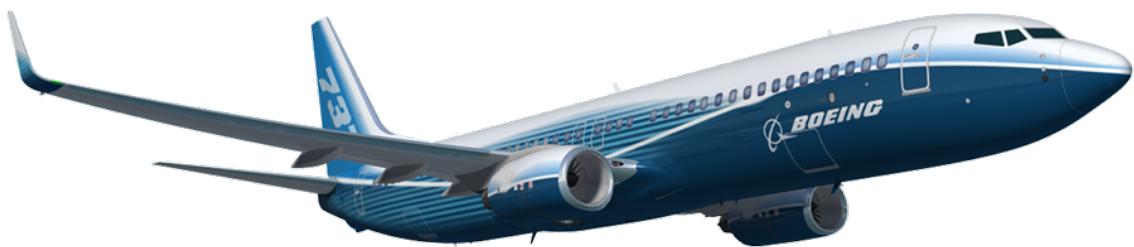




Università  
degli Studi  
della Campania  
*Luigi Vanvitelli*

# Controllo della dinamica laterale di un aereo

Corso di Multivariable FeedBack Control



Francesco D'Angelo A18/366  
Mariarosaria Della Rossa A18/363

Prof.  
Alberto Cavallo

AA 2020/2021

# Indice

<b>1 Descrizione fisica</b>	<b>3</b>
<b>2 Feedback di Stato</b>	<b>7</b>
2.1 Progettazione del controllore . . . . .	7
2.2 Simulazioni . . . . .	9
2.2.1 Risultati al variare di $\bar{Q}$ . . . . .	9
2.2.2 Risultati al variare di $\bar{R}$ . . . . .	11
2.2.3 Risultati con la Regola di Bryson . . . . .	12
2.3 Conclusioni delle simulazioni . . . . .	14
<b>3 Feedback di Uscita</b>	<b>15</b>
3.1 Progettazione del Controllore . . . . .	15
3.2 Simulazioni . . . . .	18
3.3 Conclusioni . . . . .	21
<b>4 Set Point con Feedback di Stato</b>	<b>22</b>
4.1 Progettazione del controllore . . . . .	22
4.2 Simulazioni . . . . .	23
<b>5 Set Point con Feedback di Uscita</b>	<b>26</b>
5.1 Progettazione del controllore . . . . .	26
5.2 Simulazioni . . . . .	26

Questo documento descrive un controllore robusto per le dinamiche di volo laterale di un aereo. Il controllo proposto è stato progettato in maniera tale da stabilizzare un aeromobile che si trova inizialmente in una posizione instabile da noi supposta.

I sistemi realizzati sono: un controllore con feedback di stato per stabilizzare l'aereo cioè portarlo a un assetto di equilibrio, un osservatore per stimare lo stato, sul quale è stato costruito un controllore dinamico in modo da recuperare le garanzie ottenute dallo state feedback e, infine, un controllore ed uno stimatore con set point.

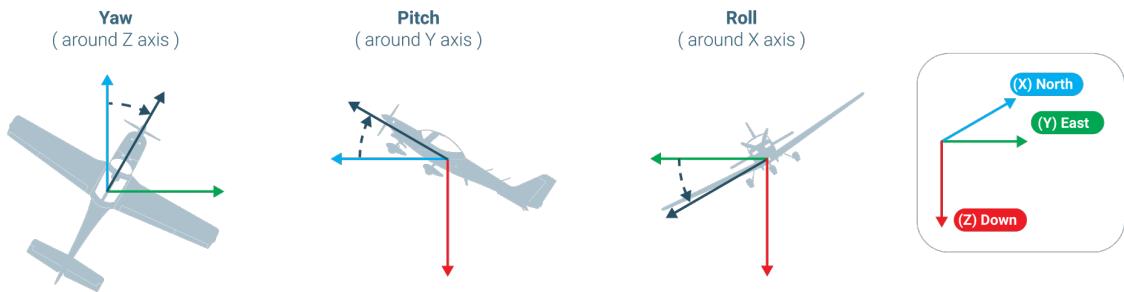
# 1 Descrizione fisica

Si è voluto progettare un controllore in grado di condurre la dinamica di un aereo in volo in una posizione di equilibrio. Esistono tre principali dinamiche con cui un aereo può cambiare il proprio orientamento rispetto all'aria, ognuna delle quali fa riferimento a uno dei tre assi con cui viene descritto il moto dell'aereo.

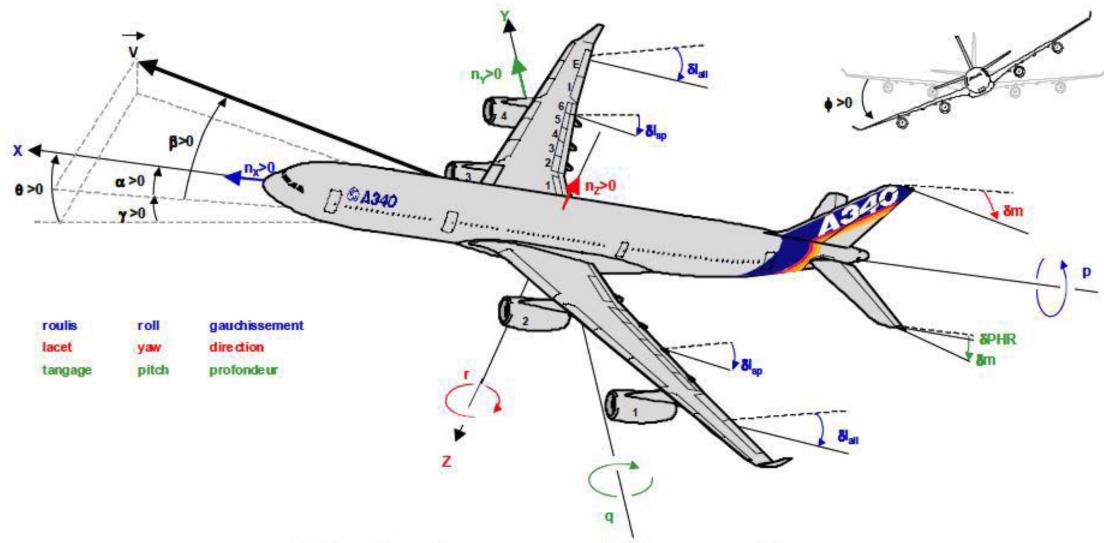
**Yaw** (Imbardata): il movimento del muso verso sinistra o destra.

**Pitch** (Beccheggio): il movimento del muso verso l'alto o verso il basso

**Roll** (Rollio): la rotazione del velivolo attorno al suo asse longitudinale



Andiamo a vedere la modelizzazione della dinamica di un aereo e le variabili che la caratterizzano.



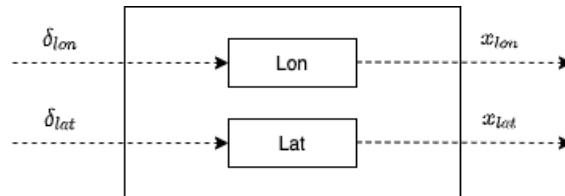
Le variabili di stato sono:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \gamma \\ \theta \\ \alpha \\ \phi \\ \beta \\ p \\ u \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} x : \text{posizione x} \\ y : \text{posizione y} \\ z : \text{posizione z} \\ \gamma : \text{angolo di traiettoria} \\ \theta : \text{angolo di pitch} \\ \alpha : \text{angolo di attacco} \\ \phi : \text{angolo di rollio} \\ \beta : \text{angolo di sideslip} \\ p : \text{velocità di rollio} \\ u : \text{velocità longitudinale} \\ q : \text{velocità di pitch} \\ r : \text{velocità di imbardata (yaw)} \end{array}$$

Le variabili di controllo:

$$\delta_{dyn} = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_t \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \delta_e : \text{elevatore} \\ \delta_t : \text{acceleratore} \\ \delta_a : \text{alettone} \\ \delta_r : \text{timone} \end{array}$$

Facendo delle semplificazioni, le dinamiche di volo possono essere disaccoppiate e ridotte a due sistemi indipendenti: la parte longitudinale e quella laterale.



Dinamica Longitudinale:

$$x_{lon} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ q \end{bmatrix} \quad \delta_{lon} = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_t \end{bmatrix}$$

Dinamica Laterale:

$$x_{lat} = \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} \quad \delta_{lat} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

In questo progetto andremo ad analizzare solo la **dinamica laterale** del sistema, trascurando quella longitudinale.

Quando l'aeromobile è disturbato dalla sua condizione di equilibrio, si originano i modi della stabilità laterale. I modi possono essere originati dall'azionamento delle superficie di controllo oppure da turbolenze atmosferiche.

La modellizzazione matematica e la linearizzazione del sistema in questione sono state attinte dal seguente articolo: "*Aircraft Control System Using LQG and LQR Controller with Optimal Estimation-Kalman Filter Design*", Labane Chrif e Zemalache Meguenni Kaddac, 2013.

La rappresentazione in spazio di stato sarà la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^m$$

La matrice dinamica A del sistema è:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0558 & -0.9968 & 0.0802 & 0.0415 \\ 0.5980 & -0.1150 & -0.0318 & 0 \\ -3.0500 & 0.3880 & -0.4650 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice degli ingressi B è:

$$B = \begin{bmatrix} 0.0729 & 0.000 \\ -4.7500 & 0.00775 \\ 0.15300 & 0.1430 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice C è stata scelta in modo tale da avere come uscite reali del nostro sistema l'angolo di rollio e l'angolo di sideslip al fine di avere una visione completa dell'aereo durante la stabilizzazione.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice D è stata scelta pari a:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ai fini dell'esercizio sono state scelte condizioni iniziali diverse da zero in modo tale da poter progettare un controllo che potesse, nel miglior modo possibile, portare l'aereo nella

sua condizione di equilibrio. Quindi, ricapitolando, il mio sistema in spazio di stato è:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.0558 & -0.9968 & 0.0802 & 0.0415 \\ 0.5980 & -0.1150 & -0.0318 & 0 \\ -3.0500 & 0.3880 & -0.4650 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0729 & 0.000 \\ -4.7500 & 0.00775 \\ 0.15300 & 0.1430 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta r \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2 Feedback di Stato

### 2.1 Progettazione del controllore

Sulla base degli studi precedenti, è stato progettato un controllore statico, basato su feedback di stato, il cui obiettivo è quello di portare un aereo in volo che si trova inizialmente inclinato di un certo angolo di rollio e ruotato di un dato angolo di scivolata, in una posizione di equilibrio rispetto all'orizzonte.

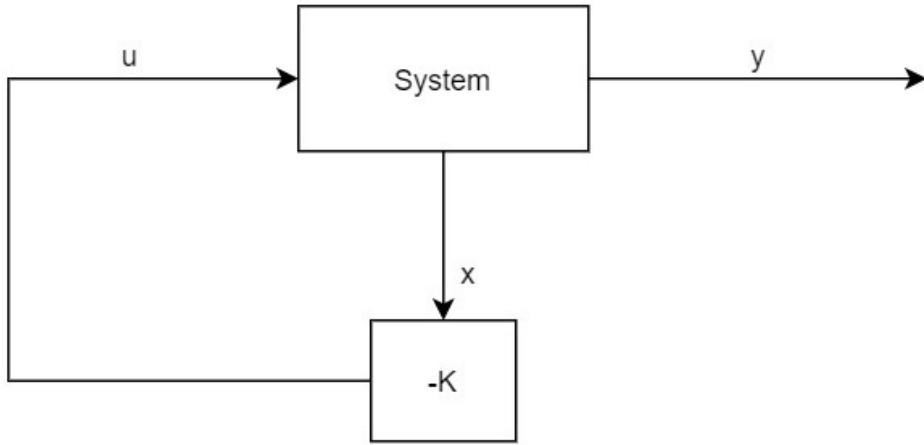


Figura 1: Schema controllore con feedback di stato

Il sistema utilizzato è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Gx + Hu \end{cases} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, z \in \mathbb{R}^l$$

dove  $z$  rappresenta l'uscita di interesse del sistema.

