

取样与插值

1 狄拉克梳状分布, 取样与插值

在研究周期现象时, 经常会将一个函数周期化(periodize), 例如, 给定函数 $f(t)$, 要将它变成周期为T的函数, 一种标准的做法是“平移、相加”, 即在不涉及收敛性的问题时, 令

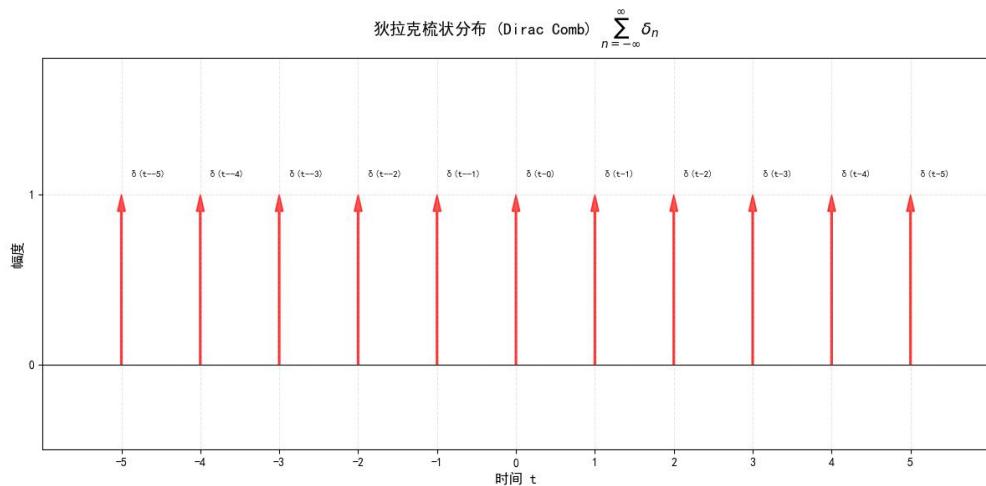
$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT)$$

在傅里叶变换的中, 我们曾建立了 δ_a 的平移性质: $\delta_a * f = \tau_a f$, 所以我们可以将以上周期化的操作抽象出来:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT} * f(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT} \right) * f(t)$$

将分布 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}$ 记为 III_T , 读作“shah”, 在 $T=1$ 时可以将角标略去, 直接写作 III 。由于其图像是等间距排列的一个个 δ , 又称之为狄拉克梳状分布(dirac comb)。容易看出, 这个分布具有两条基本性质, 其一是前面提到的周期化: $\text{III}_T * f(t) = f_T(t)$, 其二是取样性质, 它直接得自 δ_a 的取样性质: $\text{III}_T f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta_{kT}$ 。另外, 作为一个分布, 有

$$\langle \text{III}_T, \varphi \rangle = \langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(kT)$$



对于一个施瓦兹函数, 以上的式子中均不会出现收敛性的问题。回顾施瓦兹函数类的定义:

$$\mathcal{S} = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m \varphi^{(n)}(x) = 0, \forall m, n \in \mathbb{N} \}$$

对任意的t, 考察级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT)$ 的收敛性时, 只需要将n取为0, m取为不小于2的整数, 则在 $|k|$ 充分大时, 级数比 C/n^2 更小, 从而绝对收敛。注意这种估计方式并不依赖于自变量t的选取, 因此这个函数项级数一致收敛, 其和函数会保留 $f(t)$ 的许多分析性质, 例如我们可以逐项求导(从而和函数也无限阶可导)、逐项积分, 还可以交换求和符号与其他极限过程的顺序(见数学分析教材)。

时域上紧支（即在 $|t|$ 充分大时函数恒为0）的函数称之为时限函数，此时级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT)$ 实际上是有限和，当然收敛。相应的，在频域上紧支的函数称为带限函数。更为特殊的情况下，函数 $f(t)$ 支于 $[-T/2, T/2]$ ，不论 f 定义在哪个域上，在相应的域上周期化所得的函数总是存在，并且有恒等式

$$f(x) = \Pi_T(f * \text{III}_T)(x)$$

这个看似直白的恒等式在傅里叶变换下能够带来一些新的东西，见本节后续内容。这里我们先建立一个不需要 III 的傅里叶变换的结果。设带限函数 $f(t)$ 满足 $\text{supp } \mathcal{F}f \subset [-T/2, T/2]$ ，则有恒等式 $\mathcal{F}f = \Pi_T \mathcal{F}f$ ，对两边同时取傅里叶逆变换：

