Cours MODEL [1]

Léo Andéol

2 octobre 2018

1. Professeur x, y

Chapitre 1

Bases ?

1.1 Groupes

Définition Soit G un ensemble et $\otimes : G * G \to G$ On dit que $(G, \otimes)$ est un groupe si :

1. L'opérateur $\otimes$ est associatif $\forall (x, y, z) \in G * G * G$,
   $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
2. $\forall x \in G, \exists e \in G$ tel que $e \otimes x = x \otimes e = x$,
   On appelle cet élément e élément neutre du groupe $(G, \otimes)$
3. $\forall x \in G, \exists y \in G$ tel que $x \otimes y = e$
   On dira que y est l'inverse de x (on le note parfois x^-1)

On dira que G est commutatif (ou abélien) si
$\forall (x, y) \in G * G, x \otimes y = y \otimes x$

Exemples

— $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif,
son élément neutre est 0,
$\forall x \in \mathbb{Z}$ l'inverse de x est $-x$

— $(\mathbb{Z}, *)$ n'est pas un groupe (car 2 n'a pas d'inverse pour x dans $\mathbb{Z}$)

— $(\mathbb{Q} - \{0\}, *)$ est un groupe,
1 est l'élément neutre,
$\forall x \in \mathbb{Q} - \{0\}, \frac{1}{x}$ est l'inverse de x

— On considère l'ensemble des bijections $\sum_n$ de $\{1 \ldots n\}$ sur $\{1 \ldots n\}$
Comme opérateur binaire on choisit la loi de composition $\circ$
Par exemple pour $n = 2$ on a :

$$\phi_0 : \begin{bmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 : \begin{bmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 2 \end{bmatrix}$$

$\phi_1 \circ \phi_0 = \phi_0 \circ \phi_1 = \phi_1$
Donc $(\sum_2, \circ)$ est un groupe

Un groupe $(G, \otimes)$ tel que G est de cardinalité finie est appelé groupe fini.
Pour $p \in \mathbb{N} - \{0\}$,
On note $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ Soit $x \in \mathbb{Z}$ et (q, r) les quotients et le reste de x par p $(0 \leq r < p)$.
$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ contient tous les restes possibles.
Pour x et y dans $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} - \{0\}$
On note $x \otimes y = x * y \mod p$
$\Longrightarrow$ on prend le reste de la division euclidienne de $x * y$ par p
$\otimes : (\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} - \{0\} * \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} - \{0\}) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} - \{0\}$
Quand p est un nombre premier $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} - \{0\} = \{1, 2\}$
$1 \otimes 2 = 1 * 2 \mod 3 = 2 \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} - \{0\}$
$2 \otimes 2 = 4 \mod 3 = 1 \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} - \{0\}$
$\Longrightarrow$ On en déduit que $(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} - \{0\}, \otimes)$ est un groupe fini/

Soit $(G, \otimes)$ un groupe fini et $H < G$
On dit que H est stable par $\otimes$ ssi :
$\forall (x, y) \in H * H, x \otimes y \in H$
$\Longrightarrow$ On peut considérer que la restriction de $\otimes$ à H est un opérateur binaire sur H.