

# Résolution numérique de l'équation de la chaleur

Leonardo Martins Bianco - Guillaume Lambert

9 novembre 2020

# Table des matières

<b>1 Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet</b>	<b>4</b>
1.1 Mise en place du problème . . . . .	4
1.2 Formulation variationnelle du problème . . . . .	4
1.3 Discrétisation du problème . . . . .	6
1.4 Formulation variationnelle discrète du problème et mise sous la forme d'un système linéaire . . . . .	6
1.5 Programmation du système linéaire . . . . .	8
1.5.1 Calcul des matrices élémentaires . . . . .	9
1.5.2 Assemblage des matrices de masse et de rigidité . . . . .	11
1.5.3 Calcul du second membre . . . . .	12
1.5.4 Résolution du système linéaire . . . . .	12
1.6 Validation de code et de la méthode . . . . .	13
1.7 Résolution numérique de problèmes concrets . . . . .	15
1.7.1 Premier cas . . . . .	16
1.7.2 Second cas . . . . .	16
<b>2 Problème stationnaire avec conditions de Fourier</b>	<b>19</b>
2.1 Mise en place et formulation variationnelle du problème . . . . .	19
2.2 Discrétisation du problème et mise sous forme d'un système linéaire . . . . .	19
2.3 Approximation du second membre . . . . .	20
2.4 Implémentation du code . . . . .	21
2.5 Validation du code . . . . .	22
2.6 Résolution numérique de problèmes concrets . . . . .	22
<b>3 Problème instationnaire</b>	<b>25</b>
3.1 Conditions de Dirichlet aux limites . . . . .	25
3.1.1 Mise en place du problème et mise sous forme variationnelle . . . . .	25
3.1.2 Discrétisation du problème et mise sous la forme d'un système linéaire . . . . .	25
3.1.3 Résolution numérique d'un système concret . . . . .	27
3.2 Conditions aux limites mixtes . . . . .	29
3.2.1 Mise en place du problème . . . . .	29
3.2.2 Résolution numérique d'un problème concret . . . . .	30

## Introduction

L'objectif de ce compte rendu est d'étudier l'équation de la chaleur selon différentes conditions aux limites et selon le temps. On commence notre étude dans un système stationnaire en temps où nous étudions les conditions aux limites de Dirichlet et de Fourier, puis nous ajoutons la notion du temps dans les problèmes.

Afin d'appliquer nos résultats, on se ramène à une situation concrète du quotidien : l'évolution de la chaleur dans une pièce. Le domaine est un polygone de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\Omega$ . Dans cette pièce se trouve un élément, noté  $\Omega_2$ . La conductivité de la chaleur n'est donc pas constante et cela va rendre intéressante notre étude. Pour faciliter les calculs, on définit une situation simple : le domaine étudié  $\Omega$  est une pièce rectangulaire et l'élément  $\Omega_2$  est lui aussi rectangulaire (on peut supposer que c'est une table).

On va étudier 3 situations de l'évolution de la température dans cette pièce. Les deux premières parties sont consacrées à l'étude d'un problème stationnaire avec des conditions aux limites différentes : la première de Dirichlet et la seconde de Fourier. Dans la troisième partie, on étudiera deux problèmes instationnaires en reprenant les deux parties précédentes. Le premier avec des conditions aux limites de Dirichlet correspondant à une pièce avec une température fixée. Le second avec des conditions aux limites mixtes : de Dirichlet sauf en un bord de la pièce où la condition est de Fourier, que l'on peut interpréter par la présence d'un climatiseur/chauffage.

## Comment tester le code

Pour tester le code, il faut modifier la valeur des variables `validation`, `pb_stationnaire`, `pb_temporel` (oui ou non). Dans chaque cas, on doit aussi indiquer la valeur de la variable `lambda` (0 ou 1), et enfin, choisir la valeur correcte dans les fichiers `f`, `S`, `sigma_1`, `sigma_2` (ils sont déjà écrits, il faut juste effacer les commentaires pour la valeur choisie).

# 1 Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

## 1.1 Mise en place du problème

On commence par poser le problème et définir les notations employées dans la suite.

- Le domaine  $\Omega$  est un polygone borné de  $\mathbb{R}^2$ .
- $\alpha$  est une constante strictement positive.
- La conductivité  $\sigma : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction régulière par morceaux et  $\exists \sigma_{max}, \sigma_{min} > 0$  tels que  $\sigma_{min} \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_{max}$  pour presque tout  $(x, y) \in \Omega$ .
- Les données du problème sont la source de chaleur  $S \in L^2(\Omega)$  et la température fixée au bord  $T_\Gamma$  constante.
- La température est notée  $T \equiv T(x, y)$  et c'est ce que l'on cherche à déterminer.

On peut maintenant définir le problème suivant :

Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S \text{ dans } \Omega \\ T = T_\Gamma \text{ dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

On souhaite faire une translation sur  $T$  pour obtenir un problème dont la condition au bord est nulle. Cela simplifie visuellement le problème et nous amène à une résolution plus simple : la solution sera dans  $H^1(\Omega)$  et nulle au bord, c'est-à-dire dans  $H_0^1(\Omega)$  (on utilisera ceci plus tard).

On translate donc  $T$  de sa constante au bord  $T_\Gamma$  : on pose  $u(x, y) = T(x, y) - T_\Gamma$  avec  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ . La fonction  $u$  est dans  $H^1(\Omega)$  car  $T$  l'est. De plus, sur  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S &\iff \alpha T_\Gamma + \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = S \\ &\iff \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = \underbrace{S - \alpha T_\Gamma}_f \end{aligned}$$

On réécrit donc le problème de la manière suivante :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

## 1.2 Formulation variationnelle du problème

On souhaite transformer ce problème sous sa forme variationnelle équivalente. Pour cela, on va utiliser la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \left( \operatorname{div}(\vec{U}) v + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \vec{U} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (*)$$

avec  $\vec{U} \in H^1(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$ .

On pose  $\vec{U} = \sigma \vec{\nabla} u$  et une fonction test quelconque  $v \in H^1(\Omega)$ . On multiplie l'équation sur  $\Omega$  du problème (2) par cette fonction test, puis on intègre sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\alpha \int_{\Omega} u v d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

D'après la formule de Green (\*), on obtient

$$\alpha \int_{\Omega} u v d\Omega - \underbrace{\int_{\partial\Omega} v (\sigma \vec{\nabla} u) \cdot \vec{n} d\Gamma}_{=0 \text{ si on considère } v \in H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \sigma \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

De plus, on a construit  $u \in H^1(\Omega)$  de sorte à avoir  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , donc  $u \in H_0^1(\Omega)$ . On obtient donc la formulation variationnelle suivante :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\alpha \int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3)$$

On pose

$$a(u, v) = \alpha \int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

On vérifie que cette formulation est bien posée, c'est-à-dire qu'il existe une solution unique, grâce au théorème de Lax-Milgram :

- $(H_0^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$  est un espace de Hilbert
- $a$  est une forme bilinéaire sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  qui est
  - continue car  $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \alpha \int_{\Omega} |uv| d\Omega + \int_{\Omega} \sigma |\nabla u \cdot \nabla v| d\Omega \\ &\leq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_{max} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \alpha C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \sigma_{max} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \text{ par inégalité de Poincaré sur } \Omega \text{ borné} \\ &\leq 2 \max(\alpha C, \sigma_{max}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \text{ avec } \max(\alpha C, \sigma_{max}) > 0 \end{aligned}$$

- coercive car  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \alpha \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sigma |\nabla v|^2 d\Omega \\ &\geq \sigma_{min} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ avec } \sigma_{min} > 0 \end{aligned}$$

—  $l$  est une forme linéaire sur  $H_0^1(\Omega)$  et est continue car  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \int_{\Omega} |fv| d\Omega \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \text{ par Cauchy-Schwarz avec } \|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ finie car } f \in L^2(\Omega) \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \text{ par l'inégalité de Poincaré} \end{aligned}$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique : il existe une unique solution au problème (3).

### 1.3 Discrétisation du problème

Afin de résoudre numériquement ce problème, nous allons introduire un nouvel espace pour palier le problème de la dimension infinie de  $H^1(\Omega)$ . C'est la méthode de Galerkin. Soit  $T_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$ . On va travailler sur un espace, noté  $V_h$ , approximant  $H^1(\Omega)$  par des éléments finis  $P^1$  associés à la triangulation  $T_h$ . Cette dernière est composée de  $L$  triangles :  $(T_l)_{l=1,L}$  et les sommets sont notés  $(M_I)_{I=1,N}$ . On introduit la base de  $V_h$  suivante :  $(\omega_I)_{I=1,N}$  définie par  $\omega_I(M_J) = \delta_{IJ}$  avec  $1 \leq I, J \leq N$ .

A partir de l'approximation  $V_h$  de  $H^1(\Omega)$ , on peut déduire une approximation  $V_h^0$  de  $H_0^1(\Omega)$ . On numérote les sommets  $M_I$  de sorte que ceux au bord soient placés en derniers : soit  $N_0$  tel que les sommets intérieurs soient numérotés de 1 à  $N_0$ . On a donc  $M_I \in \partial\Omega \quad \forall I = N_0, N$ . On obtient donc l'approximation suivante de  $H_0^1(\Omega)$  :  $V_h^0 = Vect(\omega_1, \dots, \omega_{N_0})$ .

En pratique, on ne choisit pas la numérotation des sommets et on repère les sommets du bord dans un tableau appelé *Refneu*. Dans la suite, nous allons construire un système linéaire avec la numérotation précédente des sommets. Ensuite, nous nous ramènerons à une situation avec utilisation du tableau *Refneu* dans le cadre de la méthode dite de *pseudo-élimination*.

### 1.4 Formulation variationnelle discrète du problème et mise sous la forme d'un système linéaire

A partir de la discrétisation de  $H^1(\Omega)$ , on peut formuler (3) de manière discrète :

Trouver  $u_h \in V_h^0$  tel que

$$\alpha \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} fv_h d\Omega \quad \forall v_h \in H_0^1(\Omega) \quad (4)$$

L'expression de la chaleur discrète est

$$T_h = T_{\Gamma} + u_h$$

La discrétisation de la formulation variationnelle peut se ramener à un système linéaire, que nous allons résoudre.

