Observatório Nacional

Divisão de Programas de Pós-Graduação

INVERSÃO RADIAL 3D DE DADOS MAGNÉTICOS

Leonardo Beserra Vital

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. Vanderlei Coelho Oliveira Junior

Co-orientador(a): Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa

Rio de Janeiro
Novembro de 2020

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A interpretação de anomalias de campo total sobre a superfície da Terra é um desafio na geofísica de exploração devido à falta de unicidade da inversão magnética 3D. É bem estabelecido na literatura que diversas distribuições de magnetização em subsuperfície podem produzir o mesmo dado magnético com a mesma precisão. A fim de superar esta ambiguidade, é necessário introduzir informação a priori ao problema para reduzir o número de possíveis soluções que são coerentes com a geologia local. Existem basicamente três grupos de métodos de inversão magnética 3D. A informação a priori disponível determina a abordagem mais adequada para cada caso.

O primeiro grupo de métodos aproxima a fonte por um corpo causador geometricamente simples que possui geometria definida por um número pequeno de parâmetros (por exemplo, BALLANTYNE, 1980; BHATTACHARYYA, 1980; SILVA e HOHMANN, 1983a). Esses métodos estimam tanto a geometria quanto a propriedade física da fonte através da solução de um problema inverso não linear. Devido à parametrização muito restritiva, tais métodos frequentemente sofrem graves problemas com a ambiguidade.

O segundo grupo é formado por uma vasta maioria dos métodos. Eles aproximam a subsuperfície por uma malha de prismas retangulares justapostos com uma direção de magnetização constante. Alguns métodos presumem uma magnetização puramente induzida (por exemplo, CRIBB, 1976; LI e OLDENBURG, 1996; PILKINGTON, 1997) e as susceptibilidades magnéticas isotrópicas dos prismas é a quantidade estimada pela solução de um problema inverso linear. Abordagens diferentes aperfeiçoaram este método de inversão para obter imagens da subsuperfície. Por exemplo, PORTNIAGUINE e ZHDANOV (1999) e PORTNIAGUINE e ZHDANOV (2002) introduziram o auxílio do gradiente mínimo para minimizar o efeito de fortes variações e descontinuidades nos parâmetros pela inversão da anomalia magnética e qualquer componente do campo anômalo total. BARBOSA e SILVA (2006) apresentaram um método para inverter anomalias magnéticas interferentes através da combinação de características da modelagem direta (a interatividade) e a inversão tradicional (o ajuste automático dos dados). Outros estudos introduziram estratégias para restringir a falta de unicidade e delinear a fonte (ABEDI *et al.*, 2015; CARATORI TONTINI *et al.*, 2006; CELLA e FEDI, 2012; PILKINGTON, 2009; SHAMSIPOUR *et al.*, 2011). Excepcionalmente, alguns desses métodos permitem uma direção de magnetização diferente da direção do campo geomagnético principal (por exemplo, PIGNATELLI *et al.*, 2006). Nesse caso, os parâmetros a serem estimados são as intensidades de magnetização total dos prismas. Em todos esses métodos, portanto, as geometrias das fontes magnéticas são indiretamente recuperadas interpretando a distribuição estimada de intensidade de magnetização total. Teoricamente, esses métodos de inversão são capazes de recuperar a geometria de fontes complexas. No entanto, eles exigem uma infinidade de informações a priori para superar sua falta de unicidade e instabilidade devido ao grande número de parâmetros a serem estimados. Além disso, essas técnicas são caracterizadas por um alto custo computacional associado à solução de grandes sistemas lineares.

O terceiro grupo de métodos de inversão magnética 3-D pressupõe algum conhecimento sobre a distribuição das propriedades físicas e estima a geometria das fontes. Eles geralmente são formulados como problemas inversos não lineares. WANG e HANSEN (1990) aproximam a fonte por um poliedro e estima a posição de seus vértices no domínio de Fourier. LI *et al.* (2017) desenvolveram um método de múltiplos níveis para estimar a geometria de um conjunto de corpos causadores com susceptibilidade magnética uniforme. HIDALGO-GATO e BARBOSA (2019) invertem a anomalia de campo total para estimar a geometria do relevo do embasamento de uma bacia sedimentar com uma intensidade de magnetização conhecida mas direção desconhecida. Esse método possui um pequeno número de parâmetros a serem estimados por inversão e possui muito menos ambiguidade em comparação ao segundo grupo.

É de amplo conhecimento que problemas inversos que usam medidas de desajuste dos dados com base na norma-2 quadrática tradicional dos resíduos (ou soma dos quadrados dos resíduos), ou seja, inversões por mínimos quadrados, podem ser drasticamente afetados pela presença de pontos espúrios ou *outliers* e também pelo efeito causado por fontes interferentes (ruído geológico) nos dados observados. Do ponto de vista estatístico, as inversões por mínimos quadrados não são robustas (HUBER, 1964; SCALES e GERSZTENKORN, 1988). Para neutralizar esse problema, medidas robustas de desajuste dos dados, como a norma-1 (ou soma dos resíduos absolutos), o estimador-M (HUBER, 1964), ou a "norma L_p perturbada"(EKBLOM, 1973) há muito tempo são usadas em problemas inversos em geofísica (FARQUHARSON e OLDENBURG, 1998). Existem diversos métodos robustos para interpretar, por exemplo, dados sísmicos (por exemplo, AMUNDSEN, 1991; CLAERBOUT e

MUIR, 1973; CRASE *et al.*, 1990; DA SILVA *et al.*, 2020; GUITTON e SYMES, 2003; JI, 2012; SCALES e GERSZTENKORN, 1988) e também dados magneto-telúricos (por exemplo, CHAVE *et al.*, 1987; EGBERT e BOOKER, 1986; LARSEN *et al.*, 1996; MATSUNO *et al.*, 2014; SUTARNO e VOZOFF, 1991). Neste trabalho, o foco será sobre os métodos para inversão de dados de campos potenciais na presença de fontes interferentes que usam medidas robustas da função desajuste dos dados ou uma abordagem semelhante.

SILVA e HOHMANN (1983b) apresentam uma inversão magnética não linear 2D para estimar a geometria de corpos simples via algoritmo de busca aleatória. Eles mostraram que as soluções obtidas usando a norma-1 são melhores do que a norma-2 quando há pequenas fontes interferentes rasas. SILVA e CUTRIM (1989) propõem um estimador de máxima probabilidade para inverter dados gravimétricos e magnéticos com base na suposição de erros que seguem uma distribuição de Cauchy. Eles mostraram que seu método é mais robusto do que aqueles baseados nas normas 1 e 2 quando há a presença de ruído geológico. BELTRÃO *et al.* (1991) desenvolveram uma abordagem robusta de mínimos quadrados reponderados iterativamente ou - do inglês *Iteratively Reweighted Least Squares* - (SCALES e GERSZTENKORN, 1988) para estimar os coeficientes de um polinômio que representa o campo gravitacional regional. Eles assumem que o campo residual não muda seu sinal em toda a área de estudo. BARBOSA e SILVA (2006) introduziram uma inversão magnética 2D robusta para lidar com fontes interferentes. Esse método estima a espessura das fontes magnéticas sobre um conjunto de elementos geométricos definidos pelo usuário, como segmentos de reta e pontos colocados em uma profundidade apropriada para representar as fontes interferentes. Vale ressaltar que a robustez desse método não se deve ao uso de uma medida robusta de desajuste dos dados, mas ao seu esquema de concentração da distribuição de propriedade física estimada ao redor dos elementos geométricos. SILVA DIAS *et al.* (2007) propõem uma inversão de gravidade 2D baseada em uma abordagem IRLS para estimar a geometria de uma interface complexa entre dois meios contendo heterogeneidades de densidade. UIEDA e BARBOSA (2012) apresentam um método robusto de inversão do gradiente de gravidade para estimar a distribuição de densidade 3D em uma malha de prismas retangulares. Seu método desenvolve sistematicamente a solução em torno de prismas especificados pelo usuário com valores de contraste de densidade predefinidos. Eles usam a função desajuste dos dados da norma-1 para ignorar o efeito de fontes interferentes. OLIVEIRA JR. *et al.* (2015) propõem um método IRLS robusto para estimar a direção da magnetização total de fontes magnéticas simples na presença de ruído geológico..

Este trabalho apresenta uma inversão magnética não linear robusta para estimar a geometria de uma fonte alvo 3D na presença ou não de fontes interferentes. Este método é uma extensão dos trabalhados apresentados por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), para inverter dados de gravidade e gradiometria gravimétrica, e o de VITAL *et al.* (2019), para inverter dados de anomalia de campo total. Aproximamos a fonte por um modelo interpretativo formado por prismas retos justapostos verticalmente com seções horizontais definidas por polígonos, todos eles com o mesmo número de vértices. Por conveniência, todos os prismas têm a mesma espessura e intensidade de magnetização total. Da mesma forma que VITAL *et al.* (2019), este método estima a posição horizontal e a forma das seções horizontais de todos os prismas, bem como uma espessura constante comum para todos os prismas que formam o modelo de interpretativo. Também presume-se que a fonte alvo tenha uma direção de magnetização total conhecida. O método apresentado por VITAL *et al.* (2019) geralmente falha em estimar corretamente a geometria de uma fonte alvo na presença de fontes interferentes. Essa limitação é uma consequência da estimativa corpos que utiliza a função de desajuste dos dados definida como a norma-2 ao quadrado dos resíduos entre os dados de anomalia de campo total observados e aqueles produzidos pelo modelo de interpretativo (dados preditos). Por conveniência, chamamos esses corpos estimados de soluções de L2. Para contornar essa limitação, diferentes corpos foram estimados, minimizando uma função objetivo composta de cinco funções de regularização e a função de desajuste dos dados que representada pela norma-1 dos resíduos entre os dados observados e preditos. Os corpos estimados, convenientemente chamados de soluções L1, são obtidos a partir de um conjunto de valores especificados pelo usuário de profundidade do topo e intensidade de magnetização total. A melhor solução L1 é definida como aquela que produz o menor valor da função objetivo e representa a melhor aproximação para a fonte alvo. Este método também produz soluções L2 para comparação. Da mesma forma que OLIVEIRA JR. *et al.* (2011), OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), e VITAL *et al.* (2019), nossas funções de restrição são definidas usando regularização Tikhonov de ordem zero e de primeira ordem (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019, p. 96 e 104) com o objetivo de obter soluções estáveis e também introduzir informação a priori sobre a fonte alvo.

Este método foi aplicado para inverter dados sintéticos produzidos por um corpo geológico simples com forma de funil que satisfaz a maioria dos vínculos e um complexo que exibe uma forma variável com a profundidade e viola alguns dos vínculos impostos neste trabalho. Os corpos simulados representam as fontes alvos 3D. Os resultados obtidos sem qualquer fonte interferente mostram que as melhores soluções L2 e L1 são muito semelhantes entre si e são capazes de recuperar satisfatoriamente a forma, a profundidade até o topo e a intensidade de magnetização total da fonte alvo. O método também foi aplicado para inverter os dados magnéticos produzidos pela fonte alvo na presença de uma fonte interferente pequena e uma grande. Em ambos os casos, a melhor solução L1 é superior à melhor solução L2 não apenas na recuperação da geometria da fonte alvo, mas também na estimativa da profundidade do topo e valores de intensidade de magnetização total mais próximos dos verdadeiros. Os resultados com fontes interferentes mostram que, ao usar a norma 1, o método é capaz de ignorar corretamente a anomalia de campo total produzida por fontes interferentes.

Este método foi aplicado para interpretar anomalias de campo total produzidas por complexos alcalinos brasileiros. Resultados com o complexo alcalino-carbonatítico de Anitápolis, SC, mostram uma intrusão inclinada aparentemente controlada por uma falha orientada aproximadamente a N30O, com profundidade do topo em $\approx$ 240 m, intensidade de magnetização total $\approx$ 14 A/m e extensão vertical de $\approx$ 3 km. Esse resultado está de acordo com as informações a priori disponíveis na área de estudo e contribui para o debate sobre o controle estrutural do complexo de Anitápolis (GOMES *et al.*, 2018; RICCOMINI *et al.*, 2005). Os resultados obtidos pela inversão dos dados magnéticos sobre o complexo Diorama, na Província Alcalina de Goiás, sugerem a presença de fontes interferentes rasas no topo um pequeno corpo com profundidade do topo em $\approx$ 250 m, forte intensidade de magnetização total $\approx$ 18 A/m e extensão vertical de $\approx$ 2.4 km. O corpo estimado parece ser influenciado por uma tendência quase N50E falha, que está em linha com a direção dos diques que cruzam o embasamento pré-cambriano na área de estudo JUNQUEIRA-BROD *et al.* (2002).

Capítulo 2

Dados magnéticos

Em geomagnetismo, é muito comum dividir o campo geomagnético em duas componentes: campo interno e campo externo (HULOT *et al.*, 2015). Correntes elétricas localizadas na ionosfera e magnetosfera são responsáveis pela componente externa do campo geomagnético. Já o campo interno pode ser subdivido em outras duas componentes: campo principal e campo crustal. A componente mais intensa do campo geomagnético é o campo principal que é produzido por um dínamo auto-sustentável que age no núcleo externo da Terra. Por último, o campo crustal é produzido por rochas magnetizadas localizadas na litosfera (HULOT *et al.*, 2015; LANGEL e HINZE, 1998). Essas rochas magnetizadas em subsuperfície são usualmente chamadas de fontes magnéticas (BLAKELY, 1996; NABIGHIAN *et al.*, 2005).

Em geofísica aplicada, os interesses estão voltados em interpretar o campo crustal e para isso ele precisa ser separado das outras componentes. As medidas realizadas em levantamentos magnéticos correspondem à resultante dos campos principal, crustal e externo. O campo externo é normalmente considerado ruído e é removido do dado junto aos ruídos antropogênicos. Então, o campo restante pode ser considerado a soma dos campos principal e crustal (HULOT *et al.*, 2015) que é chamado também de campo total(BLAKELY, 1996). Essa nomenclatura está presente na geofísica de exploração e que será utilizada aqui. Frequentemente, modelos matemáticos como o IGRF - do inglês *International Geomagnetic Reference Field* - descrevem o campo principal em todos os pontos da Terra. A diferença entre a magnitude do campo total e a magnitude do campo crustal no mesmo ponto é denominada anomalia de campo total (BLAKELY, 1996; NABIGHIAN *et al.*, 2005):

$$\Delta T(x, y, z) = \|\mathbf{T}(x, y, z)\| - \|\mathbf{F}(x, y, z)\|, \tag{2.1}$$

em que "$\| \|$"indica a norma Euclidiana, $\mathbf{F}_i$ é o campo principal da Terra e $\mathbf{T}_i$ é o campo total, que é representado por

$$\mathbf{T}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + \mathbf{B}(x, y, z), \tag{2.2}$$

em que $\mathbf{B}$ é a indução magnética produzida pelas fontes magnéticas ou também chamado de campo crustal.

Para estudos locais e regionais, o campo principal pode ser considerado um vetor constante desde que a aquisição dos dados tenha sido feita em um curto período de tempo. Portanto, o campo principal ao longo da área de estudo pode ser escrito como

$$\mathbf{F}_0 = \|\mathbf{F}_0\|\hat{\mathbf{F}}\ , \tag{2.3}$$

em que

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \cos(I_0)\cos(D_0) \\ \cos(I_0)\sin(D_0) \\ \sin(I_0) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

é um versor que contém a inclinação I_0 e declinação D_0 do campo principal que são constantes. Na maioria dos casos, podemos considerar que $\|\mathbf{F}_0\| \gg \|\mathbf{B}_i\|$ em todos os pontos sobre a área de estudo (BLAKELY, 1996). Em outras palavras, pode-se dizer que $\mathbf{B}_i$ é uma pequena perturbação do campo principal $\mathbf{F}_0$ na área de estudo. Essas premissas permitem aproximar a norma Euclidiana do campo total $\mathbf{T}_i$ em uma expansão de série de Taylor em primeira ordem obtendo:

$$\|\mathbf{T}(x, y, z)\| \approx \|\mathbf{F}_0\| + \hat{\mathbf{F}}_0^\top \mathbf{B}(x, y, z), \tag{2.5}$$

logo

$$\tilde{\Delta T}(x, y, z) = \hat{\mathbf{F}}_0^\top \mathbf{B}(x, y, z)\ , \tag{2.6}$$

em que $\tilde{\Delta T}(x, y, z)$ é a anomalia de campo total aproximada e "$^\top$"indica transposição.

Considere um corpo de e volume v uniformemente magnetizado com um vetor constante de magnetização $\mathbf{m} = m\,\hat{\mathbf{m}}$, em que m é intensidade de magnetização e $\hat{\mathbf{m}}$ é um versor que contém a direção de magnetização da fonte. As unidades da intensidade de magnetização e das coordenadas são amperes por metro (A/m) e metro (m), respectivamente. Assim, a indução magnética $\mathbf{B}(x, y, z)$ em nanoteslas produzida no ponto (x, y, z) por uma fonte pode ser escrita como

$$\mathbf{B}(x, y, z) = c_m \frac{\mu_0}{4\pi} m\, \mathbf{M}(x, y, z)\, \hat{\mathbf{m}}\ , \tag{2.7}$$

em que $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ H/m é a permeabilidade magnética do vácuo, $c_m = 10^9$ é uma constante de transformação de Tesla (T) para nanotesla (nT) e $\mathbf{M}(x, y, z)$ é uma matriz dada por

$$\mathbf{M}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\phi(x, y, z) & \partial_{xy}\Phi(x, y, z) & \partial_{xz}\phi(x, y, z) \\ \partial_{xy}\phi(x, y, z) & \partial_{yy}\Phi(x, y, z) & \partial_{yz}\phi(x, y, z) \\ \partial_{xz}\phi(x, y, z) & \partial_{yz}\Phi(x, y, z) & \partial_{zz}\phi(x, y, z) \end{bmatrix} , \tag{2.8}$$

com $\partial_{\alpha\beta}\phi(x, y, z)$, $\alpha = x, y, z$, $\beta = x, y, z$ que são as segundas derivadas com respeito às coordenadas x, y e z da função $\Phi(x, y, z)$ dada por

$$\Phi(x, y, z) = \int\int\limits_{v}\int \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}\, dv' \tag{2.9}$$

que é a integral tripla sobre as coordenadas x', y' e z' ao longo do volume v da fonte magnética.

Portanto, substituindo a Equação 2.7 na Equação 2.6, obtemos

$$\tilde{\Delta T}(x, y, z) = c_m \frac{\mu_0}{4\pi} m\, \hat{\mathbf{F}}^\top \mathbf{M}(x, y, z)\, \hat{\mathbf{m}} \,. \tag{2.10}$$

Podemos notar pela Equação 2.10 que, uma vez que a magnetização e campo principal possuem direções arbitrárias, a anomalia de campo total pode assumir valores positivos e negativos ao longo da área de estudo. Por essa razão, o valor máximo ou mínimo de anomalia de campo total não estarão localizados sobre a fonte diferentemente de dados gravimétricos, impedindo uma interpretação direta dos dados magnéticos. Para contornar esse problema, uma transformação é feita sobre os dados de anomalia de campo total chamada de redução ao polo que foi proposta por BARANOV (1957). Esse método reduz a expressão da anomalia de campo total $\tilde{\Delta T}(x, y, z)$ (2.10) a uma mais simples dada por

$$\Delta T^P(x, y, z) = c_m \frac{\mu_0}{4\pi} m\, \partial_{zz}\phi(x, y, z) \,, \tag{2.11}$$

a qual descreve a anomalia de campo total de produzida por uma fonte que estaria localizada no polo. Nessa situação, tanto o campo principal e quanto a magnetização da fonte possuem uma direção vertical, ou seja, os vetores $\hat{\mathbf{F}}$ e $\hat{\mathbf{m}}$ (Equação 2.10) seriam iguais a $\mathbf{u} = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]^\top$. Podemos notar que $\Delta T^P(x, y, z)$ (Equação 2.11) depende do conhecimento exato do volume e localização da fonte magnética, o qual é impossível de saber na prática. Assim, se faz necessário o uso de uma técnica de processamento de dados como a camada equivalente para se obter a anomalia de campo total reduzida ao polo ou anomalia RTP (do inglês *reduced to the pole*).

A camada equivalente é uma técnica de processamento para aplicação em dados magnéticos e gravimétricos. A técnica teve início há mais de 50 anos atrás com DAMPNEY (1969) e EMILIA (1973) e vem sendo utilizada como uma ferramenta versátil no processamento de dados em métodos potenciais. Os trabalhos publicados mostram uma vasta gama de aplicações para a técnica tais como interpolação, redução ao polo, separação regional-residual, continuações para cima e para baixo (HANSEN e MIYAZAKI, 1984; LI e LI, 2014; MACLENNAN e LI, 2013; MENDONÇA, 1992; MENDONÇA e SILVA, 1995; MENDONÇA, 2004; SILVA, 1986). Um dos obstáculos da técnica é seu alto custo computacional e, por isso, alguns estudos são direcionados a reduzir o tempo de processamento da camada equivalente (LEÃO e SILVA, 1989; MENDONÇA e SILVA, 1994; MENDONÇA, 2020; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2013; SIQUEIRA *et al.*, 2017; TAKAHASHI *et al.*, 2020).

Essa técnica se aproveita da ambiguidade presente nos métodos potenciais para reproduzir um conjunto de dados preditos a partir de uma distribuição 2D fictícia de propriedade física que se aproxime dos dados observados gerados por uma fonte 3D real. Isso permite diversas aplicações e uma delas é obter uma outra quantidade derivada dos dados observados. Neste trabalho, a anomalia reduzida ao polo será estimada a partir de dados de dados reais de anomalia de campo total.

