Projet COMPLEX 2018 - L?o And?ol

December 5, 2018

1 Prérequis

J'ai choisi d'utiliser Python, car ce langage gère par nature les grands entiers, et comporte de nombreuses méthodes très pratiques pour les mathématiques

```
In [1]: import math
        from time import time
        import matplotlib.pyplot as plt
        from random import randrange
        import numpy as np

        %matplotlib inline
```

2 Exercice 1: Arithmétique dans Zn

2.1 Question a

Algorithme d'euclide étendu

```
In [2]: def my_pgcd(a,b):
            # algo euclide
            r = a % b
            while r != 0:
                a = b
                b = r
                r = a % b
            return b
```

2.1.1 Tests

Choix des nombres pour essayer tous les cas

```
In [3]: assert my_pgcd(50,127)==my_pgcd(127,50)
        assert my_pgcd(1,2)==1
        assert my_pgcd(2,7)==1
        assert my_pgcd(3,9)==3
        assert my_pgcd(121,66)==11
```

2.2 Question b

- Définition de l'algorithme d'euclide étendu
- Simple appel à l'algorithme d'euclide étendu en vérifiant le retour, et en appliquant le modulo sur u (pour simplifier les tests)

In [4]:
```
def algo_euc_et(a,b):
    u = [1,0]
    v = [0,1]
    r = [a,b]
    i = 1
    while r[i] != 0:
        qi = r[i-1]//r[i]
        ri_1 = r[i-1] % r[i]
        r.append(ri_1)
        ui_1 = u[i-1] - (qi*u[i])
        u.append(ui_1)
        vi_1 = v[i-1] - (qi*v[i])
        v.append(vi_1)
        i += 1
    return r[i-1],u[i-1],v[i-1]

def my_inverse(a,N):
    r, u, v = algo_euc_et(a,N)
    if r != 1:
        return "Erreur"
    else:
        return u%N
```

2.2.1 Tests

In [5]:
```
assert my_inverse(1,2)==1
assert my_inverse(2,3)==2
assert my_inverse(3,6)=="Erreur"
```

2.3 Question c

Nous allons analyser l'évolution du temps de calcul en fonction de l'ordre de l'entier passé en paramètre des deux fonctions précédentes

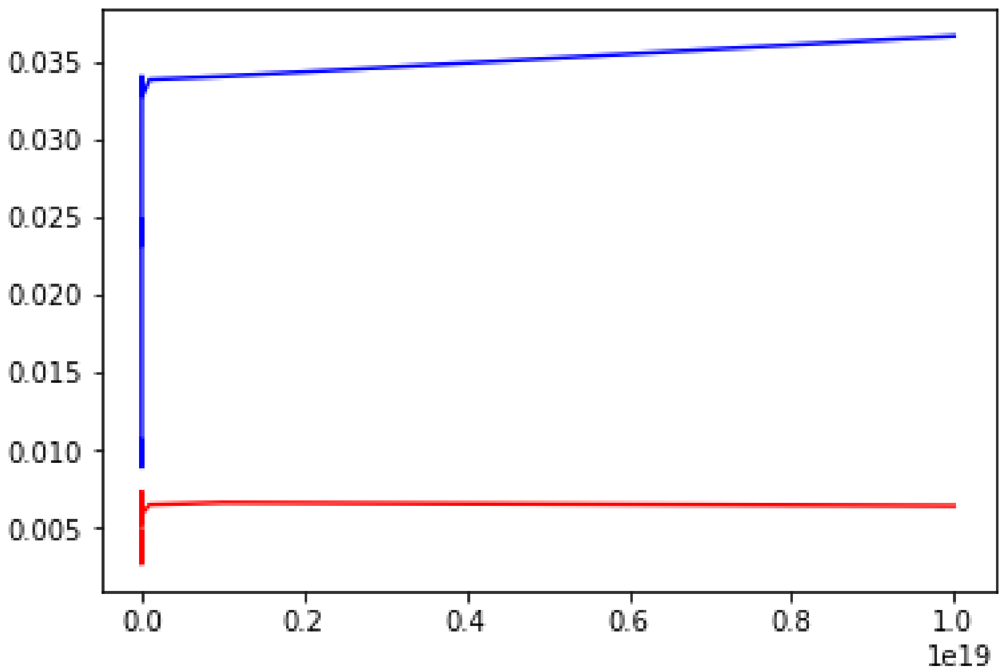
In [6]:
```
def est_complexity():
    t_pgcd = []
    t_inv = []
    l_k = []
    for i in range(2,20):
        k = pow(10,i)
        l_k.append(k)
        start = time()
        [my_pgcd(k-1,randrange(pow(10,i-1),k-1)) for _ in range(1000)]
```

```
        end = time()
        t_pgcd.append(end-start)
        start = time()
        [my_inverse(randrange(pow(10,i-1),k-1),k-1) for _ in range(1000)]
        end = time()
        t_inv.append(end-start)
    plt.plot(l_k, t_pgcd, 'r')
    plt.plot(l_k, t_inv, 'b')
```