D'après un lemme du cours,  $u_h \in V_h^0$  est solution de (4) ssi  $\forall I \in \{1, \dots, N_0\}$ ,  $a(u_h, \omega_I) = l(\omega_I)$ . On décompose  $u_h \in V_h^0$  dans la base  $(\omega_I)_{I=1, N_0}$  :

$$u_h(x, y) = \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) \omega_I(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$$

Cela revient à

$$\begin{aligned} u_h \text{ est solution} &\iff \forall I \in \{1, \dots, N_0\}, a(u_h, \omega_I) = l(\omega_I) \\ &\iff \forall I \in \{1, \dots, N_0\}, a\left(\sum_{J=1}^{N_0} u_h(M_J) \omega_J, \omega_I\right) = l(\omega_I) \\ &\iff \forall I \in \{1, \dots, N_0\}, \sum_{J=1}^{N_0} u_h(M_J) a(\omega_J, \omega_I) = l(\omega_I) \end{aligned}$$

On peut réécrire cette somme sous forme d'un système linéaire. On obtient

- Trouver  $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$  tel que  $A^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0$  avec
- $A^0 = (a(\omega_I, \omega_J))_{1 \leq I, J \leq N_0}$
- $\vec{L}^0 = (l(\omega_I))_{1 \leq I \leq N_0}$

De plus, on pose  $M^0 = (\int_{\Omega} \omega_I \omega_J d\Omega)_{1 \leq I, J \leq N_0}$  et  $K^0 = (\int_{\Omega} \nabla \omega_I \cdot \nabla \omega_J d\Omega)_{1 \leq I, J \leq N_0}$ . On a donc  $A^0 = \alpha M^0 + K^0$

**Remarque :**

- $A^0$  est symétrique.
- $A^0$  est définie positive car  $\forall V = (V_I)_{1 \leq I \leq N_0} \in H_0^1(\Omega)$  non nul

$$\begin{aligned} V^T A^0 V &= \alpha V^T M^0 V + V^T K^0 V \\ &= \alpha \sum_{I, J=1}^{N_0} V_I M_{IJ}^0 V_J + \sum_{I, J=1}^{N_0} V_I K_{IJ}^0 V_J \\ &= \alpha m\left(\sum_{I=1}^{N_0} V_I, \sum_{J=1}^{N_0} V_J\right) + k\left(\sum_{I=1}^{N_0} V_I, \sum_{J=1}^{N_0} V_J\right) \\ &= \alpha m(V, V) + k(V, V) \\ &= \underbrace{\alpha \int_{\Omega} V^2 d\Omega}_{>0 \text{ car } V \text{ est supposé non nul}} + \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \nabla V \cdot \nabla V d\Omega}_{>C\sigma \int_{\Omega} V^2 d\Omega > 0 \text{ grâce à l'inégalité de Poincaré sur } \Omega \text{ borné}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

avec  $m(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega$  et  $k(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$

Dans la pratique, on préfère travailler avec un tableau *Refneu* qui caractérisent les sommets du bord, puis on emploie la méthode de *pseudo-élimination*. On se ramène à cette situation en travaillant non plus dans  $V_h^0$ , mais dans  $V_h$ .

Reprendons la décomposition de  $u_h$  dans la base  $(\omega_I)_{I=1,N_0}$ .  $u_h$  étant nulle au bord, on peut représenter  $u_h$  dans la base  $(\omega_I)_{I=1,N}$  de  $V_h$  en sommant jusqu'à N :

$$u_h(x, y) = \sum_{I=1}^N u_h(M_I) \omega_I(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$$

On a donc  $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\vec{U}_I = \vec{U}_I^0$  si  $I \in \{1, \dots, N_0\}$  et  $\vec{U}_I = 0$  si  $I \in \{N_0 + 1, \dots, N\}$ .

On construit  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $\tilde{L} \in \mathbb{R}^N$  de la même manière que  $A^0$  et  $L^0$ . On applique la méthode de *pseudo-élimination* :

$\forall I \in \{1, \dots, N\}$ , si  $M_I \in \partial\Omega \iff I \in \{N_0 + 1, \dots, N\}$ , alors

- $\tilde{L}_I = 0$
- $\tilde{A}_{IJ} = \tilde{A}_{JI} = 0 \quad \forall J \in \{1, \dots, N\}$
- $\tilde{A}_{II} = 1$

Autrement dit, le coefficient  $I$  de  $\tilde{L}$  devient nul, la colonne et la ligne  $I$  de  $\tilde{A}$  deviennent nulles, sauf le coefficient diagonal égal à 1. Ainsi, on a bien  $\vec{U}_I = 0$ .

Les sommets au bord étant numérotés de  $N_0 + 1$  à N, on peut donc construire  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $\tilde{L} \in \mathbb{R}^N$  de la manière suivante :

- $\tilde{A}_{I,J} = A_{I,J}^0$  pour  $1 \leq I, J \leq N_0$   
puis, pour  $I \in \{N_0 + 1, \dots, N\}$ ,  $\tilde{A}_{IJ} = \tilde{A}_{JI} = 0 \quad \forall J \in \{1, \dots, N\}$  et  $\tilde{A}_{II} = 1$
- $\tilde{L}_I = \vec{L}_I^0 \quad \forall I \in \{1, \dots, N_0\}$   
puis  $\tilde{L}_I = 0 \quad \forall I \in \{N_0 + 1, \dots, N\}$

On obtient le système linéaire  $\tilde{A}\vec{U} = \tilde{L}$ . De plus, comme précédemment, on pose la matrice de masse  $\tilde{M} = (\int_{\Omega} \omega_I \omega_J d\Omega)_{1 \leq I, J \leq N}$  et la matrice de rigidité  $\tilde{K} = (\int_{\Omega} \nabla \omega_I \cdot \nabla \omega_J d\Omega)_{1 \leq I, J \leq N}$ . On a donc  $\tilde{A} = \alpha \tilde{M} + \tilde{K}$ . On va maintenant chercher à résoudre ce système linéaire.

## 1.5 Programmation du système linéaire

Tout d'abord, il nous faut construire les matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{L}$  du système, avant l'utilisation de la *pseudo-élimination*.

- Construire  $\tilde{A}$ , revient à construire la matrice de masse  $\tilde{M}$  et la matrice de rigidité  $\tilde{K}$ . On assemble ces matrices en sommant les contributions de chaque matrices élémentaires :

$M^{elem}$  matrice de masse élémentaire et  $K^{elem}$  matrice de rigidité élémentaire.

- On va approcher le second membre  $\vec{L}$  en interpolant la fonction  $f$ .

### 1.5.1 Calcul des matrices élémentaires

Dans cette partie, nous allons calculer les matrices élémentaires de masse et de rigidité associées à chaque triangle quelconque. Pour ce faire, nous allons nous ramener, par le biais d'un changement de variables, à une situation plus simple : le calcul sur le triangle de référence.

Soit  $T_l \in T_h$  un triangle quelconque, on souhaite trouver une transformation linéaire pour se ramener au triangle de référence  $\hat{T}$  composé des sommets  $\hat{M}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{M}_2 = (1, 0)$  et  $\hat{M}_3 = (0, 1)$ . On pose cette transformation  $\mathcal{F}_l : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  telle que

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}_l(\hat{M}) = \mathcal{B}_l \hat{M} + \mathcal{S}_l \text{ avec } \mathcal{B}_l \in M_2(\mathbb{R}), \mathcal{S}_l \in \mathbb{R}^2$$

On introduit des notations :

- $\mathcal{B}_l = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{S}_l = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  avec  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}_l(\hat{M}_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$  pour  $i = 1, 2, 3$

D'après la construction de  $\mathcal{F}_l$ , on a les 3 relations suivantes,  $\mathcal{F}_l(\hat{M}_i) = \hat{M}_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , qui vont nous permettre de déterminer  $a, b, c, d$ .

**Cas i = 1 :**

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ y_1 = b_2 \end{cases}$$

**Cas i = 2 :**

$$\begin{cases} x_2 = a + b_1 \\ y_2 = c + b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = x_2 - b_1 \\ c = y_2 - b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = x_2 - x_1 \\ c = y_2 - y_1 \end{cases}$$

**Cas i = 3 :**

$$\begin{cases} x_3 = b + b_1 \\ y_3 = d + b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = x_3 - b_1 \\ d = y_3 - b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = x_3 - x_1 \\ d = y_3 - y_1 \end{cases}$$

On a donc

- $\mathcal{B}_l = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{S}_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Utilisons maintenant cette transformation dans le cadre d'un changement de variables pour calculer les matrices élémentaires.

### Matrice de masse élémentaire

Les intégrales que l'on doit calculer sur le triangle  $T_l$  s'écrivent de la façon suivante sur le triangle élémentaire  $\hat{T}$  (en utilisant la formule de changement de variables) :

$$\int_{T_l} \omega_I(M)\omega_J(M)d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{\omega}_I(\hat{M})\hat{\omega}_J(\hat{M})|\det \mathcal{B}_l|d\hat{\Omega}$$

Le déterminant en question est une constante pour chaque triangle  $T_l$  fixée :

$$\det \mathcal{B}_l = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

où  $(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$  sont les coordonnées des sommets de  $T_l$ . Ainsi, le déterminant sort de l'intégrale. On a aussi que les fonctions de base du triangle de référence  $\hat{T}$  sont définies par :

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_1(x, y) &= 1 - x - y \\ \hat{\omega}_2(x, y) &= x \\ \hat{\omega}_3(x, y) &= y\end{aligned}$$

Calculons par exemple  $\int_{\hat{T}} \hat{\omega}_2^2$  :

$$\int_{\hat{T}} \hat{\omega}_2^2 = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{12}$$

De façon similaire, on peut calculer toutes les autres intégrales et on liste dessous leurs résultats :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\det B(\mathcal{T}_i)|} \int_{\mathcal{T}_i} \omega_1 \omega_1 &= \int_{\hat{T}} (1-x-y)^2 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{|\det B(\mathcal{T}_i)|} \int_{\mathcal{T}_i} \omega_1 \omega_2 &= \int_{\hat{T}} (1-x-y)x = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{|\det B(\mathcal{T}_i)|} \int_{\mathcal{T}_i} \omega_1 \omega_3 &= \int_{\hat{T}} (1-x-y)y = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{|\det B(\mathcal{T}_i)|} \int_{\mathcal{T}_i} \omega_2 \omega_2 &= \int_{\hat{T}} x^2 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{|\det B(\mathcal{T}_i)|} \int_{\mathcal{T}_i} \omega_2 \omega_3 &= \int_{\hat{T}} xy = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{|\det B(\mathcal{T}_i)|} \int_{\mathcal{T}_i} \omega_3 \omega_3 &= \int_{\hat{T}} y^2 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

On peut donc facilement implémenter le calcul des matrices de masse élémentaires.