Per realizzare questo controllore è stato utilizzato il *Linear Quadratic Regulator* che ci fornirà la matrice di guadagno da utilizzare in retroazione. L'indice LQR da minimizzare può essere rappresentato in diversi modi:

$$\begin{aligned} J_{LQR} &= \int_0^\infty \|z(t)\|^2 + \rho \|u(t)\|^2 dt \\ J_{LQR} &= \int_0^\infty z^T(t) \bar{Q} z(t) + \rho u^T(t) \bar{R} u(t) dt \\ J_{LQR} &= \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2x^T(t) N u(t) dt \end{aligned}$$

con:

$$Q = G^T \bar{Q} G \quad R = H^T \bar{Q} H + \rho \bar{R} \quad N = G^T \bar{Q} H$$

Per ottenere il controllo ottimo, bisogna risolvere *l'equazione algebrica di Riccati*:

$$(A^T - NR^{-1}B^T)P + P(A - BR^{-1}N^T) - PBR^{-1}B^TP + Q - NR^{-1}N^T = 0$$

Nel caso in cui  $N=0$ , si ottiene:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

L'equazione algebrica di Riccati può essere scritta sfruttando la matrice *Hamiltoniana*

$$H = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}N^T & BR^{-1}B^T \\ -Q + NR^{-1}N^T & -(A - BR^{-1}N^T)^T \end{bmatrix}$$

quando  $H$  appartiene al dominio dell'operatore Riccati, in questo modo:

$$[P - I] H \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = 0$$

Affinché  $H$  appartenga al dominio dell'operatore di Riccati, devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- $Q + NR^{-1}N^T$  deve essere definita positiva
- $(A, B)$  deve essere stabilizzabile
- $(A - BR^{-1}N^T, Q - NR^{-1}N^T)$  deve essere rilevabile

Nel caso in cui  $N=0$ , basterà verificare la definita positività della matrice  $Q$ , la stabilizzabilità della coppia  $(A, B)$  e la rilevabilità della coppia  $(A, Q)$ .

Per verificare la stabilizzabilità della coppia  $(A, B)$  abbiamo controllato se tale coppia fosse completamente controllabile dato che la controllabilità ingloba la stabilizzabilità.

Ci siamo quindi calcolati il rango della matrice di controllabilità e abbiamo appurato che essa ha rango pieno, cioè:

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

ha rango 4.

L'uscita di riferimento scelta corrisponde agli stati che rappresentano rispettivamente il roll angle e il sideslip angle dell'aereo, quindi la matrice  $\mathbf{G}$  è proprio pari alla matrice  $\mathbf{C}$ , mentre la matrice  $\mathbf{H}$  è uguale alla matrice  $\mathbf{D}$ .

Per minimizzare l'indice  $J_{LQR}$ , sono stati inizialmente settati i valori di  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  e  $\rho$  pari a:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho = 1$$

A questo punto bisognerebbe verificare la rilevabilità della coppia  $(A, Q)$  ma, considerando la  $Q = G^T \bar{Q} G$  e siccome  $\bar{Q}$  è definita positiva, ci basta verificare la rilevabilità sulla coppia  $(A, G)$ . Ma sapendo che l'osservabilità ingloba la rilevabilità, abbiamo verificato che la matrice di osservabilità:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} G \\ GA \\ \vdots \\ GA^{n-1} \end{bmatrix}$$

avesse rango pieno. Appurato che il rango di tale matrice è pieno, siamo giunti a garantire la tesi della rilevabilità della coppia  $(A, Q)$ . Allora, in queste ipotesi,  $H$  appartiene al

dominio dell'operatore di Riccati e quindi è possibile calcolare il guadagno del regolatore ottimo.

Il guadagno calcolato è stato utilizzato per costruire il controllore con feedback di stato, rappresentato dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -K_c x \end{cases}$$

Tramite Simulink è stato realizzato lo schema del sistema, attraverso il quale sono stati studiati i segnali dell'uscita di riferimento ed il costo in termini di controllo.

## 2.2 Simulazioni

Di seguito verranno mostrati i grafici delle grandezze d'interesse al variare di  $Q$  ed  $R$

### 2.2.1 Risultati al variare di $\bar{Q}$

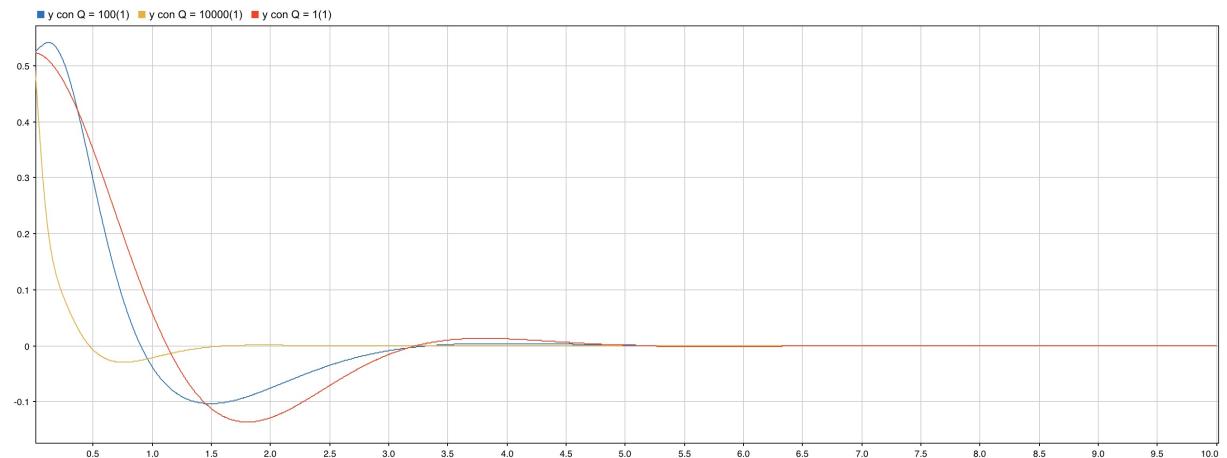


Figura 2: Andamento dell'uscita  $y_1$  (sideslip angle) al crescere del valore di  $Q$  in 10 sec  
 $y_1$  con  $\bar{Q} = I$ ,  $y_1$  con  $\bar{Q} = 100 * I$ ,  $y_1$  con  $\bar{Q} = 10000 * I$

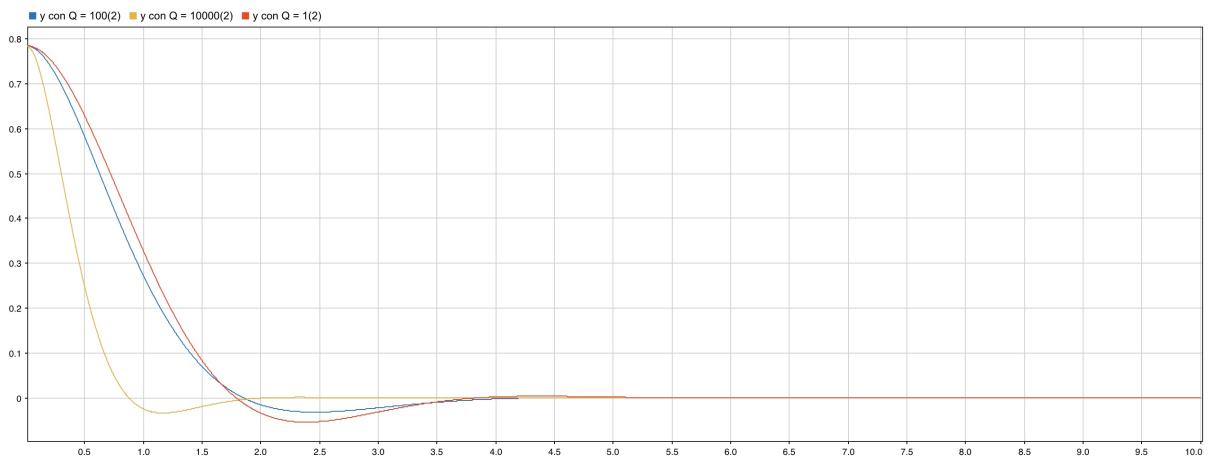


Figura 3: Andamento dell'uscita  $y_2$  (roll angle) al crescere del valore di  $Q$  in 10 sec  
 $y_2$  con  $\bar{Q} = I$ ,  $y_2$  con  $\bar{Q} = 100 * I$ ,  $y_2$  con  $\bar{Q} = 10000 * I$

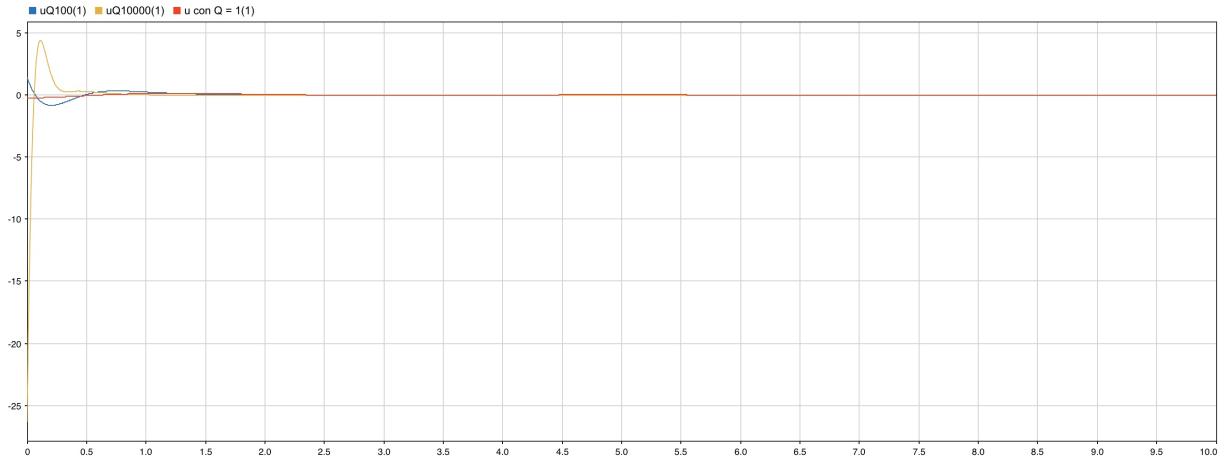


Figura 4: Andamento del controllo  $u_1$  (aileron deflection) al crescere del valore di  $Q$  in 10 sec  $u$  con  $\bar{Q} = I$ ,  $u$  con  $\bar{Q} = 100 * I$ ,  $u$  con  $\bar{Q} = 10000 * I$