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f(t) & f(t) &= \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f(t) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\Pi_T \mathcal{F}f)(t) & &= \mathcal{F}^{-1}(\Pi_T \mathcal{F}f)(t) \\ &= (\mathcal{F}^{-1} \Pi_T) * f(t) & &= \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}^{-1} \Pi_T) * f(t) \\ &= T \text{sinc}(Tt) * f(t) & &= \frac{T}{2\pi} S_a(Tt) * f(t) \end{aligned}$$

我们发现对于带限函数，抽样信号能够起到类似 δ 的卷积么元的作用。

在建立分布 III 的傅里叶变换之前，我们先来讨论另外一个话题，它揭示了傅里叶级数与傅里叶变换的深刻关系。设 $\text{supp } f \subset [-1/2, 1/2]$ ，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i kt} dt & \mathcal{F}f(2\pi k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i kt} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i kt} dt & &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i kt} dt \\ &= T c_k & &= T c_k \end{aligned}$$

其中 c_k 是 $f(t)$ 的周期化函数 $f_T(t)$ 的傅里叶系数，也就是说，时限函数的傅里叶变换在 k （或 $2\pi k$ ）处的值正比于其周期化函数的第 k 个傅里叶系数，这使得频域函数 $\mathcal{F}f$ 在整数处的值似乎蕴含了更多的信息。不仅如此，考虑更一般的函数 $f \in \mathcal{S}$ ，记其周期化函数为 $\Phi = \text{III} * \varphi$ ，并将 Φ 的傅里叶系数记为 $\hat{\Phi}(k)$ ，由 Φ 的无限阶可导性可知其傅里叶级数绝对一致收敛于它本身，即

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}(k) e^{2\pi i kt}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(k) &= \int_0^1 \Phi(t) e^{-2\pi i kt} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t-n) \right) e^{-2\pi i kt} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 \varphi(t-n) e^{-2\pi i kt} dt \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_n^{n+1} \varphi(t) e^{-2\pi i k(t+n)} dt \right) & (t \rightarrow t+n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \varphi(t) e^{-2\pi i kt} dt \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i k t} dt$$

即

$$\hat{\Phi}(k) = \mathcal{F}\varphi(k)$$

$$\hat{\Phi}(k) = \mathcal{F}\varphi(2\pi k)$$

其中第二行到第三行的积分、求和换序用到了周期化函数作为函数项级数的一致收敛性。这个等式意味着对时限函数的关系 $\mathcal{F}f(k) = T c_k$ 对施瓦兹函数都成立（以上是周期化为 $T = 1$ 的情况，读者可以自行推广至周期为其他值的情况），进一步，在恒等式

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}(k) e^{2\pi i k t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) e^{2\pi i k t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}(k) e^{2\pi i k t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(2\pi k) e^{2\pi i k t} \end{aligned}$$

中取 $t = 0$, 则得到

$$\Phi(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) \quad \Phi(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(2\pi k)$$

又由

$$\Phi = \text{III} * \varphi, \Phi(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k)$$

得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(2\pi k)$$

这个结果称为泊松求和公式(the Poisson summation formula)。我们当然也可以对 $\text{III}_T * \varphi$ 做类似的推导, 但其结论远不如以上两式简洁, 这实际上是整数集 \mathbb{Z} 的自对偶性的体现。

