'+a\delta'']\\
&+3[f'(t)u(t)+f(0)\delta+a\delta']\\
&+2[f(t)u(t)+a\delta]\\
=&[f''(t)+3f'(t)+2f(t)]u(t)+[f'(0)+3f(0)+2a]\delta+[f(0)+3a]\delta'+a\delta''
\end{aligned}$$

对比系数,得到:

$$\begin{cases}
f''(t)+3f'(t)+2f(t)=0\\
f'(0)+3f'(0)+2a=1\\
f(0)+3a=0\\
a=0
\end{cases}$$

因此问题转化为求解微分方程

$$f''(t)+3f'(t)+2f(t)=0,f(0)=0,f'(0)=1$$

这个方程正是一开始的微分方程的齐次方程, 可以立即得到它的解:

$$\begin{aligned}
f(t)&=e^{-t}-e^{-2t}\\
h(t)&=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)
\end{aligned}$$

总之，只要将齐次解乘以 $u(t)$，求出对应阶导数并带回原方程对比系数，即可得到单位脉冲响应；由于单位阶跃响应形如 $h(t) = y_h(t)u(t)$，满足 $h(t) = 0, t < 0$，微分方程描述的系统还具有因果性。

我们还可以对以上结果做一些推广：求解微分方程

$$\sum_{n=0}^{N} a_n r^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \delta^{(m)}$$

当 $r(t)$ 的最高次导的阶数不小于 δ 的最高阶导阶数，即 $N \geq M$ 时，解为 $y_h(t)u(t)$；当 $r(t)$ 的最高次导的阶数大于 δ 的最高阶导阶数，即 $N < M$ 时，解为

$$y_h(t)u(t) + \sum_{k=0}^{M-N} c_k \delta^{(k)}$$

换言之，需要利用方程左侧的最高阶导，让方程右侧所需的 δ 的最高阶导数项出现。这个结果可以求出以下形式的系统的脉冲响应：

$$\sum_{n=0}^{N} a_n r^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m e^{(m)}(t)$$

这同样时微分方程描述的系统，只不过从数学上我们没有必要考虑这种形式的方程，只要把方程右侧看作一个新的非齐次项，它与其他微分方程没有区别，但当系统用这种方式描述时，求解其脉冲响应就显得十分重要了。当然，正因为这种方程本质上还是一个非齐次的常系数线性微分方程，我们仍然可以用基本解的方法来求得脉冲响应，只需要在求出基本解后，将基本解与方程右侧做卷积，不过实际上记忆 δ 的各阶导数的卷积特性并不是很有必要，通过待定系数法求解往往更快。