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Problema direto

Seja $\mathbf{d}^o \equiv \mathbf{\Delta T}$ o vetor de dados observados, cujo i-ésimo elemento d_i^o, $i = 1, \ldots, N$, é a anomalia de campo total observada no ponto (x_i, y_i, z_i). Considere que as anomalias de campo total produzidas por pequenas fontes magnéticas interferentes distorcem localmente a anomalia causada por uma fonte alvo 3-D. Por simplicidade, podemos assumir que o campo geomagnético principal é constante na área de estudo, com declinação D_0 e inclinação I_0. Este trabalho segue a mesma abordagem apresentada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011), OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), e VITAL *et al.* (2019) para definir o modelo interpretativo que aproxima a geometria da fonte alvo. Esse modelo é formado por um conjunto de L prismas retos verticalmente justapostos tendo a mesma espessura dz e o mesmo vetor de magnetização total com intensidade m_0, declinação D e inclinação I (Figura 3.1).

A profundidade do topo do prisma mais raso é definida por z_0. Cada prisma possui a seção horizontal definida por um polígono com V vértices igualmente espaçados de 0° a 360°. As posições horizontais dos vértices que formam o k-ésimo prisma são definidas por distâncias radiais (ou apenas raios) r_j^k, com respeito a uma origem (x_0^k, y_0^k) localizada dentro do prisma, $k = 1, \ldots, L$, $j = 1, \ldots, V$ (Figura 3.2). A anomalia de campo total predita pelo modelo interpretativo no ponto (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, N$, é dada por:

$$d_i(\mathbf{p}) \equiv \sum_{k=1}^{L} f_i^k(\mathbf{r}^k, x_0^k, y_0^k, dz, z_1^k, m_0, D, I, D_0, I_0) \,, \tag{3.1}$$

em que $\mathbf{r}^k$ é um vetor de dimensão $V \times 1$ que contém os raios r_j^k dos vértices pertencentes ao k-ésimo prisma, que possui origem no ponto (x_0^k, y_0^k) e profundidade do topo em $z_1^k = z_0 + (k-1)dz$. Na Equação 3.1, $\mathbf{p}$ é um vetor de parâmetros de dimensão $M \times 1$, $M = L(V+2)+1$, que define a geometria do modelo interpretativo:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{1\top} & x_0^1 & y_0^1 & \ldots & \mathbf{r}^{L\top} & x_0^L & y_0^L & dz \end{bmatrix}^\top , \tag{3.2}$$

em que o sobre-escrito "$\top$"indica transposição. A anomalia de campo total $d_i(\mathbf{p})$ (Equação 3.1) é computada por meio das fórmulas de PLOUFF (1976) implementadas no pacote de Python Fatiando a Terra (UIEDA *et al.*, 2013).

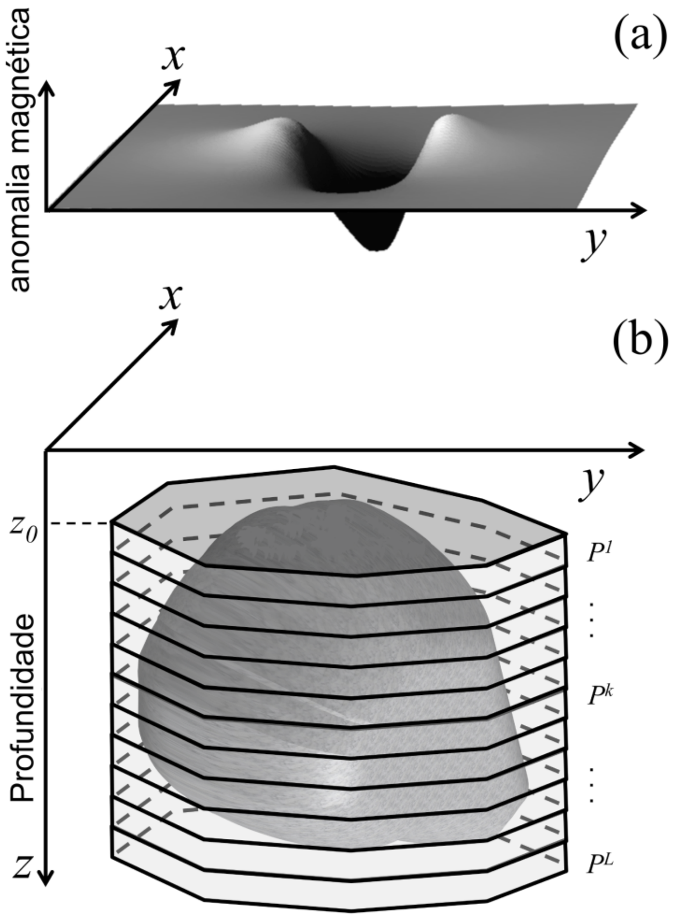

Figura 3.1: Representação esquemática do modelo interpretativo. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética 3D localizada em subsuperfície (volume cinza escuro em b). (b) Modelo interpretativo formado por L prismas retos, verticalmente justapostos e com seção horizontal descrita por um polígono. A profundidade do topo z_0 do modelo interpretativo coincide com a da fonte magnética (volume cinza escuro).

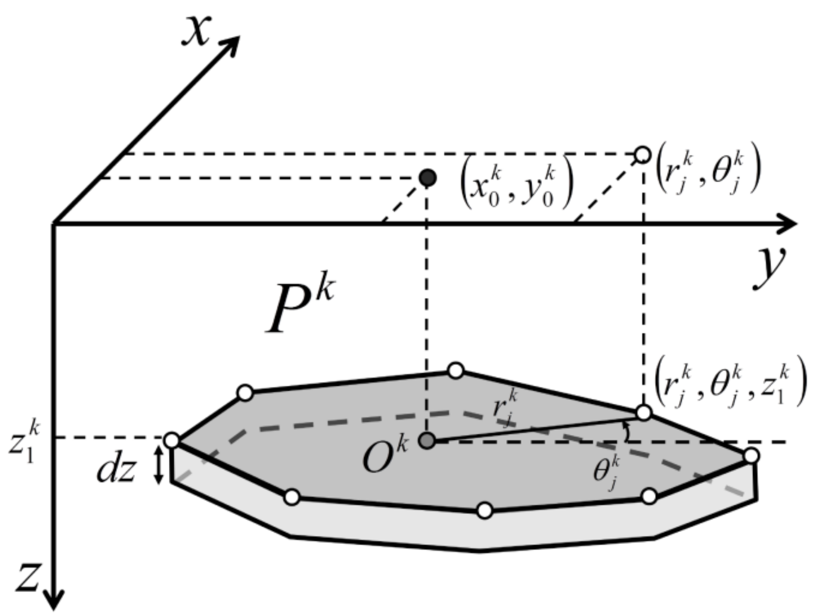

Figura 3.2: Representação esquemática do k-ésimo prisma P^k, $k = 1, \ldots, L$, que compõe o modelo interpretativo (Figura 1b). Este prisma tem espessura dz, profundidade do topo z_1^k e seção horizontal descrita por um polígono com V vértices igualmente espaçados entre 0° e 360°. A posição dos vértices é descrita em termos das coordenadas polares r_j^k e θ_j, $j = 1, \ldots, V$, em relação a uma origem O^k com coordenadas Cartesianas (x_0^k, y_0^k)

3.2 Problema inverso

Este trabalho propõe um método robusto de inversão magnética para estimar a posição e a forma de uma fonte magnética alvo 3D que podem ou não estar na presença de fontes interferentes. A formulação do problema consiste em um problema de otimização não-linear vinculado para estimar um vetor de parâmetros $\mathbf{p}$ (Equação 3.2) minimizando a função objetivo

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}) + \sum_{\ell=1}^{5} \alpha_\ell \, \varphi_\ell(\mathbf{p}) \, , \tag{3.3}$$

sujeito aos vínculos de desigualdade

$$p_l^{min} < p_l < p_l^{max}, \quad l = 1, \ldots, M \, , \tag{3.4}$$

em que p_l^{min} e p_l^{max} definem, respectivamente, os limites inferior e superior para o l-ésimo elemento p_l do vetor de parâmetros $\mathbf{p}$, $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ são as funções que representam os vínculos que impõem informação a priori sobre a forma da estimativa do corpo 3D, e $\phi(\mathbf{p})$ é a função desajuste dos dados ou *data-misfit* em inglês. Podemos definir $\phi(\mathbf{p})$ através de duas abordagens diferentes com o propósito de comparar os resultados.

Na primeira abordagem, $\phi(\mathbf{p})$ é definida de acordo com o trabalho de VITAL *et al.* (2019) como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N}\|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_2^2 \quad , \tag{3.5}$$

que é a norma-2 quadrática (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre o vetor de dados observados $\mathbf{d}^o$, cujo i-ésimo elemento d_i^o representa a anomalia de campo total observada no ponto (x_i, y_i, z_i), e o vetor de dados preditos $\mathbf{d}(\mathbf{p})$, cujo i-ésimo elemento $d_i(\mathbf{p})$ é definido pela Equação 3.1. Alternativamente, podemos definir a função *data-misfit* como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N}\|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_1 \quad , \tag{3.6}$$

que representa a norma-1 (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre os vetores de dados observados $\mathbf{d}^o$ e preditos $\mathbf{d}(\mathbf{p})$. É de amplo conhecimento que o vetor de parâmetros que minimiza a norma-2 quadrática (Equação 3.5) pode ser muito afetado negativamente pela presença de pontos espúrios ou *outliers* e também pelo efeito causado por fontes não-alvos (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019; CLAERBOUT e MUIR, 1973; FARQUHARSON e OLDENBURG, 1998; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015; SCALES e GERSZTENKORN, 1988; SILVA e CUTRIM, 1989; SILVA e HOHMANN, 1983b; UIEDA e BARBOSA, 2012). Através da estimativa do vetor de parâmetros obtida pela minimização da norma-1 (Equação 3.6), espera-se que a posição e a forma estimadas do corpo 3D durante a inversão ajustem a anomalia de campo total produzida pela fonte alvo e ignorem a causada pelas fontes interferentes.

Na Equação 3.3, α_ℓ, $\ell = 1, \ldots, 5$, são escalares positivos que definem o peso relativo das funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$. Essas funções são definidas seguindo a mesma abordagem utilizada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011), OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), and VITAL *et al.* (2019).

3.3 Vínculos

As funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equação 3.3), $\ell = 1, \ldots, 5$, utilizadas aqui para obter soluções estáveis e introduzir informação a priori sobre o corpo estimado, foram organizadas em dois grupos.

3.3.1 Vínculos de suavidade

Este grupo é formado pelas variações da regularização de Tikhonov de primeira ordem (ASTER *et al.*, 2019, p. 103) que impõe suavidade sobre os raios r_j^k e sobre as coordenadas Cartesianas x_0^k e y_0^k da origem O^k, $j = 1, \ldots, V$, $k = 1, \ldots, L$, que define a seção horizontal de cada prisma (Fig.3.1b). Elas foram propostas por

OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013) e possuem um papel muito importante em introduzir informação a priori sobre a forma da fonte alvo.

O primeiro vínculo deste grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes que definem a seção horizontal de cada prisma*. Esse vínculo impõe que os raios adjacentes r_j^k e r_{j+1}^k dentro do mesmo prisma devem ter comprimento semelhantes. Isso força que o prisma estimado terá uma forma aproximadamente cilíndrica, que evita descontinuidades abruptas entre as estimativas das distâncias radiais dentro de um mesmo prisma. Sua representação esquemática é mostrada na Figura 3.3.

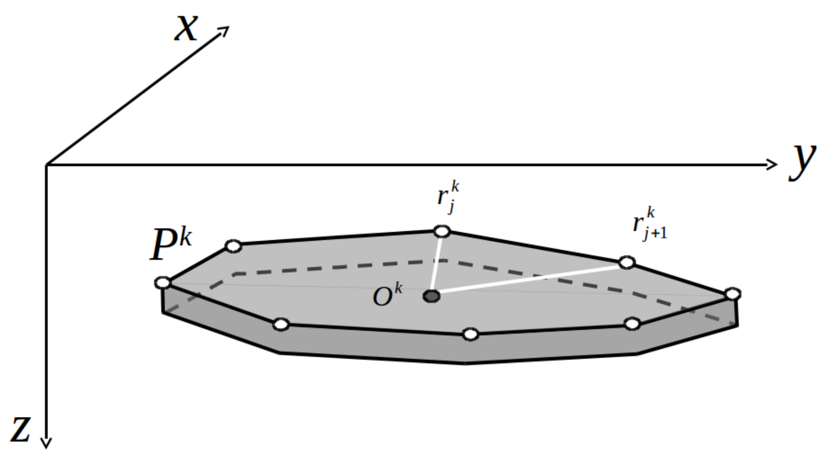

Figura 3.3: Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes dentro de um mesmo prisma φ_1. A figura exibe o k-ésimo prisma P^k e as distâncias radiais adjacentes r_j^k e r_{j+1}^k relacionadas ao vínculo.

Matematicamente, o vínculo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L}\left[\left(r_V^k - r_1^k\right)^2 + \sum_{j=1}^{V-1}\left(r_j^k - r_{j+1}^k\right)^2\right] \\ &= \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_1\mathbf{p} \quad ,\end{aligned} \tag{3.7}$$

em que

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_L \otimes \left[\left(\mathbf{I}_V - \mathbf{D}_V^{\mathsf{T}}\right) \quad \mathbf{0}_{V\times 2}\right]_{(L-1)V\times M} \quad , \tag{3.8}$$

$\mathbf{I}_L$ é a matriz identidade de ordem L, "$\otimes$"indica o produto de Kronecker (**?**, p. 243), $\mathbf{0}_{V\times 2}$ é uma matriz de ordem $V \times 2$ com elementos nulos, $\mathbf{I}_V$ é a matriz identidade de ordem V e $\mathbf{D}_V^{\mathsf{T}}$ é a matriz de permutação superior de ordem V (**?**, p. 20). O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_1(\mathbf{p})$ (Equação 3.7) são dados por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\varphi_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_1\mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_1 \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

O segundo vínculo do grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes de prismas adjacentes*, o qual impõe que os raios adjacentes r_j^k e r_j^{k+1} entre prismas verticalmente adjacentes tenham comprimentos semelhantes. Esse vínculo força que a forma de prismas verticalmente adjacentes seja similar. Uma representação esquemática do vínculo é apresentada na Figura 3.4.

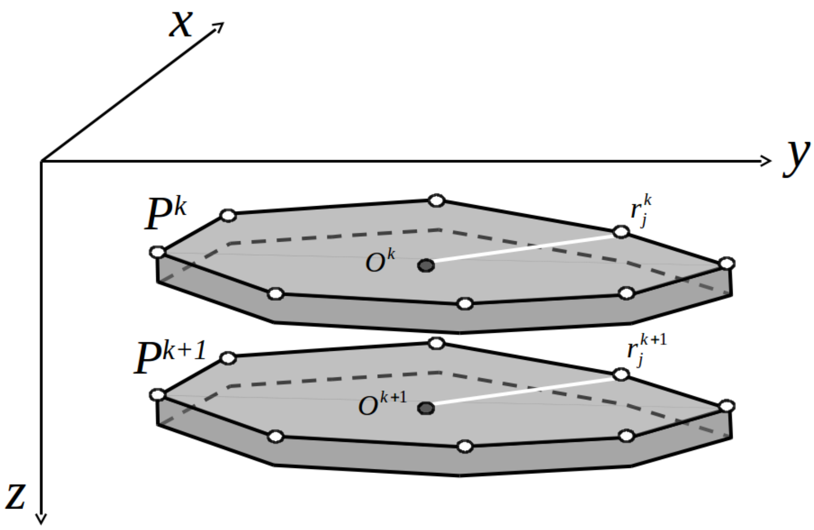

Figura 3.4: Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes pertencentes a prismas adjacentes φ_2. A figura exibe o k-ésimo prisma P^k e seu adjacente P^{k+1}, assim como as distâncias radiais adjacentes r_j^k e r_j^{k+1} relacionadas ao vínculo.

De forma matemática o vínculo é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_2(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1}\left[\sum_{j=1}^{V}\left(r_j^{k+1} - r_j^k\right)^2\right] \quad , \\ &= \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_2\mathbf{p} \end{aligned} \tag{3.10}$$

em que

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{S}_2 & \mathbf{0}_{(L-1)V\times 1}\end{bmatrix}_{(L-1)V\times M} \quad , \tag{3.11}$$

$$\mathbf{S}_2 = \left(\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{L-1} & \mathbf{0}_{(L-1)\times 1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{(L-1)\times 1} & \mathbf{I}_{L-1}\end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V\times 2}\end{bmatrix} \quad , \tag{3.12}$$

$\mathbf{0}_{(L-1)V\times 1}$ é um vetor de ordem $(L-1)V \times 1$ com elementos nulos, $\mathbf{0}_{(L-1)\times 1}$ é um vetor de ordem $(L-1) \times 1$ com elementos nulos e $\mathbf{I}_{L-1}$ é a matriz identidade de ordem $L-1$. O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_2(\mathbf{p})$ (Equação 3.10) são dados por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\varphi_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_2\mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_2 \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

O último vínculo deste grupo é a *suavidade sobre a posição horizontal das origens arbitrárias de prismas verticalmente adjacentes*. Esse vínculo impõe que as coordenadas Cartesianas horizontais estimadas (x_0^k, y_0^k) e (x_0^{k+1}, y_0^{k+1}) das origens O^k e O^{k+1} de prismas verticalmente adjacentes devem ser próximas entre si. Isso controla o mergulho do corpo estimado através da regularização do deslocamento horizontal de prismas verticalmente adjacentes (Figura 3.5).

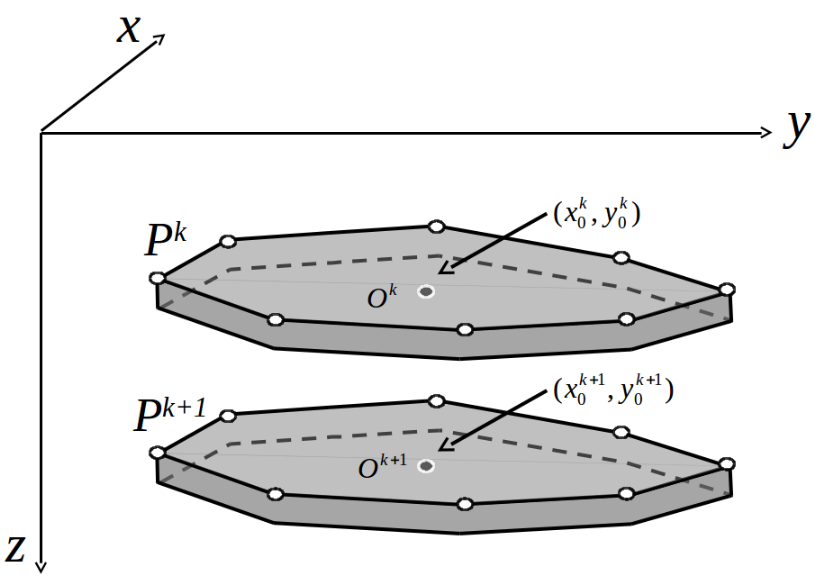

Figura 3.5: Representação esquemática do vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes φ_3. A figura exibe os prismas P^k e P^{k+1} e suas respectivas as coordenadas Cartesianas (x_0^k, y_0^k), referidas à origem O^k, e (x_0^{k+1}, y_0^{k+1}), referidas à origem O^{k+1}.

Algebricamente o vínculo é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_3(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1} \left[\left(x_0^{k+1} - x_0^k\right)^2 + \left(y_0^{k+1} - y_0^k\right)^2 \right] \quad , \\ &= \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_3^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_3\mathbf{p} \end{aligned} \tag{3.14}$$

em que

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_3 & \mathbf{0}_{(L-1)2\times 1} \end{bmatrix}_{(L-1)2\times M} \quad , \tag{3.15}$$

$$\mathbf{S}_3 = \left(\left[\mathbf{I}_{L-1} \quad \mathbf{0}_{(L-1)\times 1} \right] - \left[\mathbf{0}_{(L-1)\times 1} \quad \mathbf{I}_{L-1} \right] \right) \otimes \left[\mathbf{0}_{2\times V} \quad \mathbf{I}_2 \right] \quad , \tag{3.16}$$

$\mathbf{0}_{(L-1)2\times 1}$ é um vetor de ordem $(L-1)2\times 1$ com elementos nulos, $\mathbf{0}_{2\times V}$ é uma matrix de ordem $2 \times V$ com elementos nulos e $\mathbf{I}_2$ é uma matriz identidade de ordem 2. O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_3(\mathbf{p})$ (Equação 3.14) são dados por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\varphi_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_3\mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_3 \quad . \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.3.2 Vínculos de norma Euclidiana mínima

Dois vínculos utilizam a regularização Tikhonov de ordem zero com o propósito de estabilizar de maneira puramente matemática o problema inverso sem necessariamente introduzir informação a priori com significado físico sobre a fonte.

A *norma Euclidiana mínima dos raios* impões que todos os raios estimados dentro de um prisma devem ser próximos de zero (Figura 3.6).

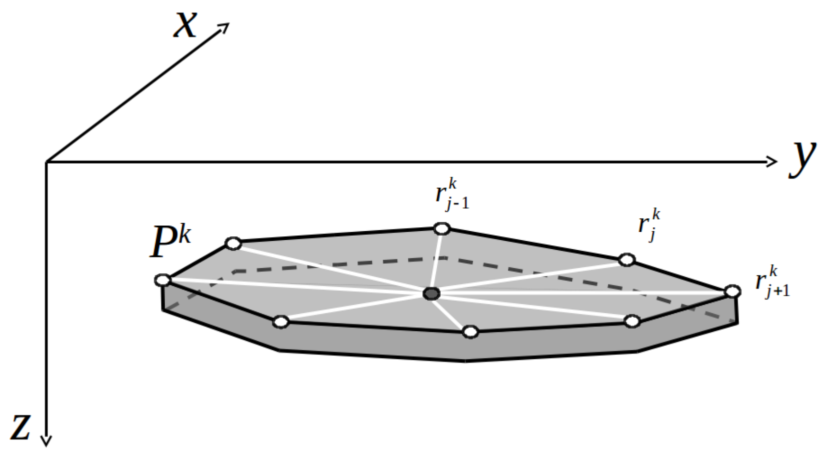

Figura 3.6: Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais de um prisma φ_4. A figura exibe os prisma P^k e suas respectivas distâncias radiais r_j^k referidas à origem O^k. O vínculo atua sobre as distâncias radiais do prismas, levando-as próximas a zero.