2.3.1 Test

On constate que la complexité est logarithmique

```
In [7]: est_complexity()
```



2.4 Question d

Du à des soucis d'implémentation, j'ai au final choisi de coder une version plus claire de l'exponentiation.

Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Modular_exponentiation#Right-to-left_binary_method

```
In [8]: def my_expo_mod(g,n,N):
            h = 1
            while n>0:
                if n%2 == 1:
```

```
                h = (h*g) % N
            n = n // 2
            g = (g*g) % N
        return h
```

2.4.1 Tests

```
In [9]: assert my_expo_mod(2,3,5)==3
        assert my_expo_mod(5,3,5)==0
        assert my_expo_mod(7,3,11)==2
        assert my_expo_mod(5,6,7)==1
```

3 Exercice 2 : Test naïf et recherche des nombres de Carmichael

3.1 Question a

```
In [10]: def first_test(N):
             if N <= 1:
                 return False
             for i in range(2,math.floor(math.sqrt(N))+1):
                 if N % i == 0:
                     return False
             return True
```

3.1.1 Tests

```
In [11]: assert first_test(1)==False
         assert first_test(2)==True
         assert first_test(7)==True
         assert first_test(8)==False
         assert first_test(11)==True
         assert first_test(121)==False
```

3.2 Question b

L'algorithme a une complexité binaire de O(2ˆbitsize(n))

3.3 Question c

```
In [12]: def count_prime(K=100000):
             cnt = 0
             for i in range(1,K):
                 if first_test(i):
                     cnt += 1
             return cnt
```

3.3.1 Tests

Source : https://primes.utm.edu/howmany.html

```
In [13]: assert count_prime(100)==25
         assert count_prime(1000)==168
         assert count_prime(10000)==1229
         assert count_prime(100000)==9592
```

3.4 Question d

J'ai pris la liberté de rajouter un s au nom de la fonction pour pouvoir la différencier de la fonction suivante

De plus ici et dans la suite du projet on commencera généralement les boucles à 4, les premiers cas étant triviaux pouvant poser probleme pour nos tirages aléatoires.

```
In [14]: def gen_carmichaels(K=100000, p=128):
             for n in range(4,K):
                 if not first_test(n):
                     test=True
                     for i in range(p):
                         a = randrange(2,n)
                         if my_pgcd(n,a)==1 and pow(a,n-1,n)!=1:
                             test=False
                             break
                     if test:
                         yield n
```

3.4.1 Tests

Source : https://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=CarmichaelNumber

```
In [15]: assert (sum([1 for _ in gen_carmichaels()]))==16
```