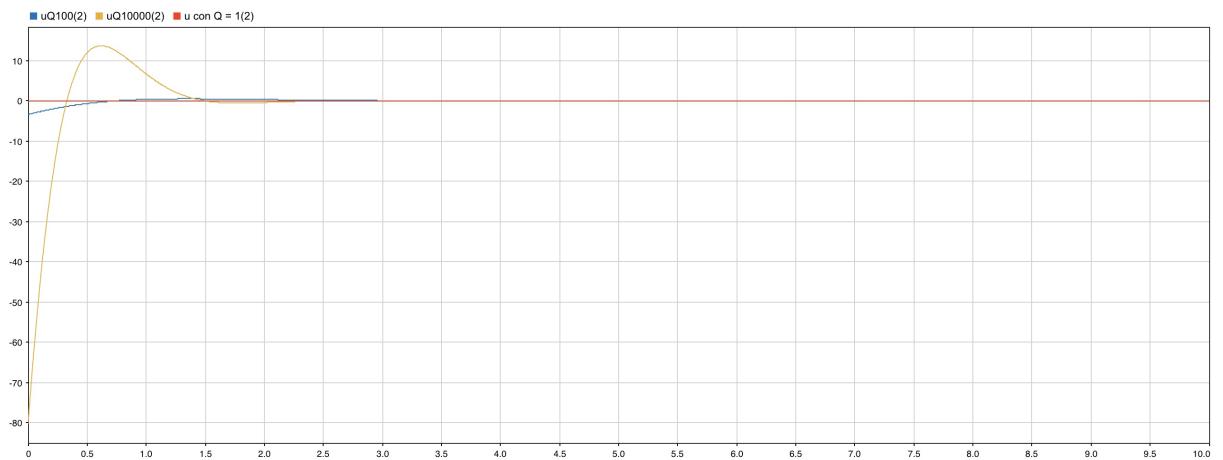
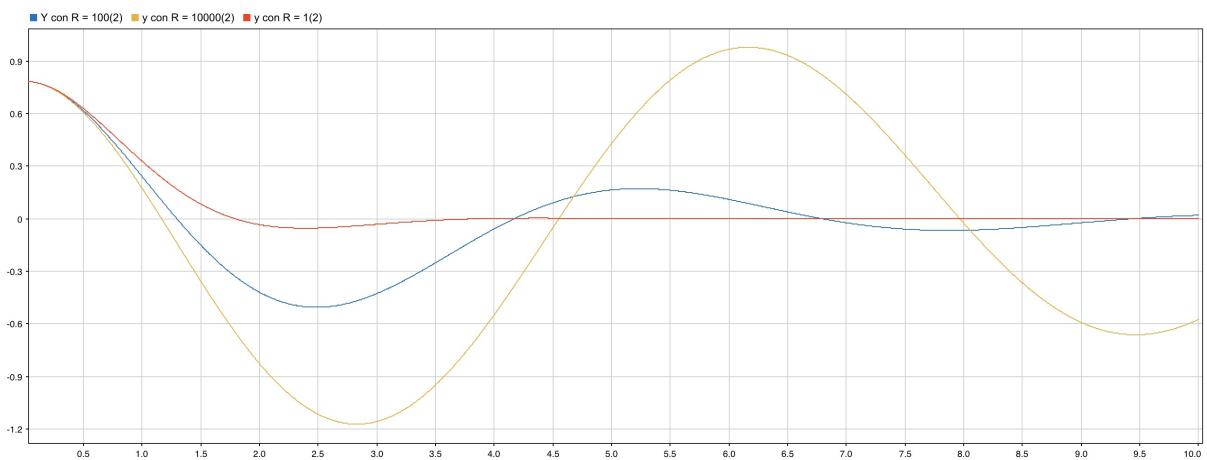
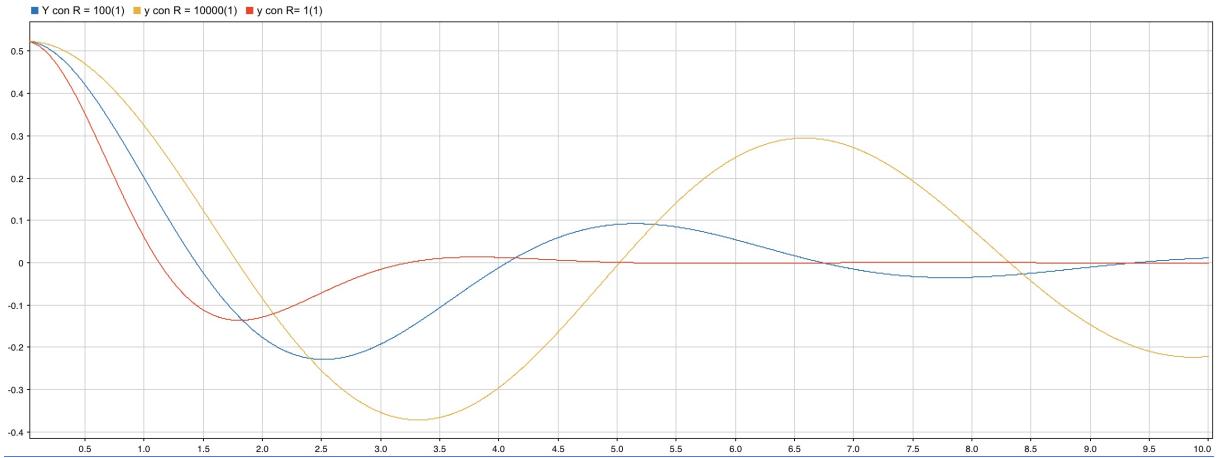


Figura 5: Andamento del controllo  $u_2$  (rudder deflection) al crescere del valore di  $Q$  in 10 sec  $u$  con  $\bar{Q} = I$ ,  $u$  con  $\bar{Q} = 100 * I$ ,  $u$  con  $\bar{Q} = 10000 * I$

## 2.2.2 Risultati al variare di $\bar{R}$



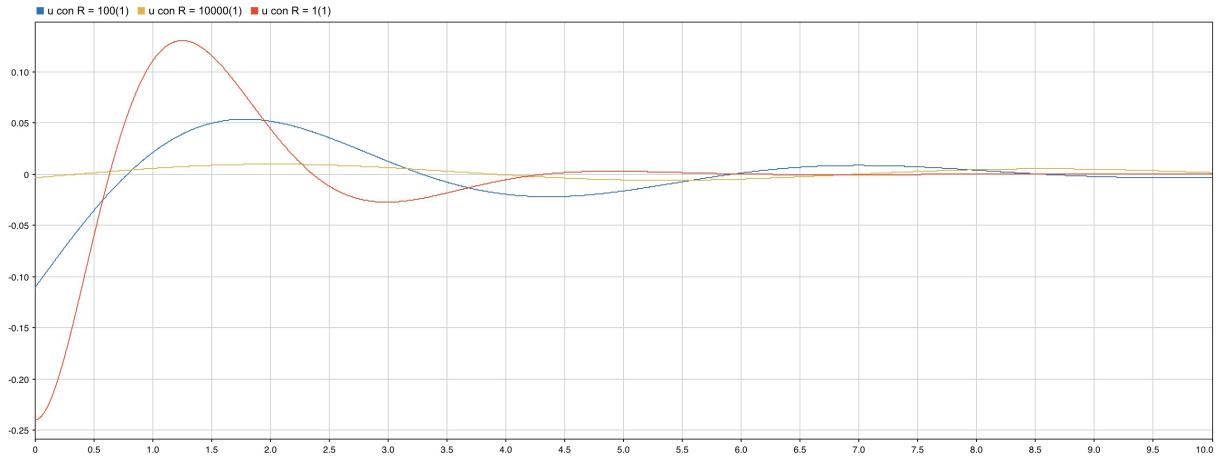


Figura 8: Andamento del controllo  $u_1$  (aileron deflection) al crescere del valore di  $R$  in 10 sec  $u$  con  $\bar{R} = I$ ,  $u$  con  $\bar{R} = 100 * I$ ,  $u$  con  $\bar{R} = 10000 * I$

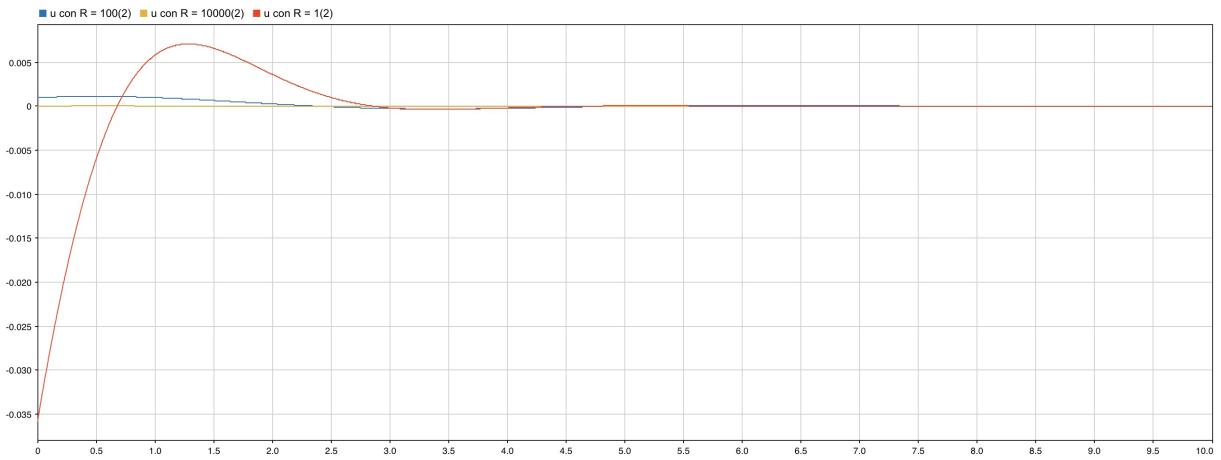


Figura 9: Andamento del controllo  $u_2$  (aileron deflection) al crescere del valore di  $R$  in 10 sec  $u$  con  $\bar{R} = I$ ,  $u$  con  $\bar{R} = 100 * I$ ,  $u$  con  $\bar{R} = 10000 * I$

### 2.2.3 Risultati con la Regola di Bryson

Nelle precedenti simulazioni abbiamo visto, in maniera completamente speculativa, come la variazione delle matrici  $Q$  e  $R$  abbia portato a risultati incredibilmente differenti all'interno del nostro sistema, senza però prendere in considerazione gli aspetti fisici del nostro problema.

Il controllore che noi vogliamo progettare dovrebbe servire per la stabilizzazione di un aereo, quindi le uscite e i controlli che lo caratterizzano sono obbligate a dei valori dovuti dai limiti fisici dell'aeromobile.

I massimi valori che le variabili d'interesse del nostro sistema possono assumere sono:

- sideslip angle  $\cong 10^\circ$
- roll angle  $\cong 30^\circ$  in situazioni normali e  $\cong 80^\circ$  in situazioni di emergenza
- aileron deflection  $\cong 25^\circ$
- rudder deflection  $\cong 26^\circ$

Utilizzando la regola empirica di Bryson, che ci dice che dei possibili valori di  $\bar{Q}$  e  $\bar{R}$  sono:

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{1}{\text{massimo valore accettabile di } z_i^2} \quad \text{con } i \in \{1, \dots, l\}$$

$$\bar{R}_{jj} = \frac{1}{\text{massimo valore accettabile di } u_i^2} \quad \text{con } j \in \{1, \dots, k\}$$

abbiamo:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 32.8281 & 0 \\ 0 & 0.5129 \end{bmatrix} \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} 5.2525 & 0 \\ 0 & 4.8562 \end{bmatrix} \quad \rho = 1$$

Vediamo di seguito i risultati ottenuti:

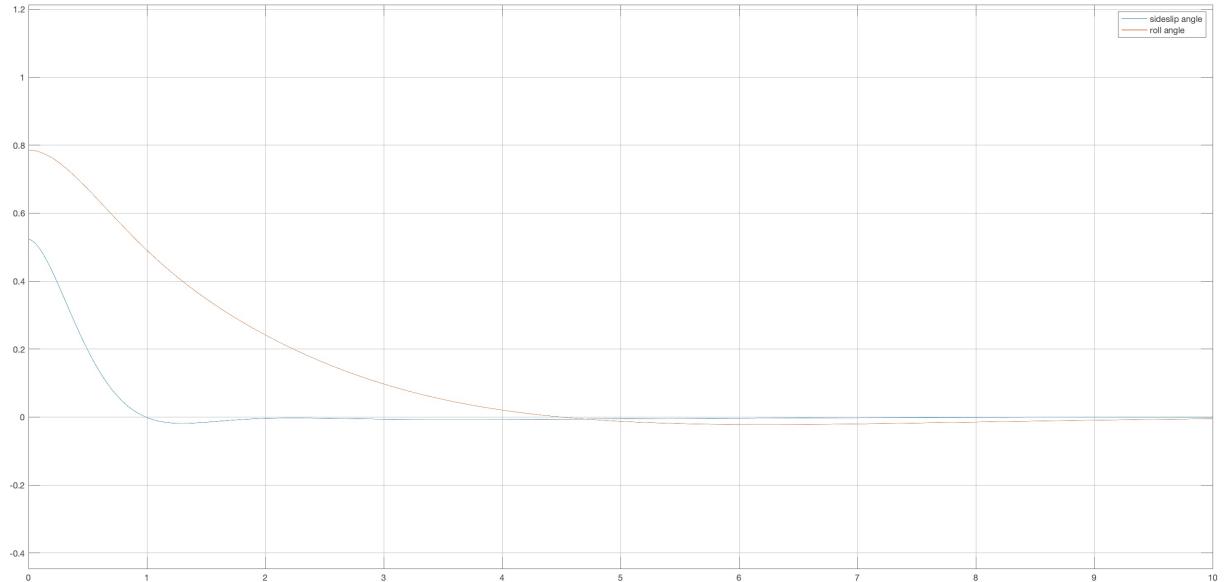


Figura 10: Andamento delle uscite: **sideslip angle**, **roll angle**



Figura 11: Andamento dei controlli: **aileron deflection**, **rudder deflection**

### 2.3 Conclusioni delle simulazioni

Come possiamo notare dai grafici sopra indicati, c'è un sostanziale cambiamento nel comportamento delle grandezze in gioco al variare di dei due indici  $\bar{Q}$  e  $\bar{R}$ .

In particolare, aumentando il valore di  $\bar{Q}$ , le uscite migliorano sostanzialmente, cioè i due angoli roll e sideslip riescono a raggiungere più velocemente lo zero. In questo caso però, paghiamo un costo molto alto sul controllo e quindi una veloce variazione del timone e degli alettoni.

Analizzando invece i grafici al variare dell'indice  $\bar{R}$  vediamo il risparmio sul controllo e quindi abbiamo uno scarso utilizzo degli alettoni e del timone, ma le nostre uscite (roll e sideslip angle) sono molto più lente nel raggiungere lo zero. Supponendo un caso reale, le condizioni iniziali da noi scelte rappresentano una situazione di emergenza o di estrema difficoltà dato che un aereo di linea, in condizioni standard, raggiunge al massimo un angolo di rollio non superiore ai  $25^\circ$ .

### 3 Feedback di Uscita

#### 3.1 Progettazione del Controllore

Abbiamo appena visto come si realizza un controllore per un feedback di stato con indice LQR ma non abbiamo considerato il fatto che per poter realizzare:

$$u(t) = -Kx(t)$$

richiede la misurazione di tutto lo stato  $x$ . Questo approccio non sempre è possibile, quindi per ovviare a questa difficoltà possiamo costruire uno stimatore dello stato  $\hat{x}$  basato unicamente sui valori dell'uscita misurata  $y$  e sul segnale di controllo  $u$ , quindi avremo:

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

Quindi, quello che bisogna fare è il feedback di stato attraverso il seguente osservatore:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

Il sistema sarà il seguente:

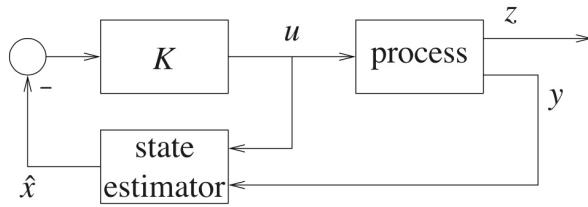


Figura 12: Schema controllore con feedback di uscita

Quello che verrà fuori sarà un controllore dinamico,  $\hat{K}(s)$ , che conterrà al suo interno l'osservatore, ed è identificato dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC - BK + LDK)\hat{x} + L(y - \hat{y}) \\ u = -K\hat{x} \end{cases}$$

Come vediamo, l'uscita di questo sistema è la  $u$  mentre l'ingresso è la  $y$ . Grazie al principio di separazione possiamo progettare separatamente il  $K$ , come se lo stato fosse accessibile e la  $L$ , come se pensassi solo all'errore di osservazione. Inoltre, esso ci permette di controllare le stabilità dei due sistemi in maniera separata: se  $(A, B)$  è stabilizzabile allora esiste un  $K$  tale che  $(A-BK)$  sia stabile e se  $(A, C)$  è rilevabile allora esiste una  $L$  tale che  $(A - LC)$  si stabilisce.

In particolare, andiamo ad analizzare la progettazione di un osservatore che si basi sul seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \bar{B}d \\ y = Cx + n \end{cases} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, d \in \mathbb{R}^q, y \in \mathbb{R}^m, n \in \mathbb{R}^m$$

dove  $d$  rappresenta il disturbo e  $n$  il rumore. L'obietto del nostro stimatore è quello di stimare lo stato tenendo però sotto controllo  $d$  ed  $n$ , che quindi dovranno essere incogniti ma

bassi. Quindi, l'osservatore che andremo a costruire deve considerare la minimizzazione del seguente indice:

$$J_{mee} = \int_{-\infty}^{+\infty} n^T(\tau) Q n(\tau) + d^T(\tau) R d(\tau) \, d\tau$$

Ricordiamo che lo scopo è quello di tenere rumore e disturbi più bassi possibile in modo che il sistema da noi considerato si avvicini molto al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Un altro modo per indicare l'indice  $J_{mee}$  è il seguente:

$$J_{mee} = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - Cx)^T Q (y - Cx) + d^T R d \, d\tau$$

Se esiste una matrice simmetrica e definita positiva  $P$  che sia soluzione di:

$$(-A^T)P + P(-A) + C^T Q C - P \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T P = 0$$

tale che  $-A - P \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T P$  sia stabile, allora lo stimatore a minima energia(MEE) è il seguente:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad \text{con } L = P^{-1}C^T Q$$

Ma invece di risolvere l'equazione sopra indicata, simile alla ARE, si risolve la seguente:

$$SA^T + AS - SC^T Q CS + \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T = 0 \quad \text{con } L = SC^T Q$$

Supponendo che la coppia  $(A, \bar{B})$  sia controllabile e la coppia  $(A, C)$  sia rilevabile, allora si ha che:

- Esiste la soluzione  $S$  simmetrica e definita positiva, soluzione della ARE, tale che  $(A - LC)$  sia stabile
- Esiste una matrice simmetrica e definita positiva  $P = S^{-1}$  per cui  $-A - \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T P = -A - \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T S^{-1}$  è stabile

Ritornando al discorso iniziale,l'osservatore basato sul sistema :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \bar{B}d \\ y = Cx + n \end{cases} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, d \in \mathbb{R}^q, y \in \mathbb{R}^m, n \in \mathbb{R}^m$$

è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Ora consideriamo l'errore di osservazione:

$$e = x - \hat{x}, \quad \text{quindi } \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)e + \bar{B}d - Ln$$

come possiamo notare, rispetto all'errore di osservazione calcolato utilizzando il sistema di partenza

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^m$$

che è pari a :

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

compaiono due termini in più d ed n. Quanto più d ed n sono piccoli tanto meglio funziona l'osservatore.

Tutto quello analizzato fino ad ora è suscettibile di un'interpretazione stocastica, in particolare possiamo supporre che sia  $n$  che  $d$  siano rumori bianchi a media nulla e con matrici di covarianza pari a :

$$E \{d(t) d^T(t)\} = R^{-1} \delta(t - \tau) \rightarrow \text{matrice di covarianza di } d$$

$$E \{n(t) n^T(t)\} = Q^{-1} \delta(t - \tau) \rightarrow \text{matrice di covarianza di } n$$

$$E\{d\} = 0, E\{n\} = 0 \rightarrow \text{valore della media di } d \text{ ed } n, \text{ sono a media nulla}$$

Quello che succede è che lo stimatore calcolato prima minimizza l'indice  $J_{LQG}$ :

$$J_{LQG} = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2\}$$

Questo discorso ci serve a dire che possiamo considerare la Q e la R dell'indice  $J_{MEE}$  come degli inversi di varianze del disturbo e dell'errore di misura. L'approccio  $J_{LQG}$  è il filtro di Kalman. Se  $x(t) - \hat{x}(t)$  è il più possibile vicino allo zero, vuol dire che la  $\hat{x}(t)$  sta andando sulla  $x(t)$ .

Questa è una maniera per avere i dati più puliti, cioè non corrotti da rumore.

Il problema è che le garanzie di robustezza garantiteci dall'indice LQR, non vengono ereditate dallo stimatore dello stato e quindi, quest'ultimo, non garantirà più tutte le caratteristiche che invece era in grado di garantire l'indice LQR indipendentemente dal tipo di impianto. Le garanzie di robustezza dateci dal LQR sono basate sulla funzione di trasferimento a ciclo aperto del sistema:

$$\hat{L}(s) = K_c(sI - A)^{-1}B$$

di conseguenza, costruendo un osservatore per stimare lo stato, tali garanzie vengono perse.

Per realizzare un sistema con feedback di uscita robusto, la funzione di trasferimento a ciclo aperto del nuovo sistema deve essere il più simile possibile a quella con feedback di stato.

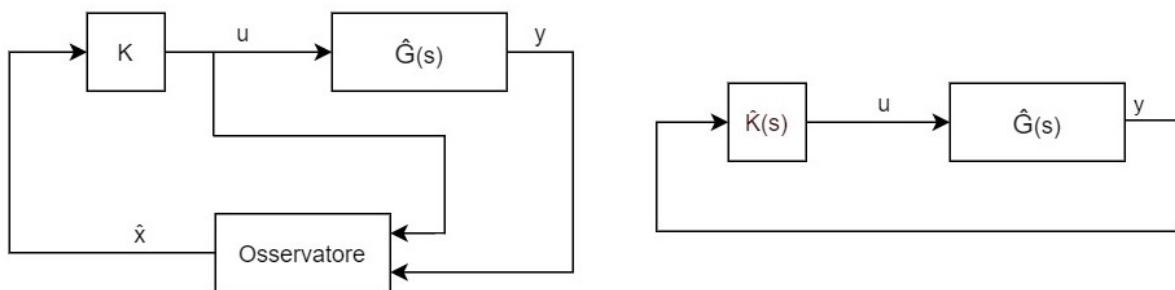


Figura 13: Schema controllore con feedback di uscita

La funzione di trasferimento del controllore dinamico è la seguente:

$$\hat{K}(s) = -K_c[sI - (A - K_f C - B K_c + K_f D K_c)]^{-1} K_f$$

Inoltre, la funzione di trasferimento dell'impianto è:

$$\hat{G}(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

A tal fine, è stata applicata la tecnica del *Loop Transfer Recovery* che, considerato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \bar{B}d \\ y = Cx + n \end{cases}$$

con  $d$  e  $n$  rumori bianchi, a media nulla e varianza pari rispettivamente a  $R^{-1}$  e  $Q^{-1}$ , permette di settare

$$\bar{B} = B \quad R = I \quad Q = \sigma I \quad \text{con } \sigma \rightarrow \infty$$

in modo da ottenere:

$$\hat{K}(s)\hat{G}(s) \rightarrow \hat{L}(s)$$

Per poter applicare l'LTR, il sistema  $\hat{G}(s)$  deve essere, quadrato e non deve avere zeri di trasmissione a parte reale positiva.

