

1 勒贝格积分

狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^C \end{cases}$$

(其中 \mathbb{Q} 表示有理数集, 上标 C 在不引起歧义的前提下用来表示取补集) 在黎曼积分 (也就是数学分析或高等数学课程, 以及多数工科课程中用的积分) 的意义下是不可积的, 因为它在所有点不连续, 但是这样的函数在**勒贝格积分**的意义下可积, 读者可以这样理解: 勒贝格积分考察函数在某个值处的“区间长度” (严格来讲应为测度), 狄利克雷函数在一个有限区间上取值 1 的长度为 0, 因为有理数是可数集, 取值 0 的长度就是区间长度, 所以其积分值为 0。勒贝格积分是黎曼积分的推广, 对于非反常积分, 黎曼可积的函数一定是勒贝格可积的, 并且在同样的区间上积分值相等。对于勒贝格不可积的函数, 一般不在本课程的讨论范围。尽管我们很少接触只在勒贝格意义下才可积的函数, 但后面我们将逐步认识到勒贝格积分在傅里叶分析中的重要地位, 读者应当对其有一个初步的认识。

2 线性空间, 正交基

首先介绍一些本章需可能用到的概念: 度量公理、范数公理、内积公理、正交基、无穷维线性空间和 L^p 空间, 对其不感兴趣的读者, 可以等需要时再阅读此小节的内容, 只要知道函数空间上的正交基是怎么回事即可。

在 \mathbb{C} -线性空间 V 中, 如果定义了运算 $d(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, 满足**度量公理**:

1. **非负性**: $d(x, y) \geq 0$
2. **同一性**: $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$
3. **对称性**: $d(x, y) = d(y, x)$
4. **三角不等式**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

则称在 V 上定义了一种度量 (事实上只要在拓扑空间中就能够定义度量)。

如果定义了运算 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{C}$, 满足**范数公理**

1. **非负性**: $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
2. **同一性**: $\|\mathbf{x}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. **齐次性**: $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$
4. **三角不等式/次可加性**: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

则称在 V 上定义了一种范数, 称 V 为线性赋范空间, 在线性赋范空间上可以定义极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A := \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

这就是数学分析中的极限定义, 只是将绝对值改成了范数, 其余类似的极限定义不再赘述。如果线性赋范空间中所有柯西列都有极限, 那么这个空间称为完备的线性赋范空间, 或称为巴拿赫空间 (有限维)、希尔伯特空间 (无限维)。

例 1.1. 连续函数空间 $C[a, b]$ 是不完备的线性赋范空间: 在 1-范数 $\|f\|_1 = \int_a^b f(t) dt$ 下, 其中的柯西列

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } -1 \leq t < 0 \\ nt, & \text{if } 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ 1, & \text{if } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

的极限为单位阶跃函数 $u(t)$ (在 0 处取值为 0), 不属于 $C[-1, 1]$.

如果定义了运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, 满足内积公理

1. 正定性: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ 且 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ 当且仅当 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

2. 共轭对称性: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$

3. 第一变元的线性性:

- 齐性: $\langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

- 可加性: $\langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$

则称在 V 上定义了一种内积 (inner product), 称 V 为内积空间。在内积空间上有著名的柯西-施瓦兹不等式 (Cauchy-Schwartz inequality):

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$$

它有一个经典的证明方法: 不妨设 \mathbf{b} 不是零向量, 任取 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$0 \leq \|\mathbf{a} + t\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2t\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + t^2\|\mathbf{b}\|^2$$

令 $t = -\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}$, 即得

$$0 \leq \|\mathbf{a}\|^2 - 2\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\|\mathbf{b}\|^2} + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\|\mathbf{b}\|^4} \|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}{\|\mathbf{b}\|^2}$$

这与要证明的不等式是等价的。有了柯西-施瓦兹不等式, 三角不等式就是显然的了, 这里仅给出其表述, 读者可以自行证明:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

不难发现, 只要取 $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, 就由内积导出了一种范数, 并且这种范数具有比一般的范数更强的性质; 只要取 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, 就由范数导出了一种度量, 并且这种度量具有比一般的度量更强的性质。

正交基 (orthogonal bases) 指的是内积空间 V 的一组基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, 满足 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0, i \neq j$, 对 V 中任一向量 \mathbf{w} ,

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i$$

等式两边同时对 \mathbf{v}_j 做内积, 得到

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_j, \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i \rangle = c_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle \quad (1)$$

$$c_j = \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle}{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle}, \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle}{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle} \mathbf{v}_j \quad (2)$$

如果 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 还满足 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 称这组基是 **标准正交基** (orthonormal bases), 此时空间中任意向量均有分解式

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i \quad (3)$$

并且

$$|\mathbf{w}|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i, \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i \right\rangle \quad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle|^2 \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle|^2 |\mathbf{v}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle|^2 \quad (6)$$