3.5 Question e

```
In [16]: def is_carmichael(n):
             for a in range(math.ceil(math.sqrt(n))):
                 if my_pgcd(a,n)==1 and my_expo_mod(a,n-1,n)!=1:
                     return False
             return True

         def gen_carmichael(K=100000):
             primes = []
             for i in range(3,K):
                 if(first_test(i)):
                     primes.append(i)
             primes1 = np.random.permutation(primes)
             primes2 = np.random.permutation(primes)
```

```
        primes3 = np.random.permutation(primes)
        for i in primes1:
            for j in primes2:
                for k in primes3:
                    if is_carmichael(i*j*k):
                        return i*j*k,i,j,k
```

3.5.1 Tests

Vérification grâce à la source suivante *Source : https://oeis.org/A002997/b002997.txt*

```
In [17]: gen_carmichael(K=1000)
```

```
Out[17]: (172947529, 613, 307, 919)
```

3.6 Question f

Attention la fonction tourne 5 minutes
Record = 59

```
In [18]: trouves = set()
         debut = time()
         while (time()-debut)<300:
             k,_,_,_ = gen_carmichael(K=1000)
             trouves.add(k)
         len(trouves)
```

```
Out[18]: 59
```

3.7 Question g

3.7.1 Question 1

- p<q<r
- selon le critère de Korselt, si pqr est de carmichael il n'existe pas k tel que k est premier et son carré divise pqr, et pour chaque diviseur premier m de pqr, m-1 divise pqr-1, etc ...
- On a donc r-1 divise pqr-1
- pqr-1 = (r-1)pq + pq - 1
- Donc r-1 divise (r-1)pq *(trivial)* et pq-1
- Donc pq-1 = h(r-1)
- hors comme r est premier, r =/= pq
- Donc h ne peut être égal à 1 donc h >= 2
- Or h est forcément inférieur à p (et q et r) car si h=p on obtient q=r, ce qui est absurde
- donc 2 <= h <= p-1

3.8 Question h

On peut chercher :

```
In [19]: primes = []
         for i in range(4,100):
             if(first_test(i)):
                 primes.append(i)
         for i in range(len(primes)):
             for j in range(i,len(primes)):
                 m = primes[i]
                 n = primes[j]
                 if is_carmichael(3*m*n):
                     print(3*m*n,"=","3*",m,"*",n)
         for i in range(len(primes)):
             for j in range(i,len(primes)):
                 m = primes[i]
                 n = primes[j]
                 if is_carmichael(5*m*n):
                     print(5*m*n,"=","5*",m,"*",n)
```

```
561 = 3* 11 * 17
1105 = 5* 13 * 17
2465 = 5* 17 * 29
10585 = 5* 29 * 73
```

4 Exercice 3 : Test de Fermat

4.1 Question a

```
In [20]: def test_fermat(n, p=128):
             if n == 2 or n == 3:
                 return True
             if n == 4 or n<=1:
                 return False
             for i in range(p):
                 a = randrange(2,n)
                 if my_expo_mod(a,n-1,n)!=1:
                     return False
             return True
```

4.1.1 Tests

```
In [21]: assert test_fermat(4)==False
         assert test_fermat(7)==True
         assert test_fermat(49)==False
         assert test_fermat(121)==False
         assert test_fermat(563)==True
```

4.2 Question b

- J'ai besoin en premier d'une simple fonction pour générer des nombres composés pour faire le test

```
In [22]: def gen_comp(K=100000):
             for i in range(3,K):
                 if not first_test(i):
                     yield i
```