### 3.2 Simulazioni

Di seguito verranno mostrati i grafici delle grandezze d'interesse al variare di  $\sigma$ .

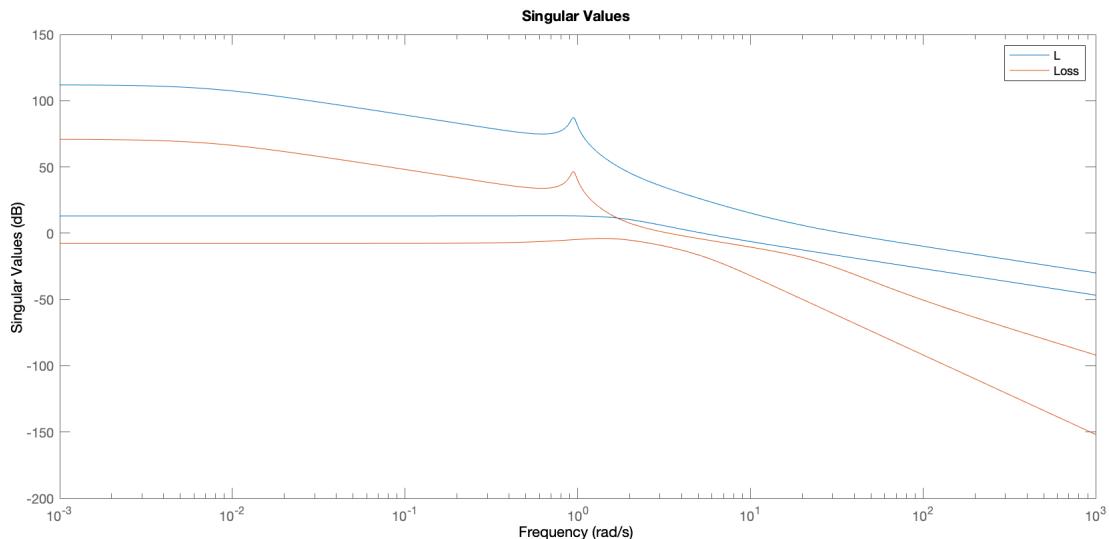


Figura 14: Diagramma di Bode dei moduli con  $\sigma = 1$

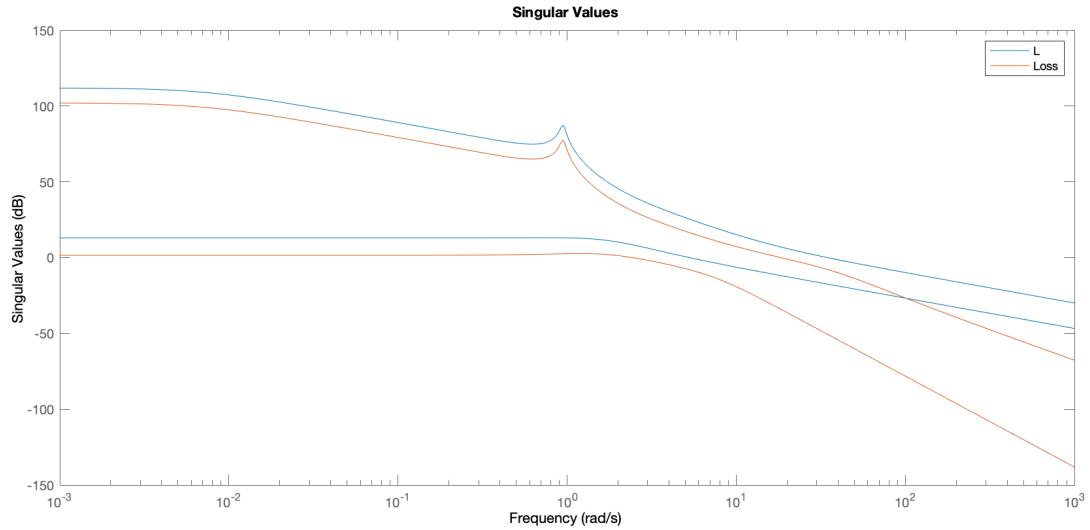


Figura 15: Diagramma di Bode dei moduli con  $\sigma = 10000$

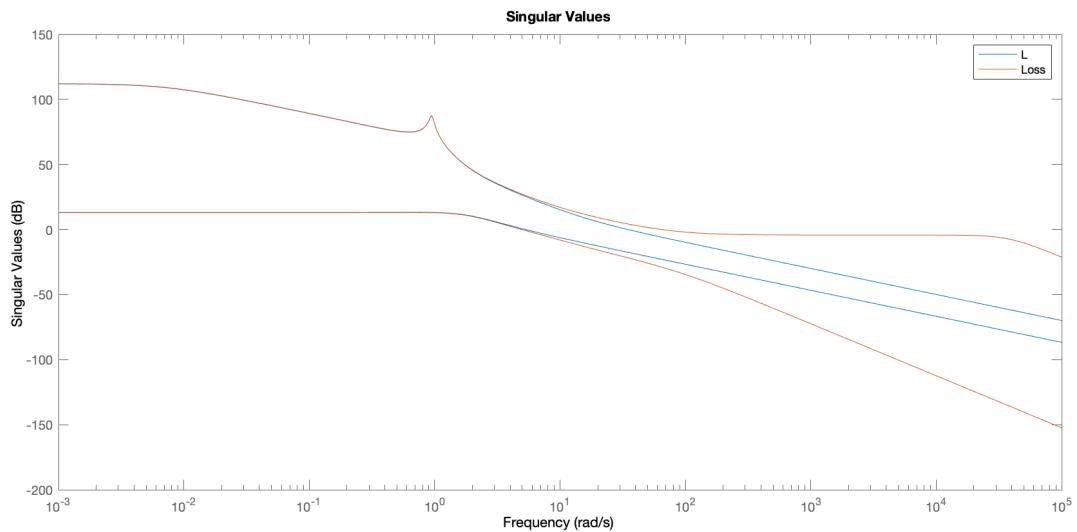


Figura 16: Diagramma di Bode dei moduli con  $\sigma = 10^{20}$

Di seguito mostriamo come le uscite  $y_1$  e  $y_2$  dell'osservatore inseguono le uscite del sistema al variare del valore di  $\sigma$

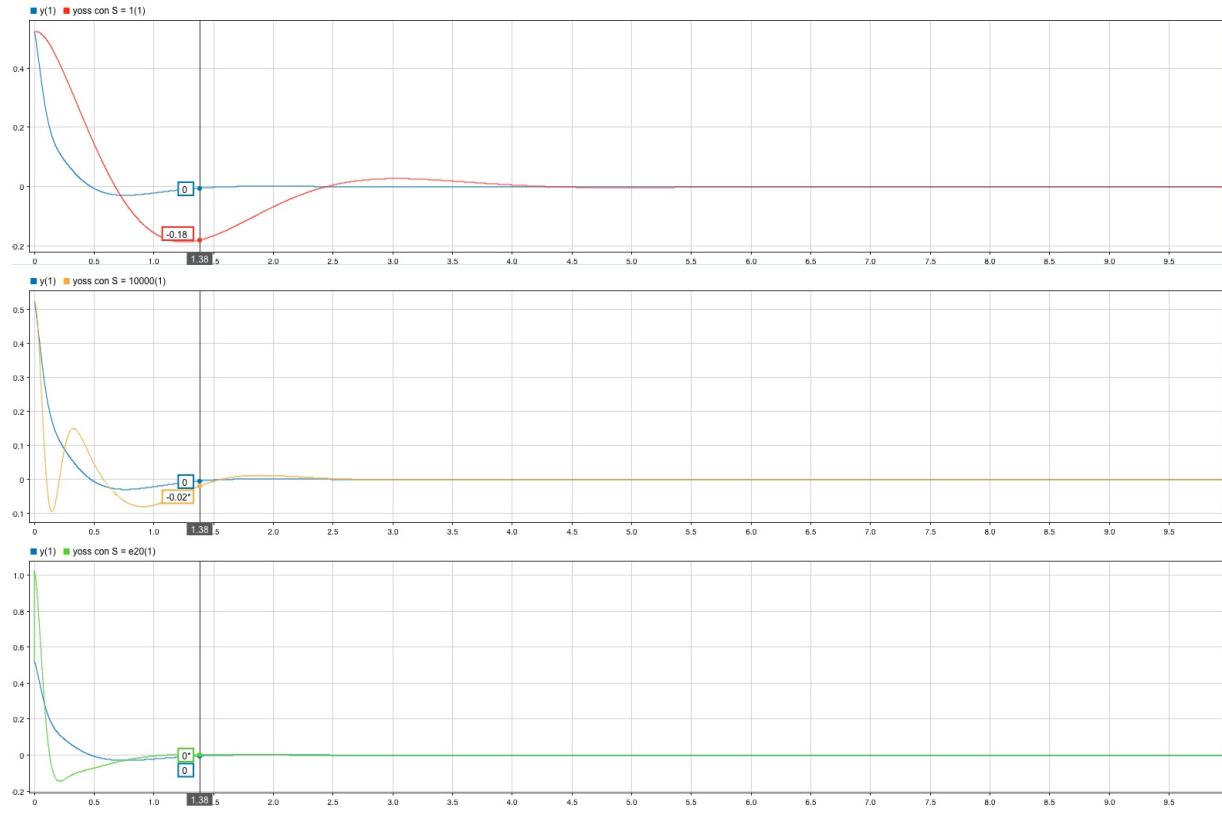


Figura 17: Confronto uscita  $y_1$  (sideslip angle) feedback di stato con output feedback al variare di  $\sigma$

$y_1$  feedback di stato,  $y_1$  output feedback con  $\sigma = 1$  ,  $y_1$  output feedback con  $\sigma = 10^4$  ,  
 $y_1$  output feedback con  $\sigma = 10^{20}$

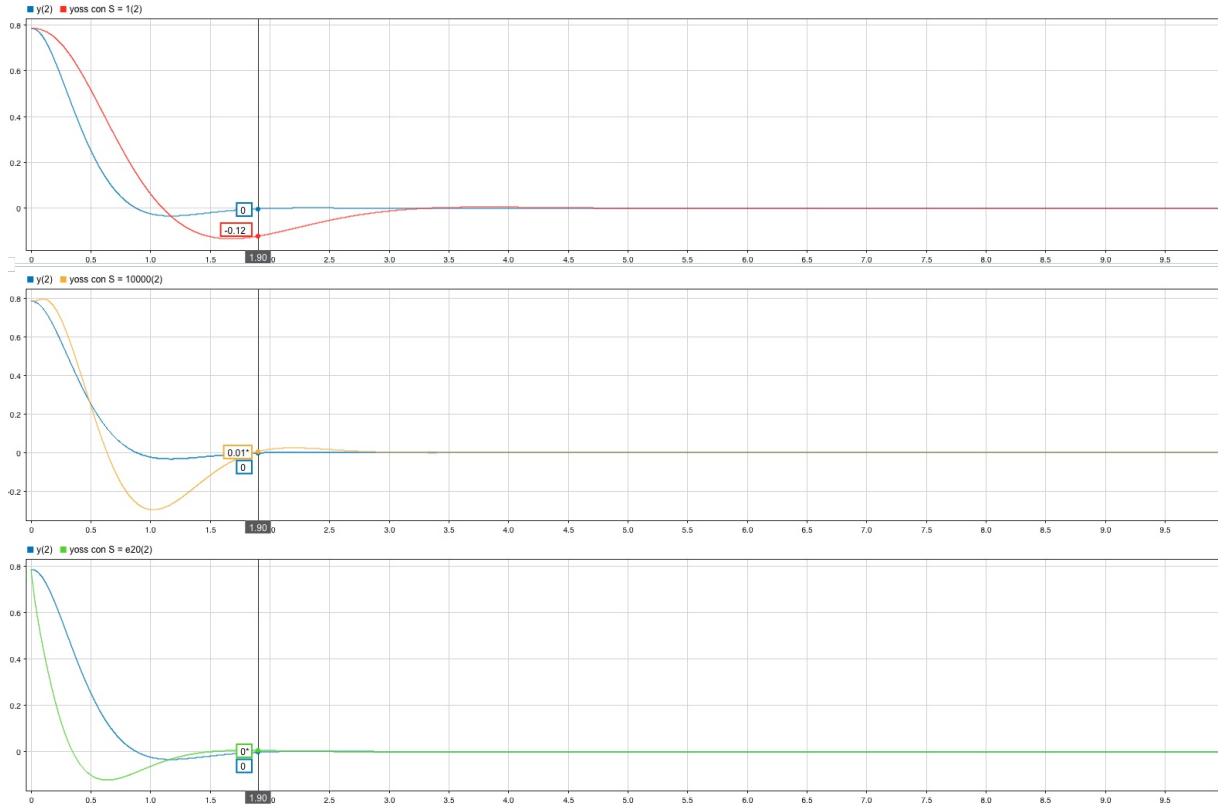


Figura 18: Confronto uscita  $y_2$  (roll angle) feedback di stato con output feedback al variare di  $\sigma$   
 $y_2$  feedback di stato,  $y_2$  output feedback con  $\sigma = 1$  ,  $y_2$  output feedback con  $\sigma = 10^4$  ,  
 $y_2$  output feedback con  $\sigma = 10^{20}$