这正是高维情况下的勾股定理 (毕达哥拉斯恒等式)。可见做正交基分解能够极大地简化对线性赋范空间的研究。

对于**无限维线性空间** V , 我们称向量列 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 V 的一组基, 如果

- 线性无关性: 任取基中的有限个向量, 它们是线性无关的
- 有限生成性: 任取向量 $\mathbf{w} \in V$, 存在有限个向量 $V' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset V$, \mathbf{w} 可以用 V' 线性表出

这里要求“有限”是为了避免敛散性的问题: 例如收敛的级数构成线性空间, 如果我们声称取定了一组基 (当然是无限的), 并考察其中无限个基张成的空间, 那么对于构成级数的每一项, 均需要考察其敛散性。然而, 级数的敛散性自然可以对前有限项不做要求, 它们求和很可能不会收敛; 从另一个角度来讲, 一些更加抽象的线性空间中, 也说不清楚基的无限和是否收敛, 甚至在没有范数的线性空间中无法定义收敛。

函数空间是一种典型的无限维线性空间 (因为多项式空间已经是无限维的), 根据学习线性代数的经验, 我们希望能找到一组单位正交基, 使得函数在这组正交基下的分解能够体现函数的某些性质并便于后续的运算, 然而, 若只考虑有限和, 这种想法所能研究的函数十分有限, 例如我们马上就会见到的三角函数系和指数函数系, 它们作为无限阶可微函数, 有限和也是无限阶可微的。所以, 我们应考虑将函数 $f(t)$ 分解为一组相互正交的函数系 $\{f_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 组成的函数项级数。

我们面临的另一个问题是如何在函数空间上定义内积, 从而定义正交性。一种比较自然的想法是利用 (勒贝格) 积分, 积分区间有限, 对于周期函数, 自然地取为一个周期。换言之, 我们考虑在空间

$$L^2([0, T]) := \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_T |f(t)|^2 dt < \infty\}$$

上定义内积 (为了区别于分布的符号, 这里内积用圆括号表示, $*$ 表示取共轭):

$$(f, g) := \int_T f(t) g^*(t) dt$$

我们对这个定义做一些说明, 但不给出证明, 因为证明需要首先建立勒贝格积分的体系, 读者可借助黎曼积分直观地理解它们:

1. $L^p([0, T]) (0 < p \leq \infty)$ 空间表示在区间 $[0, T]$ 上 p 次勒贝格可积的函数组成的函数空间, 即

$$L^p([0, T]) := \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_T f^p(t) dt < \infty\}$$

$L^p([0, T])$ 具有性质:

- $L^p([0, T])$ 是线性空间

- 当 $1 \leq p \leq \infty$ 时, $L^p([0, T])$ 是线性赋范空间, $\|f\|_p := (\int_T |f(t)|^p dt)^{1/p}$, 称之为 L^p 范数, 次可加性由闵可夫斯基不等式保证

2. 要求 $f(t)$ 平方可积是为了保证 $(f, f) = \int_T |f(t)|^2 dt < \infty$, $f(t)$ 平方可积能够推出 $f(t)$ 是绝对可积的, 从而是可积的 (有限区间 I 上有 $L^p(I) \supset L^q(I), p < q$, 无限区间上它们互不包含)

3. 尽管对函数空间做了一些限制, 我们研究的范围依旧是足够大的, 闭区间上的平方可积是一个比较弱的条件

4. 柯西-施瓦兹不等式和三角不等式 (它是闵可夫斯基不等式的特例) 自然成立, 它们证明的过程不涉及空间的维数是否有限。

有了内积就可以定义范数, 从而可以给出 $L^2([0, T])$ 空间上的函数项级数的 (依范数) 收敛的定义: 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - \sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\| = 0$$

就认为级数 $\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$ 是 $f(t)$ 在这个正交函数系下的分解, 此时记

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$$

它并不意味着等式右侧的函数项级数在某一点收敛于 f . 在 $L^2([0, T])$ 空间中, 我们不区分仅在零测集 (“区间长度” 的总和总能取到任意小正数, 例如至多可数集) 上不相等的函数, 换言之, $L^2([0, T])$ 空间不是常规意义下的函数的集合, 而是几乎处处 (almost every, a.e.) 相等的函数构成的等价类, 这里的等号表示的是两侧的函数同属一个等价类, 至于逐点收敛、一致收敛性, 需要另作讨论。

可以想象, 依范数收敛要求极限内的函数相当接近于 0, 但如果在一个点处产生了误差, 不论误差多大, 都不会影响积分的值。事实上, 只要存在误差的点构成零测集, 就不会影响积分的值, 这时我们称 $\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$ 几乎处处收敛于 $f(t)$, 只是这样弱的要求有时会导致积分在黎曼积分的意义下不存在, 但勒贝格积分可以处理这种情况, 读者可以参考连续信号与离散信号中对勒贝格积分的讨论。