## Matrice de rigidité élémentaire

En utilisant une stratégie similaire, la formule de changement de variables dit que l'on peut réécrire les intégrales de la matrice de rigidité élémentaire comme suit :

$$\int_{T_l} \sigma(M) \nabla \omega_I(M) \cdot \nabla \omega_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \sigma(\mathcal{F}_l(\hat{M})) \left[ (\mathcal{B}_l^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\omega}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[ (\mathcal{B}_l^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\omega}_J(\hat{M}) \right] |\det \mathcal{B}_l| d\hat{\Omega}$$

À cause de la possible variabilité du coefficient  $\sigma$ , ces intégrales peuvent être difficiles à calculer exactement. Alors on passe par une méthode de quadrature, qui consiste en substituer l'intégrale par une somme pondérée par des poids  $p^i$  sur les points  $\hat{S}^i$  données dans le tableau suivant :

$\hat{S}^q$	$(s_0, s_0)$	$(s_1, s_0)$	$(s_0, s_1)$
$\hat{\omega}^q$	$\omega_0$	$\omega_0$	$\omega_0$

avec  $\hat{S}^0 = \frac{1}{6}$ ,  $\hat{S}^1 = \frac{2}{3}$  et  $\omega_0 = \frac{1}{6}$ . C'est la formule de quadrature à 3 points de Gauss Legendre qui est d'ordre 2. On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{T}} \sigma(\mathcal{F}_l(\hat{M})) \left[ (\mathcal{B}_l^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\omega}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[ (\mathcal{B}_l^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\omega}_J(\hat{M}) \right] |\det \mathcal{B}_l| d\hat{\Omega} \\ & \approx \sum_{i=1}^3 \sigma(\mathcal{F}_l(\hat{S}^i)) \left[ (\mathcal{B}_l^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\omega}_I(\hat{S}^i) \right] \cdot \left[ (\mathcal{B}_l^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\omega}_J(\hat{S}^i) \right] |\det \mathcal{B}_l| p^i \end{aligned}$$

C'est exactement cela que l'on implémente en code, en prenant attention aux boucles pour ne pas calculer des quantités plusieurs fois.

### 1.5.2 Assemblage des matrices de masse et de rigidité

On peut maintenant assembler les matrices de masse  $\tilde{M}$  et de rigidité  $\tilde{K}$  à partir de leurs matrices élémentaires respectives. On parcourt les triangles et on somme les contributions de chaque matrice élémentaire :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{IJ} &= \sum_{l, M_I, M_J \in T_l} \int_{T_l} \omega_I(M) \omega_J(M) d\Omega \\ \tilde{K}_{IJ} &= \sum_{l, M_I, M_J \in T_l} \int_{T_l} \sigma(M) \nabla \omega_I(M) \cdot \nabla \omega_J(M) d\Omega \end{aligned}$$

Voici l'extrait de notre code responsable de l'assemblage :

```

1  for l=1:Nbtri
2    %A, B et C sont les sommets du triangle l
3    A = Numtri(l,1); B = Numtri(l,2); C = Numtri(l,3);
4
5    %coordonnees des sommets du triangle

```

```

6 S1=Coorneu(A,:); S2=Coorneu(B,:); S3=Coorneu(C,:);
7
8 %calcul des matrices elementaires du triangle 1
9 Kel=matK_elem(S1, S2, S3, Reftri(1));
10 Mel=matM_elem(S1, S2, S3);
11
12 %On fait l'assemblage de la matrice globale en ajoutant les
   contributions
13 %des matrices de rigidite et de masse elementaires
14 for i=1:3
15   I = Numtri(1,i);
16   for j=1:3
17     J = Numtri(1,j);
18     MM(I,J)=MM(I,J)+Mel(i,j);
19     KK(I,J)=KK(I,J)+Kel(i,j);
20   endfor
21 endfor
22 endfor

```

### 1.5.3 Calcul du second membre

On ne calcule pas le second membre  $\tilde{L}$  de manière exacte mais on utilise l'interpolée de  $f$ . Le maillage et  $f$  étant réguliers, l'interpolation a de bonnes propriétés de convergence.

On pose  $\pi_h f = \sum_{J=1}^N f(M_J) \omega_J$  et  $\tilde{F}_I = f(M_I) \quad \forall I \in \{1, \dots, N\}$  le vecteur colonne des sommets composés par  $f$ . On approxime le second membre  $\tilde{L}$ :

$$\begin{aligned}\tilde{L}_I &\approx \int_{\Omega} \pi_h f \omega_I d\Omega = \sum_{J=1}^N f(M_J) \int_{\Omega} \omega_I \omega_J d\Omega \\ &= \sum_{J=1}^N \tilde{M}_{IJ} \tilde{F}_J \\ &= (\tilde{M} \tilde{F})_I\end{aligned}$$

La construction de  $\tilde{F}$  étant aisée, cette interpolation permet d'approximer facilement (et efficacement!) le second membre  $\tilde{L}$ . De plus, la matrice de masse  $\tilde{M}$  est déjà construite donc cette méthode est peu coûteuse une fois  $\tilde{M}$  calculée.

### 1.5.4 Résolution du système linéaire

Maintenant que les matrices du système  $\tilde{A} \vec{U} = \vec{L}$  sont construites. On applique la méthode de *pseudo-élimination*, puis on inverse  $\tilde{A}$ . Voici un extrait de code illustrant notre méthode de *pseudo-élimination*:

```

1
2 function [ tilde_AA , tilde_LL ] = elimine (AA,LL,Refneu , Nbpt, Coorneu)
3
4 Nbpt = size(Refneu)(1); %nombre de sommet = dimension de la matrice AA
5 vecteur_nul = zeros(Nbpt,1); %vecteur nul
6
7 for i=1:Nbpt %on parcourt les sommets
8   if Refneu(i,1)==1 %si la reference du noeud est 1, on applique la
     pseudo elimination
9     AA(i,:)=vecteur_nul; %on elimine la ligne i de AA
10    AA(:,i)=vecteur_nul; %on elimine la colonne i de AA
11    AA(i,i)=1; %on place le coefficient diagonal i de AA a 1
12    LL(i)=0; %on elimine la i eme composante de LL
13  endif
14 endfor
15
16 tilde_AA = AA;
17 tilde_LL = LL;
18
19 endfunction

```

## 1.6 Validation de code et de la méthode

Afin de valider le code, on choisit un domaine  $\Omega$  simple : notre pièce rectangulaire vide (c'est-à-dire avec  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ) et une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  connue. A partir de cette dernière, on calcule  $f$  et on utilise notre programme pour obtenir une valeur approchée  $u_h$  de  $u$ . Avec les valeurs de  $u$  connue et de son approximation numérique  $u_h$ , on réalise deux vérifications :

Notre fonction test, vérifiant la condition de nullité au bord, est :

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \text{ pour } (x, y) \in \bar{\Omega}$$

La fonction f est donc...

- Une vérification graphique en représentant  $u$  et  $u_h$ .
- Une vérification numérique en étudiant les erreurs absolues en la norme  $\|.\|_{L^2(\Omega)}$  et en la semi-norme  $|.|_{H^1(\Omega)}$

**Vérification graphique :**

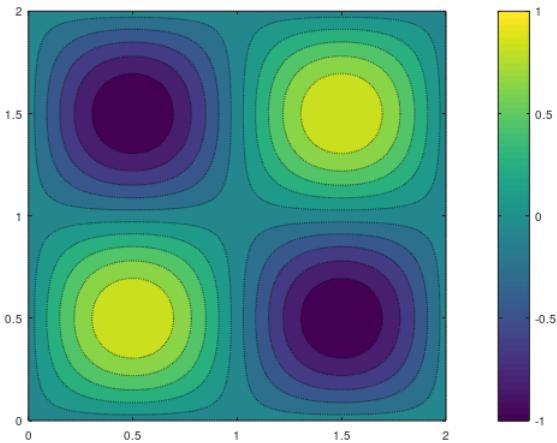


FIGURE 1 – Représentation exacte de  $u$

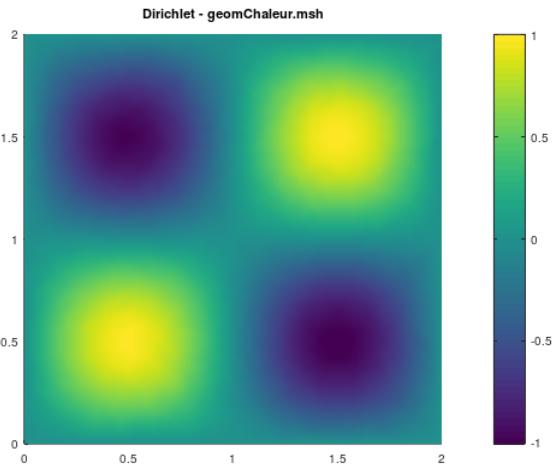


FIGURE 2 – Représentation approchée de  $u$

On remarque que la solution approchée (à gauche) est très satisfaisante car elle concorde avec la solution exacte (à droite).