### 3.3 Conclusioni

Come possiamo notare dalle simulazioni effettuate, si verifica un importante cambiamento nel comportamento delle uscite  $y_1$  e  $y_2$  del sistema costruito con l'osservatore al variare del parametro  $\sigma$ . Inizialmente abbiamo lavorato con un valore di sigma molto basso, il quale ci ha portati ad avere risultati per niente soddisfacenti, perché con tale valore di  $\sigma$  le uscite dell'output feedback non riescono a seguire le uscite del feedback di stato e quindi non riescono a recuperare le garanzie sui margini dell'LQR. Abbiamo quindi svolto ulteriori simulazioni aumentando il valore di  $\sigma$  fino a  $10^{20}$ , oltre il quale il sistema diventa instabile.

Con tale valore vediamo come le uscite del sistema progettato con l'osservatore seguano accettabilmente quelle che avevamo con il sistema progettato con l'LQR. Un ulteriore riscontro di tale miglioramento possiamo osservarlo anche graficando il diagramma di Bode dei moduli dei sistemi ottenuti con il feedback di stato e quelli con l'output feedback, da cui si evince un recupero dei margini in basse frequenze.

Si fa presente che è sconsigliabile dare a  $\sigma$  un valore più alto del necessario in quanto questa procedura forza la pendenza del diagramma di Bode dei valori singolari della matrice guadagno di anello ad essere solo 20dB/decade, anche alle alte frequenze. Questo comporta una riduzione dell'attenuazione del rumore di misura a frequenze elevate, riducendo dunque anche la robustezza del sistema rispetto ad incertezze ad alte frequenze.

## 4 Set Point con Feedback di Stato

### 4.1 Progettazione del controllore

Per la realizzazione di questo sistema, bisogna considerare un punto di equilibrio che si ottiene ponendo la derivata dello stato a zero.

Il sistema da considerare è il seguente:

$$\begin{cases} 0 = Ax_{eq} + Bu_{eq} \\ r = Gx_{eq} + Hu_{eq} \end{cases} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, r \in \mathbb{R}^l$$

La matrice che rappresenta il sistema

$$\begin{bmatrix} A & B \\ G & H \end{bmatrix}$$

ha dimensioni  $(n+l) \times (n+k)$ .

Possiamo avere tre casi:

1. **k<1** : numero di ingressi inferiore al numero di uscite di interesse, di conseguenza la matrice non è invertibile e generalmente non ci sono soluzioni, si possono verificare anche casi in cui un certo numero di uscite siano dipendenti tra di loro e quindi la dimensione effettiva del problema diventa  $(n+k)$  e non più  $(n+l)$ ;
2. **k=l** : numero di ingressi uguale al numero di uscite quindi la matrice è quadrata e quindi, se il sistema è risolubile, ho una sola soluzione;
3. **k>l** : il numero degli ingressi è maggiore delle uscite di interesse, che implica la presenza di infinite soluzioni, tra le quali possiamo scegliere quella a norma minima.

Se la matrice  $\begin{bmatrix} A & B \\ G & H \end{bmatrix}$  è invertibile, si ottiene la seguente equazione:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{eq} \\ u_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

con la quale possiamo calcolare:

$$x_{eq} = Fr \quad u_{eq} = Nr$$

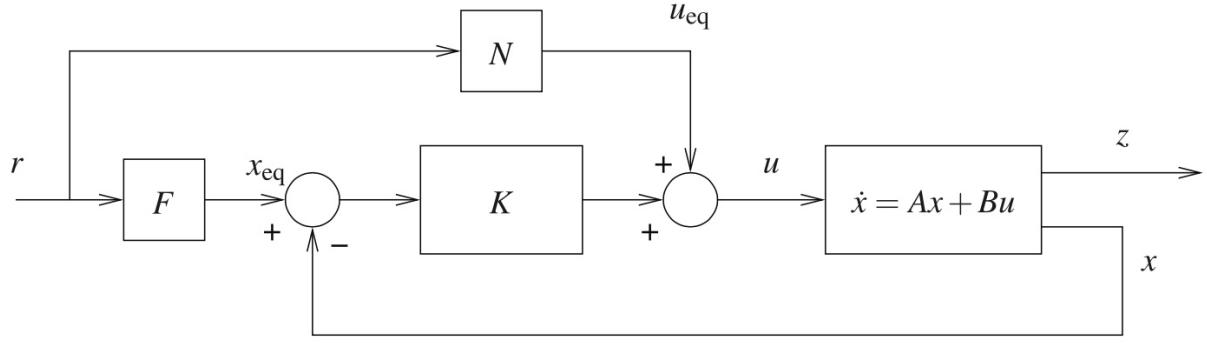
A questo punto consideriamo gli scarti  $\tilde{x} = x - x_{eq}$ ,  $\tilde{u} = u - u_{eq}$  e  $\tilde{z} = z - r$ . Per la reazione di stato si ha:

$$\tilde{u} = -K_c \tilde{x} \Rightarrow u - u_{eq} = -K_c(x - x_{eq}) \Rightarrow u = -K_c(x - x_{eq}) + u_{eq}$$

Per avere un controllore con feedback di stato con set point, il sistema sarà:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -K_c(x - x_{eq}) + u_{eq} \end{cases}$$

Lo schema di controllo sarà il seguente:



## 4.2 Simulazioni

Nella prima simulazione abbiamo deciso di imporre solo all'uscita due, che nel nostro caso corrisponde al roll angle, un riferimento pari a  $\frac{\pi}{4}$ , partendo da condizioni iniziali nulle. Inoltre, abbiamo graficato l'andamento dei controlli nella situazione sopra descritta.

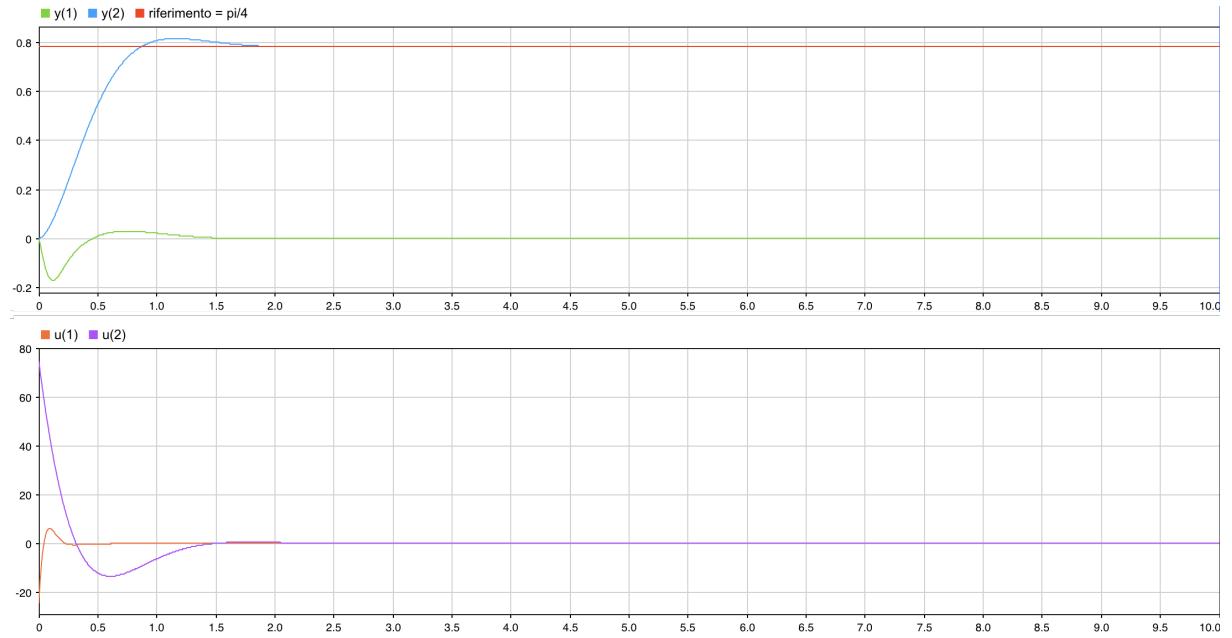


Figura 19: Andamento uscite e controlli con riferimento  $\frac{\pi}{4}$

Nella seconda simulazione abbiamo imposto, all'uscita che caratterizza il roll angle, un riferimento a gradino che per i primi 5 secondi valesse zero e successivamente  $\frac{\pi}{4}$ , partendo da condizioni iniziali non nulle.

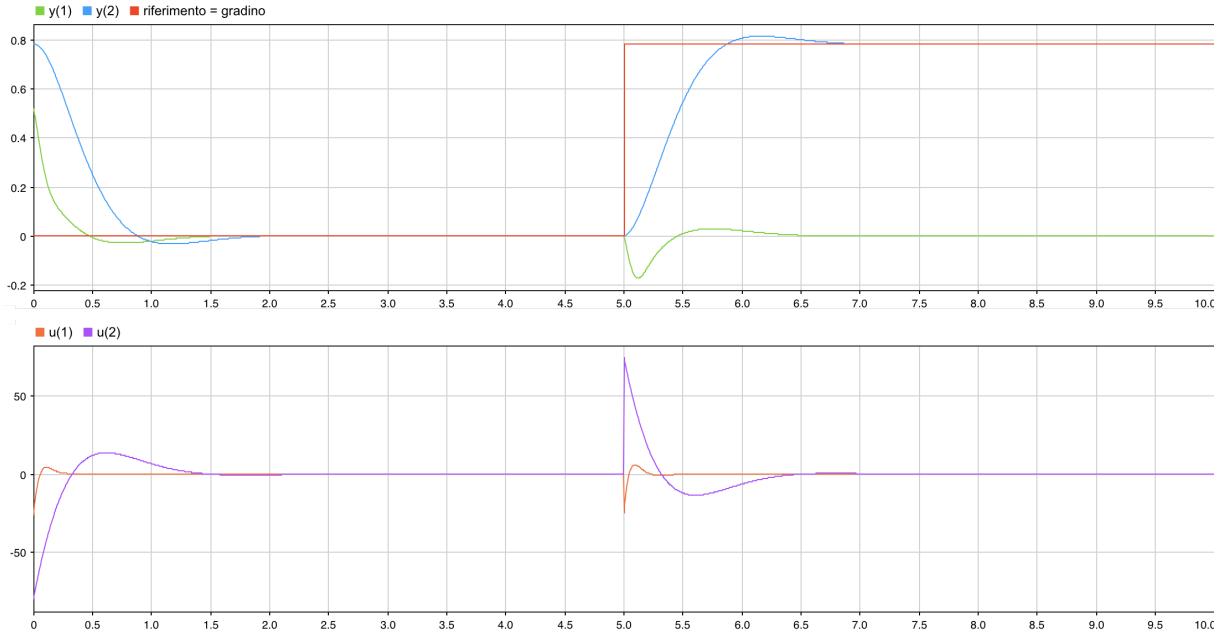


Figura 20: Andamento uscite e controlli con riferimento a gradino

Nella terza simulazione abbiamo deciso di imporre solo all'uscita uno, che nel nostro caso corrisponde al sideslip angle, un riferimento pari a  $\frac{\pi}{6}$ , partendo da condizioni iniziali nulle. Inoltre, abbiamo graficato l'andamento dei controlli nella situazione sopra descritta.