如果不存在非零的函数 $g(t) \notin \{f_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 使得 $g(t)$ 与 $\{f_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 中的所有函数正交, 我们称 $\{f_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 为完备正交函数系, 这意味着 $L^2([0, T])$ 空间中的任一函数 $f(t)$ 均可分解为这个函数系的函数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(t)$, 由公式 (2),

$$a_i = \frac{(f, f_i)}{(f_i, f_i)} = \frac{\int_T f(t) f_i^*(t) dt}{\int_T |f_i(t)|^2 dt}$$

细心的读者可能已经发现, 这里得到的公式用到了有限维线性空间中的结论, 但要推广到无限维线性空间并不是显然的。我们将在下一节给出帕塞瓦尔定理之后一并讨论这个问题。

典型的标准完备正交函数集有贝塞尔 (Bessel) 函数、勒让德 (Legendre) 多项式、小波 (wavelet) 变换基函数等, 下面仅讨论三角函数系和指数函数系。

3 傅里叶级数

首先回顾数学分析中几个计算傅里叶级数的公式。考虑将周期为 T 的函数 f 展开为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

(其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 为基波角频率, $k\omega (k > 1, k \in \mathbb{Z})$ 为 k 次谐波角频率) 则

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(k\omega t) dt$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

下面用完备标准正交函数系的观点来得到以上公式。在学习数学分析时, 我们已经看到三角函数系 $1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \cos(2\omega t), \dots (\omega = \frac{2\pi}{T})$ 是正交的 (读者可以自行验证), 但不是单位正交的, 因为

$$(\sin(k\omega t), \sin(k\omega t)) = \int_T \sin^2(k\omega t) dt = \int_T \frac{1 - \cos(2k\omega t)}{2} dt = \frac{T}{2}$$

$$(\cos(k\omega t), \cos(k\omega t)) = \int_T \cos^2(k\omega t) dt = \int_T \frac{1 + \cos(2k\omega t)}{2} dt = \frac{T}{2}$$

可以将它们单位化, 也可以直接采用公式 (2),

$$a_k = \frac{(f(t), \cos(k\omega t))}{(\cos(k\omega t), \cos(k\omega t))} = \frac{\int_T f(t) \cos(k\omega t)^*(t) dt}{\int_T |\cos(k\omega t)|^2 dt} = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(k\omega t)(t) dt$$

$$b_k = \frac{(f(t), \sin(k\omega t))}{(\sin(k\omega t), \sin(k\omega t))} = \frac{\int_T f(t) \sin(k\omega t)^*(t) dt}{\int_T |\sin(k\omega t)|^2 dt} = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(k\omega t)(t) dt$$

当 $f(t)$ 为偶函数, 或者由 $f(t)$ 做偶延拓时, 展开式为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)$$

其中

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = 0$$

当 $f(t)$ 为奇函数, 或者由 $f(t)$ 做奇延拓时, 展开式为

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

容易利用对称性得到这些公式。如果将傅里叶级数展开式 $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$ 写为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

则前半部分为偶函数，称之为 $f(t)$ 的偶分量 $f_e(t)$ ；后半部分为奇函数，称之为 $f(t)$ 的奇分量 $f_o(t)$ 。高中数学中我们知道，函数的偶分量和奇分量都是唯一的，并且

$$\begin{aligned} f_e(t) &= \frac{f(t) + f(-t)}{2} \\ f_o(t) &= \frac{f(t) - f(-t)}{2} \end{aligned}$$

除了奇偶性，还可以从奇次谐波、偶次谐波的角度来理解函数。函数 $f(t)$ 称为奇谐函数，如果后半周期的函数是前半周期的负镜像，即

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad (7)$$

这时函数的傅里叶级数展开只有奇次谐波分量：

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(k\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) \cos(k\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (f(t) \cos(k\omega t) + f(t - T/2) \cos(k\omega(t - T/2))) dt \\ &= (1 - \cos(k\pi)) \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \\ &= \begin{cases} 0, & \text{if } k \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt, & \text{if } k \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

同理有

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{if } k \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt, & \text{if } k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

有了奇谐函数自然也能够定义偶谐函数： $f(t + \frac{T}{2}) = f(t)$ ，容易验证它只有偶次谐波分量，但从定义式可以看出这只是周期减半的函数。

由欧拉公式 $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)$ ，得到

$$\cos(k\omega t) = \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2}, \sin(k\omega t) = \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i}$$