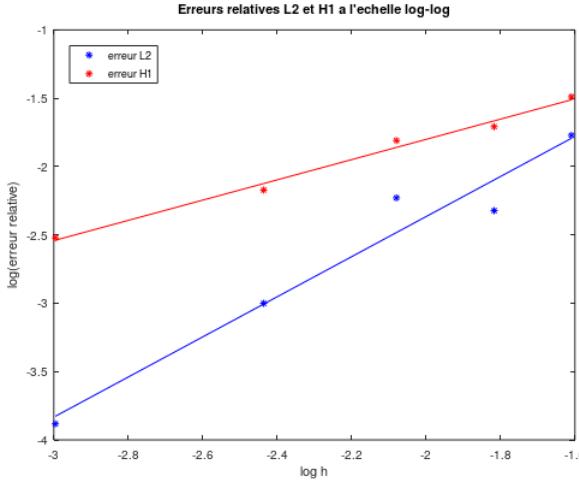
#### Vérification numérique :

On pose  $U^{ex} = (u(M_I))_{1 \leq I \leq N}$ ,  $U = (u_h(M_I))_{1 \leq I \leq N}$  et, d'après ce qu'on a montré dans le cours,

on a :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \approx \|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(U^{ex} - U)^T \tilde{M} (U^{ex} - U)}$$

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \approx \|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(U^{ex} - U)^T \tilde{K} (U^{ex} - U)}$$



D'après le cours, on sait que la vitesse de convergence des erreurs absolues est

- $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \propto h^2$
- $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \propto h$

On retrouve bien ces vitesses de convergence sur le graphique où on a représenté les données dans une échelle *log-log*.

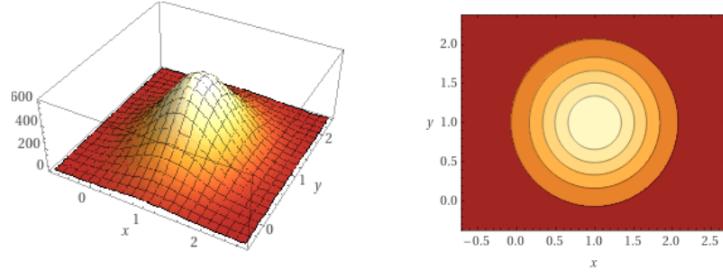
Nos vérifications sont satisfaisantes car nous retrouvons des résultats théoriques dans nos applications concrètes.

## 1.7 Résolution numérique de problèmes concrets

On peut maintenant utiliser notre programme dans un cas concret : la pièce  $\Omega_1$  n'est désormais plus vide mais contient un élément  $\Omega_2$ , par exemple une table. La conductivité n'est donc plus constante : on la note  $\sigma_1$  dans  $\Omega_1$  et  $\sigma_2$  dans  $\Omega_2$ . On va étudier deux cas :

- Un cas où les conductivités sont constantes dans l'espace.
- Un cas où  $\sigma_1$  est constante et  $\sigma_2$  varie dans l'espace.

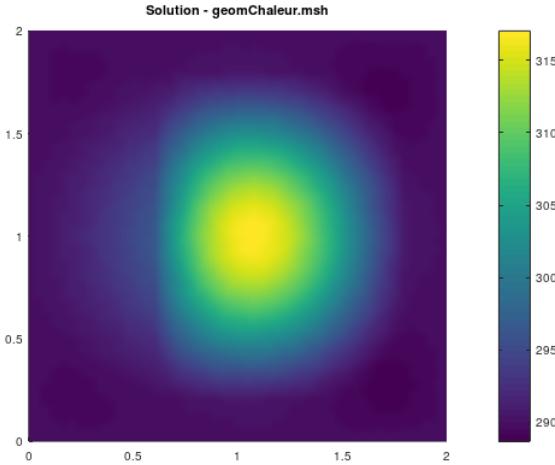
Dans la suite, on pose  $\alpha = 1$ , la température au bord  $T_\Gamma = 290$  et la source de chaleur  $S(x, y) = 600 \left( -\left(\frac{x-1}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{0.8}\right)^2 \right)$ . On représente graphiquement cette source de chaleur pour se donner une idée de son impact sur la solution calculée.



La répartition de la chaleur est centrée au milieu du domaine  $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$  et la situation est symétrique par tout axe passant au centre  $(1, 1)$ .

### 1.7.1 Premier cas

On suppose que les conductivités locales sont constantes :  $\sigma_1 = 5$  et  $\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . La solution observée est la suivante :



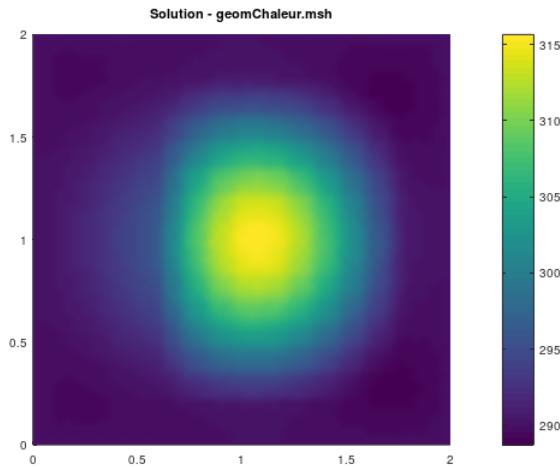
*Température maximale :  $T_{max} = 317.03$*

Tout d'abord, on remarque la forme de la source de chaleur représentée précédemment. Cependant, la conductivité étant différente entre les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et  $\Omega_2$  étant décalée à droite, la situation n'est plus symétrique. En effet, on remarque que la chaleur se dissipe brutalement à la frontière gauche séparant  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Cela peut être expliqué car  $\sigma_2 < \sigma_1$ , c'est-à-dire, la température dans  $\Omega_2$  se diffuse de manière moins importante que dans  $\Omega_1$ . Enfin, la solution vérifie bien la condition au bord  $T_\Gamma = 290$ .

### 1.7.2 Second cas

On suppose maintenant que  $\sigma_2$  varie en fonction de l'espace :  $\sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x))(2 + \sin(16\pi y))$ .

La solution observée est la suivante :



Température maximale :  $T_{max} = 315.66$

On obtient une représentation graphique similaire à la précédente. On note l'apparition de "petits carrés" par rapport au graphique précédent. On comprend cette différence en observant la représentation graphique de  $\sigma_2$  :

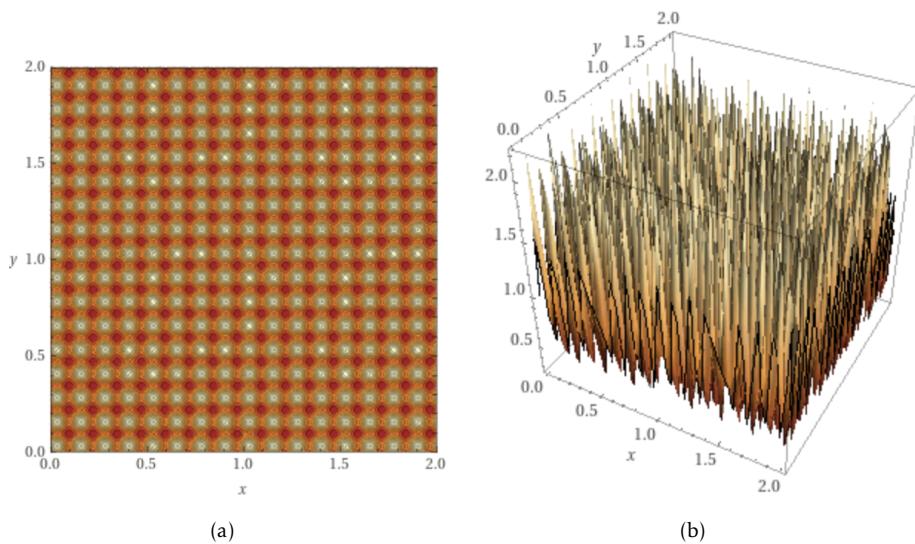


FIGURE 3 – Graphes de la nouvelle valeur de  $\sigma_2$ . Cela donne une intuition de pourquoi on voit les "carrés" dans la solution

Or, on vérifie facilement que les valeurs moyennes de  $\sin(16\pi x)$ ,  $\sin(16\pi y)$ ,  $\sin(16\pi x)\sin(16\pi y)$  sont (presque) zéro, car ces fonctions oscillent entre  $-1$  et  $1$  très rapidement de manière uniforme. Alors la moyenne de  $\sigma_2$  vaut  $1$ , et c'est pour cela que la solution est pareille à la solution antérieure. Dans le cas précédent,  $\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et non  $1$ , mais on observe que la valeur maximale dans le second cas est un peu plus petite. Pourtant, la moyenne est une quantité globale (on intègre sur le domaine), et donc localement les perturbations engendrées par  $\sigma_2$  sont visibles (les petits carrés).

## 2 Problème stationnaire avec conditions de Fourier

### 2.1 Mise en place et formulation variationnelle du problème

On se donne le même système qu'avant, mais avec des conditions aux limites différentes : maintenant on considère des conditions de Fourier au bord. Le système devient

Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla T \cdot \vec{n} + \lambda(T - T_c) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

Pour trouver la formulation variationnelle de ce problème, on procède comme dans la partie 1.2. On multiplie par  $v \in H^1(\Omega)$  et on intègre la première équation. On obtient l'équation suivante dans  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \alpha T v d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla T) v d\Omega = \int_{\Omega} S v d\Omega$$

On utilise maintenant la formule de Green pour le terme avec la divergence et on obtient, en substituant la deuxième équation dans le terme de bord,

$$\int_{\Omega} \alpha T v d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma \nabla T) \cdot \nabla v d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} v T d\Gamma = \int_{\Omega} S v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda v T_c d\Gamma$$

La formulation variationnelle du problème est donc

Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \alpha T v d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma \nabla T) \cdot \nabla v d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} v T d\Gamma = \int_{\Omega} S v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda v T_c d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (6)$$

### 2.2 Discrétisation du problème et mise sous forme d'un système linéaire

On introduit l'espace  $V_h$  des fonctions affines sur chaque triangle du maillage (même celles qui ne valent pas zéro sur le bord). Une base pour cet espace est l'ensemble de fonctions  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq N_{\text{som}}$  telles que si le  $j$ -ème sommet est noté  $S_j$ , alors

$$\omega_i(S_j) = \delta_{ij}$$

Alors, on sait que  $T$  est une solution du problème variationnel si et seulement si  $T$  résoud le problème sur la base indiquée (car maintenant nous sommes en dimension finie) :

$$\int_{\Omega} \alpha T \omega_j d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma \nabla T) \cdot \nabla \omega_j d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \omega_j T d\Gamma = \int_{\Omega} S \omega_j d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda \omega_j T_c d\Gamma, \text{ for } 1 \leq j \leq N_{\text{som}}$$