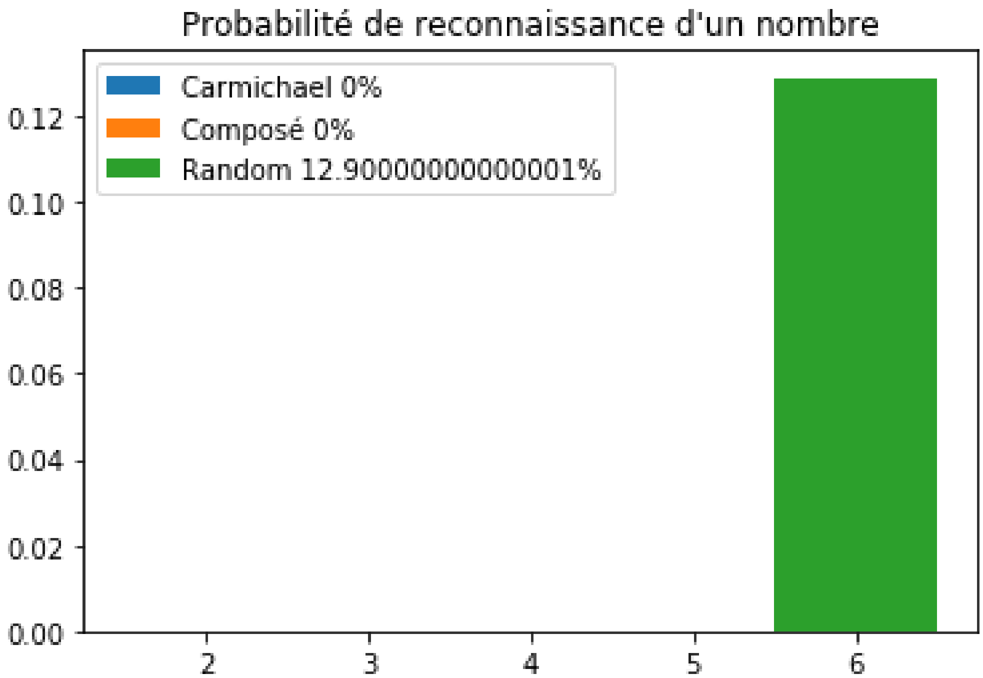
- Ensuite je veux calculer la probabilité de reconnaissance par type de valeur

```
In [23]: def test_test_fermat(K=100000, N=1000, p=128):
             p_car = 0
             p_comp = 0
             p_rand = 0
             car=list(gen_carmichaels(K))
             comp=list(gen_comp(K))
             for i in range(N):
                 if test_fermat(int(np.random.choice(car,1)[0])):
                     p_car += 1/N
             for i in range(K):
                 if test_fermat(int(np.random.choice(comp,1)[0])):
                     p_comp += 1/N
             for i in range(N):
                 if test_fermat(randrange(3,K),p):
                     p_rand += 1/N
             plt.bar(2,p_car,1,label="Carmichael "+str(p_car*100)+"%")
             plt.bar(4,p_comp,1,label="Composé "+str(p_comp*100)+"%")
             plt.bar(6,p_rand,1,label="Random "+str(p_rand*100)+"%")
             plt.title("Probabilité de reconnaissance d'un nombre")
             plt.legend()
             plt.show()
```

4.2.1 Test

Attention, peut être très long à calculer en augmentant K

```
In [24]: test_test_fermat(K=10000)
```



4.3 Question c

```
In [25]: def est_proba_err_fermat(p=128):
             p = 0
             for i in range(3,100000):
                 f = first_test(i)
                 g = test_fermat(i,p=128)
                 if g and not f:
                     p+=1/100000
             return p
```

4.3.1 Tests

```
In [26]: est_proba_err_fermat(p=128)

Out[26]: 0
```

5 Exercice 4 : Test de Rabin et Miller

5.1 Question a

```
In [27]: def test_miller_rabin(n, T=128):
             m = n-1
             h = 0
             while m%2==0:
```

```
                h+=1
                m=m//2
            for i in range(T):
                a = randrange(2,n)
                b = my_expo_mod(a,m,n)
                if b!= 1 and b!= n-1:
                    j = 1
                    while j < h and b != n-1:
                        if (b*b)%n == 1:
                            return False
                        b = (b*b)%n
                        j = j+1
                    if b != n-1:
                        return False
            return True
```