（特别地， $c_0 = c_0^* \Rightarrow c_0 \in \mathbb{R}$ ）故函数 $f(t)$ 也可在指数函数系下展开：

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = c_k^*, k \in \mathbb{N}$$

$\{e^{ik\omega t}\}_{k=0}^{\infty}$ 是完备正交函数系，

$$\begin{aligned} (e^{ik_1\omega t}, e^{ik_2\omega t}) &= \int_T e^{ik_1\omega t} (e^{ik_2\omega t})^* dt \\ &= \int_T e^{i(k_1 - k_2)\omega t} dt \\ &= \frac{2}{i\omega(k_1 - k_2)} e^{i(k_1 - k_2)\omega t} \Big|_0^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \neq k_2) \\
(e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t}) &= \int_T e^{ik\omega t} (e^{ik\omega t})^* dt \\
&= \int_T dt = T(k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

和三角函数系的情况一样，我们得到

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{(f(t), e^{ik\omega t})}{(e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t})} \\
&= \frac{1}{T} \int_T f(t) (e^{ik\omega t})^* dt \\
&= \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-ik\omega t} dt
\end{aligned}$$

有时也将 c_k 记作 $\hat{f}(k\omega)$ 或 $\hat{F}(k)$ ，表示 f 在频域中的点 $k\omega$ 处的值。一般而言，我们只将最小正周期称为一个函数的周期，但周期为 T 的函数可以有多个频率 $k\omega (k \in \mathbb{Z})$ ，绘制频谱时，由于难以画出复数，常用**幅度谱** $|\hat{f}(k\omega)| - \omega$ 和**相位谱** $\phi_k - \omega$ 来表征函数，其中 $\phi_k = \arg \hat{f}(k\omega)$ 。对于实信号，

$$c_k = (c_{-k})^*, |\hat{f}(k\omega)| = |\hat{f}(-k\omega)|, \phi_{-k} = -\phi_k$$

即幅度谱为偶函数，相位谱为奇函数，所以实信号的频谱中有一半是冗余的，按照展开式

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

绘制的频谱 $c_k - \omega$ （注意不是指数函数形式的傅里叶系数）和 $\phi_k - \omega$ 称为**单边频谱**，而完整的频谱称为**双边频谱**，从

$$\cos(k\omega t + \varphi_k) = \frac{e^{i(k\omega t + \varphi_k)} + e^{-i(k\omega t + \varphi_k)}}{2}$$

可知单边频谱相比双边频谱，在给定正频率处的幅值加倍，相位不变。这里的频率实际上是角频率 ω ，用频率 f 画频谱只涉及图像的横向伸缩，此处不再赘述。

需要指出的是，本小节中研究的函数均在 $L^2([0, T])$ 空间中，但这并不能保证傅里叶级数存在且收敛，保证这一点需要**狄利克雷条件**：

- $\int_T |f(t)| dt < \infty$
- 在一个周期内 f 连续或有有限个第一类间断点，即**分段连续** (piecewise continuous)
- 在一个周期内， f 的极值点个数有限

满足此条件时， f 的傅里叶级数展开在任意点收敛到其左右极限的平均值，这个结果称为**狄利克雷定理**。前两个条件是容易理解的，对于最后一个条件，它实际上相当于要求 f 是有界变差函数 (Bounded Variation Function)，感兴趣的读者可以在实变函数的教材中了解这种函数。在4中我们将讨论另外的更易理解的条件。

下面考虑函数空间中的“勾股定理”。由公式 (6)，

$$|f|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 |e^{ik\omega t}|^2 = T \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

即

$$P = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

这个公式称为**帕塞瓦尔定理** (Parseval's Theorem) 或**瑞利恒等式** (Rayleigh's Identity), P 为平均功率。

至此, 我们得到了傅里叶系数的公式和帕塞瓦尔定理, 但其实证明用到的结论是基于有限维线性空间的, 现在就来填补这个逻辑漏洞, 对此不感兴趣的读者可以忽略这部分内容。以下设 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2(a, b)$ 的标准正交基, $f \in L^2(a, b)$ (注意这里已经不限于讨论傅里叶级数, 并且与前文未标准化的正交基略有形式上的差别)。

引理 2.1: 贝塞尔不等式 (Bessel's Inequality)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \phi_n)|^2 \leq \|f\|^2$$

Proof:

$$\text{由勾股定理, } \left\| \sum_{n=1}^N (f, \phi_n) \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N (f, (f, \phi_n) \phi_n) = \sum_{n=1}^N \overline{(f, \phi_n)} (f, \phi_n) = \sum_{n=1}^N |(f, \phi_n)|^2$$

$$\text{因此, 对任意正整数 } N, 0 \leq \|f - \sum_{n=1}^N (f, \phi_n) \phi_n\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re}(f, \sum_{n=1}^N (f, \phi_n) \phi_n) + \left\| \sum_{n=1}^N (f, \phi_n) \phi_n \right\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^N |(f, \phi_n)|^2 + \sum_{n=1}^N |(f, \phi_n)|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |(f, \phi_n)|^2 \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$ 即证。