Esse vínculo foi proposto por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013) e pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \varphi_4(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L}\sum_{j=1}^{V} \left(r_j^k\right)^2 \quad , \\ &= \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_4^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_4\mathbf{p} \end{aligned} \tag{3.18}$$

em que

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_4 & \mathbf{0}_{(M-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times(M-1)} & 0 \end{bmatrix}_{M\times M} \quad , \tag{3.19}$$

e

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times V} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}_{(V+2)\times(V+2)} \quad . \tag{3.20}$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_4(\mathbf{p})$ (Equação 3.18) são:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\varphi_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\mathsf{T}\mathbf{R}_4\mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\mathsf{T}\mathbf{R}_4 \quad . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Finalmente, o último vínculo é a *norma Euclidiana mínima da espessura*, que impõe que a espessura comum dz de todos os prismas seja próxima de zero. Esse vínculo força que a profundidade da base do modelo seja o mais rasa possível (Figura 3.7)

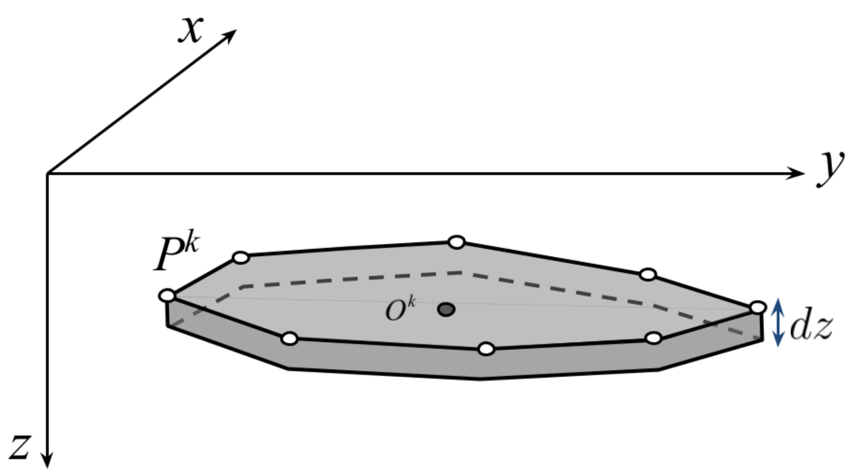

Figura 3.7: Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero φ_5 na espessura dz dos prismas. A figura exibe os prisma P^k e sua espessura. O vínculo atua sobre a espessura de os todos prismas levando-a próxima a zero, uma vez que dz é igual para todos os prismas.

Esse vínculo pode ser escrito matematicamente como

$$\begin{aligned} \varphi_5(\mathbf{p}) &= dz^2 \\ &= \mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{R}_5^\mathsf{T}\mathbf{R}_5\mathbf{p} \quad , \end{aligned} \tag{3.22}$$

em que

$$\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(M-1)\times(M-1)} & \mathbf{0}_{(M-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times(M-1)} & 1 \end{bmatrix}_{M\times M} \quad . \tag{3.23}$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_5(\mathbf{p})$ (Equação 3.22) são:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\varphi_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top\mathbf{R}_5\mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top\mathbf{R}_5 \quad . \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.4 Algoritmo de inversão

Dada um profundidade do topo do prisma mais raso z_0, a intensidade de magnetização total m_0 de todos os prismas, uma aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros $\mathbf{p}$ (Equação 3.2), e os limites p_l^{min} e p_l^{max} (Equação 3.4), o método de Levenberg-Marquardt (por exemplo, SEBER e WILD, 2003, p. 624) é utilizado para estimar o vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}^*$ que minimiza a função objetivo $\Gamma(\mathbf{p})$ (Equação 3.3), sujeita aos vínculos de desigualdade definidos pela Equação 3.4. Para incorporar esses vínculos de desigualdade, foi empregada a mesma abordagem apresentada por BARBOSA *et al.* (1999), OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013). Abaixo, segue o algoritmo de inversão aqui proposto:

entrada $\mathbf{d}^o$, D_0, I_0, z_0, m_0, D, I, p_l^{min} e p_l^{max} (Equação 3.4), $k = 0$, $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$, e $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$, em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem M.

(1) Computa a matriz $N \times M$ $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$, cujo elemento ij é a derivada do dado $d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ (Equação 3.1) com respeito ao j-ésimo elemento p_j do vetor de parâmetros $\mathbf{p}$ (Equação 3.2).

(2) Computa o vetor gradiente

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = -\frac{2}{N}\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top\mathbf{W}_{(k)}\left[\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})\right]$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \frac{2}{N}\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top\mathbf{W}_{(k)}\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

da função *data-misfit* $\phi(\mathbf{p})$ (Equação 3.5), quando $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$, ou $\phi(\mathbf{p})$ (Equação 3.6), quando $\mathbf{W}_{(k)} \neq \mathbf{I}$. Na próxima seção, será discutido como usar a matriz Hessiana $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$ (computada na iteração $k = 0$) para definir os pesos α_ℓ (Equação 3.3) das funções de vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 3.7, 3.10, 3.14, 3.18, 3.22).

(3) Computa o vetor gradiente

$$\boldsymbol{\nabla}\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \boldsymbol{\nabla}\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^{5} \alpha_\ell \, \boldsymbol{\nabla}\varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^{5} \alpha_\ell \, \mathbf{H}_\ell$$

da função objetivo $\Gamma(\mathbf{p})$ (Equação 3.3), em que $\boldsymbol{\nabla}\varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ e $\mathbf{H}_\ell$ são, respectivamente, o vetor gradiente e a matriz Hessiana (Equações 3.9, 3.13, 3.17, 3.21, 3.24) das funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 3.7, 3.10, 3.14, 3.18, 3.22).

(4) Computa o l-ésimo elemento $\hat{p}_l^\dagger$ de um vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$ como:

$$\hat{p}_l^\dagger = -\ln\left(\frac{p_l^{max} - \hat{p}_l}{\hat{p}_l - p_l^{min}}\right) ,$$

em que $\hat{p}_l$ é o l-ésimo elemento de $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$.

(5) Computa uma matriz diagonal $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ com o elemento t_{ll} dado por

$$t_{ll}(\hat{p}_l) = \frac{(p_l^{max} - \hat{p}_l)(\hat{p}_l - p_l^{min})}{p_l^{max} - p_l^{min}} ,$$

em que p_l é o l-ésimo elemento do vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$.

(6) Computa uma matriz

$$\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) .$$

(7) Computa uma matriz diagonal $\mathbf{Q}_{(k)}$ com elemento q_{ll} dado por

$$q_{ll} = \frac{1}{\sqrt{h_{ll}^\dagger}} ,$$

em que $h_{ll}^\dagger$ é o elemento ll da matriz $\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$.

(8) Computa uma correção $\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$ para o vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$ pela solução do sistema linear

$$\mathbf{Q}_{(k)}^{-1}\left[\mathbf{Q}_{(k)}\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})\mathbf{Q}_{(k)} + \lambda_{(k)}\mathbf{I}_M\right]\mathbf{Q}_{(k)}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger = -\boldsymbol{\nabla}\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) ,$$

em que $\lambda_{(k)}$ é um escalar positivo ajustado à cada iteração (por exemplo, SEBER e WILD, 2003, p. 624).

(9) Computa um novo vetor

$$\hat{\mathbf{p}}^{\dagger}_{(k+1)} = \hat{\mathbf{p}}^{\dagger}_{(k)} + \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{p}}^{\dagger}_{(k)} \ .$$

(10) Computa o l-ésimo elemento $\hat{p}_l$ do novo vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$ como:

$$\hat{p}_l = p_l^{min} + \left(\frac{p_l^{max} - p_l^{min}}{1 + e^{-\hat{p}_l^{\dagger}}} \right) \ .$$

(11) Se o seguinte critério de convergência for satisfeito,

$$\left| \frac{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}) - \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})}{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})} \right| \leq \tau \ ,$$

em que τ é um número positivo pequeno, que varia de $\approx 10^{-3}$ a 10^{-4}, que controla a convergência, o vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$ é a solução. Senão, atualiza o vetor de parâmetros

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k)} \leftarrow \hat{\mathbf{p}}_{(k+1)} \ ,$$

atualiza o elemento ii da matriz $\mathbf{W}_{(k)}$

$$w_{ii} = \frac{1}{\mid d_i^o - d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) \mid + \varepsilon} \ ,$$

em que ε possui um valor positivo pequeno ($\approx 10^{-10}$) usado para prevenir uma divisão por zero, atualiza o contador da iteração k

$$k \leftarrow k + 1 \ ,$$

e retorna à etapa (1).

Neste algoritmo, os elementos da matriz $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ (etapa 1) são computados pelo uso das diferenças finitas centradas. É importante notar que na etapa 3 as matrizes Hessianas $\mathbf{H}_\ell$ (Equações 3.9, 3.13, 3.17, 3.21, 3.24) das funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 3.7, 3.10, 3.14, 3.18, 3.22) não dependem do vetor de parâmetros. Por essa razão, eles são computados apenas uma vez antes da primeira iteração e armazenados para serem usados até a convergência ser alcançada (etapa 11).

Este algoritmo é executado para obter um corpo estimado para cada ponto (m_0, z_0) em uma malha de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 definida pelo usuário. Todos os corpos estimados são obtidos através da utilização de uma aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros $\mathbf{p}$

(Equação 3.2), dos mesmos valores para os pesos α_ℓ (Equação 3.3) e dos limites p_l^{min} e p_l^{max} (Eq. 3.4) para os parâmetros estimados. Os valores ótimos da profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 são escolhidos como aqueles associados aos corpos estimados que produzem os menores valores da função objetivo $\Gamma(\mathbf{p})$ (Equação 3.3).

Note que, ao manter a matriz $\mathbf{W}_{(k)}$ (etapa 2 e 10) igual à identidade ao longo das iterações, o corpo estimado minimiza a norma-2 quadrática dos resíduos entro os dados observados e preditos (Equação 3.5). Nesse caso, os corpos estimados são convenientemente denominados *solução L2*. A atualização iterativa dos elementos da matriz $\mathbf{W}_{(k)}$ com os valores absolutos dos resíduos de acordo com a etapa 10 é feita através do método IRLS (ASTER *et al.*, 2019; SCALES e GERSZTENKORN, 1988, p. 46) para obter um corpo estimado que minimiza a norma-1 dos resíduos entre os dados observados e preditos (Equação 3.6). Nesse caso, o corpo estimado é convenientemente chamado de *solução L1*.

3.5 Considerações práticas

Nesta seção serão apresentados alguns aspectos práticos de como definir o conjunto de valores de profundidade do topo do prisma mais raso z_0, a intensidade de magnetização total m_0, a aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros $\mathbf{p}$ (Equação 3.2), os pesos α_ℓ (Equação 3.3) das funções de vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 3.7, 3.10, 3.14, 3.18, 3.22) e os limites p_l^{min} e p_l^{max} dos vínculos de desigualdade (Equação 3.4).

Inicialmente, se calcula a redução ao polo da anomalia de campo total observada. Essa é uma etapa dupla: ele permite a verificação dos valores usados para a direção de magnetização total (declinação D e inclinação I) e é utilizado para estimar as dimensões horizontais da fonte alvo. Se a fonte alvo possui uma direção de magnetização uniforme com valores de declinação e inclinação próximos daqueles escolhidos para D e I, a anomalia RTP é predominantemente positiva sobre a fonte alvo e decai a zero perto de seus limites laterais. Através da anomalia RTP estimada pela camada equivalente, é possível definir os limites p_l^{min} e p_l^{max} (Figura 3.8) dos vínculos de desigualdade (Equação 3.4) e uma aproximação inicial cilíndrica $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$, isto é, todos os prismas que formam $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ possuem os vértices definidos por uma mesma distância radial constante r_0 e a mesma origem (x_0, y_0). Nesta etapa, os pesos são α_ℓ (Equação 3.3) estabelecidos iguais a zero e se define uma malha de valores para a profundidade do topo z_0, intensidade de magnetização total m_0 e espessura dz que produz, sem grande rigor, um ajuste entre dados observados $\mathbf{d}^o$ e dados preditos $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$.

Um segundo aspecto crucial desse algoritmo consiste em definir os valores dos

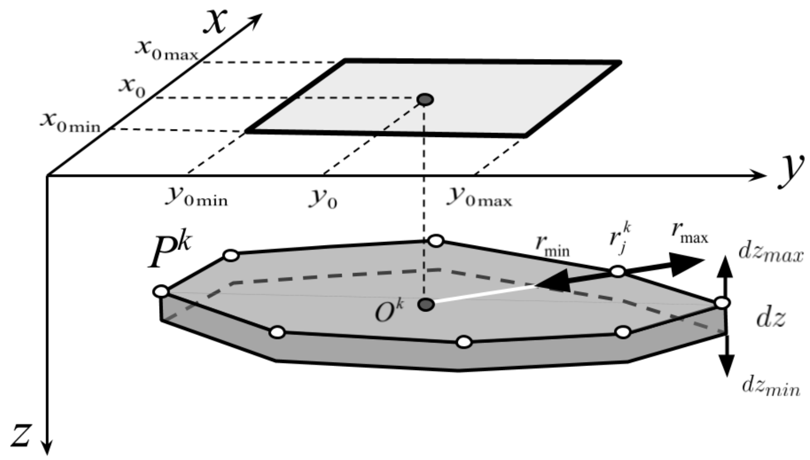

Figura 3.8: Representação esquemática dos vínculos de desigualdade. A figura exibe os prisma P^k e os intervalos de máximo e mínimo de r_j^k, x_0, y_0 e dz.

pesos α_ℓ (Equação 3.3). Não existe uma regra analítica para defini-los e seus valores podem depender das particularidades da área de estudo e do conjunto de dados observados. Para contornar esse problema, os pesos α_ℓ são definidos da seguinte maneira:

$$\alpha_\ell = \tilde{\alpha}_\ell \frac{E_\phi}{E_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, 5 \, , \tag{3.25}$$

em que $\tilde{\alpha}_\ell$ é um escalar positivo e E_ϕ/E_ℓ é o fator de normalização. Nessa equação, E_ℓ representa o traço da matriz Hessiana $\mathbf{H}_\ell$ (Equações 3.9, 3.13, 3.17, 3.21, 3.24) da ℓ-ésima função de vínculo $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 3.7, 3.10, 3.14, 3.18, 3.22). A constante E_ϕ é o traço da matriz Hessiana $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$ (etapa 2 do algoritmo) da função *data-misfit* $\phi(\mathbf{p})$ (Equação 3.6) computada na iteração $k = 0$, com a aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros $\mathbf{p}$ (Equação 3.2). Essa estratégia empírica permite definir indiretamente os pesos α_ℓ (Equação 3.3) pela utilização dos pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25), os quais dependem menos das características particulares do problema. Baseado em experiência prática, os valores iniciais propostos aqui para os pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ se a função *data-misfit* é definida pela Equação 3.5 são: $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. Para o caso no qual a função *data-misfit* é definida pela Equação 3.6, a recomendação é: $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-3}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$, é $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. Esses valores são comumente refinados de acordo com a informação a priori sobre a complexidade da fonte alvo. Por exemplo, ao aumentar ou diminuir valor de $\tilde{\alpha}_1$, força-se que o corpo estimado tenha fatias horizontais mais ou menos suaves; ao aumentar ou diminuir o valor de $\tilde{\alpha}_3$, força-se que o corpo estimado seja mais ou menos vertical. Os pesos normalizados $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, e $\tilde{\alpha}_3$ são comumente usados para introduzir informação a priori sobre o formato da fonte alvo. O peso normalizado $\tilde{\alpha}_4$ é geralmente usado como um parâmetro de regularização puramente matemático para obter soluções estáveis. Finalmente, o peso normalizado $\tilde{\alpha}_5$ é usualmente escolhido com o propósito de obter um corpo estimado com a profundidade da base mais rasa o possível.

Capítulo 4

Aplicação a dados sintéticos

4.1 Modelo simples

Para iniciar os testes do método, foi simulado um corpo geológico simples imerso em meio não magnético (prismas azuis nas Figuras 4.5, 4.7, 4.8, 4.9, 4.11, 4.12, 4.13, 4.15, e 4.16) que representa a fonte alvo 3D com profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 1600 m, centro em $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e um vetor de magnetização total constante com inclinação $-50°$, declinação $9°$, e intensidade 9 A/m. Recuperar a geometria desse corpo simulado é particularmente uma tarefa relativamente simples para esse método porque ele possui um alinhamento vertical e suas fatias horizontais mostram uma forma circular que diminui de tamanho longo da profundidade, assim, é possível notar que o corpo satisfaz perfeitamente quase todos os vínculos impostos nesse método. A anomalia de campo total (Figura 4.1a) produzida pela fonte alvo foi calculada em 1939 pontos localizados sobre uma malha irregular com linhas que simulam um levantamento aéreo (Figura 4.1b). Esses dados sintéticos foram contaminados com um ruído Gaussiano pseudo-aleatório de média zero e desvio padrão igual a 5 nT. O método foi aplicado para inverter esse dado contaminado com ruído e obter soluções L2 e L1. Para cada tipo de solução, foram geradas 36 soluções L2 e 36 soluções L1, todas elas foram obtidas com a mesma malha de varredura 6×6 de profundidades do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. A melhor solução L2 e L1 são definidas como aquelas que produzem o menor valor da função objetivo para cada caso.

A Figura 4.2 mostra a anomalia RTP obtida a partir da anomalia de campo total contaminada com ruído (Figura 4.5a) e a projeção horizontal das aproximações iniciais $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ usadas nas sucessivas inversões (Figuras 4.3 e 4.4). A Figura 4.3a mostra que a melhor solução L2 foi obtida através dos valores verdadeiros da profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. Essa solução L2 produz um ótimo ajuste dos dados (Figura 4.3b), possui uma profundidade da base em 1531.1

m e também recupera a geometria do corpo verdadeiro (Figura 4.3d). A Figura 4.4 mostra um resultado similar, porém com um ajuste dos dados e geometria inferiores aos da solução L2. A profundidade da base foi estimada em 1756.9 m. Podemos observar que nesse teste ambas as abordagens L2 e L1 foram bem sucedidas em estimar a forma do corpo e recuperam as feições principais da fonte alvo. Entretanto, nesse caso, a solução L2 foi superior à solução L1. Todas as soluções L2 e L1 produzidas neste teste foram obtidas usando o seguinte conjunto de pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-4}$. É importante notar que, mesmo a solução L2 sendo superior à L1, não há diferenças significativas entre as soluções L2 e L1 obtidas pelo método.

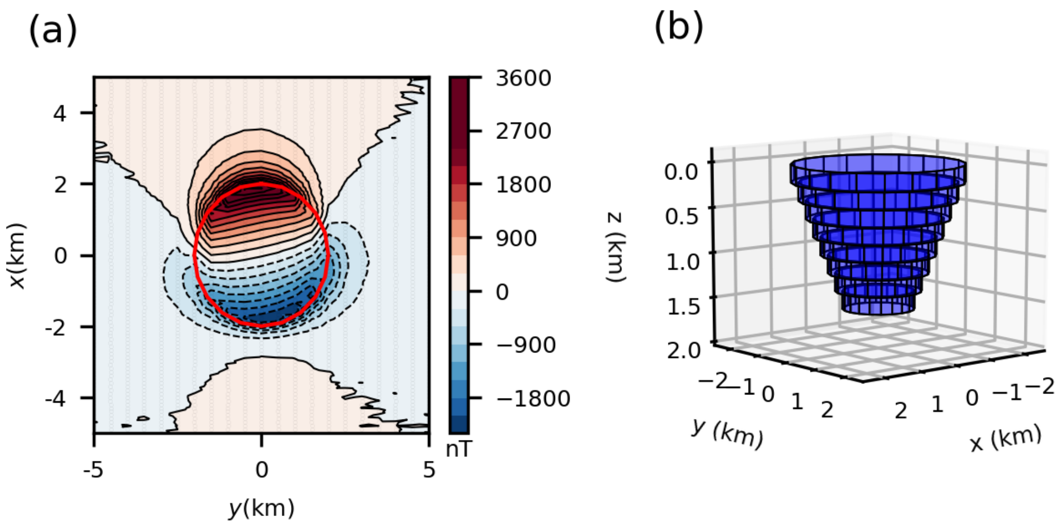

Figura 4.1: Modelo da fonte simples. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte simples (prismas azuis mostrados nos painel b). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ (prismas vermelhos nas Figuras 4.3c). (b) Visualização em perspectiva do modelo da fonte simples representada pelos prismas azuis.