Or, on peut aussi développer  $T$  en utilisant cette base :

$$T = \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} u_i \omega_i$$

où on appelle les coefficients dans la base  $u_i$  pour consistance de notation. Alors la formulation discrète devient, après quelques calculs très simples et similaires à ceux que l'on a fait dans le cas de conditions de Dirichlet,

$$(\alpha\mathbb{M} + \mathbb{K} + \lambda\mathbb{S})\vec{U} = \vec{F}$$

où  $\mathbb{S}$  est la matrice de masse surfacique

$$\mathbb{S}_{ij} = \int_{\partial\Omega} \omega_i \omega_j d\Gamma$$

et le second membre est

$$\vec{F}_i = \int_{\Omega} S \omega_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda \omega_i T_c d\Gamma$$

### 2.3 Approximation du second membre

On voit que ces intégrales au second membre peuvent être compliquées à calculer exactement. Alors, comme avant, on utilise une technique d'interpolation pour les approcher. L'intégrale volumique est approchée comme avant :

$$S \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{som}}} S(s_k) \omega_k$$

où  $s_k$  est le k-ème sommet, et donc

$$\int_{\Omega} S \omega_i d\Omega \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{som}}} S(s_k) \mathbb{M}_{ik}$$

De façon similaire,

$$T_c \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{som}} \partial\Omega} T_c(s_k) \omega_k$$

de manière que, au bord, on a

$$\int_{\partial\Omega} T_c \omega_i d\Omega \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{som}} \partial\Omega} T_c(s_k) \mathbb{S}_{ik}$$

On reconnaît alors le produit matriciel suivant

$$\vec{F} \approx \mathbb{M}\vec{S} + \lambda\mathbb{S}\vec{T}_c$$

où  $\vec{S}_i = S(s_i)$ , et de même  $(\vec{T}_c)_i = T_c(s_i)$  (et zéro pour les points intérieurs).

## 2.4 Implémentation du code

On voit qu'au niveau de code, on doit ajouter le calcul de la matrice de masse surfacique. Comme pour construire les matrices  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$ , on fait une boucle sur tous les triangles et on ajoute la contribution de chaque matrice élémentaire surfacique. Pour chaque triangle fixé, on boucle sur ses arêtes, et pour chaque arête du triangle qui est sur le bord, on calcule l'intégrale du produit des fonctions de base le long de l'arête. Ainsi, par analogie avec ce que l'on a fait avant, on construit pour chaque arête une matrice de masse surfacique élémentaire.

Or, supposons une arête  $a$  du bord fixée. Il y a deux fonctions  $\omega$  qui ne sont pas nulles : les fonctions associées à chacun des sommets que forment cette arête. Comme ces fonctions sont affines sur chaque triangle, elles sont linéaires sur l'arête. Par exemple, si  $S_i, S_j$  sont les sommets qui forment cette arête, alors  $\omega_i$  est la fonction qui vaut 1 en  $S_i$  et 0 en  $S_j$ , et qui change linéairement le long de l'arête. Or, si l'on paramétrise  $a$  par la longueur d'arc  $\mu$ , allant de  $S_i$  vers  $S_j$ , alors

$$\begin{aligned}\omega_{S_i}(\mu) &= 1 - \mu \\ \omega_{S_j}(\mu) &= \mu\end{aligned}$$

Par la formule d'intégration curviligne pour une courbe paramétrée par longueur d'arc

$$\int_\gamma f d\gamma = \int_0^{\text{longueur}} f(\gamma(\mu)) d\mu$$

On a, dans le cas particulier où  $\gamma = a$  et  $f = \omega_{S_i}^2$ ,  $f = \omega_{S_i} \omega_{S_j}$ ,  $f = \omega_{S_j}^2$  respectivement :

$$\begin{aligned}\int_a \omega_{S_i}^2 &= \int_0^l (1 - \mu)^2 d\mu = l - l^2 + \frac{l^3}{3} \\ \int_a \omega_{S_j}^2 &= \int_0^l \mu^2 d\mu = \frac{l^3}{3} \\ \int_a \omega_{S_i} \omega_{S_j} &= \int_0^l (1 - \mu)\mu d\mu = \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{3}\end{aligned}$$

où  $l$  est la longueur de l'arête. Ainsi, la matrice élémentaire d'une arête ne dépend que de sa longueur :

$$\mathbb{S}_{\text{elem}} = \begin{pmatrix} l - l^2 + \frac{l^3}{3} & \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{3} \\ \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{3} & \frac{l^3}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, il est facile d'implémenter le code du calcul de cette matrice, car il est aisément de calculer la longueur d'une arête : c'est simplement la norme euclidienne de la différence des coordonnées des sommets. Finalement, l'assemblage de cette matrice élémentaire dans la matrice surfacique globale se déroule exactement de la même manière que l'on a fait pour l'assemblage des matrices  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$ .

On voit aussi que l'on doit ajouter une interpolation surfacique dans le calcul du second membre. Pour cela, on évalue  $T_c$  sur tous les sommets du bord et on met égale à zéro pour les sommets intérieurs de  $\Omega$ . On multiplie ensuite  $T_c$  par  $\lambda \mathbb{S}$  à gauche et sommer ce terme au second membre déjà existant. La matrice surfacique  $\mathbb{S}$  étant déjà calculée, cette interpolation n'est pas coûteuse en calcul.

## 2.5 Validation du code

On veut maintenant valider notre code. Pour ce faire, on cherche une fonction vérifiant la condition sur le bord du problème (5).

On pose  $\alpha = \sigma = \lambda = 1$  et  $T_c = 0$ . La condition au bord devient  $\nabla T \cdot n + T = 0$ . C'est la condition de Neumann homogène. On a vu en cours une fonction vérifiant cette condition :

On pose  $T(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$  et après quelques calculs, on trouve la source de chaleur associée  $S(x, y) = (1 + 2\pi^2) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ . On va tester notre programme avec cette dernière : on représente la solution approchée puis la solution exacte.

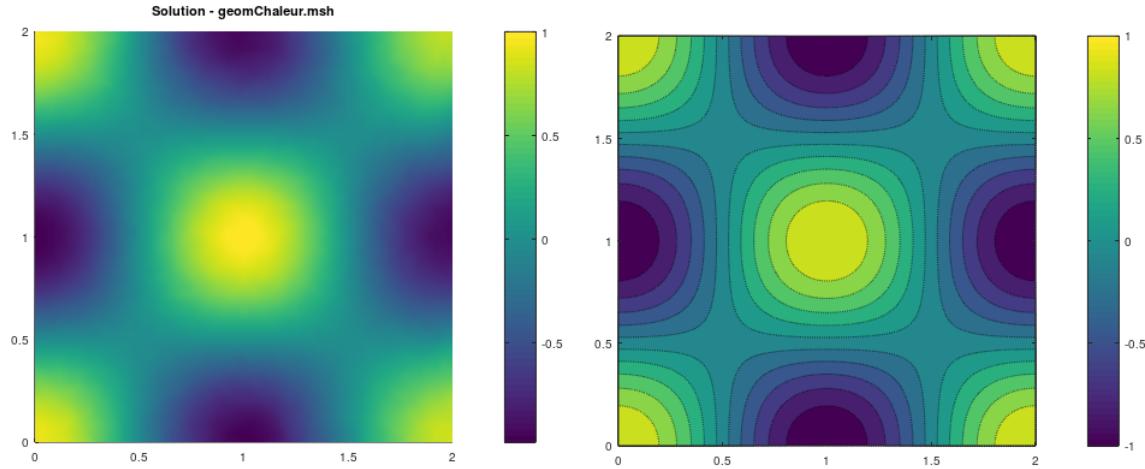
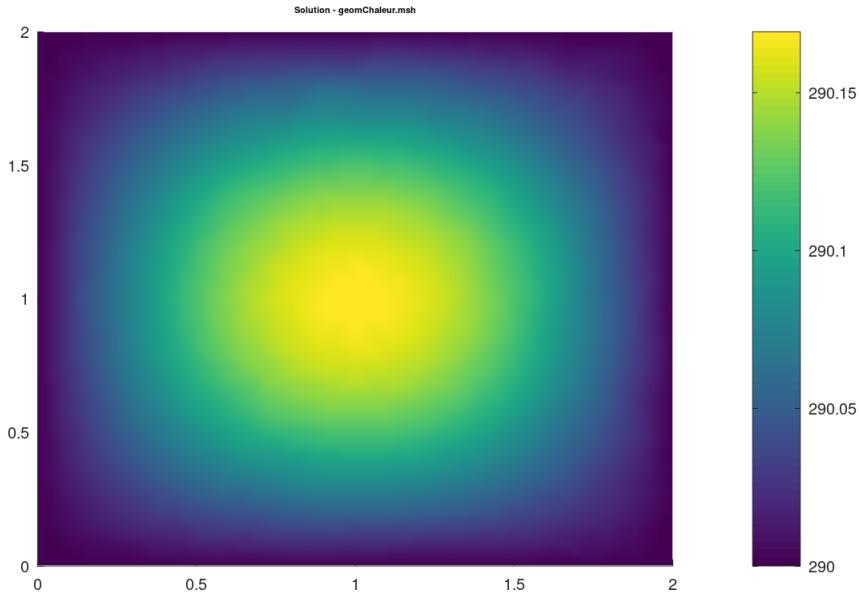


FIGURE 4 – Solution approchée à gauche et solution exacte à droite

Cet exemple est satisfaisant car la solution approchée concorde avec la solution exacte. On considère donc que notre code est valide.