从第二行到第三行用到了恒等式 $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \|\mathbf{b}\|^2$, Re 表示取实部, 这个结论十分简单, 留予读者自证。在最终的结论帕塞瓦尔定理中这个不等号将变成等号, 但它是不可或缺的, 并且我们还将再在4中见到它。

引理 2.2: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$ 依范数收敛, 并且 $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n \right\| \leq \|f\|$

Proof:

$$\text{由贝塞尔不等式, } \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \phi_n)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty, n \rightarrow \infty \text{ 时 } |(f, \phi_n)| \rightarrow 0$$

$$\text{任取 } m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 < m_2, \text{ 由勾股定理, } \left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} (f, \phi_n) \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=m_1}^{m_2} |(f, \phi_n)|^2 \rightarrow 0$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$ 构成柯西列。

$$\text{令 } m_1 = 1, m_2 \rightarrow \infty, \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \phi_n)|^2 \leq \|f\|^2$$

柯西列能够推出收敛是因为 $L^2(a, b)$ 是无限维的完备度量空间, 即**希尔伯特空间** (Hilbert space), 见2。构建这个引理是为了使用希尔伯特空间中内积的连续性, 其表述见下一个命题。

命题 2.3: 希尔伯特空间 H 中的内积具有连续性, 即如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ 的部分和 S_N 依范数收敛到 S , 则任给 $y \in H$, 总有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, y \rangle = \langle S, y \rangle$$

Proof:

$$\langle S, y \rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, y \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S - S_N, y \rangle$$

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \|S - S_N\| = 0 &\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} |\langle S - S_N, y \rangle| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|S - S_N\| \|y\| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S - S_N, y \rangle = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, y \rangle = \langle S, y \rangle\end{aligned}$$

定理 2.4: 以下三个命题是等价的: (对于符号 \sim , 参考2)

1. $\forall n, (f, \phi_n) = 0 \Rightarrow f \sim 0$, 即 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的标准正交基
2. $\forall f \in L^2(a, b)$, 有 $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$
3. $\forall f \in L^2(a, b)$, 有帕塞瓦尔恒等式:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \phi_n)|^2$$

Proof: 我们将证明 $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$:

$$\text{令 } g \sim f - \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n.$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, (g, \phi_m) = (f, \phi_m) - \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) (\phi_n, \phi_m) = (f, \phi_m) - (f, \phi_m) = 0$$

根据 1 知 $g=0$, 即 2. 这里内积与求和的换序是由命题 2.3 保证的。

$2 \Rightarrow 3$: 由勾股定理,

$$\|f\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N (f, \phi_n) \phi_n \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |(f, \phi_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \phi_n)|^2$$

$3 \Rightarrow 1$: $(f, \phi_n) = 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f \sim 0$.

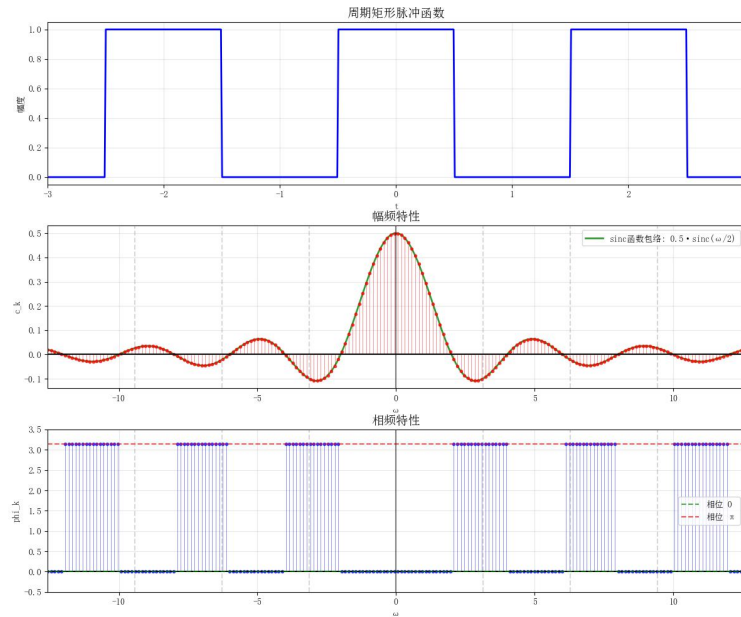


图 1: 周期矩形脉冲信号及其频谱

例 2.1. 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数展开和频谱图

脉冲宽度为 τ , 脉冲幅度为 E , 周期为 $T(\tau < T)$ 的周期矩形脉冲信号, 基波角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 傅里叶级数展开为

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\tau}{T} Sa\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right) e^{ik\omega t}$$