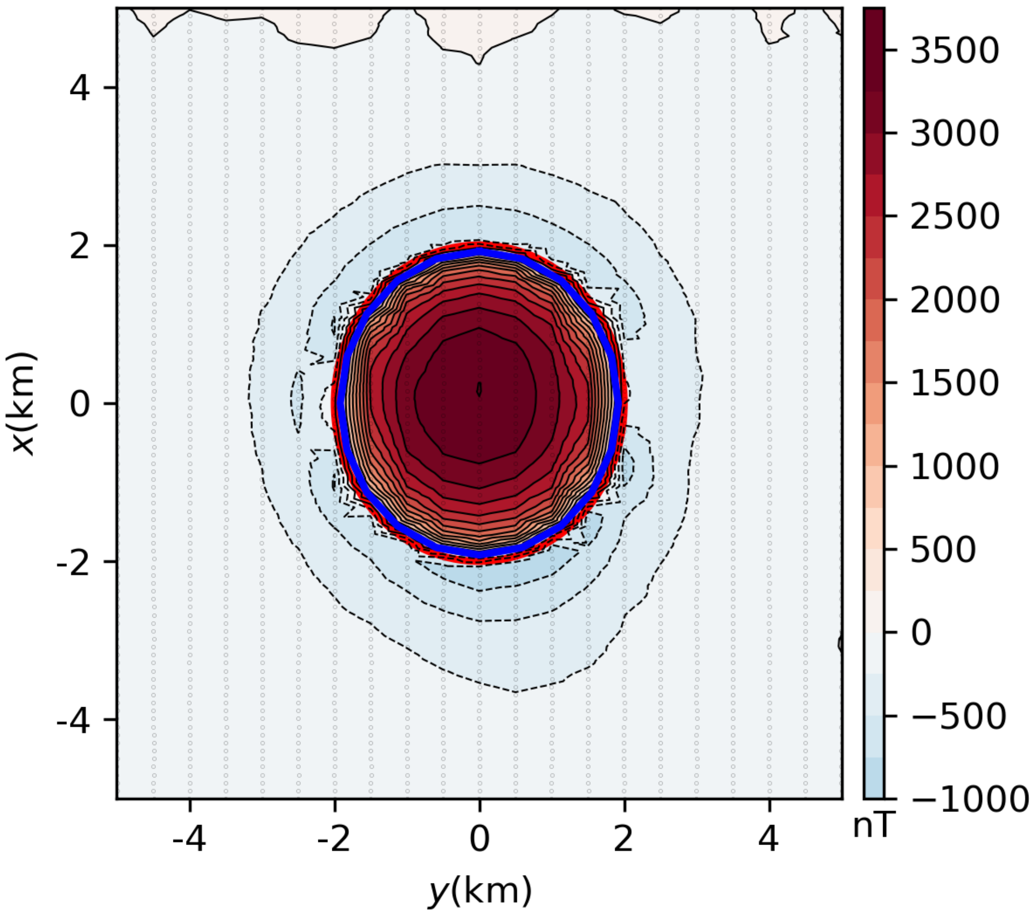

Figura 4.2: Anomalia RTP produzida pela fonte simples. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte simples. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 4.3c e 4.4c).

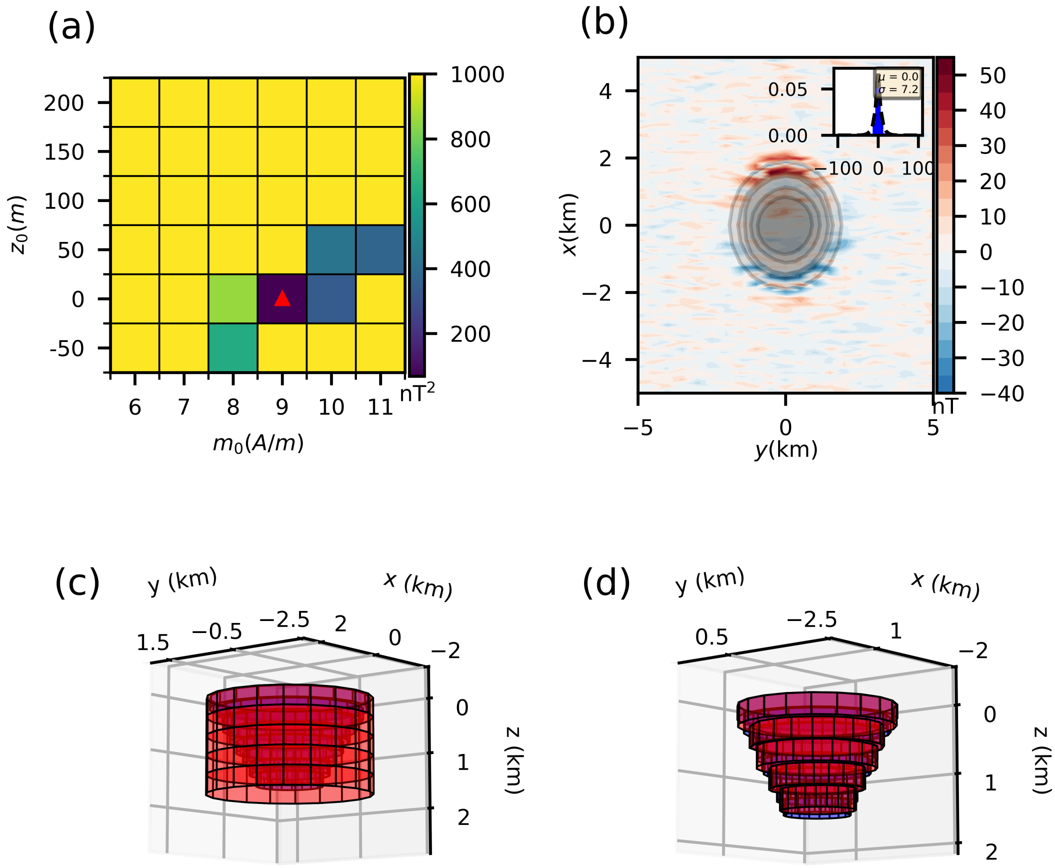

Figura 4.3: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte simples. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0, assim como os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte simples.

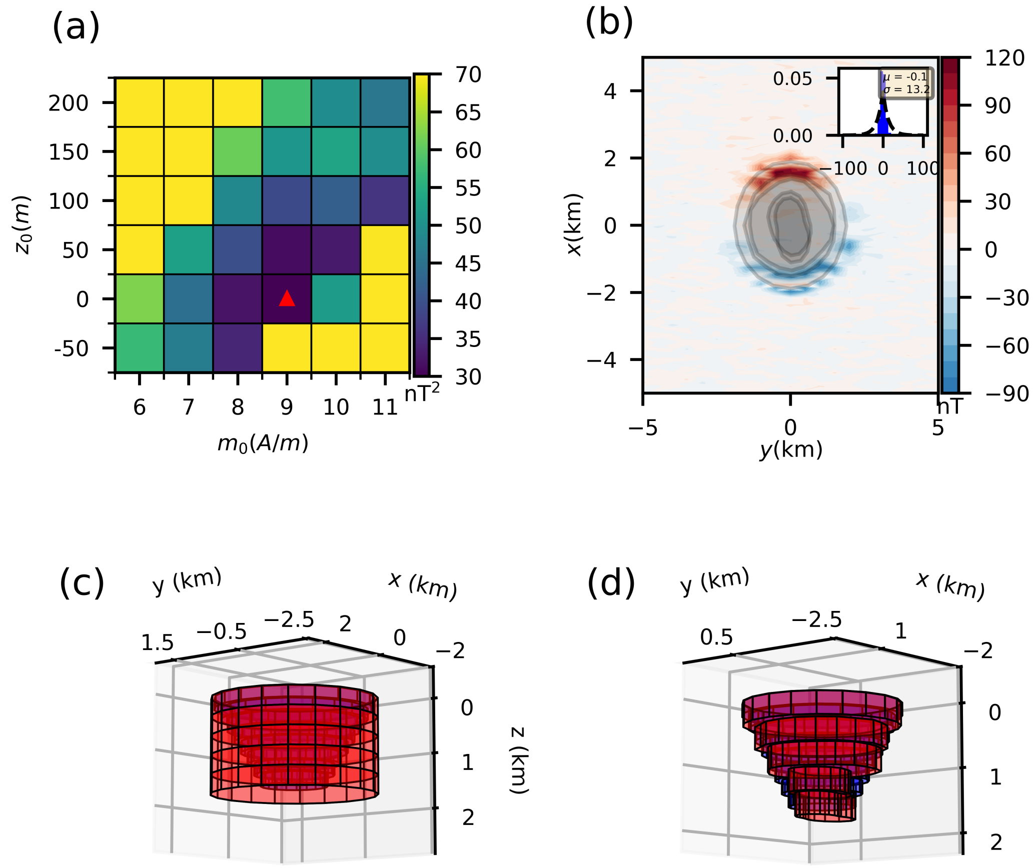

Figura 4.4: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte simples. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0, assim como os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte simples.

4.1.1 Modelo complexo sem fontes interferentes

Com o propósito de aplicar o método a problemas mais realistas, foi simulado um corpo geológico complexo imerso em meio não magnético (prismas azuis nas Figuras 4.5, 4.7, 4.8, 4.9, 4.11, 4.12, 4.13, 4.15, e 4.16) que representa a fonte alvo 3D com profundidade do topo em 130 m, profundidade da base em 6130 m, centro em $(x_0, y_0) = (-250, 250)$ e um vetor de magnetização total constante com inclinação $-50°$, declinação 9°, e intensidade 12 A/m. Recuperar a geometria desse corpo simulado é particularmente uma tarefa complicada porque ele possui um mergulho NO-SE e suas fatias horizontais mostram uma forma que varia ao longo da profundidade, assim, é possível notar que o corpo não satisfaz perfeitamente os vínculos impostos nesse método. A anomalia de campo total (Figura 4.5a) produzida pela fonte alvo foi calculada em 1939 pontos localizados sobre uma superfície ondulada que simula um levantamento aéreo (Figura 4.5b). Esses dados sintéticos foram contaminados com um ruído Gaussiano pseudo-aleatório de média zero e desvio padrão igual a 5 nT. O método foi aplicado para inverter esse dado contaminado com ruído e obter soluções L2 e L1 para três cenários: sem fontes interferentes, com uma fonte interferente relativamente pequena e com uma fonte interferente relativamente grande. Para cada cenário, foram geradas 36 soluções L2 e 36 soluções L1, todas elas foram obtidas com a mesma malha de varredura 6×6 de profundidades do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. A melhor solução L2 e L1 são definidas como aquelas que produzem o menor valor da função objetivo para cada caso.

A Figura 4.6 mostra a anomalia RTP obtida a partir da anomalia de campo total contaminada com ruído (Figura 4.5a) e a projeção horizontal das aproximações iniciais $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ usadas nas sucessivas inversões (Figuras 4.7 e 4.8). A Figura 4.7a mostra que a melhor solução L2 foi obtida através dos valores verdadeiros da profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. Essa solução L2 produz um ótimo ajuste dos dados (Figura 4.7b), possui uma profundidade da base em 6641.8 m e também recupera a geometria do corpo verdadeiro (Figura 4.7d). A Figura 4.8 mostra um resultado similar produzido pela melhor solução L1, que tem profundidade da base em 6156.5 m. O aspecto mais interessante das soluções L2 e L1 obtidas neste teste é que elas recuperam não só as feições principais da fonte mas também seu mergulho e a variação de sua forma ao longo da profundidade. Todas as soluções L2 e L1 produzidas neste teste foram obtidas usando o seguinte conjunto de pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. É importante notar que, devido à ausência de fontes interferentes neste teste, não há diferenças práticas entre as soluções L2 e L1 obtidas pelo método aqui proposto.

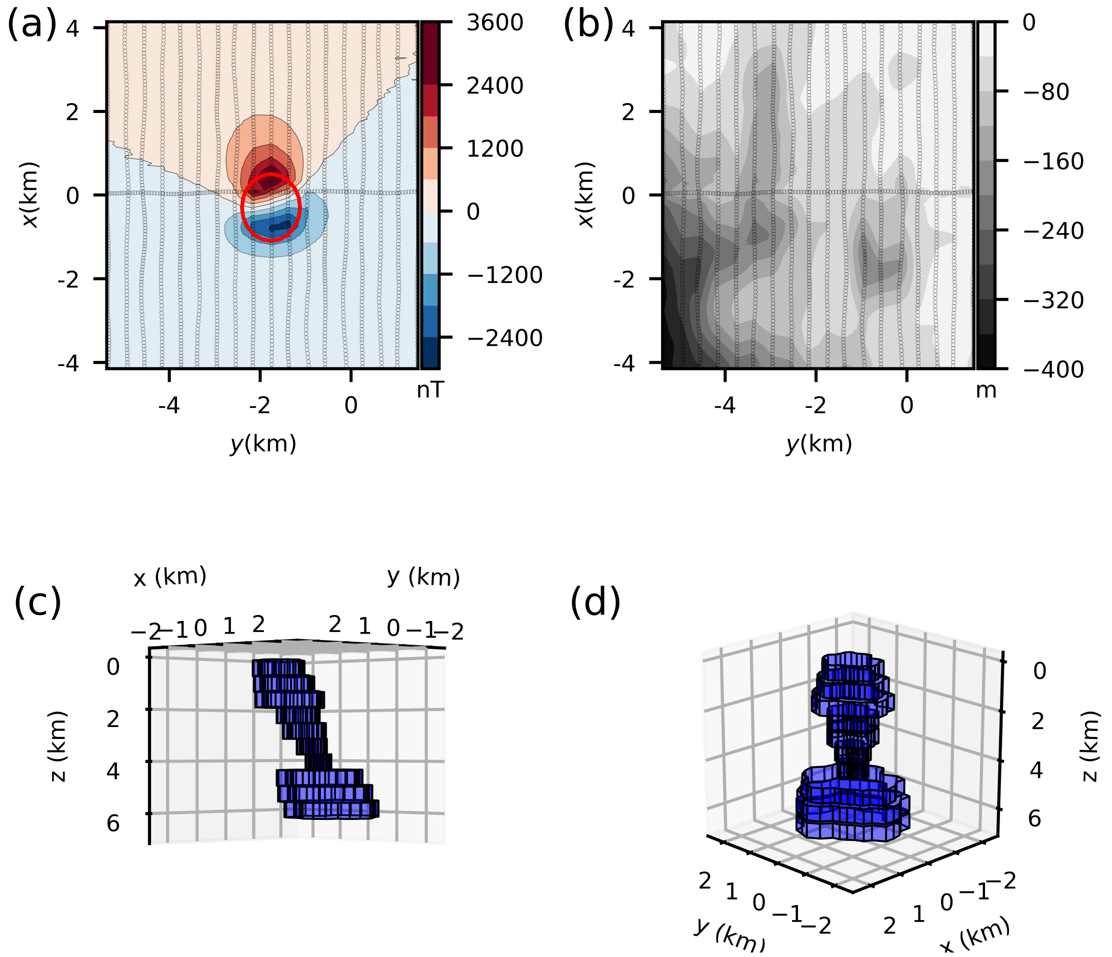

Figura 4.5: Modelo da fonte alvo. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte alvo (prismas azuis mostrados nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ (prismas vermelhos nas Figuras 4.7c e 4.8c). (b) Coordenadas verticais dos pontos de observação que simulam um levantamento aéreo. (c) e (d) Visualizações em perspectiva do modelo da fonte alvo representada pelos prismas azuis.

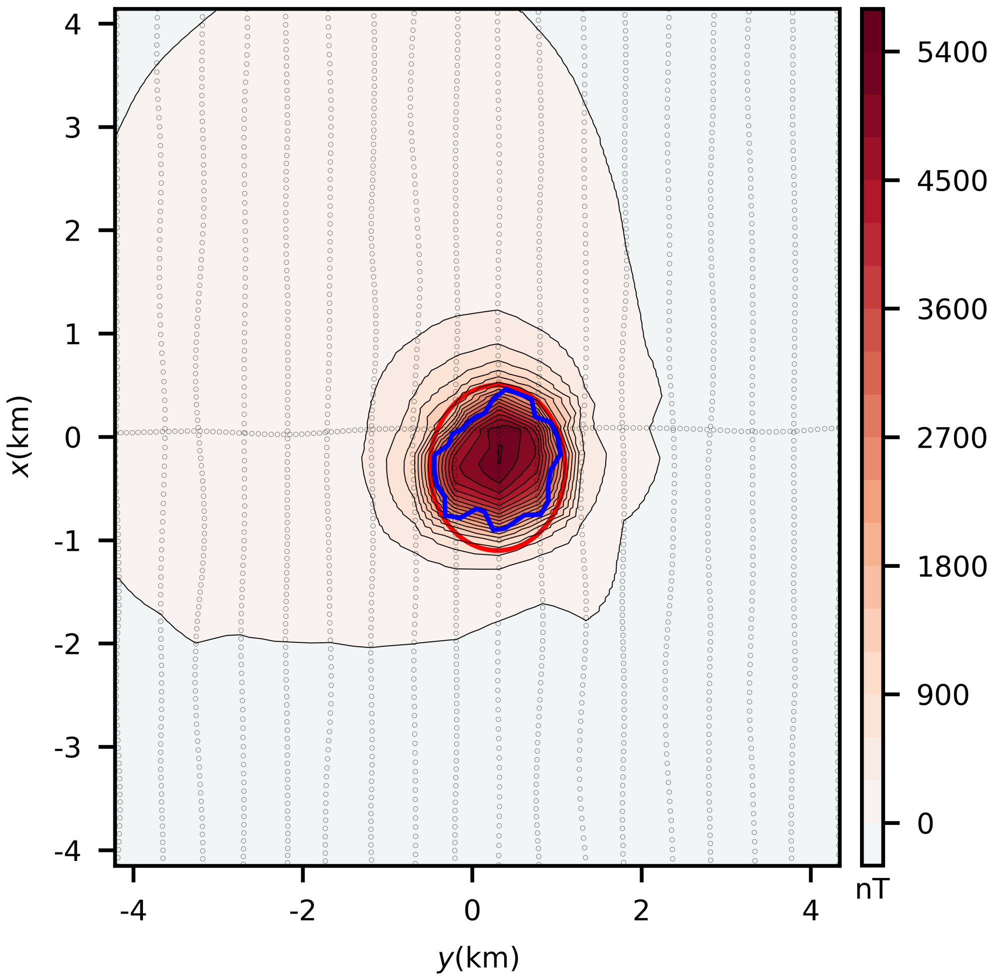

Figura 4.6: Anomalia RTP produzida pela fonte alvo. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 4.7c e 4.8c).

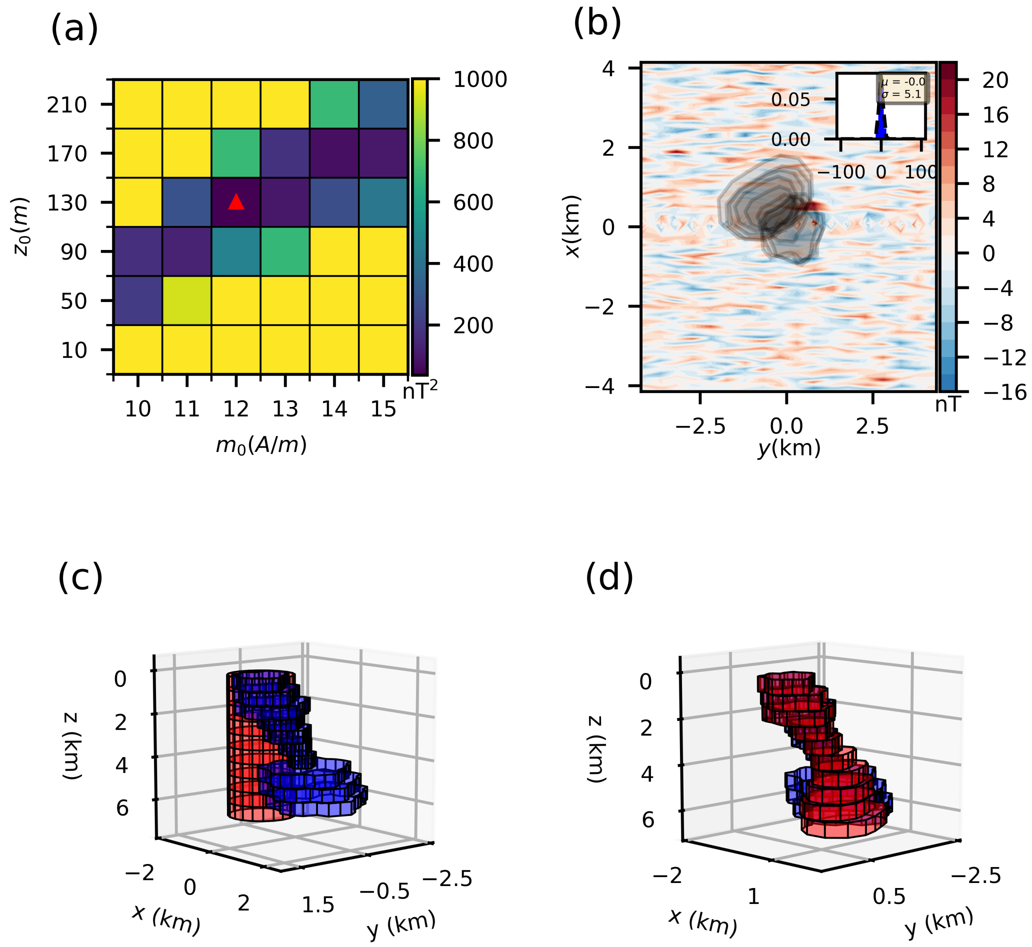

Figura 4.7: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0, assim como os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

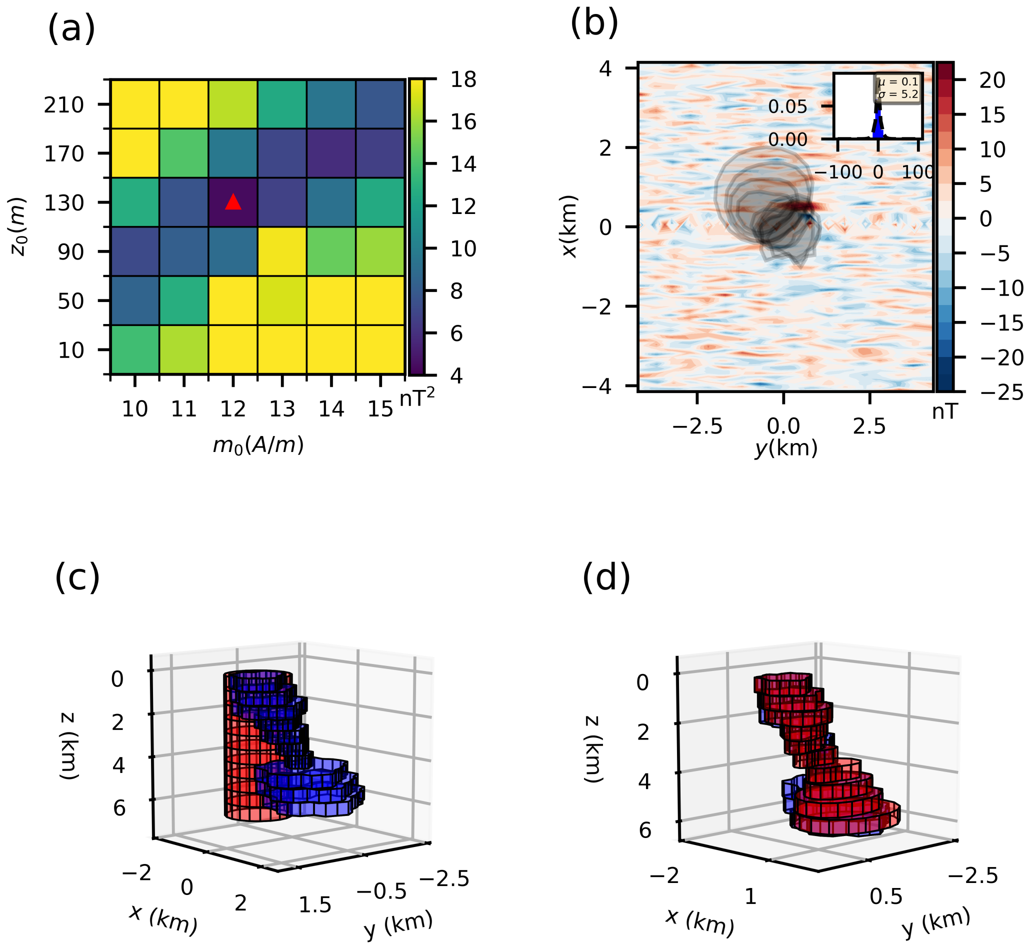

Figura 4.8: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0, assim como os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

4.1.2 Modelo complexo com uma fonte interferente pequena

O mapa da Figura 4.9a representa a soma entre as anomalias de campo total produzidas pela fonte interferente pequena (Figura 4.9b), cuja forma é exibida nas Figuras 4.9c e 4.9d, e aquela produzida pela fonte alvo simulada (Figura 4.5a). A fonte interferente possui profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 70 m, centro em $(x, y) = (-250, 250)$, logo acima da parte mais rasa da fonte alvo, e o mesmo vetor magnetização total da fonte alvo. Embora a nova anomalia RTP produzida com a fonte interferente (Figura 4.10) tenha uma amplitude maior que a produzida pela fonte alvo isolada (Figura 4.6), a extensão horizontal da área positiva não muda substancialmente e conduz a uma aproximação inicial (Figuras 4.11c e 4.12c) igual àquela utilizada no teste anterior (Figuras 4.7c e 4.8c).