## 2.6 Résolution numérique de problèmes concrets

Maintenant on représente la solution obtenue dans deux cas. Pour le premier cas, on choisit la fonction  $S(x, y) = \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2)$ , et les paramètres  $\alpha = \sigma = 1, \lambda = 0, T_c = 290$ . On obtient le graphique suivant :

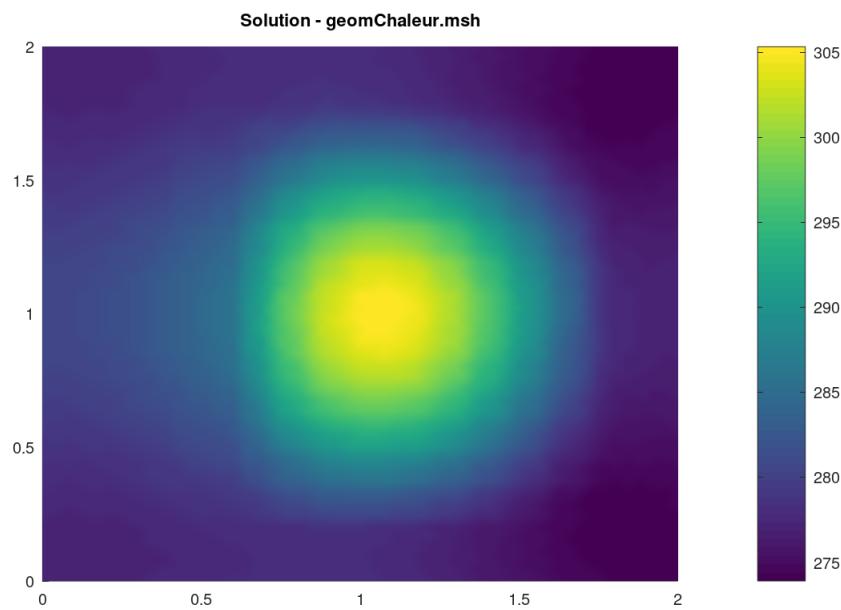


Ce comportement est attendu car  $\lambda = 0$  élimine le terme surfacique (S) et un terme du second membre du système linéaire. Ainsi, le système linéaire est exactement le même que dans le cas des conditions de Dirichlet aux limites, la seule différence étant que la procédure de pseudo-élimination réalisée n'est pas la même : les points au bord sont considérés. On observe que le maximum de la fonction n'est pas 291, mais  $\approx 290.2$ , et on croit que cela arrive à cause des conditions de Fourier au bord, qui sont "moins rigides" que les conditions de Dirichlet.

Maintenant testons un cas avec  $\lambda = 1$ . Reprenons les donnés de la partie 1.7.2 :

$$S(x, y) = 600 \exp \left( - \left( \frac{x-1}{0.8} \right)^2 - \left( \frac{y-1}{0.8} \right)^2 \right), \alpha = 1, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x))(2 + \sin(16\pi y)), T_c = 290$$

La solution observée est la suivante :



On trouve un résultat similaire : les petits carrés à cause de la forme de  $\sigma_2$  et une forte dissipation de la chaleur à la frontière gauche entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Cependant, on note une différence importante car nous sommes dans un problème avec condition de Fourier avec dissipation de la chaleur au bord. Sur le bord  $\partial\Omega$ , la température n'est pas toujours constante, cela est surtout notable sur l'arête à gauche. On est "proche" du système précédent, mais bien sûr ce n'est pas le même système, à cause des conditions aux limites différentes.

### 3 Problème instationnaire

On va maintenant pouvoir modéliser l'équation de la chaleur dans le temps selon deux conditions aux limites. La température est dépendante du temps :  $T \equiv T(x, y, t)$  avec  $t \in [0, t_{max}]$ . On pose  $S \equiv S(x, y, t)$  la source de chaleur dépendante du temps et  $T_0 \equiv T_0(x, y)$  la température initiale au temps  $t = 0$ .

Dans la partie 3.1, les conditions aux limites sont de Dirichlet et dans la partie 3.2, elles sont mixtes (de Fourier et de Dirichlet). On va donc s'aider des 2 parties précédentes.

#### 3.1 Conditions de Dirichlet aux limites

##### 3.1.1 Mise en place du problème et mise sous forme variationnelle

On cherche à résoudre le problème suivant :

Trouver  $T(t) \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \times ]0, t_{max}[ \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, t_{max}[ \\ T|_{t=0} = T_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Comme dans la section 1.1, on voit que si l'on introduit la fonction  $u = T - T_\Gamma$ , la solution  $u$  est nulle sur le bord et les équations deviennent plus simples. De plus,  $u \in H_0^1(\Omega)$  car  $u \in H^1(\Omega)$  (car  $T \in H^1(\Omega)$ ) et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . En faisant les modifications nécessaires, le nouveau système d'équations se réécrit

Trouver  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = S & \text{dans } \Omega \times ]0, t_{max}[ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, t_{max}[ \\ u|_{t=0} = T_0 - T_\Gamma & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Avant de discréteriser le système, trouvons sa formulation variationnelle de la même manière que dans la partie 1.2. On le multiplie par  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on intègre sur  $\Omega$ , et on utilise la formule de Green pour la divergence. Ainsi on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma \nabla u) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} S v \, d\Gamma$$

##### 3.1.2 Discréétisation du problème et mise sous la forme d'un système linéaire

On réalise la même discréétisation de l'espace que dans la partie 1.3 : on se munit de  $V_h^0$  approchant  $H_0^1(\Omega)$ . D'autre part, on discréétise le temps à l'aide du schéma implicite suivant :

- Le pas de temps est noté  $\Delta t$ .
- Les temps discrets sont notés  $t^k = k\Delta t$  pour  $k \in \{0, \dots, K\}$  avec  $K = t_{max}/\Delta t$ .

Finalement, à l'aide de la discréétisation de l'espace et du temps, on approche  $u(t^k)$  par  $u_h^k \in V_h^0$  :

$$u_h^k(x, y) = \sum_{I=1}^{N_0} V_I^k \omega_I(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$$

où  $(\omega_I)_{1 \leq I \leq N_0}$  est la base de  $V_0^h$  et  $(V_I^k)_{1 \leq I \leq N_0}$  les coefficients associés dans cette base.

La formulation variationnelle trouvée vaut en particulier pour  $v = \omega_J$  dans la base de  $V_h^0$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \omega_J d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma \nabla u) \cdot \nabla \omega_J = \int_{\Omega} S \omega_J d\Gamma$$

On substitut  $u$  par  $u_h^k$ , et on fait aussi l'approximation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t^{k+1}) \approx \sum_{I=1}^{N_0} \left( \frac{V_I^{k+1} - V_I^k}{\Delta t} \right) \omega_I(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$$

La formulation variationnelle devient, à l'instant  $k + 1$

$$\sum_{i=1}^{N_0} \left( \frac{V_I^{k+1} - V_I^k}{\Delta t} \right) \int_{\Omega} \omega_I \omega_J d\Omega + V_I^{k+1} \int_{\Omega} (\sigma \nabla \omega_I) \cdot \nabla \omega_J = \int_{\Omega} S \omega_J d\Gamma$$

De plus, on crée le vecteur  $\vec{V}^{k+1}$  tel que  $(\vec{V}^{k+1})_I = V_I^{k+1}$ . On reconnaît alors la somme dessus comme étant une ligne du résultat du produit matriciel :

$$\left( \mathbb{M}^0 \left( \frac{\vec{V}^{k+1} - \vec{V}^k}{\Delta t} \right) + \mathbb{K}^0 \vec{V}^{k+1} \right)_J = \int_{\Omega} S \omega_J d\Gamma$$

Si on considère un vecteur  $\vec{L}^k$  tel que  $\vec{L}_J^k = \int_{\Omega} S \omega_J d\Gamma$ , on voit que l'ensemble d'équations dessus équivaut à résoudre le système linéaire suivant

Trouver  $\vec{V}^k \in \mathbb{R}^{N_0}$ , pour  $k$  variant de 0 à  $K - 1$ , tels que

$$\begin{cases} \mathbb{M}^0 \frac{\vec{V}^{k+1} - \vec{V}^k}{\Delta t} + \mathbb{K}^0 \vec{V}^{k+1} = \vec{L}^{k+1} \\ \vec{V}^0 = \vec{V}_0 \end{cases}$$

Si on pose  $\alpha = \frac{1}{\Delta t}$ , on modifie immédiatement la première équation :

$$(\alpha \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0) \vec{V}^{k+1} = \vec{L}^{k+1} + \alpha \mathbb{M}^0 \vec{V}^k$$

*Remarque sur le code :* On observe que le terme  $\vec{V}^k$  est déjà connu au pas  $k + 1$ , et c'est pourquoi on utilise la matrice calculée au pas précédent  $k$  dans le calcul de la matrice  $UU$  de la solution approchée.

On a montré que  $\alpha \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0 = \mathbb{A}^0$  dans la partie 1.4. La première équation du système s'écrit donc

$$\mathbb{A}^0 \vec{V}^{k+1} = \vec{L}^{k+1} + \alpha \mathbb{M}^0 \vec{V}^k$$

*Remarque sur le code :* Au niveau du code, cela correspond à mettre var\_lambda égale à zéro pour le problème temporel, et utiliser la même fonction de pseudo-élimination qu'au problème de Dirichlet stationnaire.

### 3.1.3 Résolution numérique d'un système concret

On définit les différents paramètres :

- $t_{max} = 1$  et  $\Delta t = 0.01$
- $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x))(2 + \sin(16\pi y))$
- $T_\Gamma = 280, T_0 = 280$
- $S(x, y, t) = 600e^{-5t} \exp\left(-\left(\frac{x-1}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{0.8}\right)^2\right)$

On se place donc dans la même situation que dans la partie 1.7.2. Ici, le terme source de la chaleur comporte un terme exponentiel qui va écraser très rapidement la source de chaleur à zéro. On obtient alors la solution et on la représente pour  $t = 0, 0.03, 0.08, 0.3, 1$ .