如图3, 可以看到, 这个频谱与取样函数 $Sa(\omega)$ 非常相似 (为了体现这一点, 绘制频谱时将基波角频率大幅减小, 并不是第一张图直接做傅里叶级数展开的结果), 原因将在傅里叶变换的章节中给出。

带宽 (bandwidth) 指最高频率与最低频率之差, 表征信号频率的集中程度。对于实信号, 有时仅考虑正频率, 带宽减半。周期矩形脉冲信号的频谱是无限的, 但能量基本集中在最靠近 y 轴的两个零点之间, 此时可以将带宽定义为**第一过零点带宽** $B = \frac{2\pi}{\tau}$ (仅考虑正频率)。

4 * 傅里叶级数的渐进特性, 吉布斯现象

在用计算机模拟函数的傅里叶级数展开时, 只能取有限项, 自然要问计算到多少项时误差足够小, 为此, 我们不加证明地给出以下定理:

设 $f \in C^p(\mathbb{R})(p \geq 1)$ 是周期函数, 则部分和 $S_N^f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega t}$ 在 \mathbb{R} 上逐点收敛、

内闭一致收敛, 且 $\max |f(t) - S_N^f(t)| < \frac{1}{N^{p-\frac{1}{2}}}$

其中 $C^p(\mathbb{R})$ 表示 p 次连续可导的函数集。

当 $f(t)$ 不连续时, 傅里叶级数的会在间断点处产生**吉布斯现象** (Gibbs' Phenomenon): 部分和 $S_N^f(t)$ 在间断点处总会**过冲** (在间断点两侧出现超过原函数的峰值), 过冲幅度约为跳变幅度的 9%, 并且 $S_N^f(t)$ 会在间断点附近高频振荡, 例如对于跳变幅度为 2、周期为 2π 的周期矩形脉冲信号

$$R(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{if } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

其傅里叶级数的跳变值为 1, $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N^R(t) = 1.089490\dots$ 。这是因为光滑的基函数很难逼近这种剧烈的局部变化, 不得不用高频分量来补偿, 高频分量带来了剧烈震动。 $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N^R(t) > 1$ 并不意味着狄利克雷定理失效, 因为定理给出的是逐点收敛而非一致收敛,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} S_N^R(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} S_N^R(t) \neq \max_{t \in \mathbb{R}} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N^R(t)$$

为了直观地理解它, 我们来看一个经典的例子:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{if } 0 < x \leq 1/n \\ 2 - nx & \text{if } 1/n < x < 2/n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

随 n 增大, $f(x)$ 逐点趋于 0, 因为对每一点 $2/n$ 总能取到更小的值; 但 $f(x)$ 的最大值永远是 1。

研究傅里叶级数的渐进特性时, 一个非常好用的工具是**狄利克雷核** (Dirichlet kernel):

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\omega t} = 1 + \sum_{k=1}^N (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(k\omega t)$$

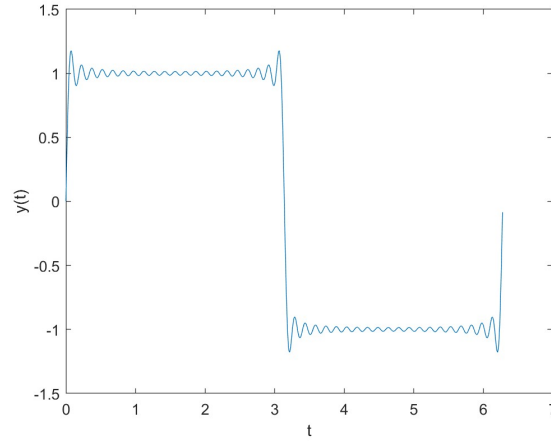
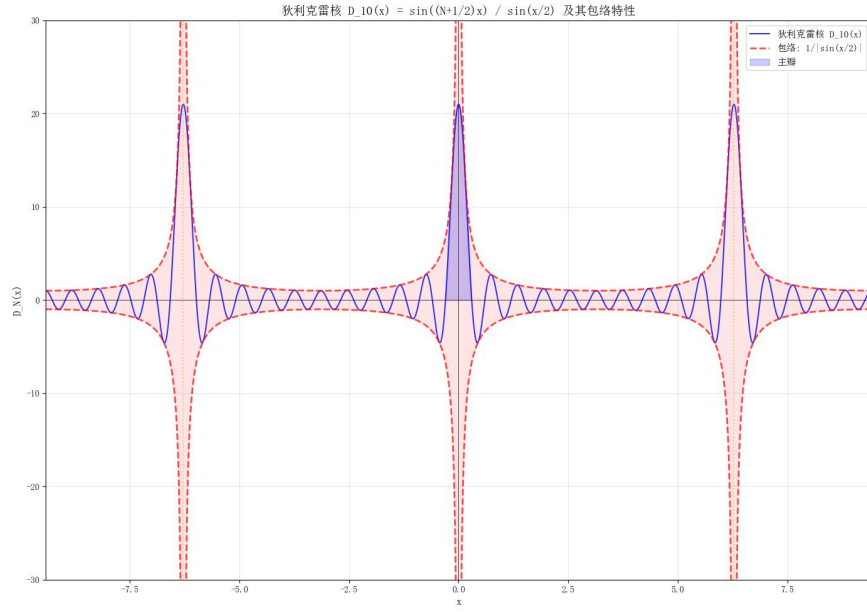