A Figura 4.11 mostra as soluções L2 obtidas pela inversão da anomalia de campo total na Figura 4.9a com os seguintes pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. A Figura 4.11a mostra que a melhor solução L2 possui profundidade do topo z_0 igual à verdadeira, porém possui uma intensidade de magnetização total m_0 superestimada. Por esse motivo, sua profundidade máxima (3046.8 m) é muito distante da verdadeira (6130 m). Essa solução produz valores de resíduos altos logo acima da fonte interferente (Figura 4.11b), mas esses resíduos diferem consideravelmente da anomalia de campo total produzida pela fonte interferente (Figura 4.9b). Isso significa que, nesse caso, a inversão não foi capaz de ignorar o efeito causado pela fonte interferente. Além disso, a Figura 4.11d mostra que a melhor solução L2 não recupera a forma da fonte alvo.

A Figura 4.12 mostra as soluções L1 obtidas pela inversão da anomalia de campo total exibida na Figura 4.9a com os mesmos pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25) utilizados para as soluções L2 (Figura 4.11). Comparada à solução L2 mostrada na Figura 4.11, a melhor solução L1 apresenta uma intensidade de magnetização total menos superestimada (Figura 4.12a) e profundidade da base (5176.4 m) menos subestimada cerca de 1 km de diferença em relação à verdadeira (6130 m). Essa solução produz valores de resíduos (Figura 4.12b) próximos à anomalia de campo total produzida pela fonte interferente (Figura 4.9b). Isso significa que, nesse caso, a performance do método foi mais eficaz em filtrar a anomalia de campo total interferente (Figura 4.9b). Como consequência, a solução L1 (Figura 4.12d) foi muito menos afetada pela fonte interferente e recuperou satisfatoriamente a forma da fonte alvo. Este teste numérico mostra que a solução L1 é superior à solução L2 mesmo que a fonte interferente seja muito localizada e menor do que a fonte alvo.

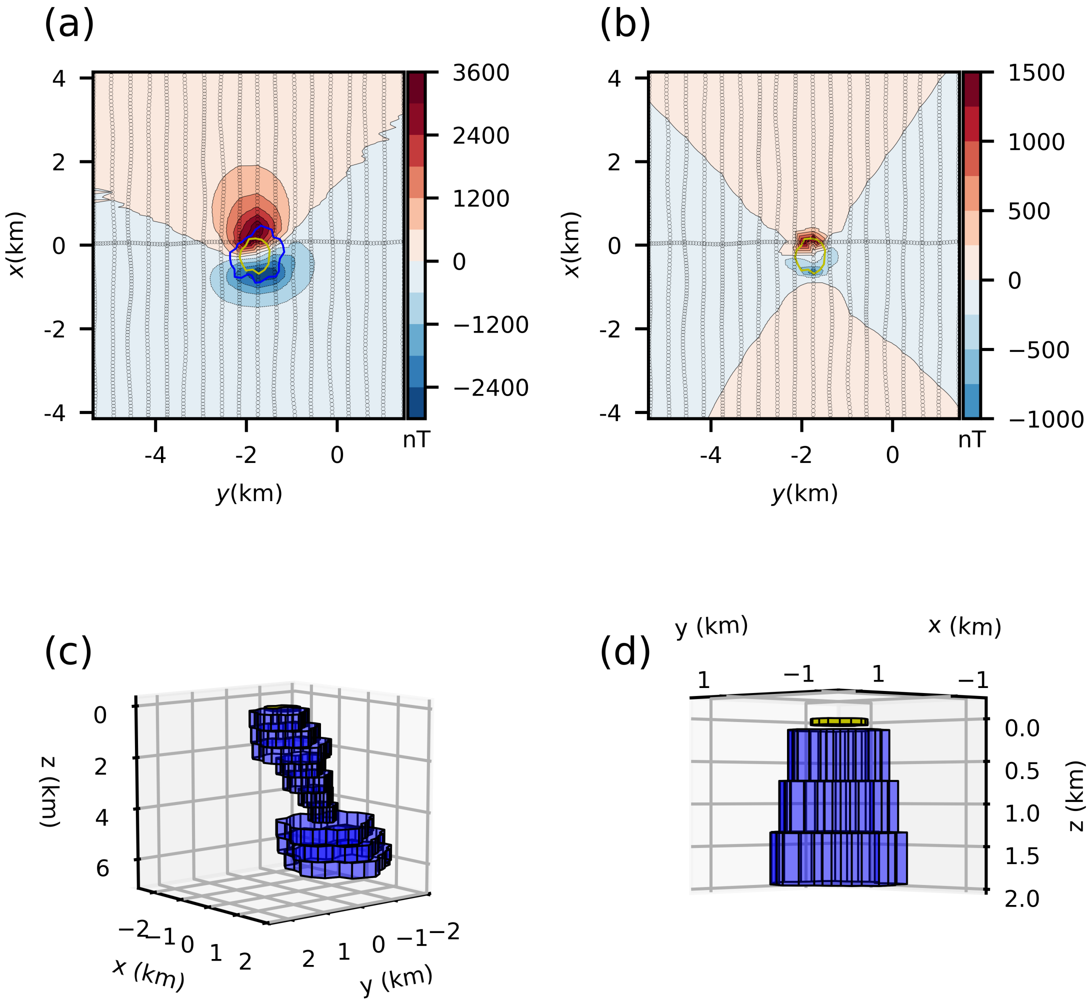

Figura 4.9: Modelo da fonte alvo com uma fonte interferente pequena. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e interferente (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e interferente, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte interferente. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte interferente (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e interferente (prisma amarelo).

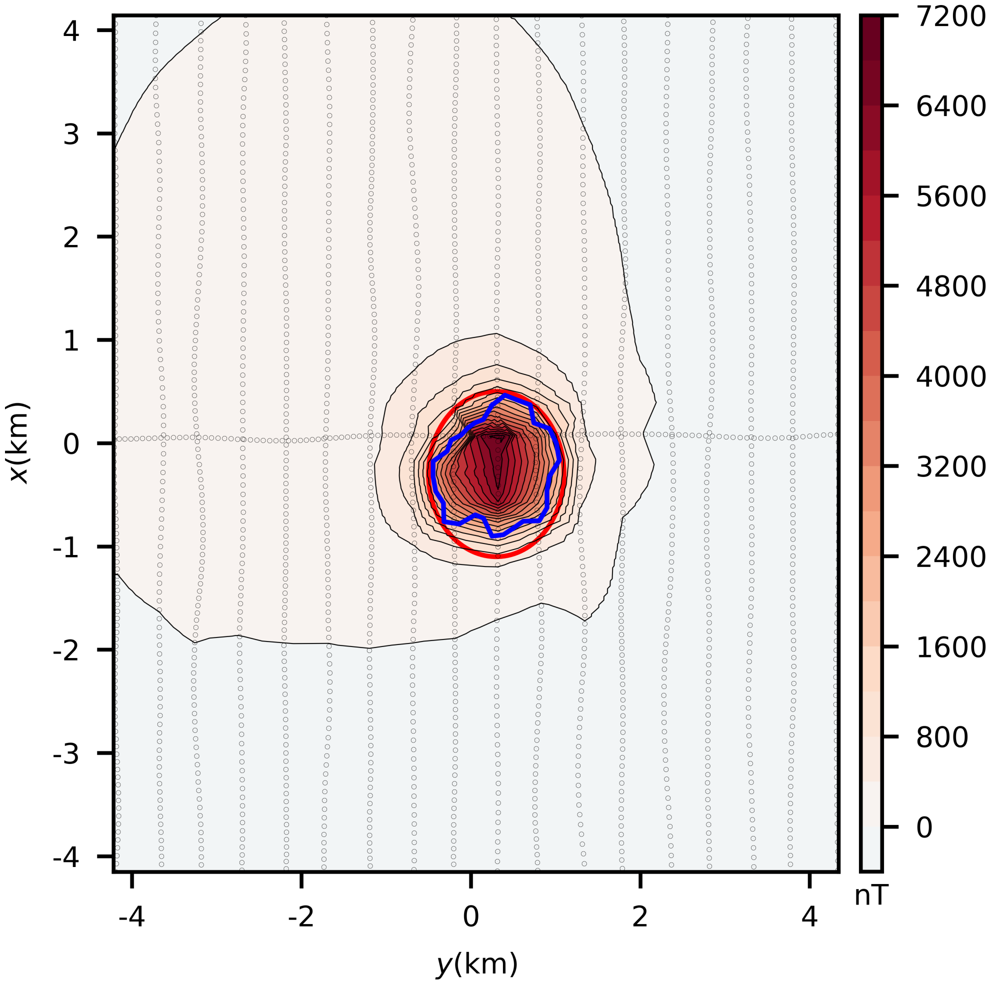

Figura 4.10: Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte interferente pequena. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 4.11c e 4.12c).

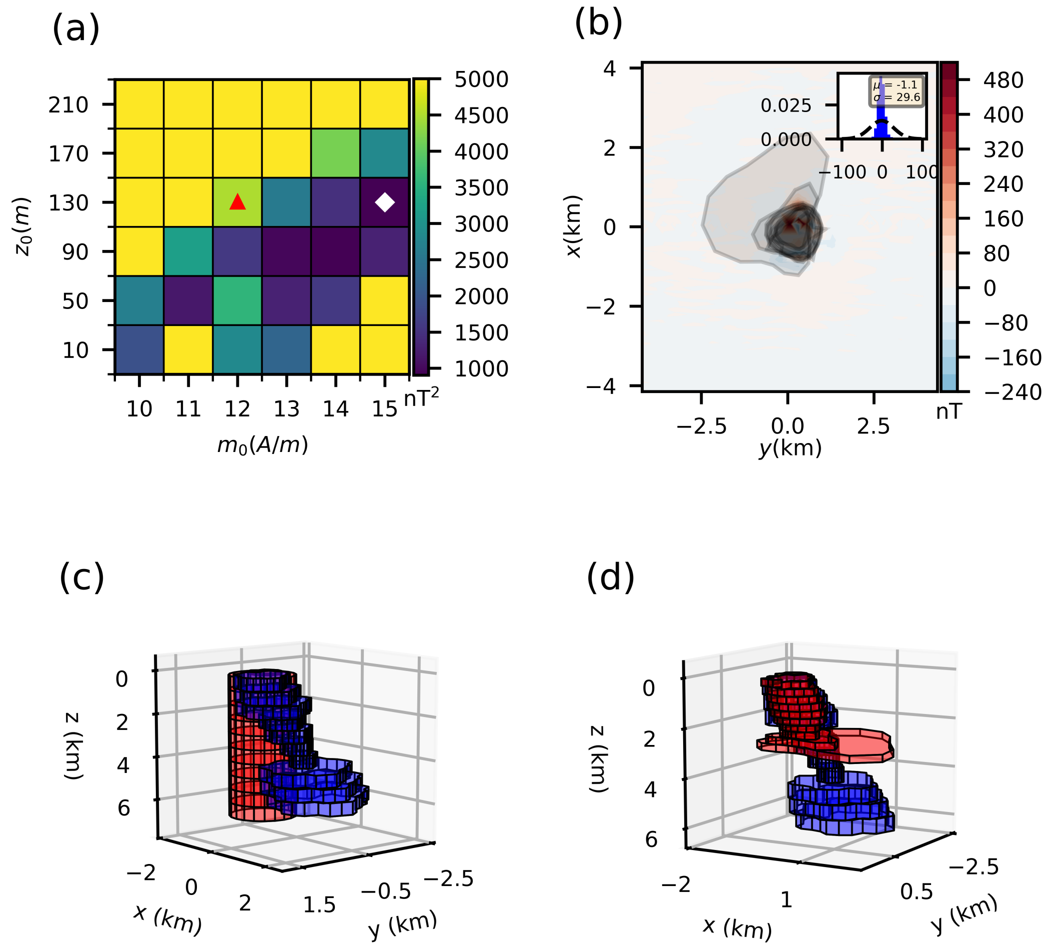

Figura 4.11: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. Os valores verdadeiros de m_0 e z_0) e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

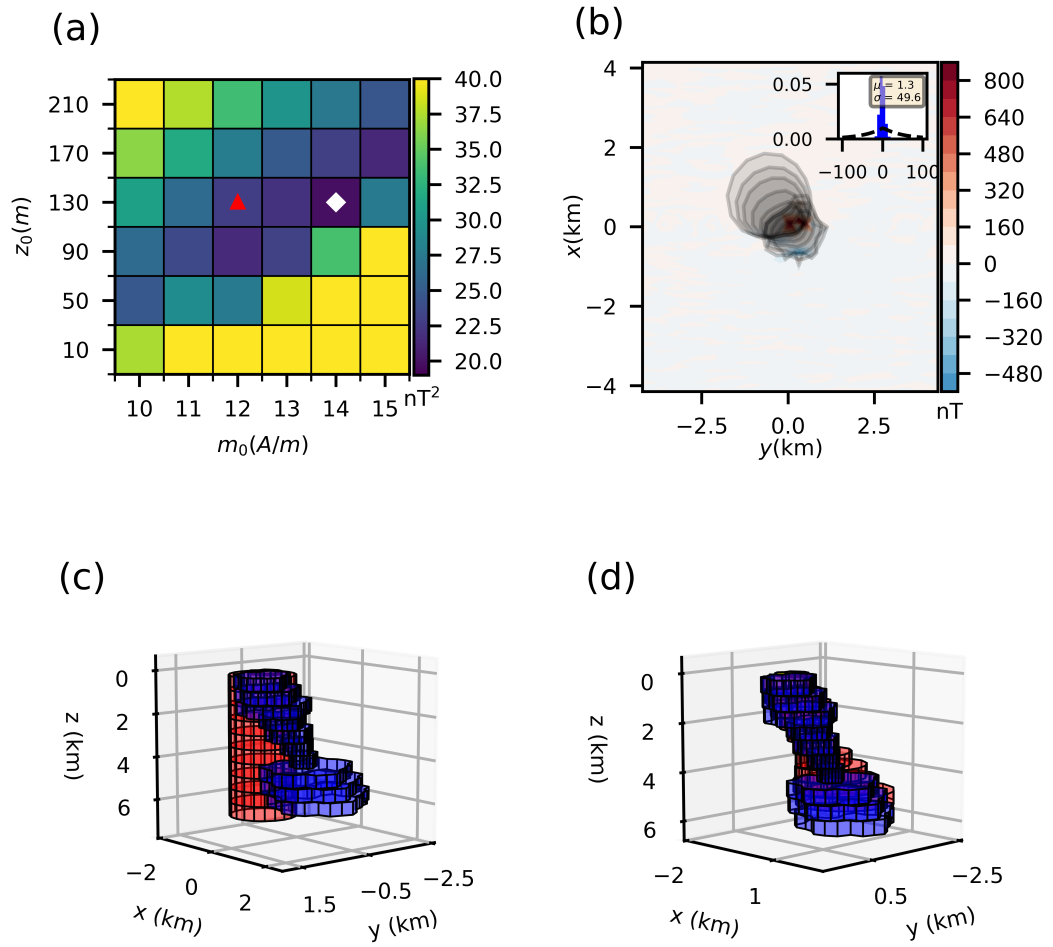

Figura 4.12: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. Os valores verdadeiros de m_0 e z_0) e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

4.1.3 Modelo complexo com uma fonte interferente grande

O mapa da Figura 4.13a representa a soma entre as anomalias de campo total produzidas pela fonte interferente pequena (Figura 4.13b), cuja forma é exibida nas Figuras 4.13c e 4.13d, e aquela produzida pela fonte alvo simulada (Figura 4.5a). A fonte interferente possui profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 500 m, centro em $(x, y) = (500, 1500)$, ao lado do topo da fonte alvo, e o mesmo vetor magnetização total da fonte alvo. Neste caso, a fonte interferente estende consideravelmente a área positiva da anomalia RTP (Figura 4.14) em comparação com a da fonte alvo isolada (Figura 4.6). Entretanto, ainda é possível identificar os limites laterais da fonte alvo e gerar a mesma aproximação inicial usada nos testes anteriores.

A Figura 4.15 mostra as soluções L2 obtidas pela inversão da anomalia de campo total na Figura 4.13a com os seguintes pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-7}$. Como podemos ver, a melhor solução L2 não recupera os valores da profundidade do topo z_0 e nem da intensidade de magnetização total m_0, assim como não recuperou a forma da fonte alvo. A estimativa da profundidade da base (2010.1 m) é muito distante da verdadeira (6130 m). Comparado ao valor verdadeiro, a profundidade do topo estimada z_0 está deslocada em direção à da fonte interferente. Nesse caso, a fonte interferente induz severamente ao erro da estimativa da geometria do corpo (Figura 4.15d).

A Figura 4.16 mostra as soluções L1 obtidas pela inversão da anomalia de campo total mostrada na Figura 4.13a com os seguintes pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-7}$. A melhor solução L1 (Figura 4.16) filtra parcialmente a anomalia de campo total interferente (Figura 4.13b) e recupera as principais feições da fonte alvo sintética, assim como a profundidade do topo z_0 e a intensidade de magnetização total m_0 verdadeiras. Essa solução estima a profundidade da base (5840.9 m) melhor do que a do teste anterior, no entanto, a solução é inferior à mostrada no teste anterior em filtrar a anomalia de campo total interferente e também em recuperar a geometria da fonte alvo. Apesar disso, ela é significativamente superior à melhor solução L2 (Figura 4.15) obtida pela inversão do mesmo dado, uma vez que é muito menos afetada pela presença de uma grande fonte interferente.

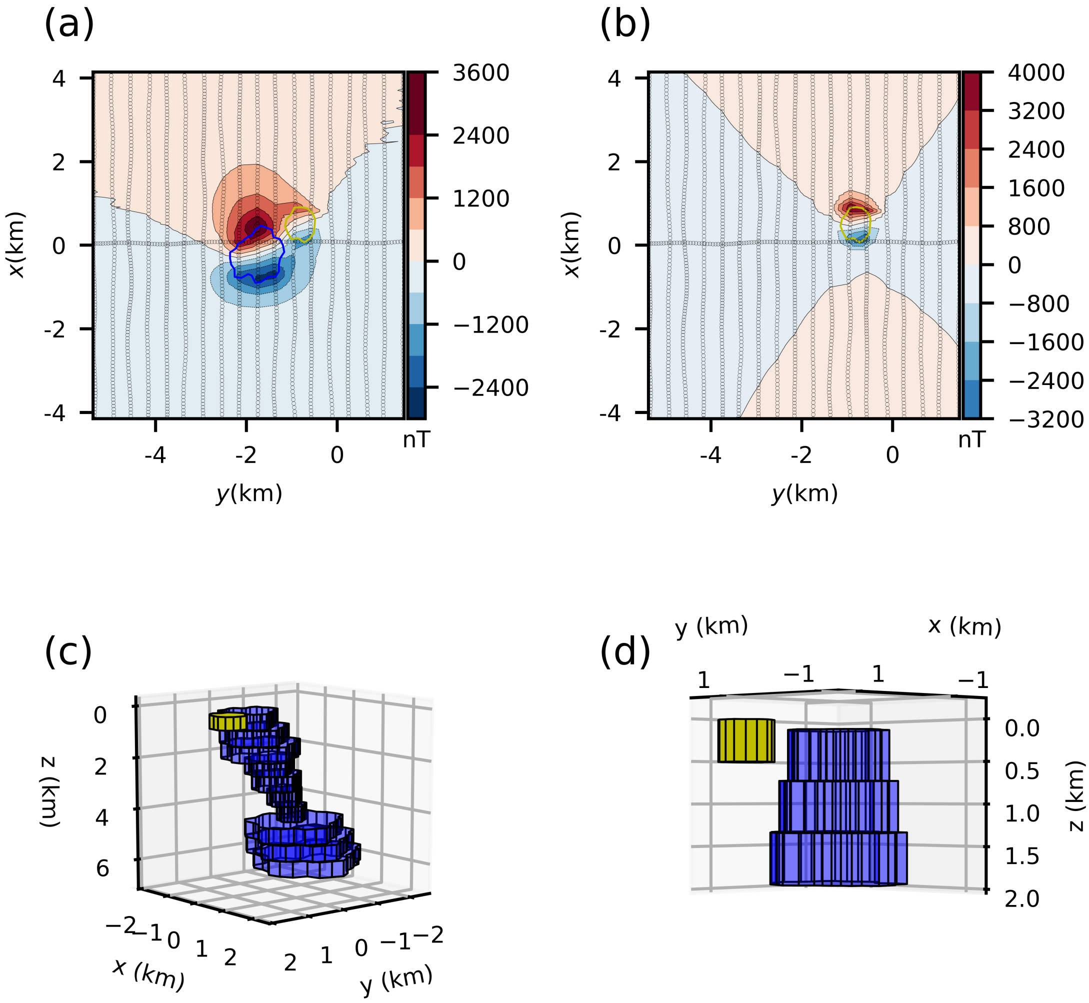

Figura 4.13: Modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e interferente (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e interferente, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte interferente. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte interferente (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e interferente (prisma amarelo).