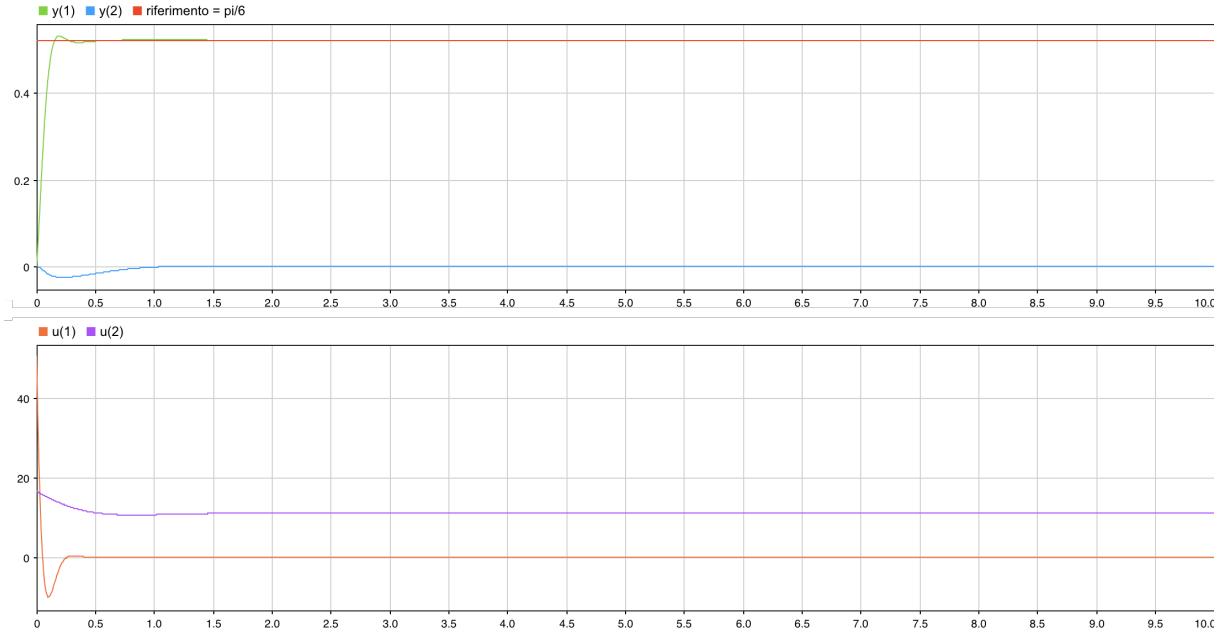


Figura 21: Andamento uscite e controlli  $\frac{\pi}{6}$

Nella quarta simulazione abbiamo imposto, all'uscita che caratterizza il sideslip angle, un riferimento a gradino che per i primi 5 secondi valesse zero e successivamente  $\frac{\pi}{6}$ , partendo da condizioni iniziali non nulle.

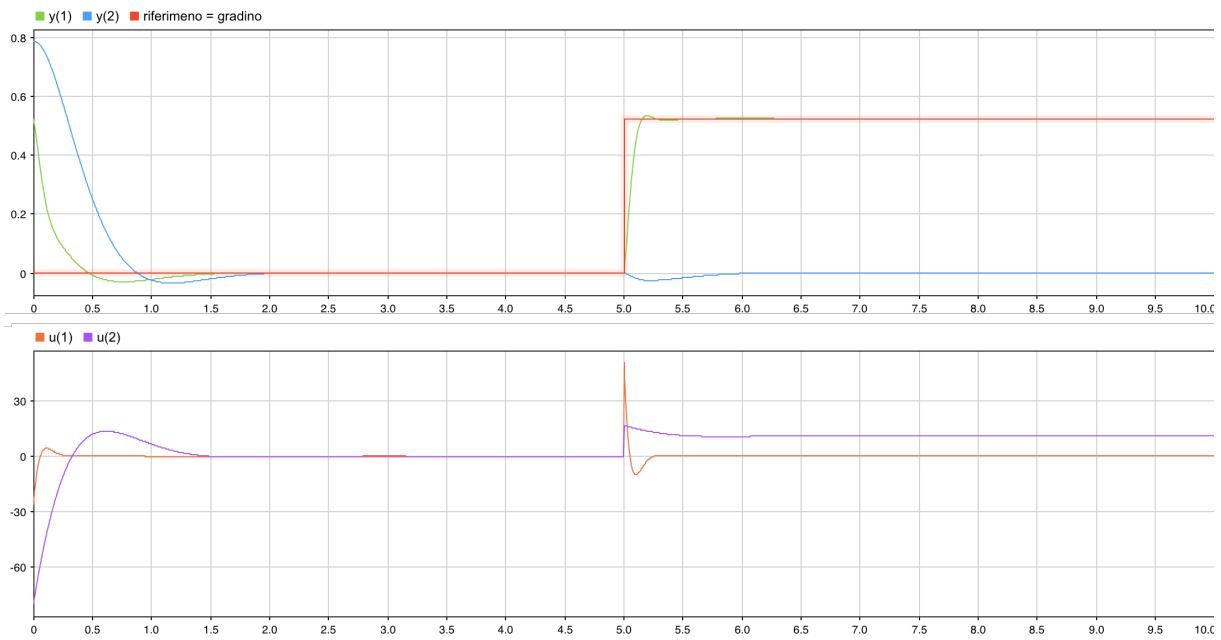


Figura 22: Andamento uscite e controlli con riferimento a gradino

## 5 Set Point con Feedback di Uscita

### 5.1 Progettazione del controllore

Per la reazione di uscita, l'osservatore è

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_f C) \hat{x} + Bu + K_f y$$

in cui si va a sostituire la  $u$ , ottenendo:

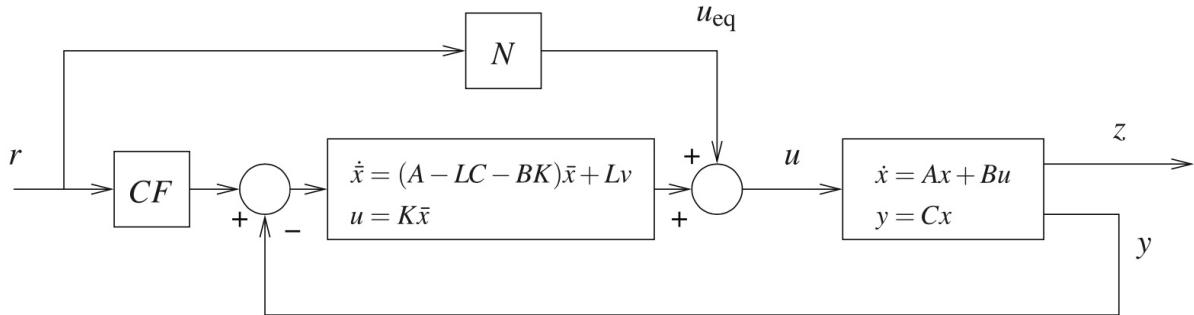
$$\dot{\hat{x}} = (A - K_f C - BK_c) \hat{x} + BK_c x_{eq} + Bu_{eq} + K_f y$$

Infine, definendo l'errore di osservazione  $\bar{x} = x_{eq} - \hat{x}$  e calcolandone la dinamica aggiungendo e sottraendo  $Ax_{eq} + K_f x_{eq}$ , si ottiene il sistema con osservatore:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = (A - K_f C - BK_c) \bar{x} - K_f (y - Cx_{eq}) \\ \bar{u} = K_c \bar{x} \end{cases}$$

che rappresenta un sistema il cui ingresso corrisponde a  $v = y - Cx_{eq}$  e l'uscita ad  $\bar{u}$ .

Lo schema di controllo del sistema sarà il seguente:



### 5.2 Simulazioni

I risultati ottenuti dalle simulazioni precedenti sono stati confrontati con quelli ottenuti utilizzando il sistema con feedback di uscita. Riportiamo, per semplicità, esclusivamente i comportamenti delle uscite.

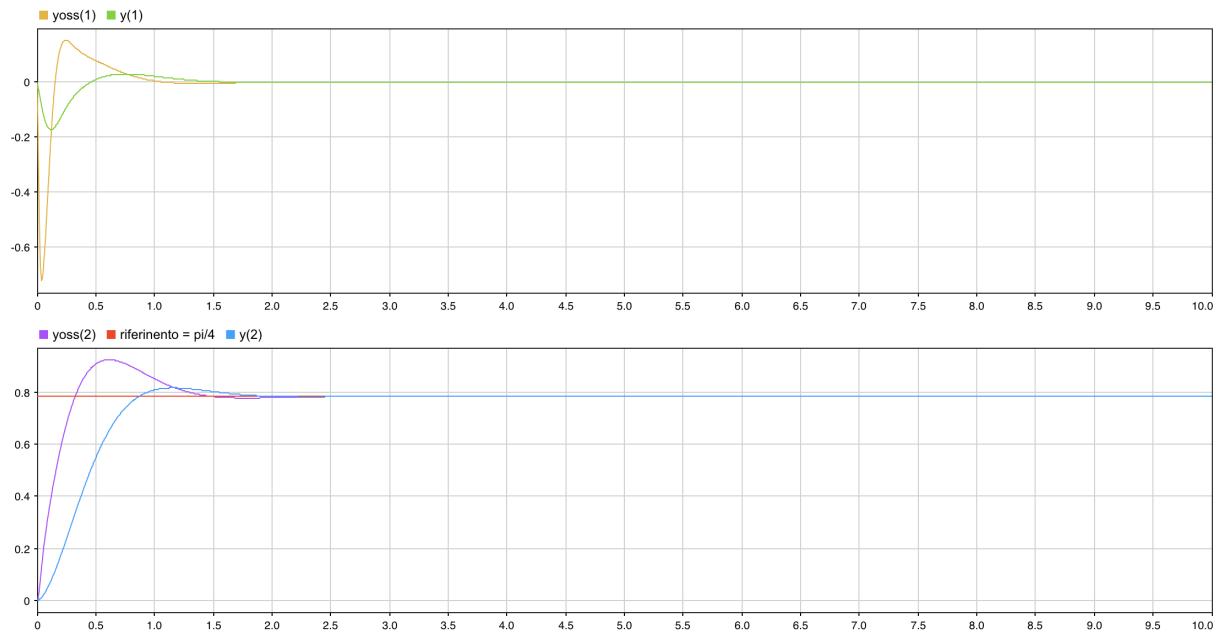


Figura 23: Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento pari a  $\frac{\pi}{4}$