图 2: 吉布斯现象示意图

它是依赖于所研究函数的周期 T 的, 但简便起见, 在符号 $D_N(t)$ 中不体现这一点。我们可以用等比数列求和或积化和差裂项的方法化简 $D_N(t)$:

$$\begin{aligned}
 D_N(t) &= \sum_{k=-N}^N e^{ik\omega t} = e^{-iN\omega t} \frac{1 - e^{i(2N+1)\omega t}}{1 - e^{i\omega t}} \\
 &= \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1} \\
 D_N(t) &= 1 + \sum_{k=1}^N (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(k\omega t) \\
 &= 1 + \frac{2}{\sin(\frac{\omega t}{2})} \sum_{k=1}^N \cos(k\omega t) \sin(\frac{\omega t}{2}) \\
 &= 1 + \frac{1}{\sin(\frac{\omega t}{2})} \sum_{k=1}^N (\sin(k + \frac{1}{2})\omega t - \sin(k - \frac{1}{2})\omega t) \\
 &= 1 + \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega t - \sin(\frac{\omega t}{2})}{\sin(\frac{\omega t}{2})} \\
 &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega t}{\sin(\frac{\omega t}{2})}
 \end{aligned}$$

这两种结果是相符的, 读者可自行验证, 并且可以从后一结果想象出狄利克雷核的函数图像, 它被 $\pm 1/\sin(\frac{\omega t}{2})$ 包络并高速振荡。将在“取样与插值”的章节中介绍, $D_N(t)$ 是 III 函数的部分和, 在 $nT(n \in \mathbb{Z})$ 处, 随 $N \rightarrow \infty$, D 也趋于无穷, 并在其他位置趋于 0。这是又一个最大值不趋于 0, 但逐点趋于 0 的例子。函数图像如下。



引入狄利克雷核后, 就可以用以下恒等式研究傅里叶级数的部分和:

$$\begin{aligned}
 S_N^f(t) &= \sum_{-N}^N c_k e^{ik\omega t} \\
 &= \sum_{-N}^N \left(\frac{1}{T} \int_T f(\tau) e^{-k\omega\tau} d\tau \right) e^{ik\omega t} \\
 &= \frac{1}{T} \int_T f(\tau) \sum_{k=-N}^N e^{ik\omega(t-\tau)} d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_T f(\tau) D_N(t-\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_T f(t-\tau) D_N(\tau) d\tau \quad (\tau \rightarrow t-\tau) \\
 &= \frac{1}{T} \int_T f(t+\tau) D_N(\tau) d\tau \quad (\tau \rightarrow t+\tau)
 \end{aligned}$$

在讨论傅里叶级数的收敛性前, 先给出两个引理。第一个引理表明狄利克雷核在半周期上积分值为 $\frac{T}{2}$, 在证明傅里叶级数的逐点收敛性时将用到它。

$$\int_{-\frac{T}{2}}^0 D_N(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} D_N(t) dt = \frac{T}{2} \quad (8)$$

Proof:

$$\begin{aligned}
 D_N(t) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(k\omega t) \\
 \int_0^{\frac{T}{2}} D_N(t) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^N \cos(k\omega t) \right) dt \\
 &= \frac{T}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \Big|_0^{\frac{T}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^N \frac{\sin(k\pi)}{k} = \frac{T}{2}$$

$D_N(t)$ 是偶函数, 得证。

第二个引理是贝塞尔不等式 (Bessel's Inequality): 设 $f \in L^2([0, T])$, $c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-ik\omega t} dt$, 则

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt \quad (9)$$

它给出了傅里叶系数平方和的上界的估计。收敛级数的通项必收敛, 所以由此可以看出 $c_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ 。

Proof:

$$\begin{aligned} |f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}|^2 &= \left(f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} \right) \left(f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} \right)^* \\ &= \left(f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} \right) \left(f^*(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{-in\omega t} \right) \\ &= |f(t)|^2 - \sum_{n=-N}^N (c_n^* f(t) e^{in\omega t} + c_n f^*(t) e^{-in\omega t}) + \sum_{m,n=-N}^N c_m c_n^* e^{i(m-n)\omega t} \end{aligned}$$

