

**INVERSÃO MAGNÉTICA RADIAL ROBUSTA PARA ESTIMAR A  
GEOMETRIA DE FONTES 3D**

Leonardo Beserra Vital

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. Vanderlei Coelho de Oliveira Junior

Co-orientador(a): Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2021

Resumo da Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Observatório Nacional como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

## INVERSÃO MAGNÉTICA RADIAL ROBUSTA PARA ESTIMAR A GEOMETRIA DE FONTES 3D

Leonardo Beserra Vital

Janeiro/2021

Um cenário geológico geralmente inclui múltiplos corpos que produzem sinais geofísicos interferentes. Os sinais produzidos por fontes não-alvo podem ser considerados ruído geológico e devem ser suprimidos dos sinais gerados pelas fontes alvo que originam o efeito mais forte. Uma fonte alvo é aquela que dá origem ao sinal geofísico mais forte, independentemente de ser um alvo geológico de alto valor econômico. Este trabalho apresenta um método robusto de inversão de dados magnéticos para estimar a forma e a posição de uma fonte alvo 3D na presença ou não de fontes não-alvo sem a filtragem de seus sinais. Ao assumir o conhecimento da direção de magnetização total da fonte alvo, este método recupera a intensidade de magnetização total, a posição e a forma do corpo 3D. O método aproxima a fonte alvo por um conjunto de prismas retos verticalmente justapostos, todos os prismas possuem o mesmo vetor magnetização total e mesma espessura. A seção horizontal de cada prisma é definida por um polígono que possui um número fixo de vértices igualmente espaçados de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . A posição dos vértices, a localização horizontal de cada prisma e a espessura de todos os prismas são os parâmetros a serem estimados durante a minimização da função objetivo. Esses parâmetros são obtidos por meio de uma inversão não linear regularizada em que a função desajuste é definida pela norma-1 dos resíduos (solução L1). Testes com dados magnéticos sintéticos mostram uma melhor performance da solução L1 quando comparada à solução L2 (obtida usando o quadrado da norma-2 dos resíduos) em recuperar a forma da fonte alvo 3D na presença de fontes não-alvo. Na ausência de sinais interferentes, as soluções L1 e L2 mostram um comportamento similar para situações geológicas simples e complexas. Além disso, o método foi aplicado a um conjunto de dados produzidos por uma fonte inclinada com e sem a influência de um campo regional intenso e ambas as soluções L1 e L2 foram bem sucedidas em estimar a geometria da fonte alvo. Aplicações a dados magnéticos reais sobre complexos alcalinos

do Brasil sugerem que tanto o complexo de Anitápolis, SC, quanto o complexo de Diorama, GO, são formados por fontes não alvo e alvo. A geometria das soluções sugere que os complexos são controlados por falhas compatíveis com informações disponíveis na literatura. Diferentemente das soluções L1 e L2 obtidas para o complexo de Diorama, que sugerem a presença de fontes não-alvo relativamente grandes, aquelas obtidas para o complexo de Anitápolis indicam a presença de fontes não-alvo pequenas.

Abstract of the Thesis presented to the National Observatory's Graduate Program in Geophysics as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Geophysics.

## ROBUST MAGNETIC RADIAL INVERSION FOR 3-D SOURCE GEOMETRY ESTIMATION

Leonardo Beserra Vital

January/2021

A geologic scenario generally includes multiple geologic bodies producing interfering geophysical signals. The signals yielded by non-targeted sources can be considered a geologic noise and should be suppressed from signals yielded by the targeted sources that give rise to the strongest effect. Here, a targeted source is the one that gives rise to the strongest geophysical signal regardless of whether it is a geological target of high economic value. We have presented a robust method for inverting magnetic data to estimate the 3-D shape of a targeted source in the presence of non-targeted sources without filtering out the interfering signals. By assuming the knowledge of the total-magnetization direction of the targeted source, our method retrieves the total-magnetization intensity, the position, and the shape of a 3-D source. We approximate the targeted source by an ensemble of vertically juxtaposed right prisms, all of them with the same total-magnetization vector and depth extent. The horizontal cross-section of each prism is defined by a polygon having the same number of vertices equally spaced from  $0^\circ$  to  $360^\circ$ . The position of these vertices, the horizontal location of each prism, and the depth extent of all prisms are the parameters to be estimated by solving a constrained nonlinear inverse problem of minimizing a goal function. This is achieved by means of a non-linear regularized inversion in which the data-misfit function is defined by the 1-norm of the data residuals (L1 solution). Tests on synthetic magnetic data show the better performance of the L1 solution when compared with the L2 solution (obtained by using the 2-norm squared of the data residuals) in retrieving the 3-D shape of a targeted source in the presence of non-targeted sources. In the lack of interfering data, the L1 and L2 solutions are similar. Furthermore, the application on data produced by an inclined source with or without the influence of strong regional field showed that both L1 and L2 solutions succeeded in estimating the shape of the targeted source. Applications to