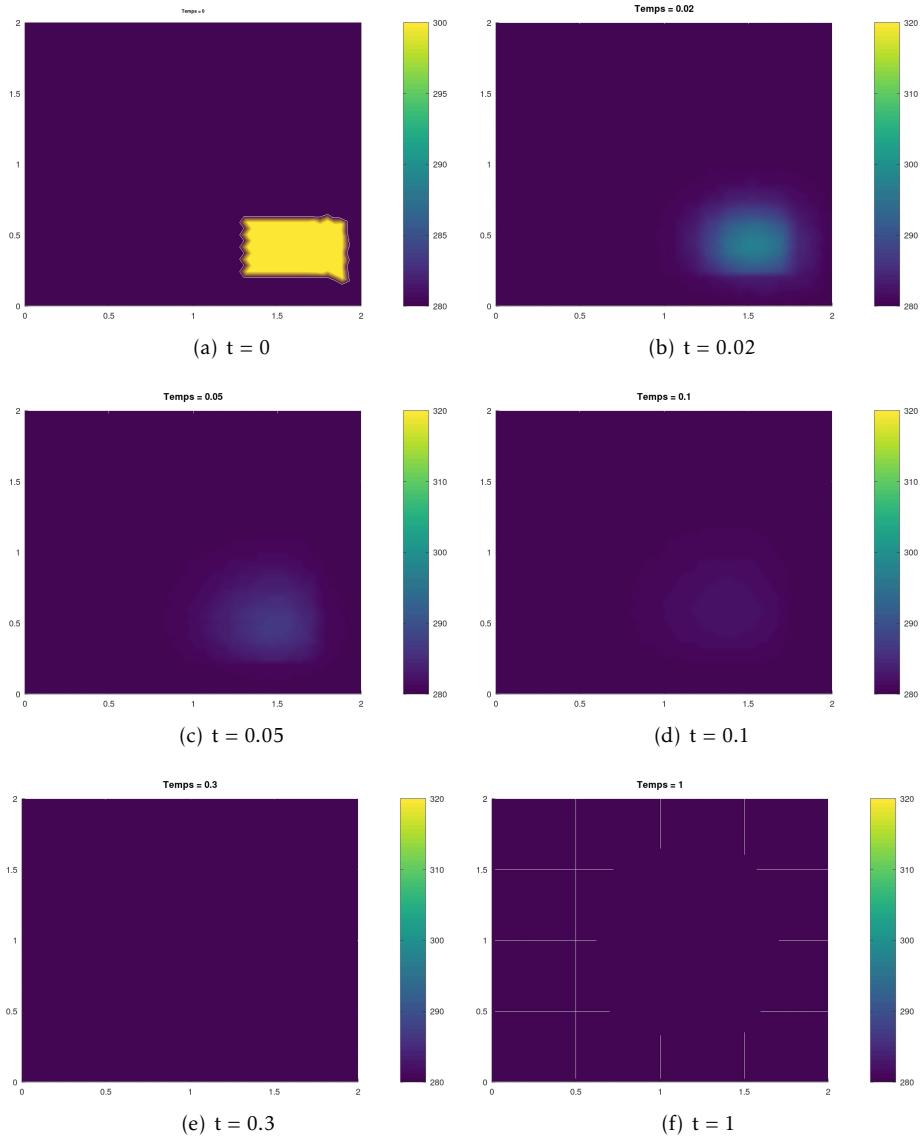


FIGURE 5 – Évolution de la solution dans le cas de condition de Dirichlet aux limites

La condition initiale  $280 + 30 * ((x - 1.6) < 0.3) * ((y - 0.4) < 0.2)$  peut être observée au temps  $t = 0$  : la température dans le coin inférieur droit a une valeur supérieure de 30 par rapport au reste du domaine où la température est de 280. Ensuite, on observe que le flux "ne s'approche pas" du bord : la condition de Dirichlet est respectée. Ensuite, le flux de chaleur se disperse rapidement grâce au terme exponentiel du temps dans la source de chaleur  $S$ . Enfin, le comportement observé est attendu pour une équation de chaleur : l'équilibre thermique est atteint.

### 3.2 Conditions aux limites mixtes

On se demande maintenant ce qui arrive si on applique une condition de Fourier à une des arêtes du bord et une condition de Dirichlet aux autres arêtes du bord.

#### 3.2.1 Mise en place du problème

Cela se traduit de façon simple dans le système d'équations différentielles. On choisit l'arête  $\partial\Omega_1$  à droite du carré pour la condition de Fourier. On appelle les autres arêtes  $\partial\Omega_2$ ,  $\partial\Omega_3$ ,  $\partial\Omega_4$  et leur union  $\Omega_{2,3,4}$ . Le problème devient

Trouver  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = S & \text{dans } \Omega \times ]0, t_{\max}[ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{2,3,4} \times ]0, t_{\max}[ \\ \sigma \nabla u \cdot \vec{n} + \lambda u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \times ]0, t_{\max}[ \\ u|_{t=0} = T_0 - T_\Gamma & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Or, en multipliant par une fonction  $v \in H^1(\Omega)$  qui soit zéro sur  $\partial\Omega_{2,3,4}$ , de la même manière que dans la partie 2.1, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} v + \sigma \nabla u \cdot \nabla v \right) d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega_1} uv d\Gamma = \int_{\Omega} Sv d\Omega$$

où on a utilisé le fait que

$$\int_{\partial\Omega_2} uv d\Gamma = \int_{\partial\Omega_3} uv d\Gamma = \int_{\partial\Omega_4} uv d\Gamma = 0$$

En changeant  $v$  par la fonction de base  $\omega_j$ , en développant  $u$  sur cette base,  $u = \sum V_i^{k+1} \omega_i$ , et en faisant l'approximation

$$\frac{\partial V^{k+1}}{\partial t} \approx \frac{V^{k+1} - V^k}{\Delta t}$$

on obtient le système linéaire

$$\mathbb{M}_{\partial\Omega_1} \left( \frac{\vec{V}^{k+1} - \vec{V}^k}{\Delta t} \right) + \mathbb{K}_{\partial\Omega_1} \vec{V}^{k+1} + \lambda \mathbb{S}_{\partial\Omega_1} \vec{V}^{k+1} = \vec{L}^{k+1}$$

où  $\mathbb{S}_{\Omega_1}$ ,  $\mathbb{M}_{\partial\Omega_1}$ ,  $\mathbb{K}_{\partial\Omega_1}$  sont les matrices de masse surfacique, masse, et rigidité usuelle après une pseudo-élimination des noeuds qui ne sont pas sur  $\partial\Omega_1$ . Comme dans la partie 3.1.2, on peut réécrire cette équation comme

$$\mathbb{A}_{\partial\Omega_1} \vec{V}^{k+1} = \vec{L}^{k+1} + \alpha \mathbb{M}_{\partial\Omega_1} \vec{V}^k$$

où  $\alpha$  vaut toujours  $\frac{1}{\Delta t}$ , la matrice  $\mathbb{A}_{\partial\Omega_1}$  est la matrice  $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{M} + \mathbb{K} + \lambda \mathbb{S}$  (calculée avec tous les noeuds) après une pseudo-élimination des noeuds sur  $\partial\Omega_{2,3,4}$ .

### 3.2.2 Résolution numérique d'un problème concret

Afin de comparer les résultats avec la condition de Dirichlet de la partie 3.1.3 précédente, on reprend les mêmes données et on représente graphiquement la solution.

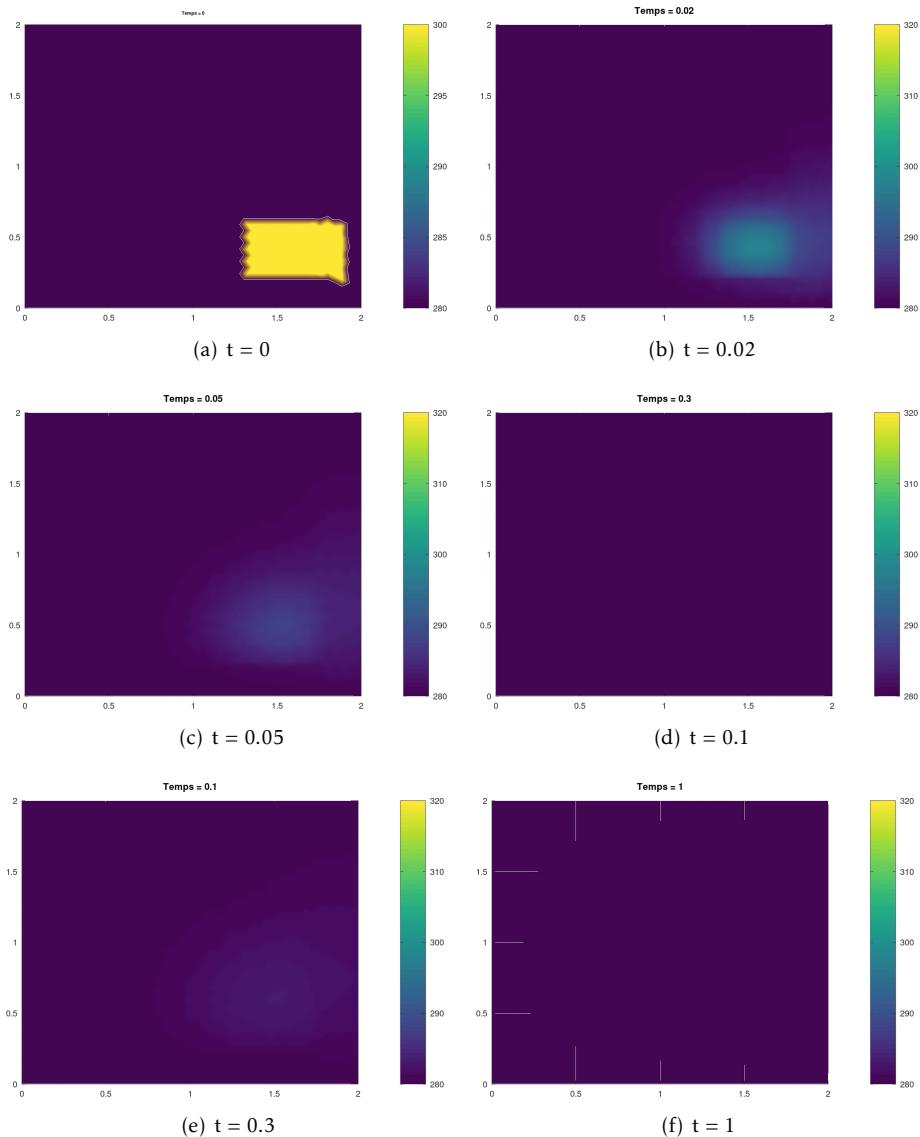


FIGURE 6 – Évolution de la solution dans le cas de conditions mixtes (Dirichlet + Fourier) aux limites

On observe un comportement limite identique : le système tend vers l'équilibre thermique. Cependant, il y a une différence notable, surtout au temps  $t = 0.02$  : le flux se diffuse au bord droit,

qui est l'arête sélectionnée pour la condition de Fourier. On observe aussi que la solution prend plus de temps pour se dissiper.