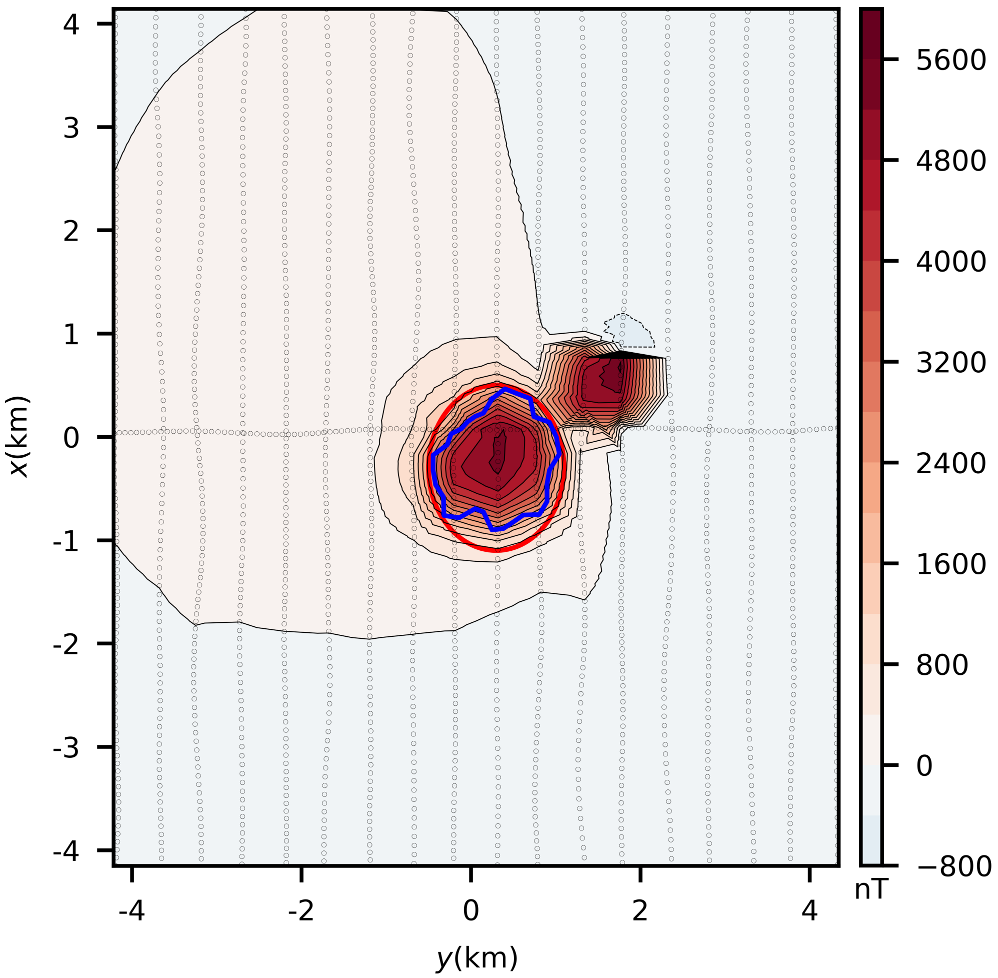

Figura 4.14: Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte interferente grande. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima das fontes alvo e interferente. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 4.15c e 4.16c).

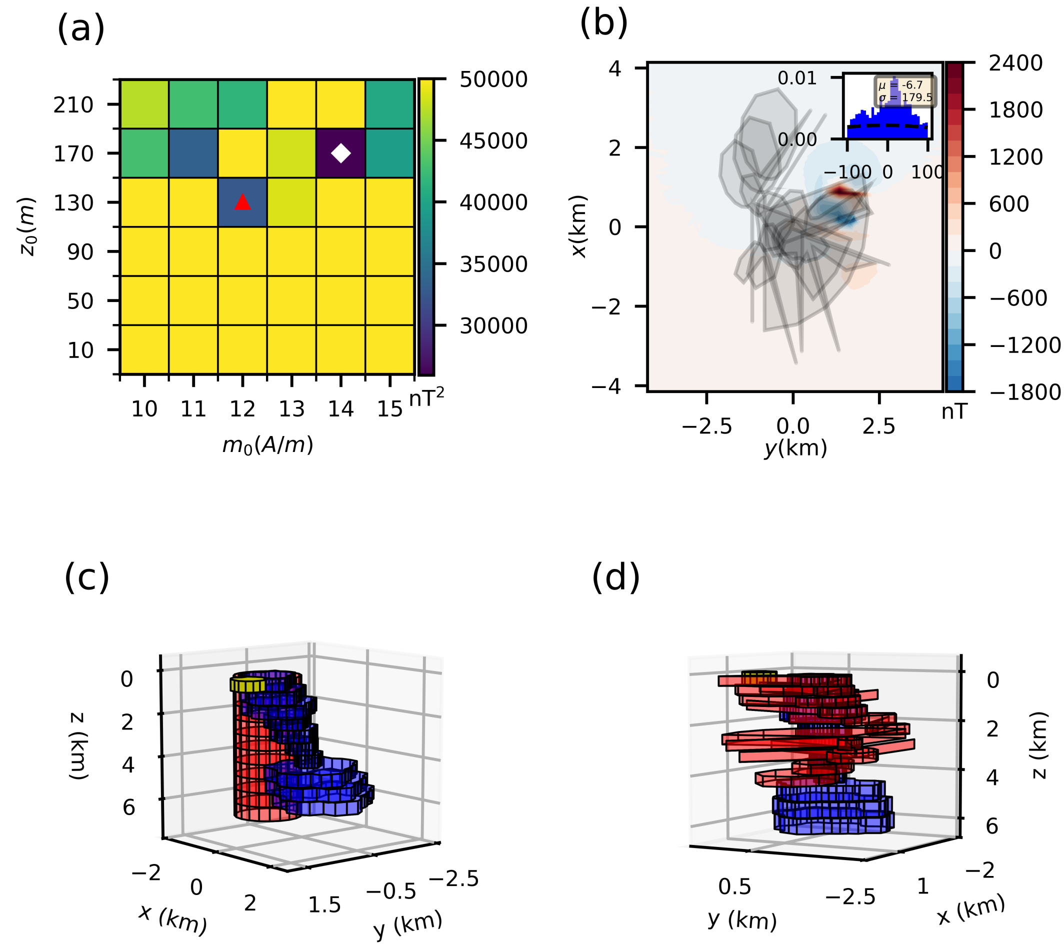

Figura 4.15: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. Os valores verdadeiros de m_0 e z_0) e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

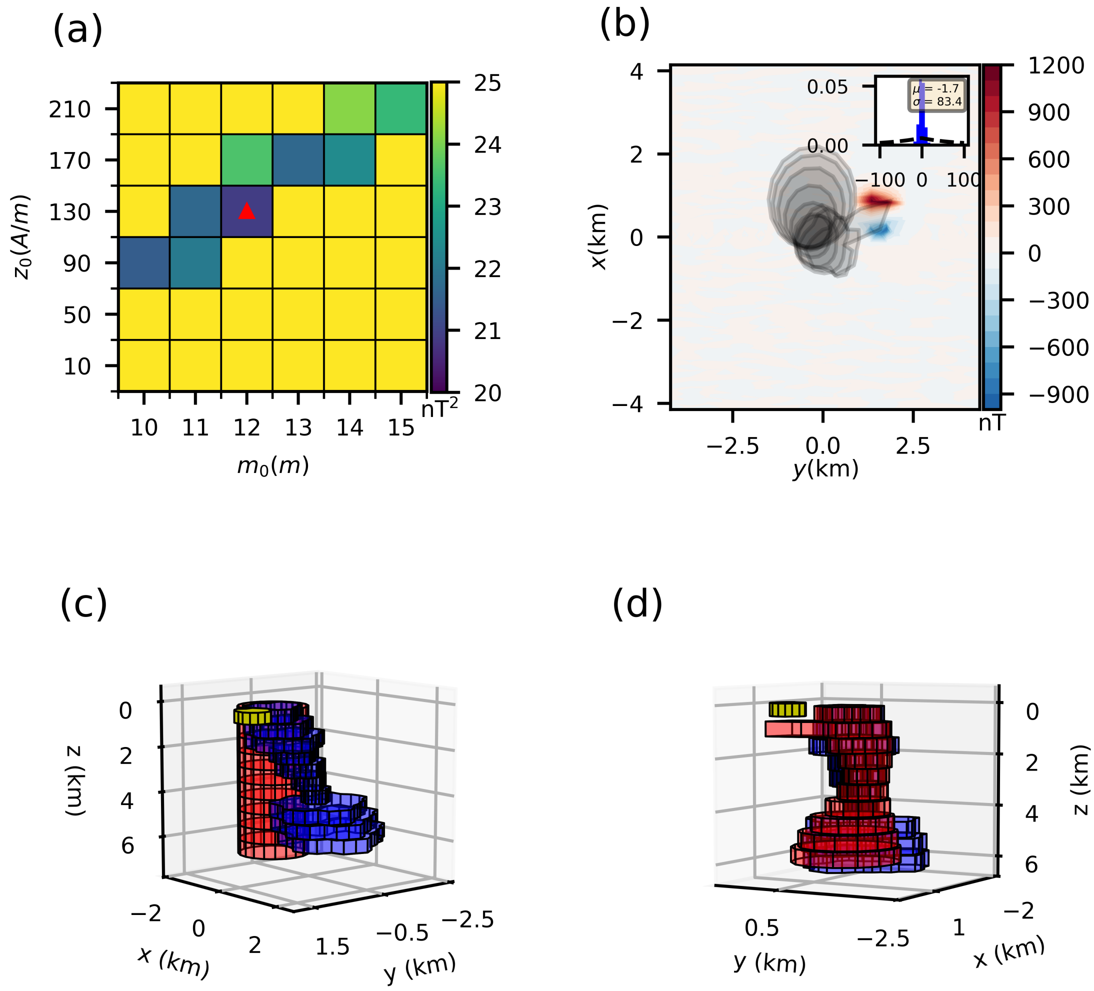

Figura 4.16: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. Ambos valores verdadeiros de m_0 e z_0) e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 4.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

Capítulo 5

Aplicação a dados reais

5.1 Complexo de Anitápolis

O complexo alcalino-carbonatítico de Anitápolis forma um corpo circular (≈ 6 km^2) que contém magnetita e leucogranitos do Cretáceo Inferior (132 Ma), aparentemente na mesma época do derramamento basáltico da formação Serra Geral ($133 - 130$ Ma) na Bacia do Paraná (GOMES *et al.*, 2018; SCHEIBE *et al.*, 2005). De acordo com RICCOMINI *et al.* (2005) e GOMES *et al.* (2018), este complexo de Anitápolis não mostra um controle estrutural claro e ainda há debate sobre sua intrusão. Por exemplo, MELCHER e COUTINHO (1966) propôs a influência de falhas orientadas preferencialmente em N-S enquanto que HORBACH e MARIMON (1980) e SCHEIBE *et al.* (2005) consideram que o complexo é controlado por lineamentos N30O e L-O, respectivamente.

As Figuras 5.1a e 5.1b exibem a anomalia de campo total observada e o campo regional estimado sobre o complexo de Anitápolis, respectivamente. O levantamento aéreo foi adquirido com linhas N-S e L-O espaçadas em 500 m e $10,000$ m umas das outras, respectivamente, sobre a superfície ondulada mostrada na Figura 5.1c. A Figura 5.1d mostra a topografia da área de estudo. A inclinação e a declinação do campo geomagnético principal na área de estudo, para a época da aquisição ($2009 - 2011$), são $-37.05°$ e $-18.17°$, respectivamente.

A Figura 5.2a mostra a anomalia de campo total residual obtida pela subtração do campo regional estimado (Fig. 5.1b) da anomalia de campo total observada (Fig. 5.1a). A partir dessa anomalia residual, foi calculada a anomalia RTP mostrada na Figura 5.2b utilizando a direção de magnetização estimada por REIS *et al.* (2019) com inclinação $-21°$ e declinação $-11°$. A área positiva da anomalia RTP estimada foi usada para definir as aproximações iniciais para todas as soluções L2 (Fig. 5.3) e L1 (Fig. 5.4) obtidas pelo método ao realizar a inversão da anomalia de campo total residual mostrada na Figura 5.2a. Todas essas soluções L2 e L1 foram obtidas através da utilização do seguinte conjunto de pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-3}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$.

A Figura 5.3a mostra os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L2 obtidas por uma malha de varredura de 10×10 valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. A melhor solução L2 possui uma profundidade do topo de $z_0 = 0$ m, intensidade de magnetização total de $m_0 = 15$ A/m e uma profundidade da base em 3032.7 m. A Figura 5.4a exibe os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L2 obtidas por uma malha de varredura de 10×10 valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. A melhor solução L1 possui uma profundidade do topo de $z_0 = 240$ m, intensidade de magnetização total de $m_0 = 14$ A/m e uma profundidade da base em 3259.6 m.

As intensidades de magnetização total das soluções estão ambas em acordo com as medidas de laboratório conduzidas por ALVA-VALDIVIA *et al.* (2009) nas amostras de rochas do complexo de Jacupiranga, outro complexo alcalino localizado ao norte da área de estudo, com a mesma idade do complexo de Anitápolis. De acordo com o esses autores, os valores podem variar de ≈ 0.01 a ≈ 29.90 A/m. A extensão vertical total da melhor solução L2 (3032.7 m) é muito similar à extensão da solução L1 (3019.6 m). Ambas as soluções mostram uma intrusão com direção preferencial de N30O tendo praticamente a mesma forma, alinhada com o baixo da topografia exibida na Figura 5.1d (no centro do retângulo rosa). Essa orientação é consistente com a proposta por HORBACH e MARIMON (1980) para um grande lineamento na área de estudo. Finalmente, o topo da solução L1 é mais profundo do que o da solução L2, o que sugere a possível presença de uma pequena fonte interferente rasa.

5.2 Complexo de Diorama

A província alcalina de Goiás (PAGO) é resultado de um magmatismo máfico-alcalino que ocorreu no final do Cretáceo, na borda da Bacia do Paraná. Ela é associada com uma grande variedade petrográfica que incluem complexos máficos e ultra-máficos, intrusões alcalinas subvulcânicas e vulcânicas que coincidem com uma bem definida tendência de falhas no embasamento de N30O (JUNQUEIRA-BROD *et al.*, 2002, 2005). Diferentes estudos geofísicos indicam que as anomalias magnéticas associadas às intrusões alcalinas na PAGO são afetadas por notáveis magnetizações remanentes (por exemplo, DUTRA *et al.*, 2012, 2014; MARANGONI e MANTOVANI, 2013; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015; REIS *et al.*, 2020; ZHANG *et al.*, 2018).

As Figuras 5.5a e 5.5b mostram, respectivamente, a anomalia de campo total observada e o campo regional estimado sobre o complexo de Diorama na parte norte da PAGO (JUNQUEIRA-BROD *et al.*, 2005; MARANGONI e MANTOVANI, 2013;

OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015). O levantamento aéreo foi adquirido com linhas N-S e L-O espaçadas em 500 m e $10,000$ m umas das outras, respectivamente, sobre a superfície ondulada mostrada na Figura 5.5c. A Figura 5.5d mostra a topografia na área de estudo. A inclinação e a declinação do campo geomagnético principal na área de estudo, para a época da aquisição (2004), são $-19.5°$ e $-18.5°$, respectivamente.

A Figura 5.6a mostra a anomalia de campo total residual obtida pela subtração do campo regional estimado (Fig. 5.5b) da anomalia de campo total observada (Fig. 5.5a). A partir dessa anomalia residual, foi calculada a anomalia RTP mostrada na Figura 5.6b utilizando a direção de magnetização estimada por ZHANG *et al.* (2018) com inclinação $-46°$ e declinação $24°$. A área positiva da anomalia RTP estimada foi usada para definir as aproximações iniciais para todas as soluções L2 (Fig. 5.7) e L1 (Fig. 5.8) obtidas pelo método ao realizar a inversão da anomalia de campo total residual mostrada na Figura 5.6a. Todas essas soluções L2 e L1 foram obtidas através da utilização do seguinte conjunto de pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 3.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-6}$.

A Figura 5.7a mostra os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L2 obtidas por uma malha de varredura de 10×10 valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. A melhor solução L2 possui uma profundidade do topo de $z_0 = 200$ m, intensidade de magnetização total de $m_0 = 19$ A/m e uma profundidade da base em 2128.6 m. A Figura 5.8a exibe os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L2 obtidas por uma malha de varredura de 10×10 valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. A melhor solução L1 possui uma profundidade do topo de $z_0 = 250$ m, intensidade de magnetização total de $m_0 = 18$ A/m e uma profundidade da base em 2692.0 m.

As intensidades de magnetização total das soluções estão ambas em acordo com as medidas de laboratório conduzidas por DUTRA (2011) e DUTRA *et al.* (2014) em amostras de rochas da PAGO. Eles Eles encontraram valores que variam de ≈ 0.01 to 20 A/m. A extensão vertical total da melhor solução L2 (1928.6 m) é ≈ 500 m menor que a extensão da melhor solução L1 (2442.0 m), o que é consistente com a intensidade de magnetização menor da solução L1. A extensão vertical total da solução L1 (2192.0 m), entretanto, é significativamente menor do que a obtida por DUTRA (2011, Fig. 4.9, p. 78) para o complexo de Diorama (≈ 3000.0 m). É importante enfatizar que DUTRA (2011) obteve essa extensão vertical total indiretamente ao estimar a distribuição de susceptibilidade magnética em uma malha 3D pouco refinada de prismas retangulares justapostos com lado de 1 km de comprimento e valores máximos de susceptibilidade limitados a 0.01 SI. Essa malha foi projetada para investigar não só o complexo de Diorama como também todas as anomalias produzidas por extensos complexos alcalinos na área de estudo. Como consequência, os resultados apresentados por DUTRA (2011), também relatado por

MARANGONI e MANTOVANI (2013), pode não ter resolução espacial suficiente para representar o complexo de Diorama aparentemente menor que os complexos ao seu redor. Essa falta de resolução espacial associada ao limite superior imposto à distribuição de susceptibilidade magnética pode acarretar em uma extensão vertical total exagerada obtida para o complexo de Diorama. Comparado à abordagem utilizada por DUTRA (2011), o método apresentado neste trabalho é capaz de representar o complexo de Diorama com uma maior resolução espacial e, dessa maneira, pode ser a principal causa da estimativa discrepante da extensão vertical total.

A solução L2 mostra uma forma complexa que depende da profundidade com nenhum controle estrutural aparente. É possível notar que seu prisma mais profundo possui uma área maior que a dos prismas restantes. As características dessa solução assemelham-se com as da solução L2 obtida para o dado sintético com a presença de uma fonte interferente pequena (Fig. 4.11). Por outro lado, a Figura 5.8 mostra uma solução L1 com uma forma que varia continuamente ao longo da profundidade que parece ser influenciada por uma falha aproximadamente orientada a N50°L. Essa direção concorda com a relatada por JUNQUEIRA-BROD *et al.* (2002) para dique que cruzam o embasamento Pré-cambriano na área de estudo. Esses resultados sugerem a presença de fontes interferentes rasas localizadas próximas ao topo do complexo de Diorama.