让我们回到 III 分布的傅里叶变换的话题, 可以借助泊松求和公式得到:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\text{III}, \varphi \rangle &= \langle \text{III}, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) \\ &= \langle \text{III}, \varphi \rangle \end{aligned} \quad \begin{aligned} \langle \mathcal{F}\text{III}_{2\pi}, \varphi \rangle &= \langle \text{III}_{2\pi}, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(2\pi k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) \\ &= \langle \text{III}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{F}\text{III} = \text{III}$$

$$\mathcal{F}\text{III}_{2\pi} = \text{III}$$

可以看到, 频率形式下 III 分布的傅里叶变换具有自对偶性, 即 $\text{III} \xleftarrow{\mathcal{F}} \text{III}$, 而角频率形式下需要对 III 分布做伸缩变换, 这启发我们讨论 III 以及更基本的 δ 在伸缩变换下的关系。可以将 δ 作为形式上的函数进行推导, 但这里采用更直接的分布伸缩的定义: ($a > 0$)

$$\begin{aligned} \langle \sigma_a \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \frac{1}{a} \sigma_{1/a} \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{a} \varphi(0) = \langle \frac{1}{a} \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_a \delta = \frac{1}{a} \delta$$

$a < 0$ 的情况可直接从 δ 是偶分布得出。对于 III 分布的伸缩, 也可同理得到:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_a \text{III}, \varphi \rangle &= \langle \text{III}, \frac{1}{a} \sigma_{1/a} \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi \left(x - \frac{k}{a} \right) \\ &= \frac{1}{a} \langle \text{III}_{1/a}, \varphi \rangle \\ \Rightarrow \sigma_a \text{III} &= \frac{1}{a} \text{III}_{1/a}, \text{III}_T = \frac{1}{T} \sigma_{1/T} \text{III} \quad (a \rightarrow \frac{1}{T})\end{aligned}$$

值得注意的是, 不论从直观上还是从形式计算上, III 分布似乎有另一个傅里叶变换:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \text{III} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \delta_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k t} \\ \mathcal{F} \text{III}_{2\pi} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \delta_{2k\pi} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k t}\end{aligned}$$

由于涉及分布级数及其换序问题, 很难直接严格证明以上结果, 但它的确是对的。结合 III 的傅里叶变换公式可以得到 III 分布作为形式上的函数的另一种定义:

$$\text{III}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} \quad (1)$$

右边正是傅里叶级数的章节中提到的狄利克雷核在 $N \rightarrow \infty$ 时的式子, 换言之函数项级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x}$ 逐点地趋于 III, 我们不仅发现了它在多数区间上都趋于 0, 还发现在 $x = n (n \in \mathbb{Z})$ 处全为 1 的“级数”似乎以 δ 的速度趋于无穷。实际上我们只能得到 $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ 上的收敛性, 整数处的分布只能在弱收敛的意义下定义, 即将函数项级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x}$ 的每一项视为分布, 它们作用在任意测试函数 φ 上的结果在求和项数充分大时相当于 δ 分布作用于 φ 的结果。

根据角频率形式下的 III 分布的傅里叶变换, 可以想到 III 的伸缩的傅里叶变换仍具有 III 的形式, 下面就来找具体的公式:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \text{III}_T &= \mathcal{F} \left[\frac{1}{T} \sigma_{1/T} \text{III} \right] \\ &= \frac{1}{T} \cdot T \sigma_T \mathcal{F} \text{III} \\ &= \sigma_T \text{III} = \frac{1}{T} \text{III}_{1/T}\end{aligned} \quad \begin{aligned}\mathcal{F} \text{III}_T &= \mathcal{F} \left[\frac{2\pi}{T} \sigma_{2\pi/T} \text{III}_{2\pi} \right] \\ &= \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \sigma_{T/2\pi} \mathcal{F} \text{III}_{2\pi} \\ &= \sigma_{T/2\pi} \text{III} = \frac{2\pi}{T} \text{III}_{2\pi/T}\end{aligned}$$

即

$$\mathcal{F} \text{III}_T = \frac{1}{T} \text{III}_{1/T} \quad \mathcal{F} \text{III}_T = \frac{2\pi}{T} \text{III}_{2\pi/T}$$