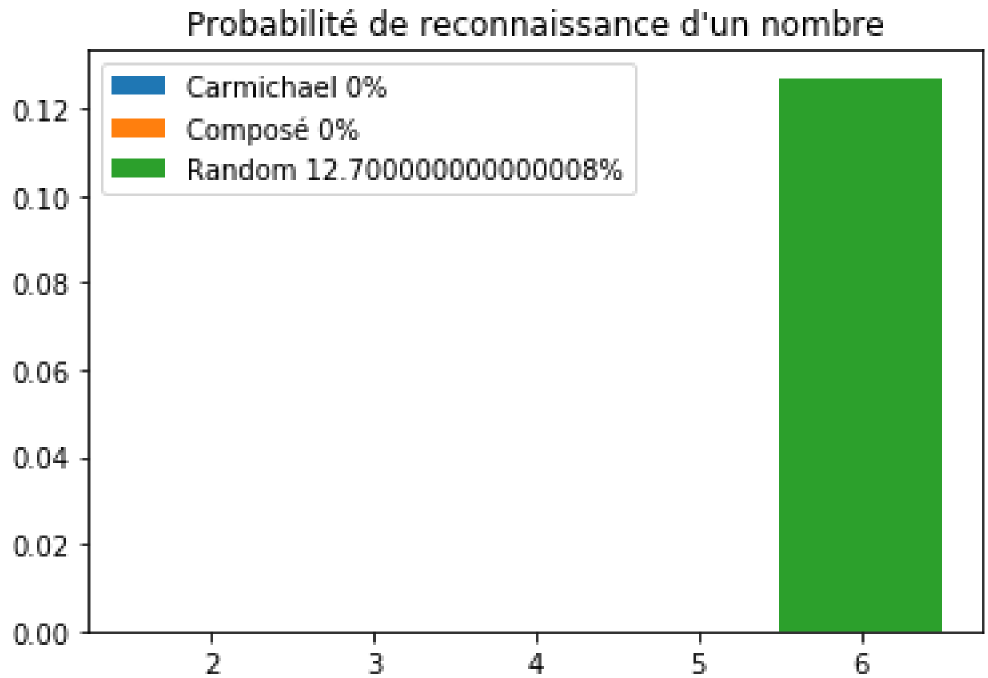
5.2 Question b

```
In [28]: def test_test_miller_rabin(K=100000, N=1000):
             p_car = 0
             p_comp = 0
             p_rand = 0
             car=list(gen_carmichaels(K))
             comp=list(gen_comp(K))
             for i in range(N):
                 if test_miller_rabin(int(np.random.choice(car,1)[0])):
                     p_car += 1/N
             for i in range(K):
                 if test_miller_rabin(int(np.random.choice(comp,1)[0])):
                     p_comp += 1/N
             for i in range(N):
                 if test_miller_rabin(randrange(3,K)):
                     p_rand += 1/N
             plt.bar(2,p_car,1,label="Carmichael "+str(p_car*100)+"%")
             plt.bar(4,p_comp,1,label="Composé "+str(p_comp*100)+"%")
             plt.bar(6,p_rand,1,label="Random "+str(p_rand*100)+"%")
             plt.title("Probabilité de reconnaissance d'un nombre")
             plt.legend()
             plt.show()
```

5.2.1 Tests

Attention, peut être très long à calculer en augmentant K

```
In [29]: test_test_miller_rabin(K=10000)
```



5.3 Question c

```
In [30]: def est_proba_err_miller_rabin(T=128):
             p = 0
             for i in range(3,100000):
                 f = first_test(i)
                 g = test_miller_rabin(i,T)
                 if g and not f:
                     p+=1/100000
             return p
```

5.3.1 Tests

```
In [31]: est_proba_err_miller_rabin()

Out[31]: 0
```

5.4 Question d

```
In [32]: def gen_rsa(t):
             test = False
             while not test:
                 p,q = randrange(pow(2,t-1),pow(2,t)+1),randrange(pow(2,t-1),pow(2,t)+1)
                 if test_miller_rabin(p) and test_miller_rabin(q):
                     test = True
             return p*q,p,q
```

In [33]:
```
gen_rsa(25)
```

Out[33]:
```
(316876301563933, 17146729, 18480277)
```