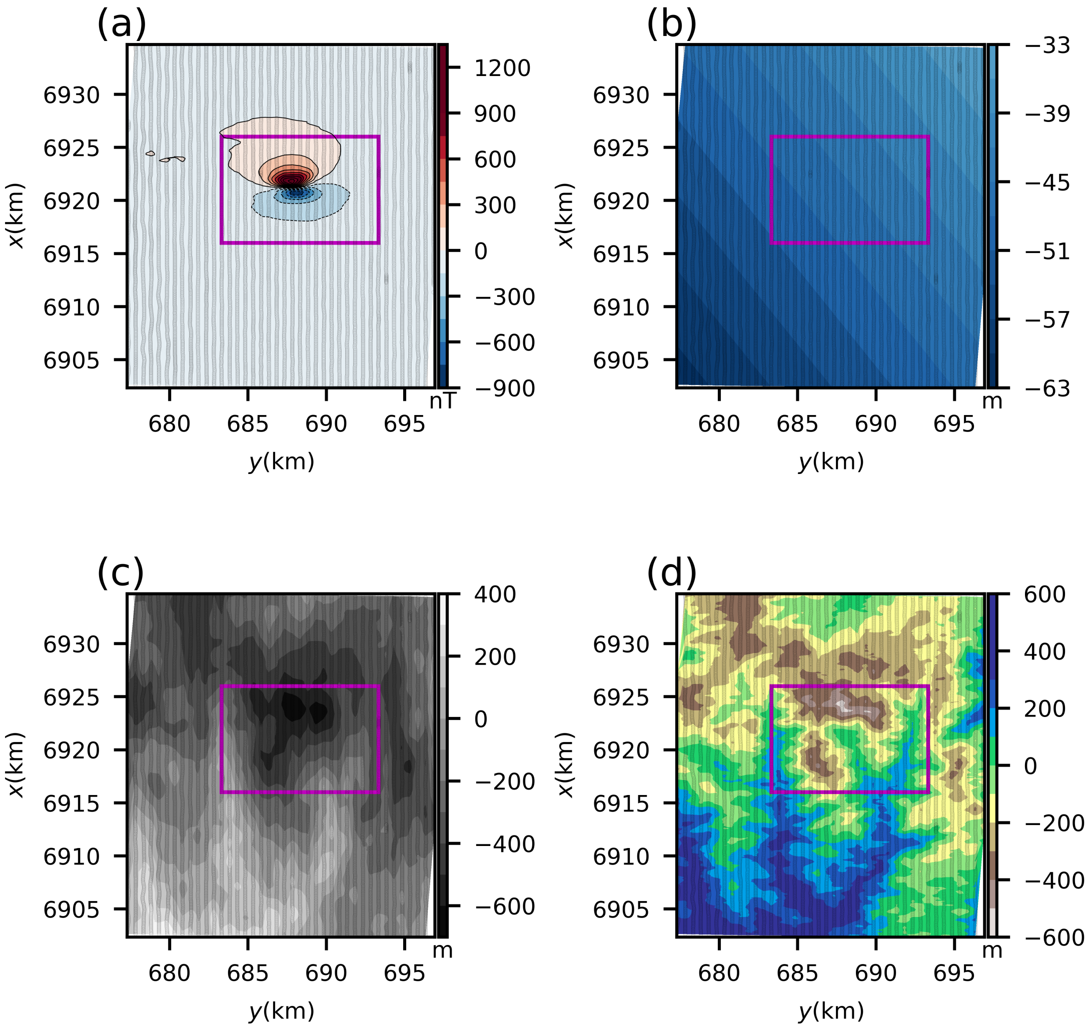

Figura 5.1: Aplicação aos dados do complexo de Anitápolis. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Polinômio de primeira ordem que representa o campo regional. (c) e (d) Altura geométrica dos pontos de observação e topografia, ambas referenciadas ao elipsoide WGS84. Por simplicidade, foi removida uma constante de 800 m de seus valores. As coordenadas UTM estão referenciadas ao meridiano central 51°. Os pontos pretos representam os pontos observados. Apenas os dados delimitados pelo retângulo rosa foram usados para a inversão.

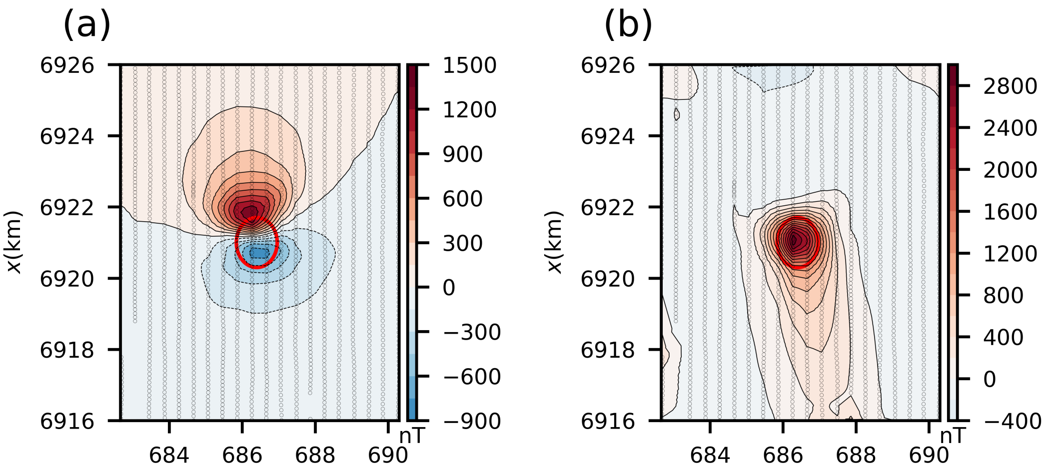

Figura 5.2: Aplicação aos dados do complexo de Anitápolis. (a) e (b) Anomalias residual e RTP sobre a área de estudo definida pelo retângulo rosa na Figura 5.1. A linha vermelha representa a projeção horizontal das aproximações iniciais usadas nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.3c e 5.4c).

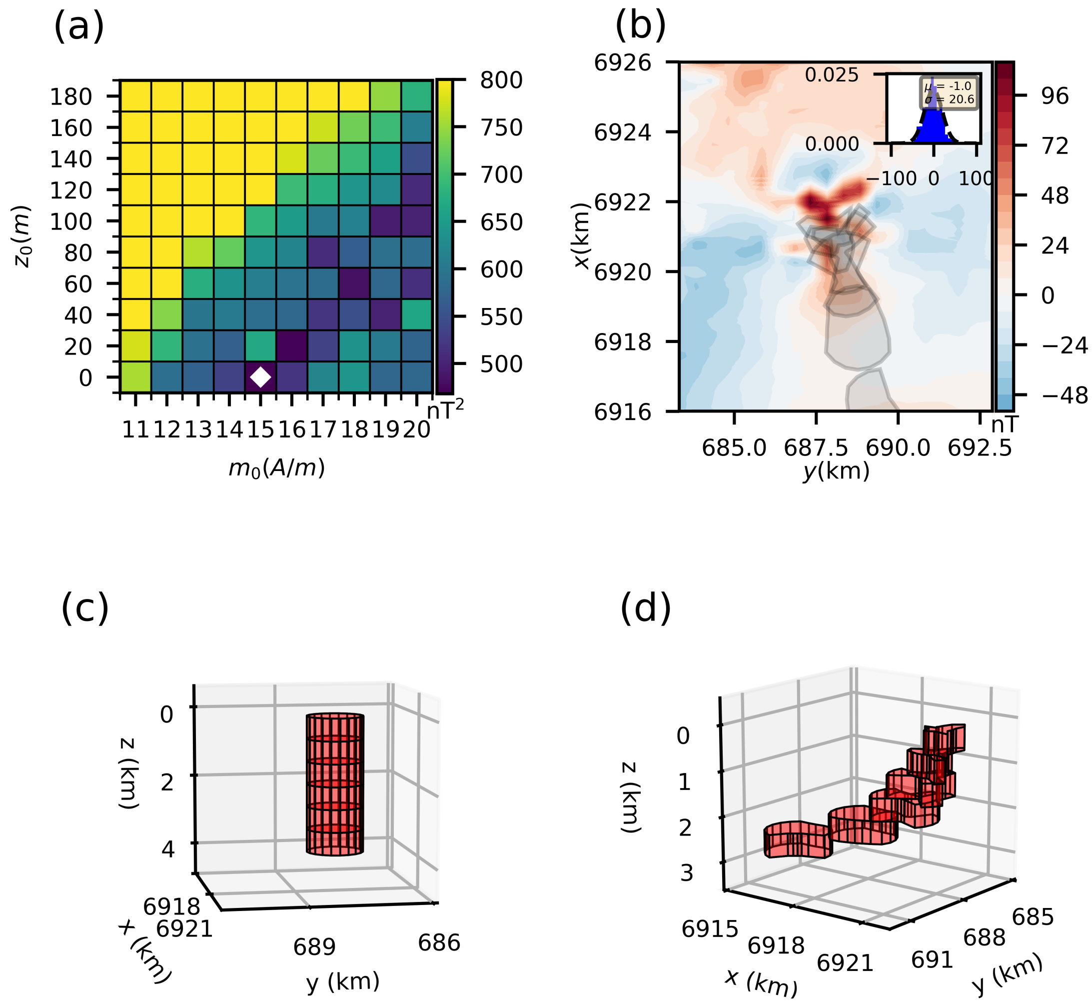

Figura 5.3: Soluções L2 obtidas para o complexo de Anitápolis. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O losango branco representa os valores de m_0 e z_0) que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 5.2a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

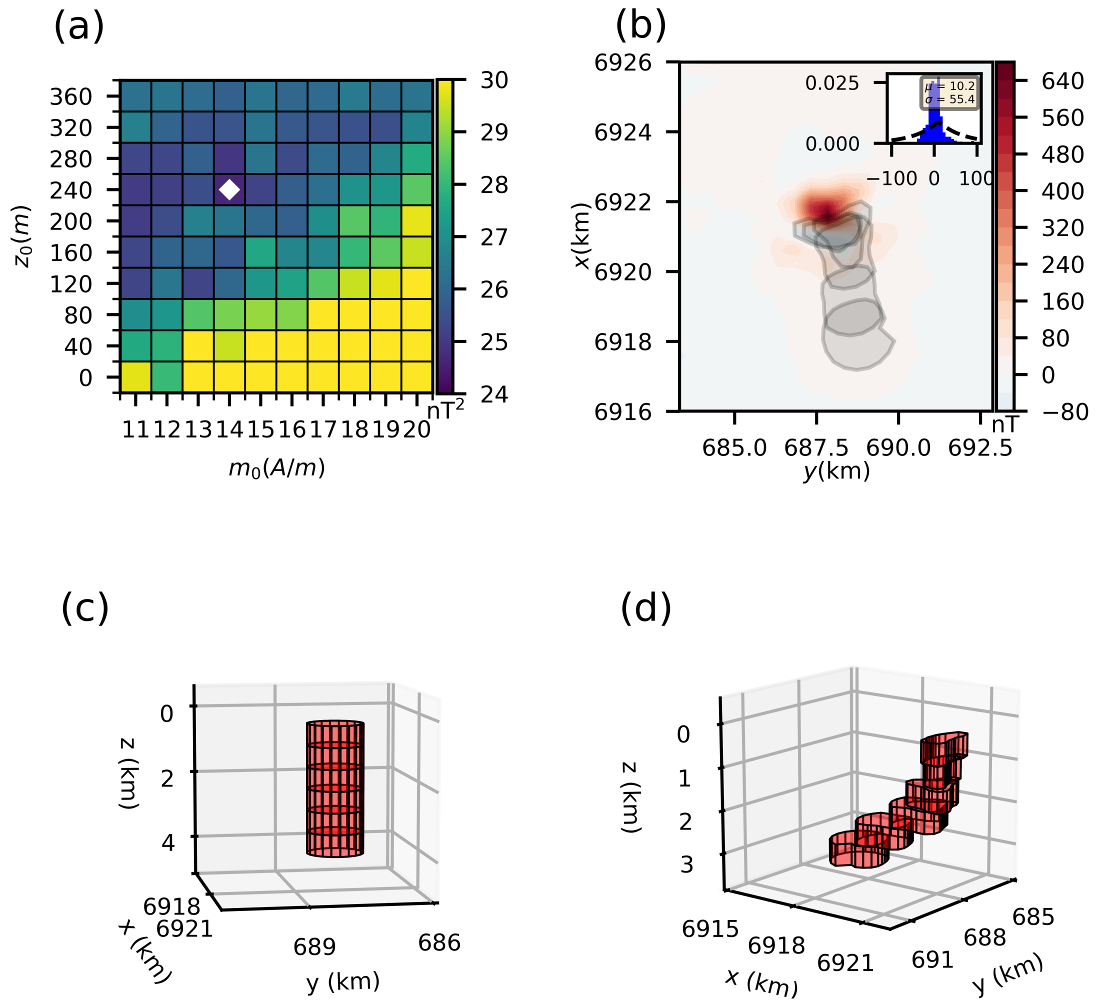

Figura 5.4: Soluções L1 obtidas para o complexo de Anitápolis. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O losango branco representa os valores de m_0 e z_0) que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 5.2a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

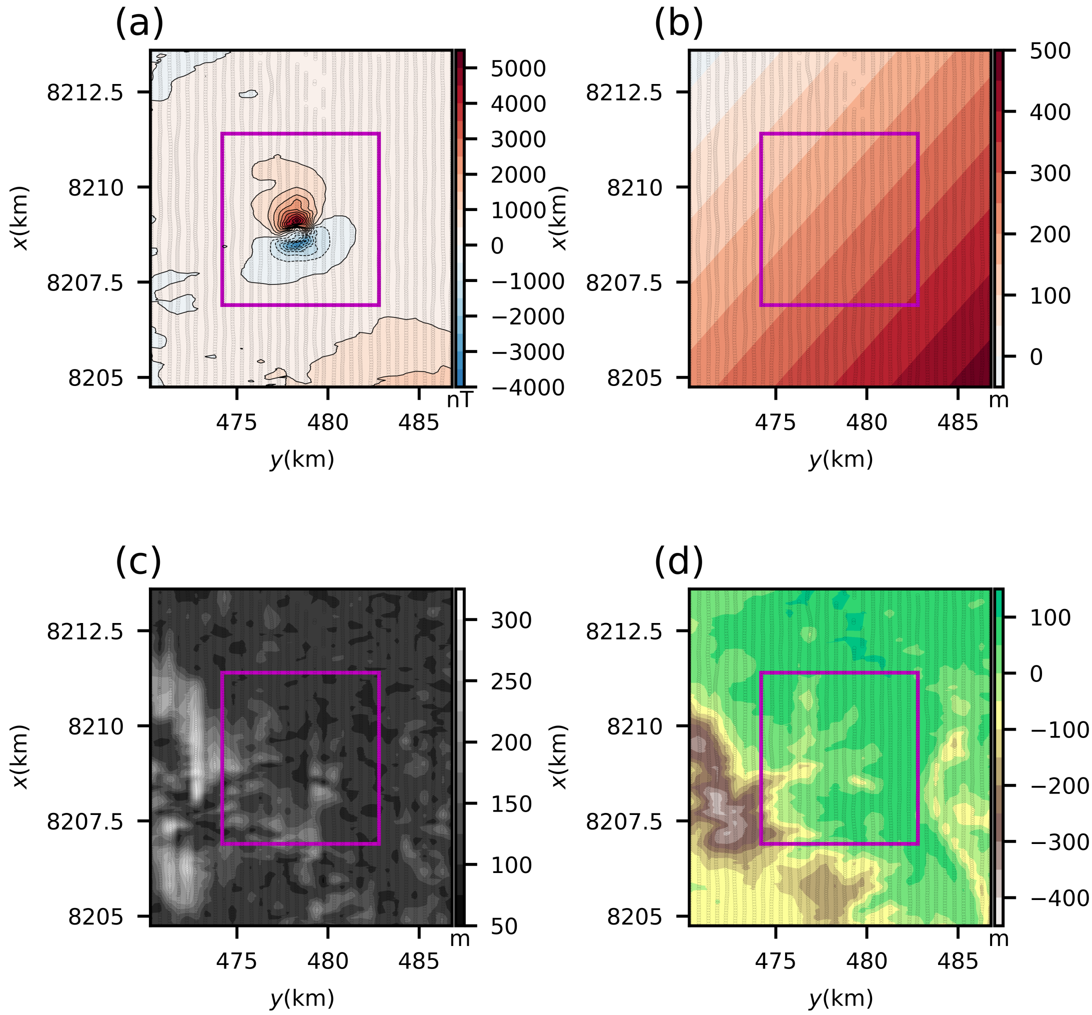

Figura 5.5: Aplicação aos dados do complexo de Diorama. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Polinômio de primeira ordem que representa o campo regional. (c) e (d) Altura geométrica dos pontos de observação e topografia, ambas referenciadas ao elipsoide WGS84. Por simplicidade, foi removida uma constante de 430 m de seus valores. As coordenadas UTM estão referenciadas ao meridiano central 51°. Os pontos pretos representam os pontos observados. Apenas os dados delimitados pelo retângulo rosa foram usados para a inversão.

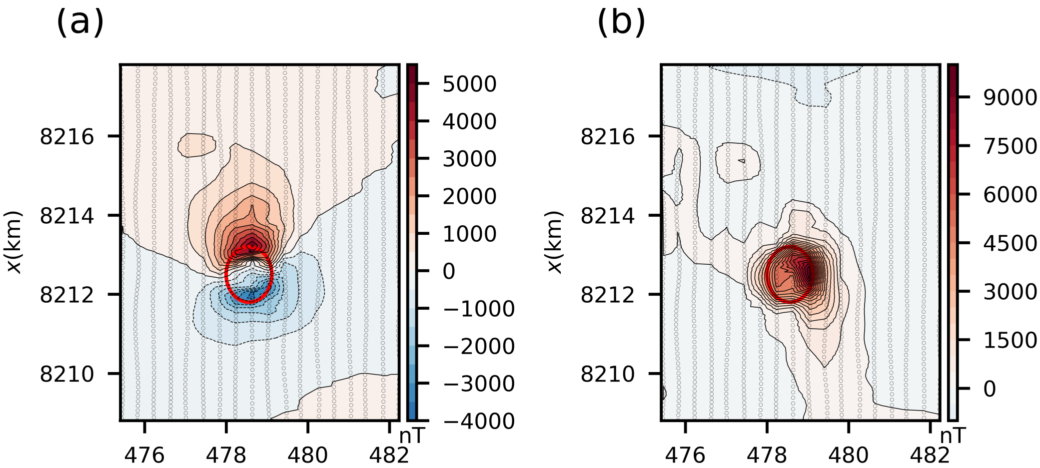

Figura 5.6: Aplicação aos dados do complexo de Diorama. (a) e (b) Anomalias residual e RTP sobre a área de estudo definida pelo retângulo rosa na Figura 5.5. A linha vermelha representa a projeção horizontal das aproximações iniciais usadas nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.7c e 5.8c).

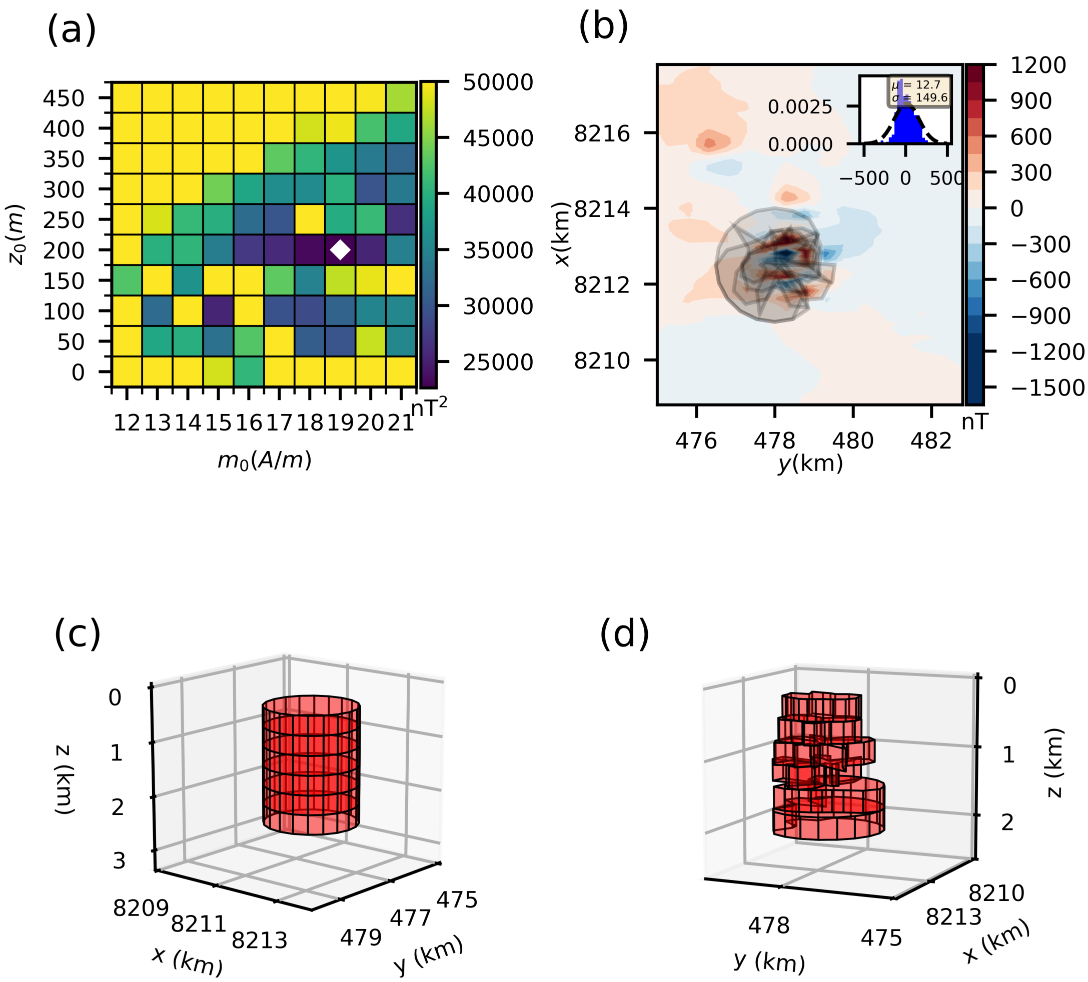

Figura 5.7: Soluções L2 obtidas para o complexo de Diorama. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O losango branco representa os valores de m_0 e z_0) que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 5.6a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

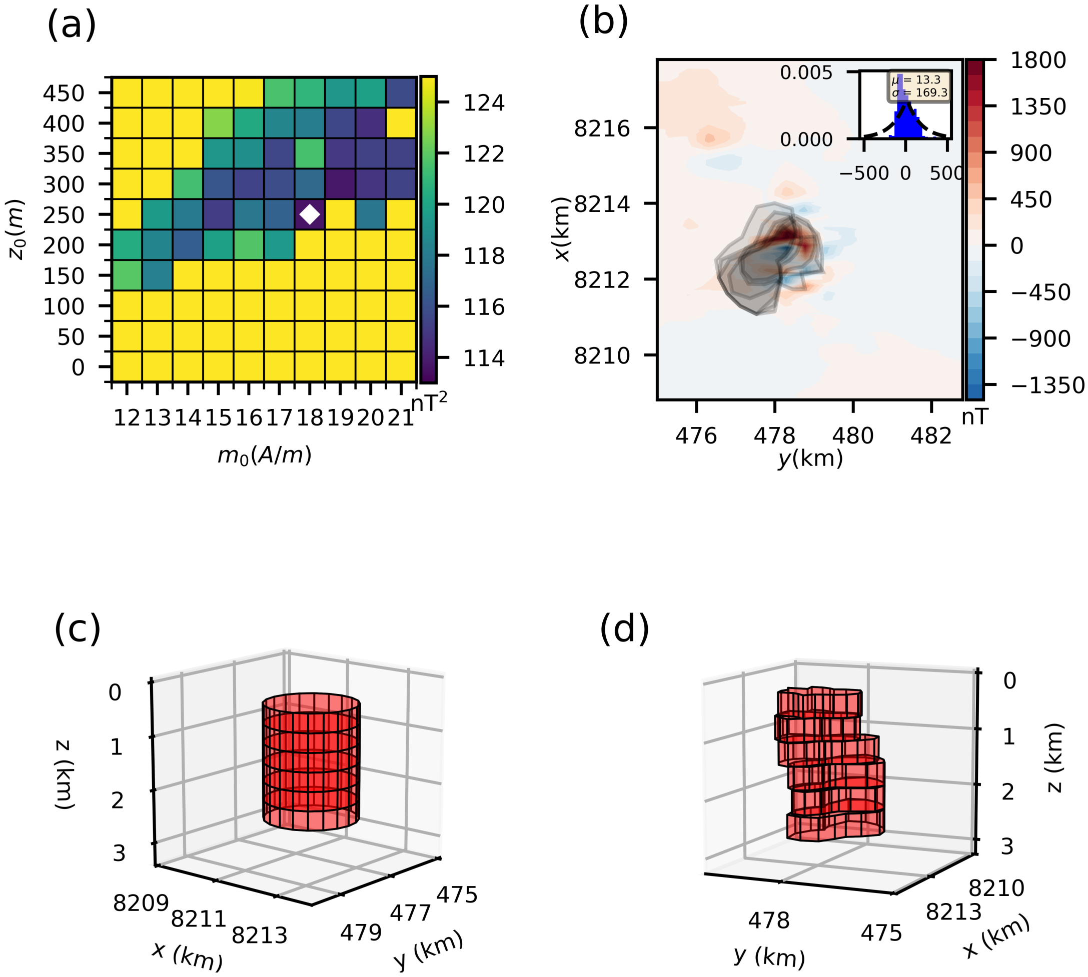

Figura 5.8: Soluções L1 obtidas para o complexo de Diorama. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0. O losango branco representa os valores de m_0 e z_0) que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 5.6a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

Referências Bibliográficas

ABEDI, M., ASGHARI, O., NOROUZI, G.-H., 2015, “Collocated cokriging of iron deposit based on a model of magnetic susceptibility: a case study in Morvarid mine, Iran”, *Arabian Journal of Geosciences*, v. 8, n. 4 (abr.), pp. 2179–2189. ISSN: 1866-7511, 1866-7538. doi: 10.1007/s12517-014-1282-5. Disponível em: <`http://link.springer.com/10.1007/s12517-014-1282-5`>.