可以看到, 傅里叶变换前后 δ 的位置具有倒数关系, 以频率为自变量的傅里叶变换, $T \cdot \frac{1}{T} = 1$, 以角频率为自变量做傅里叶变换, $T \cdot \frac{2\pi}{T} = 2\pi$, 其联系还是在于 $\omega = 2\pi\xi$ 。事实上, 在多维傅里叶变换的理论中, 我们还将看到更为深刻的关系: III 分布的 δ 的位置称为“格”, 而其傅里叶变换的 δ 的位置为其“对偶格”, 特别地, 一维的“对偶格”就是以上所述的“倒数”关系。直观上, 我们曾提出对函数和分布的一维傅里叶变换的伸缩定理:

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\xi}{a}\right), \sigma_a T \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \mathcal{F} T$$

它同样揭示了时域伸而频域缩, 时域缩而频域伸的关系, 而 III_T 为我们提供了一种新的视角。二维 III 分布在 \mathbb{R}^3 中的图像就像一个“钉床”, 因此又可以将 III 分布称为钉床函数(bed of nails)。

讨论完 III 的傅里叶变换, 就可以回到一开始的话题: 对于时限函数 $f(t)$, $\text{supp } f \subset [-T/2, T/2]$, 研究恒等式

$$f(x) = \Pi_T(f * \text{III}_T)(x)$$

通过傅里叶变换告诉我们的内容。对 $f * \text{III}_T$ 做傅里叶变换, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * \text{III}_T)(\xi) &= \mathcal{F}f(\xi) \cdot \mathcal{F}\text{III}_T(\xi) \\ &= \mathcal{F}f(\xi) \cdot \frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(\xi) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k/T) \delta_{k/T}(\xi) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(f * \text{III}_T)(\omega) &= \mathcal{F}f(\omega) \cdot \mathcal{F}\text{III}_T(\omega) \\ &= \mathcal{F}f(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \text{III}_{2\pi/T}(\omega) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(2\pi k/T) \delta_{2\pi k/T}(\omega) \end{aligned}$$

其物理意义是, 将 f 以周期 T 进行周期化时, 其频谱会剩下频率为 k/T 处, 也即角频率为 $2\pi k/T$ 处的值, 并且在这些频率处以 δ 分布的形式“趋于无穷”。

对恒等式两边同时做傅里叶变换, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) &= \mathcal{F}[\Pi_T(f * \text{III}_T)](\xi) \\ &= \mathcal{F}[\Pi_T](\xi) * \mathcal{F}(f * \text{III}_T)(\xi) \\ &= T \text{sinc}(T\xi) * \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(k/T) \delta_{k/T}(\xi) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f\left(\frac{k}{T}\right) \text{sinc}\left(T(\xi - \frac{k}{T})\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f\left(\frac{k}{T}\right) \text{sinc}(T\xi - k) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathcal{F}f(\omega) &= \mathcal{F}[\Pi_T(f * \text{III}_T)](\omega) \\ &= \mathcal{F}[\Pi_T](\omega) * \mathcal{F}(f * \text{III}_T)(\omega) \\ &= TSa\left(\frac{T\omega}{2}\right) * \left(\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \delta_{2\pi k/T}(\omega) \right) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) Sa\left(T\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) Sa(T\omega - 2\pi k) \end{aligned}$$

可以看到, 我们用 $\mathcal{F}f(k/T) \text{sinc}(T\xi - k)$ 或 $\mathcal{F}f(2\pi k/T) \text{Sa}(T\omega - 2\pi k)$ 表示出了函数 $\mathcal{F}f$, 而表达式中的抽样函数完全依赖于所进行的周期化的周期 T , 也就是说我们只需要用 $\mathcal{F}f(k/T)$ 或 $\mathcal{F}f(2\pi k/T)$ 处的值, 就能还原出完整的 $\mathcal{F}f$, 进一步, 对于带限函数 $f(t)$, $\text{supp } \mathcal{F}f \subset [-\nu_m, \nu_m]$, 可以提出完全类似的恒等式:

$$\mathcal{F}f(x) = \Pi_T(\mathcal{F}f * \text{III}_T)(x)$$

其中 $T = 1/2\nu_m$, 对应频率 $f_N = 1/T$ 被称为奈奎斯特频率(Nyquist frequency)。这个式子称为抽样定理(the sampling theorem)。对其做傅里叶反变换, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\Pi_T(\mathcal{F}f * \text{III}_T)](t) \\ &= T \text{sinc}(Tt) * \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f * \text{III}_T) \\ &= T \text{sinc}(Tt) * \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{T}\right) \delta_{k/T}(t) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{T}\right) \text{sinc}\left(T(t - \frac{k}{T})\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{T}\right) \text{sinc}(Tt - k) \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\Pi_T(\mathcal{F}f * \text{III}_T)](t) \\ &= \frac{T}{2\pi} Sa\left(\frac{Tt}{2}\right) * \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f * \text{III}_T) \\ &= \frac{T}{2\pi} Sa\left(\frac{Tt}{2}\right) * \left(\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \delta_{2\pi k/T}(t) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) Sa\left(\frac{T}{2}\left(t - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) Sa\left(\frac{Tt}{2} - \pi k\right) \end{aligned}$$

这正是理想抽样下, 由抽样函数恢复出原函数的方法。利用III分布的抽样性质进行抽样, 就好比将函数转化为一组无穷基底 $\delta_k(k \in \mathbb{Z})$ 上的向量:

$$f(t) \text{ III}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \delta_k \text{ 相当于 } x[k] = f[k] \text{ 或 } (\dots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \dots)^T$$

这一过程称为理想抽样。实际问题中我们不可能获得 δ 分布和III分布, 也不可能进行无限多次抽样, 解决这个问题的一种方式是做近似, 另一种方式是有限采样, 将在下一节讨论。

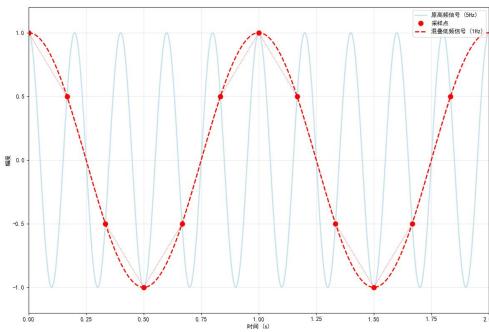
我们来明确一下取样与插值要讨论的问题:

- 设有确定信号 $f(t)$, 通过取样的方式找出它在若干点处的样值 $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$, 在怎样的情况下可以借助这组值还原出 $f(t)$, 即在离散的数据点之间应如何“插入”新的数据点使之成为一条连续的曲线 (这也是名称“插值”的由来)

一般地, 相邻取样点的间隔一定, 记为 T_s , 称为抽样间隔, 将 $f_s = 1/T_s$ 称为抽样频率, 将 $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$ 称为抽样角频率。类似于用像素表示图片, 利用抽样所得的离散信号 $f_d[n] = f(nT_s)$ 表示信息, 相当于用离散信号表示连续信号, 能够大大降低传输和存储的成本。一个数字处理系统或数字传输系统的第一环节就是对信号进行抽样, 随后进行量化编码、数字传输或处理, 到信号接收方或需要使用信号时再进行信号恢复, 这是取样与插值问题的一种引出方式。

我们刚才由抽样信号恢复出原信号的过程, 正是香农采样定理(Shannon sampling theorem) 中采样率取奈奎斯特频率时的极限情况。香农采样定理的内容是, 如果已知信号的频谱支于 $[-\nu_m, \nu_m]$, 则采样频率必须大于 $2\nu_m$, 即奈奎斯特频率 f_N , 才能还原出原信号。奈奎斯特频率同时也是信号的带宽(bandwidth)。