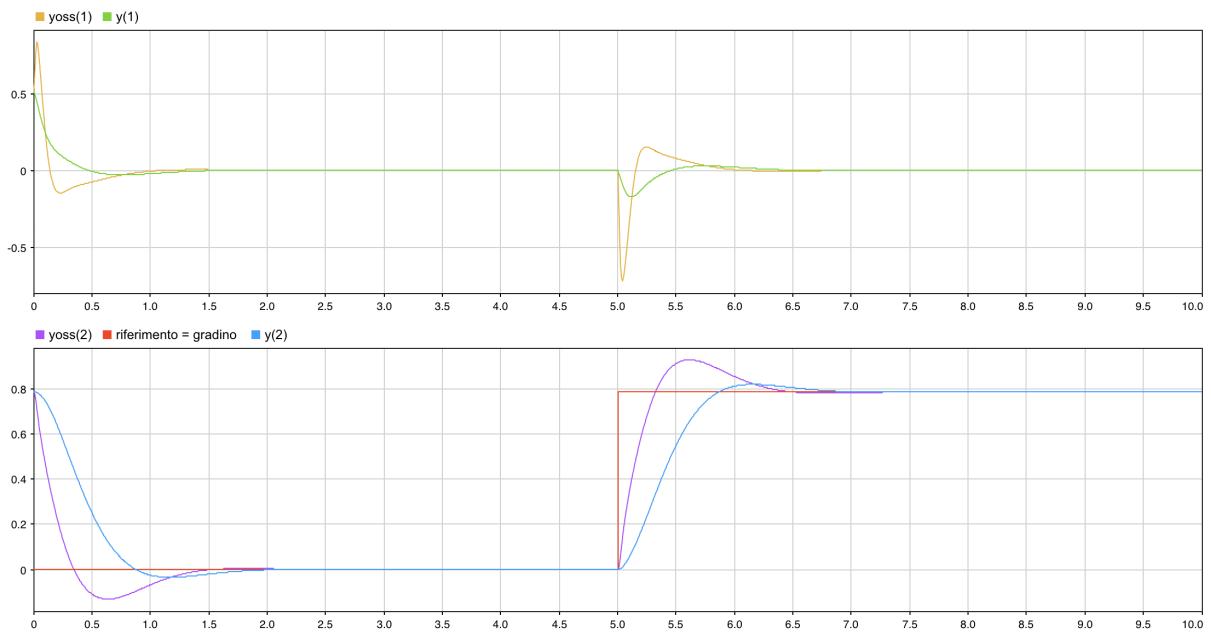


Figura 24: Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento a gradino

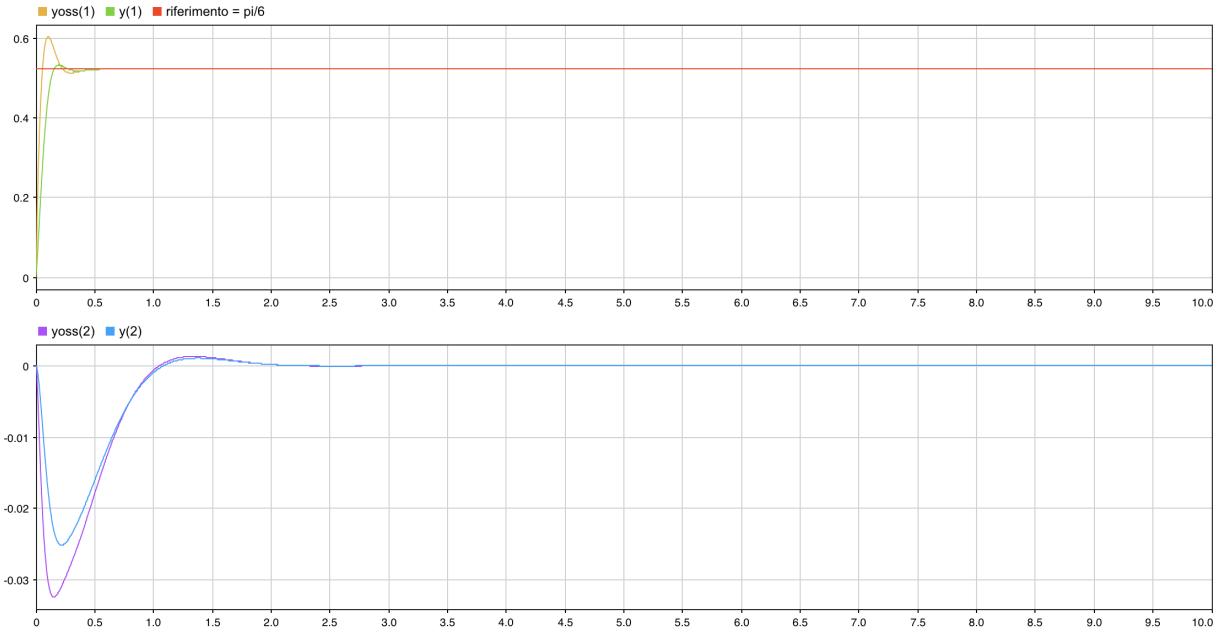


Figura 25: Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento pari a  $\frac{\pi}{6}$

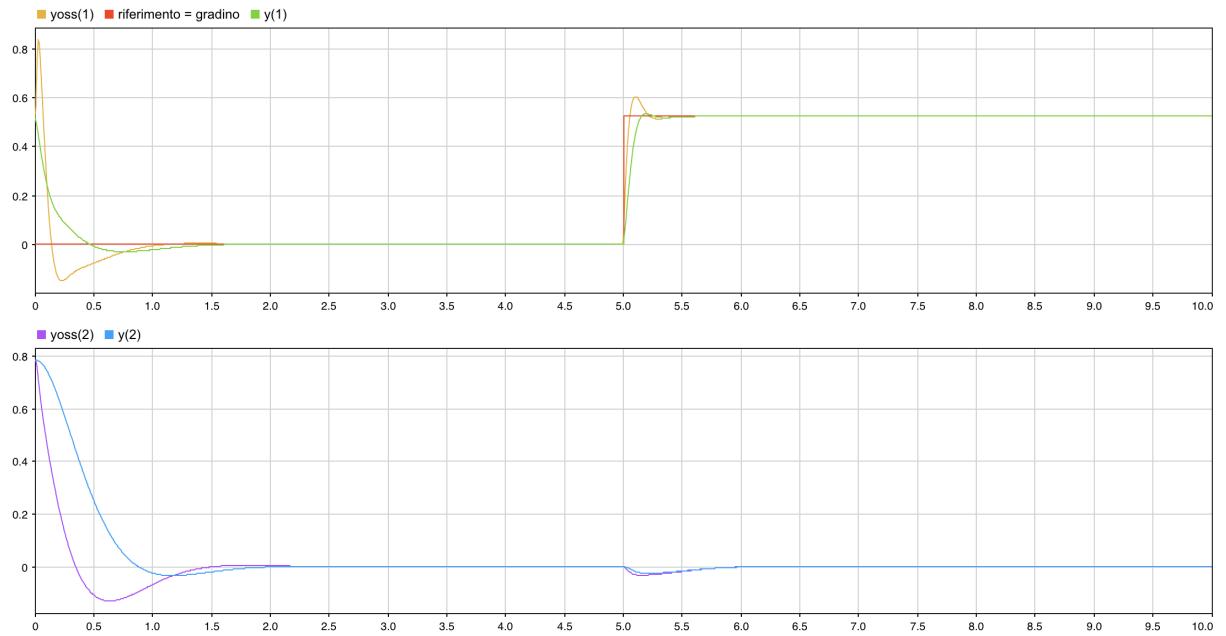


Figura 26: Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento a gradino

## Elenco delle figure

1	Schema controllore con feedback di stato . . . . .	7
2	Andamento dell'uscita $y_1$ (sideslip angle) al crescere del valore di Q in 10 sec $y_1 \text{ con } \bar{Q} = I, y_1 \text{ con } \bar{Q} = 100 * I, y_1 \text{ con } \bar{Q} = 10000 * I$ . . . . .	9
3	Andamento dell'uscita $y_2$ (roll angle) al crescere del valore di Q in 10 sec $y_2 \text{ con } \bar{Q} = I, y_2 \text{ con } \bar{Q} = 100 * I, y_2 \text{ con } \bar{Q} = 10000 * I$ . . . . .	9
4	Andamento del controllo $u_1$ (aileron deflection) al crescere del valore di Q in 10 sec $u \text{ con } \bar{Q} = I, u \text{ con } \bar{Q} = 100 * I, u \text{ con } \bar{Q} = 10000 * I$ . . . . .	10
5	Andamento del controllo $u_2$ (rudder deflection) al crescere del valore di Q in 10 sec $u \text{ con } \bar{Q} = I, u \text{ con } \bar{Q} = 100 * I, u \text{ con } \bar{Q} = 10000 * I$ . . . . .	10
6	Andamento dell'uscita $y_1$ (sideslip angle) al crescere del valore di R in 10 sec $y_1 \text{ con } \bar{R} = I, y_1 \text{ con } \bar{R} = 100 * I, y_1 \text{ con } \bar{R} = 10000 * I$ . . . . .	11
7	Andamento dell'uscita $y_2$ (roll angle) al crescere del valore di R in 10 sec $y_2 \text{ con } \bar{R} = I, y_2 \text{ con } \bar{R} = 100 * I, y_2 \text{ con } \bar{R} = 10000 * I$ . . . . .	11
8	Andamento del controllo $u_1$ (aileron deflection) al crescere del valore di R in 10 sec $u \text{ con } \bar{R} = I, u \text{ con } \bar{R} = 100 * I, u \text{ con } \bar{R} = 10000 * I$ . . . . .	12
9	Andamento del controllo $u_2$ (aileron deflection) al crescere del valore di R in 10 sec $u \text{ con } \bar{R} = I, u \text{ con } \bar{R} = 100 * I, u \text{ con } \bar{R} = 10000 * I$ . . . . .	12
10	Andamento delle uscite: sideslip angle, roll angle . . . . .	13
11	Andamento dei controlli: aileron deflection, rudder deflection . . . . .	13
12	Schema controllore con feedback di uscita . . . . .	15
13	Schema controllore con feedback di uscita . . . . .	17
14	Diagramma di Bode dei moduli con $\sigma = 1$ . . . . .	18
15	Diagramma di Bode dei moduli con $\sigma = 10000$ . . . . .	19
16	Diagramma di Bode dei moduli con $\sigma = 10^{20}$ . . . . .	19
17	Confronto uscita $y_1$ (sideslip angle) feedback di stato con output feedback al variare di $\sigma$ $y_1$ feedback di stato, $y_1$ output feedback con $\sigma = 1$ , $y_1$ output feedback con $\sigma = 10^4$ , $y_1$ output feedback con $\sigma = 10^{20}$ . . . . .	20
18	Confronto uscita $y_2$ (roll angle) feedback di stato con output feedback al variare di $\sigma$ $y_2$ feedback di stato, $y_2$ output feedback con $\sigma = 1$ , $y_2$ output feedback con $\sigma = 10^4$ , $y_2$ output feedback con $\sigma = 10^{20}$ . . . . .	21
19	Andamento uscite e controlli con riferimento $\frac{\pi}{4}$ . . . . .	23
20	Andamento uscite e controlli con riferimento a gradino . . . . .	24
21	Andamento uscite e controlli $\frac{\pi}{6}$ . . . . .	24
22	Andamento uscite e controlli con riferimento a gradino . . . . .	25
23	Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento pari a $\frac{\pi}{4}$ . . . . .	27
24	Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento a gradino . . . . .	27
25	Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento pari a $\frac{\pi}{6}$ . . . . .	28
26	Confronto uscite feedback di stato e output feedback con riferimento a gradino . . . . .	28