将上式在一个周期上积分, 我们知道

$$\int_T f(t) e^{in\omega t} dt = T c_n, \int_T e^{i(m-n)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ T & \text{if } m = n \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} &\int_T |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N \left(c_n^* \int_T f(t) e^{in\omega t} dt + c_n \int_T f^*(t) e^{-in\omega t} dt \right) + \sum_{m,n=-N}^N c_m c_n^* \int_T e^{i(m-n)\omega t} dt \\ &= \int_T |f(t)|^2 dt - T \sum_{n=-N}^N (c_n^* c_n + c_n c_n^*) + T \sum_{n=-N}^N c_n^* c_n \\ &= \int_T |f(t)|^2 dt - T \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \end{aligned}$$

这是非负函数的积分, 积分值非负, 即

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt < \infty$$

直接由狄利克雷条件证明逐点收敛性需要很专业的分析学工具, 但我们可以适当地加强狄利克雷条件, 让 $f(t)$ 分段光滑 (piecewise smooth):

$$f \in PS([0, T]) \iff \text{除有限个点外 } f \text{ 均可导, 并且这些点是 } f \text{ 的第一类间断点}$$

我们研究的多数函数是满足这样的性质的, 并且我们将看到满足此条件会带来一些额外的性质。此时就可以相对简单地证明逐点收敛性:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(t_0) = \frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2}$$

Proof:

$$\begin{aligned} S_N^f(t_0) - \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} &= \frac{1}{T} \left(\int_T f(t_0 - \tau) D_N(\tau) d\tau - \int_0^{\frac{T}{2}} f(t_0^+) D_N(\tau) d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t_0^-) D_N(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (f(t_0 - \tau) - f(t_0^+)) D_N(\tau) d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^0 (f(t_0 - \tau) - f(t_0^-)) D_N(\tau) d\tau \right) \\ S_N^f(t_0) - \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} &= \frac{1}{T} \int_T g(t) (e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t}) dt \end{aligned}$$

$$\text{其中 } g(t) := \begin{cases} \frac{f(t_0+t) - f(t_0^-)}{e^{i\omega t} - 1} & \text{if } -\frac{T}{2} < t_0 < 0 \\ \frac{f(t_0+t) - f(t_0^+)}{e^{i\omega t} - 1} & \text{if } 0 < t_0 < \frac{T}{2} \end{cases}$$

由洛必达法则, $t \rightarrow 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0+t) - f(t_0^+)}{e^{i\omega t} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(t_0+t)}{ie^{i\omega t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(t_0^+)}{i}$

$t \rightarrow 0^-$ 时同理。故 g 分段连续, 当然是平方可积的, 由贝塞尔不等式, $g(t)$ 的傅里叶系数平方和收敛, 通项趋于 0, $S_N^f(t_0) - (f(t_0^+) + f(t_0^-))/2 = C_{-(N+1)} - C_N \rightarrow 0$, 得证。

在分段光滑的条件下, 容易得到 $f'(t)$ 的傅里叶系数, 注意微积分基本定理可以分区间使用:

$$a'_n = n\omega b_n, b'_n = -n\omega a_n, c'_n = in\omega c_n \quad (10)$$

以 c_n 为例:

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{T} \int_T f'(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} f(t) e^{-in\omega t} \Big|_0^T + in\omega \int_T f(t) e^{-i\omega t} dt = in\omega c_n \end{aligned}$$

f 的原函数 F 的傅里叶系数同理, 并且只要分段连续 (见3) 即可保证 f 可积, 但是我们必须保证 F 是周期函数, 这要求 f 的直流分量为 0:

$$F(t+T) - F(t) = \int_T f(t) dt = Tc_0 = 0, c_0 = 0$$

此时, 用刚刚得到的公式 (2.16) 就可直接得到 F 的傅里叶系数:

$$A_n = \frac{a_n}{n\omega}, B_n = \frac{b_n}{n\omega}, C_n = \frac{c_n}{in\omega} \quad (11)$$

分段光滑还能够推出 f 的傅里叶级数一致收敛于 f , 从而可以逐项积分、逐项求导。回顾数学分析中的魏尔斯特拉斯 M 判别法: 对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 如果存在正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ 使得在区间 E 上 $|f_n(x)| < M_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上绝对收敛且一致收敛。对于上述命题, 只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ 。直接应用贝塞尔不等式是无效的, 但可以通过一个小技巧完成证明:

记 c'_n 为 f' 的傅里叶系数, $c'_n = in\omega c_n$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{c'_n}{n} \right| \leq |c_0| + \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |c'_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

最后一步使用了柯西-施瓦兹不等式。

请读者思考：我们探究了指数形式傅里叶级数收敛的条件，对于三角函数形式的傅里叶级数应该怎么办？