Dans ce cas, comme dans le précédent, on observe que la température commence en bas à droite (condition initiale), et tend vers le centre du carré. Observons le graphe du terme de source :

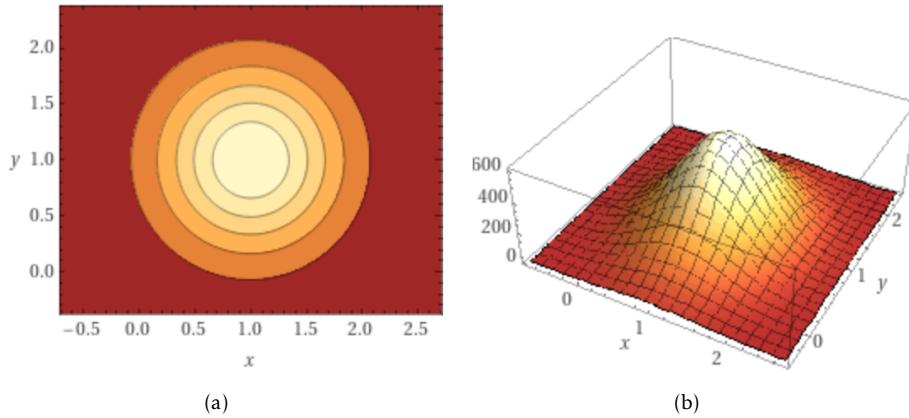


FIGURE 7 – Graphes du terme de source dans le problème temporel

Ces graphes permettent d'interpréter le comportement de la solution : le flux tend vers le centre du domaine car c'est là que le terme source est plus fort. Cependant la dissipation exponentielle écrase la valeur de la source et la température tend alors vers une constante. Pour mieux visualiser ce phénomène, on a fait ces simulations de nouveau, mais avec un terme de dissipation plus faible : l'exponentielle temporelle qui valait  $e^{-5t}$ , vaut maintenant  $e^{-0.1t}$ . On observe, pour le cas de conditions Dirichlet aux limites, l'évolution suivante :

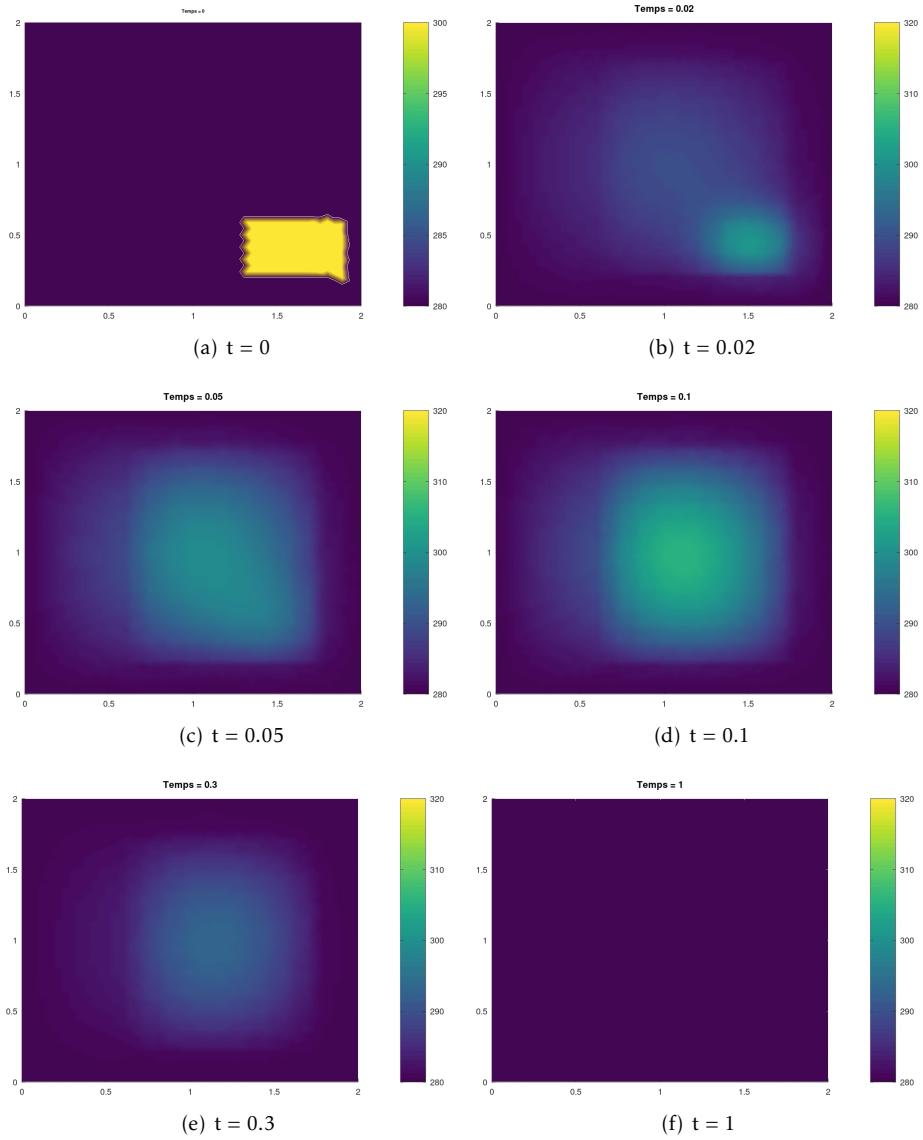


FIGURE 8 – Évolution de la solution dans le cas de condition de Dirichlet aux limites, avec dissipation temporelle plus faible.

et, dans le cas de conditions mixtes, on observe l'évolution suivante :

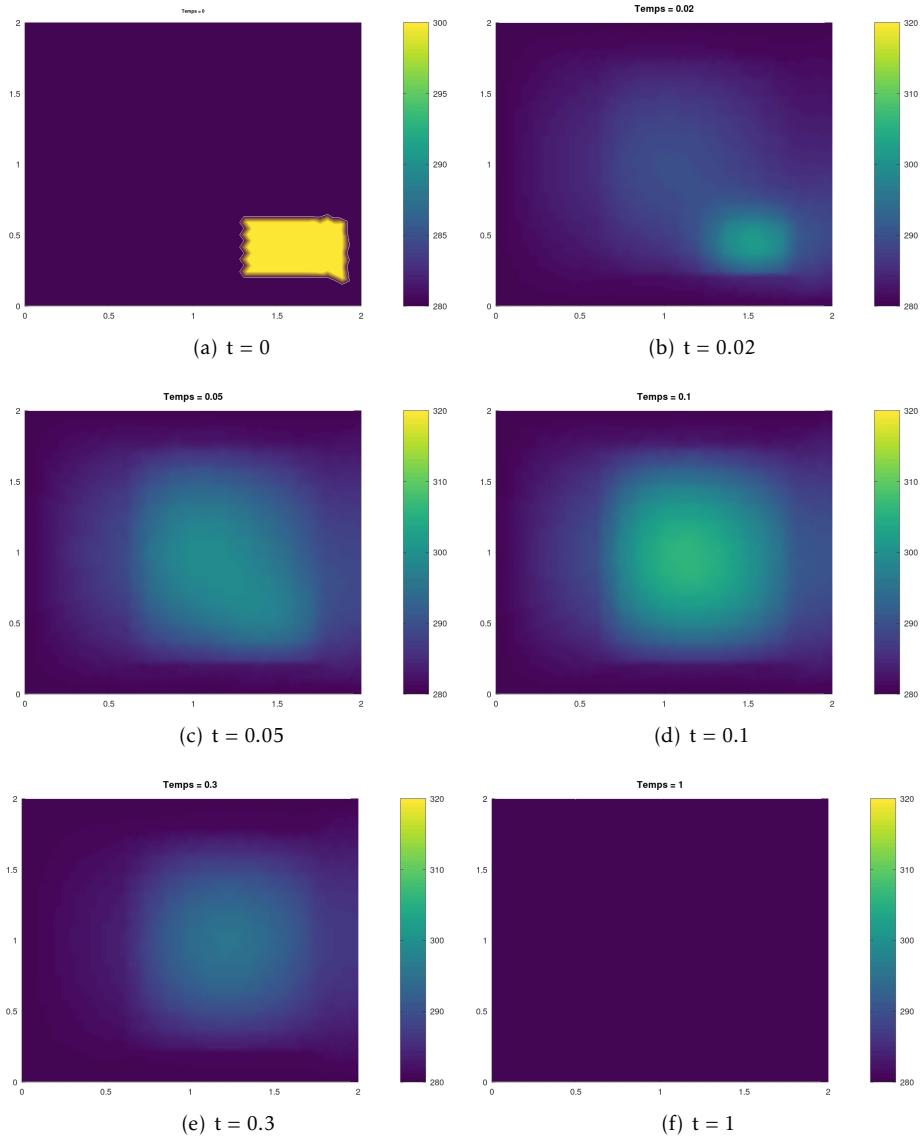


FIGURE 9 – Évolution de la solution dans le cas de condition mixtes (Dirichlet + Fourier) aux limites, avec dissipation temporelle plus faible.

## Conclusion

Nous avons étudié dans ce projet l'équation de la chaleur selon différentes situations. Dans les deux premières parties, nous avons simplifier l'étude en considérant les problèmes comme stationnaire dans le temps. La première partie étudiant la condition de Dirichlet au bord et la seconde la condition de Fourier au bord. Grâce aux résultats développés, nous avons pu étudier l'équation de la chaleur dans le temps dans la troisième partie.

Le processus de résolution des problèmes est le suivant : mise en place du problème, mise sous forme variationnelle, discrétisation du problème et mise sous la forme d'un système linéaire. La méthode employée dans l'étude est la méthode des éléments finis basée sur la discrétisation du domaine par un maillage. Les matrices observées sont la matrice de masse, de rigidité et de masse surfacique. D'autre part, on a utilisé la méthode de pseudo-élimination et d'interpolation.

Nous avons valider notre code en représentant des fonctions connues et en traçant l'évolution des erreurs. Enfin, nous avons appliqué nos résultats à une situation concrète : l'évolution de la température dans une pièce selon le temps et selon des conditions aux limites différentes : de Dirichlet pour une température fixée au bord et de Fourier, que l'on peut interpréter comme la présence d'un climatiseur/chauffage.