ALVA-VALDIVIA, L. M., PERRIN, M., RIVAS-SÁNCHEZ, M. L., et al., 2009, “Rock magnetism and microscopy of the Jacupiranga alkaline-carbonatitic complex, southern Brazil”, *Earth, Planets and Space*, v. 61, n. 1, pp. 161–171. doi: 10.1186/BF03352896.

AMUNDSEN, L., 1991, “Comparison of the least-squares criterion and the Cauchy criterion in frequency-wavenumber inversion”, *Geophysics*, v. 56, n. 12, pp. 2027–2035. doi: 10.1190/1.1443015.

ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2019, *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier. ISBN: 978-0-12-804651-7.

BALLANTYNE, E. J., 1980, “Magnetic curve fit for a thin dike; calculator program (TI 59)”, *Geophysics*, v. 45, n. 3 (03), pp. 447–455. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1441093. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/1.1441093`>.

BARANOV, V., 1957, “A new method for interpretation of aeromagnetic maps: Pseudo-gravimetric anomalies”, *Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 359–382. doi: 10.1190/1.1438369.

BARBOSA, V. C., SILVA, J. B., 2006, “Interactive 2D magnetic inversion: A tool for aiding forward modeling and testing geologic hypotheses”, *Geophysics*, v. 71, n. 5 (set.), pp. L43–L50. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.2258093. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/10.1190/1.2258093`>.

BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., MEDEIROS, W. E., 1999, "Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations", *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 754–764. doi: 10.1190/1.1444585.

BELTRÃO, J. F., SILVA, J. B. C., COSTA, J. C., 1991, "Robust polynomial fitting method for regional gravity estimation", *Geophysics*, v. 56, n. 1, pp. 80–89. doi: 10.1190/1.1442960.

BHATTACHARYYA, B. K., 1980, "A generalized multibody model for inversion of magnetic anomalies", *Geophysics*, v. 45, n. 2 (02), pp. 255–270. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1441081. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/1.1441081`>.

BLAKELY, R. J., 1996, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press. ISBN: 0521575478.

CARATORI TONTINI, F., COCCHI, L., CARMISCIANO, C., 2006, "Depth-to-the-bottom optimization for magnetic data inversion: Magnetic structure of the Latium volcanic region, Italy", *Journal of Geophysical Research*, v. 111 (11), pp. B11104. doi: 10.1029/2005JB004109.

CELLA, F., FEDI, M., 2012, "Inversion of potential field data using the structural index as weighting function rate decay: Inversion of potential field data", *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 2 (mar.), pp. 313–336. ISSN: 00168025. doi: 10.1111/j.1365-2478.2011.00974.x. Disponível em: <`http://doi.wiley.com/10.1111/j.1365-2478.2011.00974.x`>.

CHAVE, A. D., THOMSON, D. J., ANDER, M. E., 1987, "On the robust estimation of power spectra, coherences, and transfer functions", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 92, n. B1, pp. 633–648. doi: 10.1029/JB092iB01p00633.

CLAERBOUT, J. F., MUIR, F., 1973, "ROBUST MODELING WITH ERRATIC DATA", *Geophysics*, v. 38, n. 5, pp. 826–844. doi: 10.1190/1.1440378.

CRASE, E., PICA, A., NOBLE, M., et al., 1990, "Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data", *Geophysics*, v. 55, n. 5, pp. 527–538. doi: 10.1190/1.1442864.

CRIBB, J., 1976, "Application Of The Generalized Linear Inverse To The Inversion Of Static Potential Data", *Geophysics*, v. 41, n. 6 (12), pp. 1365–1369. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1440686. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/1.1440686`>.

DA SILVA, S. L. E. F., DA COSTA, C. A., CARVALHO, P. T. C., et al., 2020, "Robust full-waveform inversion using q-statistics", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 548, pp. 124473. ISSN: 0378-4371. doi: https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124473.

DAMPNEY, C. N. G., 1969, "The equivalent source technique", *Geophysics*, v. 34, n. 1 (fev.), pp. 39–53. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1439996. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1439996`>.

DUTRA, A. C., MARANGONI, Y. R., JUNQUEIRA-BROD, T. C., 2012, "Investigation of the Goiás Alkaline Province, Central Brazil: Application of gravity and magnetic methods", *Journal of South American Earth Sciences*, v. 33, n. 1, pp. 43 – 55. doi: 10.1016/.jsames.2011.06.004.

DUTRA, A. C., MARANGONI, Y. R., TRINDADE, R. I. F., 2014, "Aeromagnetic and physical-chemical properties of some complexes from Goiás Alkaline Province", *Brazilian Journal of Geology*, v. 44, n. 3, pp. 361–373. doi: 10.5327/Z2317-4889201400030003.

DUTRA, A. C., 2011. "Inversão tridimensional de dados gravimétricos e magnéticos da Província Alcalina de Goiás: investigando o controle tectônico". Disponível em: <`https://www.iag.usp.br/pos/geofisica/portugues/teses`>.

EGBERT, G. D., BOOKER, J. R., 1986, "Robust estimation of geomagnetic transfer functions", *Geophysical Journal International*, v. 87, n. 1, pp. 173–194. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1986.tb04552.x.

EKBLOM, H., 1973, "Calculation of linear best L_p-approximations", *BIT*, v. 13, pp. 292–300. doi: 10.1007/BF01951940.

EMILIA, D. A., 1973, "Equivalent sources used as an analytic base for processing total magnetic field profiles", *Geophysics*, v. 38, n. 2 (abr.), pp. 339–348. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1440344. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1440344`>.

FARQUHARSON, C. G., OLDENBURG, D. W., 1998, "Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure", *Geophysical Journal International*, v. 134, n. 1 (07), pp. 213–227. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1046/j.1365-246x.1998.00555.x.

GOMES, C. B., COMIN-CHIARAMONTI, P., AZZONE, R. G., et al., 2018, "Cretaceous carbonatites of the southeastern brazilian platform: a review", *Brazilian Journal of Geology*, v. 48 (06), pp. 317 – 345. ISSN: 2317-4889. doi: 10.1590/2317-4889201820170123.

GUITTON, A., SYMES, W. W., 2003, "Robust inversion of seismic data using the Huber norm", *Geophysics*, v. 68, n. 4, pp. 1310–1319. doi: 10.1190/1.1598124.

HANSEN, R. O., MIYAZAKI, Y., 1984, "Continuation of potential fields between arbitrary surfaces", *GEOPHYSICS*, v. 49, n. 6, pp. 787–795. doi: 10.1190/1.1441707.

HIDALGO-GATO, M. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, "Fast 3D magnetic inversion of a surface relief in the space domain", *Geophysics*, v. 84, n. 5, pp. J57–J67. doi: 10.1190/geo2018-0712.1. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/geo2018-0712.1`>.

HORBACH, R., MARIMON, R. G., 1980, "Esboço da evolução tectônica e seu significado na gênese dos depósitos de fluorita no sudeste catarinense". In: *Anais do XXXI congresso*, v. 3, pp. 1540–1551, Camboriú, SC, Brazil, Sociedade Brasileira de Geologia. Disponível em: <`http://www.sbgeo.org.br/home/pages/44`>.

HUBER, P. J., 1964, "Robust Estimation of a Location Parameter", *Annals of Mathematical Statistics*, v. 35, n. 1, pp. 73–101. doi: 10.1214/aoms/1177703732.

HULOT, G., SABAKA, T., OLSEN, N., et al., 2015, "5.02 - The Present and Future Geomagnetic Field". In: Schubert, G. (Ed.), *Treatise on Geophysics*, second edition ed., Elsevier, pp. 33–78. ISBN: 978-0-444-53803-1. doi: 10.1016/B978-0-444-53802-4.00096-8.

JI, J., 2012, "Robust inversion using biweight norm and its application to seismic inversion", *Exploration Geophysics*, v. 43, n. 2, pp. 70–76. doi: 10.1071/EG12014.

JUNQUEIRA-BROD, T. C., ROIG, H. L., CASPAR, J. C., et al., 2002, "A Província Alcalina de Goiás e a extensão do seu vulcanismo kamafugítico", *Revista Brasileira de Geociências*, v. 32, n. 4, pp. 559–566. ISSN: 0375-7536. doi: 10.25249/0375-7536.2002324559566.

JUNQUEIRA-BROD, T. C., GASPAR, J. C., BROD, J. A., et al., 2005, "Kamafugitic diatremes: their textures and field relationships with examples from the Goiás alkaline province, Brazil", *Journal of South American Earth Sciences*, v. 18, n. 3–4, pp. 337–353. doi: 10.1016/j.jsames.2004.11.002.

LANGEL, R. A., HINZE, W. J., 1998, *The Magnetic Field of the Earth's Lithosphere: The Satellite Perspective.* Cambridge University Press. ISBN: 0521473330.

LARSEN, J. C., MACKIE, R. L., MANZELLA, A., et al., 1996, "Robust smooth magnetotelluric transfer functions", *Geophysical Journal International*, v. 124, n. 3, pp. 801–819. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1996.tb05639.x.

LEÃO, J. W. D., SILVA, J. B. C., 1989, "Discrete linear transformations of potential field data", *GEOPHYSICS*, v. 54, n. 4, pp. 497–507. doi: 10.1190/1.1442676.

LI, S.-L., LI, Y., 2014, "Inversion of magnetic anomaly on rugged observation surface in the presence of strong remanent magnetization", *GEOPHYSICS*, v. 79, n. 2 (mar.), pp. J11–J19. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/geo2013-0126.1. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/10.1190/geo2013-0126.1`>.

LI, W., LU, W., QIAN, J., et al., 2017, "A multiple level-set method for 3D inversion of magnetic data", *Geophysics*, v. 82, n. 5, pp. J61–J81. doi: 10.1190/geo2016-0530.1. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/geo2016-0530.1`>.

LI, Y., OLDENBURG, D. W., 1996, "3-D inversion of magnetic data", *Geophysics*, v. 61, n. 2, pp. 394–408. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1443968`>.

MACLENNAN, K., LI, Y., 2013, "Denoising multicomponent CSEM data with equivalent source processing techniques", *Geophysics*, v. 78, n. 3, pp. E125–E135. doi: 10.1190/geo2012-0226.1.

MARANGONI, Y. R., MANTOVANI, M. S., 2013, "Geophysical signatures of the alkaline intrusions bordering the Paraná Basin", *Journal of South American Earth Sciences*, v. 41, pp. 83–98. doi: 10.1016/j.jsames.2012.08.004.

MATSUNO, T., CHAVE, A. D., JONES, A. G., et al., 2014, "Robust magnetotelluric inversion", *Geophysical Journal International*, v. 196, n. 3, pp. 1365–1374. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggt484.

MELCHER, G. C., COUTINHO, J. M. V., 1966, "Rochas alcalinas e carbonatito de Anitápolis, Estado de Santa Catarina", *Boletim da Sociedade Brasileira de Geologia*, v. 15, n. 1, pp. 59–93. Disponível em: <`https://ppegeo.igc.usp.br/index.php/BSBG/article/view/12743`>.

MENDONÇA, C. A., 1992, *Interpolação de dados de campo potencial através da camada equivalente*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém do Pará, Brazil.

MENDONÇA, C. A., SILVA, J. B. C., 1994, "The equivalent data concept applied to the interpolation of potential field data", *GEOPHYSICS*, v. 59, n. 5, pp. 722–732. doi: 10.1190/1.1443630.

MENDONÇA, C. A., SILVA, J. B. C., 1995, "Interpolation of potential-field data by equivalent layer and minimum curvature: A comparative analysis", *GEOPHYSICS*, v. 60, n. 2, pp. 399–407. doi: 10.1190/1.1443776.

MENDONÇA, C. A., 2004, "Automatic determination of the magnetization–density ratio and magnetization inclination from the joint interpretation of 2D gravity and magnetic anomalies", *GEOPHYSICS*, v. 69, n. 4, pp. 938–948. doi: 10.1190/1.1778237.

MENDONÇA, C. A., 2020, "Subspace method for solving large-scale equivalent layer and density mapping problems", *GEOPHYSICS*, v. 85, n. 3, pp. G57–G68. doi: 10.1190/geo2019-0302.1. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/geo2019-0302.1`>.

NABIGHIAN, M. N., GRAUCH, V. J. S., HANSEN, R. O., et al., 2005, "The historical development of the magnetic method in exploration", *GEOPHYSICS*, v. 70, n. 6, pp. 33ND–61ND. doi: 10.1190/1.2133784.

OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., UIEDA, L., 2013, "Polynomial equivalent layer", *GEOPHYSICS*, v. 78, n. 1, pp. G1–G13. doi: 10.1190/geo2012-0196.1.

OLIVEIRA JR., V. C., SALES, D. P., BARBOSA, V. C. F., et al., 2015, "Estimation of the total magnetization direction of approximately spherical bodies", *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 215–232. doi: 10.5194/npg-22-215-2015.

OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, "3-D radial gravity gradient inversion", *Geophysical Journal International*, v. 195, n. 2, pp. 883–902. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggt307.

OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., 2011, "Source geometry estimation using the mass excess criterion to constrain 3-D radial inversion of gravity data", *Geophysical Journal International*, v. 187, n. 2, pp. 754–772. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05172.x.

PIGNATELLI, A., NICOLOSI, I., CHIAPPINI, M., 2006, "An alternative 3D inversion method for magnetic anomalies with depth resolution", *Annals of geophysics = Annali di geofisica*, (08). doi: 10.4401/ag-3114.

PILKINGTON, M., 1997, "3-D magnetic imaging using conjugate gradients", *Geophysics*, v. 62, n. 4 (jul.), pp. 1132–1142. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1444214. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1444214`>.

PILKINGTON, M., 2009, "3D magnetic data-space inversion with sparseness constraints", *Geophysics*, v. 74, n. 1 (jan.), pp. L7–L15. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.3026538. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/10.1190/1.3026538`>.

PLOUFF, D., 1976, "Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections", *Geophysics*, v. 41, n. 4, pp. 727–741. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1440645.

PORTNIAGUINE, O., ZHDANOV, M. S., 2002, "3-D magnetic inversion with data compression and image focusing", *Geophysics*, v. 67, n. 5 (set.), pp. 1532–1541. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1512749. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1512749`>.

PORTNIAGUINE, O., ZHDANOV, M. S., 1999, "Focusing geophysical inversion images", *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 874–887. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1444596`>.

REIS, A. L. A., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, "Equivalent layer technique for estimating magnetization direction". In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2019*, pp. 1769–1773. doi: 10.1190/segam2019-3216745.1.

REIS, A. L. A., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2020, "Generalized positivity constraint on magnetic equivalent layers", *Geophysics*, v. 85, n. 6, pp. 1–45. doi: 10.1190/geo2019-0706.1.

RICCOMINI, C., VELÁZQUEZ, V. F., GOMES, C. B., 2005, "Tectonic controls of the Mesozoic and Cenozoic alkaline magmatism in the central-southeastern Brazilian Platform". In: Comin-Chiaramonti, P., Gomes, C. B. (Eds.), *Mesozoic to Cenozoic Alkaline Magmatism in the Brazilian Platform*, Edusp/Fapesp, cap. 2, pp. 31–55, São Paulo.

SCALES, J. A., GERSZTENKORN, A., 1988, "Robust methods in inverse theory", *Inverse Problems*, v. 4, n. 4 (oct), pp. 1071–1091. doi: 10.1088/0266-5611/4/4/010.

SCHEIBE, L., FURTADO, S., COMIN-CHIARAMONTI, P., et al., 2005, "Cretaceous alkaline magmatism from Santa Catarina state, southern Brazil". In: Comin-Chiaramonti, P., Gomes, C. (Eds.), *Mesozoic to Cenozoic Alkaline Magmatism in the Brazilian Platform*, Edusp/Fapesp, cap. 16, pp. 523–571, São Paulo.

SEBER, G. A. F., WILD, C. J., 2003, *Nonlinear regression.* John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-47135-6.

SHAMSIPOUR, P., CHOUTEAU, M., MARCOTTE, D., 2011, "3D stochastic inversion of magnetic data", *Journal of Applied Geophysics*, v. 73, n. 4 (abr.), pp. 336–347. ISSN: 09269851. doi: 10.1016/j.jappgeo.2011.02.005. Disponível em: <`http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0926985111000425`>.

SILVA, J. B. C., 1986, "Reduction to the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies", *GEOPHYSICS*, v. 51, n. 2, pp. 369–382. doi: 10.1190/1.1442096.

SILVA, J. B. C., HOHMANN, G. W., 1983a, "Nonlinear magnetic inversion using a random search method", *Geophysics*, v. 48, n. 12 (12), pp. 1645–1658. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1441445. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/1.1441445`>.

SILVA, J. B., CUTRIM, A. O., 1989, "A robust maximum likelihood method for gravity and magnetic interpretation", *Geoexploration*, v. 26, n. 1, pp. 1 – 31. ISSN: 0016-7142. doi: 10.1016/0016-7142(89)90017-3.

SILVA, J. B., HOHMANN, G. W., 1983b, "Nonlinear magnetic inversion using a random search method", *Geophysics*, v. 48, n. 12, pp. 1645–1658. doi: 10.1190/1.1441445.

SILVA DIAS, F. J., BARBOSA, V. C., SILVA, J. B., 2007, "2D gravity inversion of a complex interface in the presence of interfering sources", *Geophysics*, v. 72, n. 2, pp. I13–I22. doi: 10.1190/1.2424545.

SIQUEIRA, F., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2017, "Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint", *GEOPHYSICS*, v. 82, n. 4, pp. G57–G69. doi: 10.1190/GEO2016-0332.1.

SUTARNO, D., VOZOFF, K., 1991, "Phase-smoothed robust M-estimation of magnetotelluric impedance functions", *Geophysics*, v. 56, n. 12, pp. 1999–2007. doi: 10.1190/1.1443012.

TAKAHASHI, D., JR., V. C. O., BARBOSA, V. C. F., 2020, "Convolutional equivalent layer for gravity data processing", *GEOPHYSICS*, v. 0, n. ja, pp. 1–54. doi: 10.1190/geo2019-0826.1. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/geo2019-0826.1`>.

UIEDA, L., BARBOSA, V. C. F., 2012, "Robust 3D gravity gradient inversion by planting anomalous densities", *Geophysics*, v. 77, n. 4, pp. G55–G66. doi: 10.1190/geo2011-0388.1.

UIEDA, L., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, "Modeling the Earth with Fatiando a Terra". In: van der Walt, S., Millman, J., Huff, K. (Eds.), *Proceedings of the 12th Python in Science Conference*, pp. 96–103. doi: 10.25080/Majora-8b375195-010.

VITAL, L. B., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, "Radial magnetic inversion to retrieve the geometry of 3D sources". In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2019*, pp. 1754–1758. doi: 10.1190/segam2019-3215805.1.

WANG, X., HANSEN, R. O., 1990, "Inversion for magnetic anomalies of arbitrary three-dimensional bodies", *Geophysics*, v. 55, n. 10, pp. 1321–1326. Disponível em: <`http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1442779`>.

ZHANG, H., RAVAT, D., MARANGONI, Y. R., et al., 2018, "Improved total magnetization direction determination by correlation of the normalized source strength derivative and the reduced-to-pole fields", *Geophysics*, v. 83, n. 6, pp. J75–J85. doi: 10.1190/geo2017-0178.1. Disponível em: <`https://doi.org/10.1190/geo2017-0178.1`>.