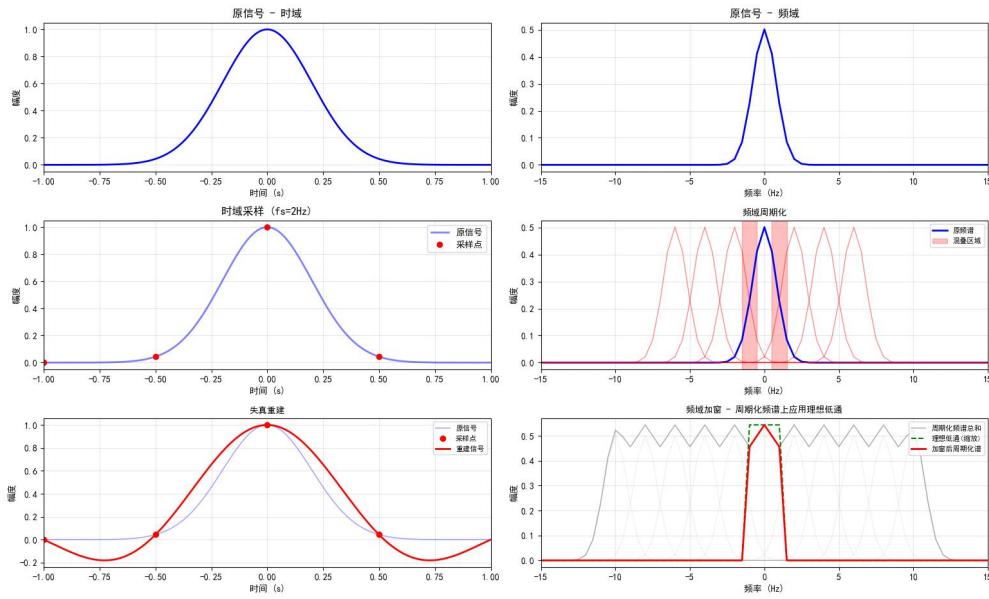
直观上, 采样频率越高, 所需要的成本就越高, 提供的信息就越多, 而如果采样频率低于 f_N , 将发生混叠(alias)现象, 还原所得的信号将产生失真。例如一个余弦信号, 较低的采样频率可能使我们的样本点全部位于余弦信号的零点, 此时显然无法还原余弦信号。即便样本点不在零点, 也可能还原出其他的信号:



这正是混叠现象。从频域上不难理解它, 在建立抽样定理时我们曾要求 $f(t), \text{supp } \mathcal{F}f \subset [-\nu_m, \nu_m]$, 利用由此得到的公式

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{T}\right) \text{sinc}(Tt - k) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \text{Sa}\left(\frac{Tt}{2} - \pi k\right)$$

还原函数当然是有误差的, 因为在将频域函数周期化时, 两个平移后的频域函数会有一部分混在一起, 再使用II函数进行加窗时, 会丢掉一部分原有频谱, 并叠加一部分平移后的频谱, 如图所示。



2 取样与插值进阶

插值的雏形来自于古代天文学，最简单的插值就是通过观察星体在几个时刻的位置推测中间时刻的位置。历史上，最早对插值问题进行系统研究的是牛顿和拉格朗日。牛顿提出的牛顿插值公式是组合数学讨论的话题，他通过引入离散信号的差商的概念，提出了一种使用三角形差商表构造过若干指定数据点的多项式的方法；相比之下拉格朗日的拉格朗日插值法要简单得多，其想法的关键在于构造在特定数据点处非0，而在另外所有数据点处均为0的多项式：对于一组互异的数据点

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

其拉格朗日插值多项式为

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$$

其中 $\ell_i(x)$ 是拉格朗日基函数，满足 $\ell_i(x_i) = 1, \ell_i(x_j) = 0(j \neq i)$ ：

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

该多项式满足 $L(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ 。这个方法后来被埃尔米特改进，不仅能保证函数值相等，还能保证若干阶导数的值相等。

然而，利用多项式进行插值对原信号的逼近效果十分有限，一些数学家们开始转向研究如何重建整个信号。1948年，克劳德·香农发表了他的巨著《通信的数学原理》，明确提出了他的香农采样定理，并给出了上一节中还原带限信号的公式。这个定理在我们上一节中所进行的插值流程下是正确的，但要还原大带宽信号需要很高的抽样频率，会对硬件设备提出很高的要求。我们可以通过另外的插值流程还原信号，例如对于一些信号可以利用其稀疏性和相关性，用远低于 f_N 的采样频率还原信号。这一节就来讨论真实系统中的插值方法，包括自然采样、零阶抽样保持、一阶抽样保持以及降低采样率的一些办法。最后，还将给出有限采样公式，它从数学上给出了用有限的采样点还原带限周期信号的方法。