real magnetic data on Brazilian alkaline complexes suggest that both the Anitápolis complex, southern Brazil, and the Diorama complex, central Brazil, are formed by non-targeted and targeted sources. The geometry of the solutions suggests that the complexes are controlled by trending-faults compatible with information available in the literature. Unlike the L1 and L2 solutions obtained for the Diorama complex, which suggest the presence of relatively large non-targeted sources, those obtained for the Anitápolis complex indicate the presence of small non-targeted sources.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dados magnéticos</b>	<b>6</b>
2.1	Campo geomagnético . . . . .	6
2.2	Anomalia de campo total . . . . .	7
2.3	Anomalia de campo total reduzida ao polo . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>10</b>
3.1	Problema direto . . . . .	10
3.2	Problema inverso . . . . .	12
3.3	Vínculos . . . . .	14
3.3.1	Vínculos de suavidade . . . . .	14
3.3.2	Vínculos de norma Euclidiana mínima . . . . .	17
3.4	Algoritmo de inversão . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Procedimentos pré-inversão</b>	<b>24</b>
4.1	Aproximação inicial e vínculo de desigualdades . . . . .	24
4.2	Escolha dos pesos $\alpha_1 - \alpha_5$ . . . . .	27
4.3	Considerações práticas . . . . .	27
4.4	Critério de escolha da melhor solução . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Aplicação a dados sintéticos</b>	<b>29</b>
5.1	Modelo simples . . . . .	29
5.2	Modelo inclinado . . . . .	35
5.3	Modelo inclinado com regional . . . . .	41
5.4	Modelo complexo . . . . .	46
5.5	Modelo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena . . . . .	48
5.6	Modelo complexo na presença de uma fonte não-alvo grande . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Aplicação a dados reais</b>	<b>62</b>
6.1	Complexo de Anitápolis . . . . .	62
6.2	Complexo de Diorama . . . . .	68

<b>7 Conclusões</b>	<b>74</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>76</b>

# Listas de Figuras

3.1	Representação esquemática do modelo interpretativo. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética 3D localizada em subsuperfície (volume cinza escuro em b). (b) Modelo interpretativo formado por $L$ prismas retos $P^k$ , $k = 1, \dots, L$ (prismas cinza claro), verticalmente justapostos e com seção horizontal descrita por um polígono. A profundidade do topo $z_0$ do modelo interpretativo coincide com a da fonte magnética (volume cinza escuro). . . . .	11
3.2	Representação esquemática do $k$ -ésimo prisma $P^k$ , $k = 1, \dots, L$ , que compõe o modelo interpretativo (Figura 1b). Este prisma tem espessura $dz$ , profundidade do topo $z_1^k$ e seção horizontal descrita por um polígono com $V$ vértices igualmente espaçados entre $0^\circ$ e $360^\circ$ . . . . .	12
3.3	Representação esquemática dos vínculos de desigualdade. A figura exibe os prisma $P^k$ e os intervalos de máximo e mínimo de $r_j^k$ , $x_0$ , $y_0$ e $dz$ . . . . .	13
3.4	Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes dentro de um mesmo prisma $\varphi_1$ . A figura exibe o $k$ -ésimo prisma $P^k$ e as distâncias radiais adjacentes $r_j^k$ e $r_{j+1}^k$ relacionadas ao vínculo. . . . .	15
3.5	Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes pertencentes a prismas adjacentes $\varphi_2$ . A figura exibe o $k$ -ésimo prisma $P^k$ e seu adjacente $P^{k+1}$ , assim como as distâncias radiais adjacentes $r_j^k$ e $r_j^{k+1}$ relacionadas ao vínculo. . . . .	16
3.6	Representação esquemática do vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes $\varphi_3$ . A figura exibe os prismas $P^k$ e $P^{k+1}$ e suas respectivas coordenadas Cartesianas $(x_0^k, y_0^k)$ , referidas à origem $O^k$ , e $(x_0^{k+1}, y_0^{k+1})$ , referidas à origem $O^{k+1}$ . . . . .	17
3.7	Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais de um prisma $\varphi_4$ . A figura exibe os prisma $P^k$ e suas respectivas distâncias radiais $r_j^k$ referidas à origem $O^k$ . O vínculo atua sobre as distâncias radiais do prismas, levando-as próximas a zero. . . . .	18

3.8 Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero $\varphi_5$ na espessura $dz$ dos prismas. A figura exibe os prisma $P^k$ e sua espessura. O vínculo atua sobre a espessura de todos os prismas levando-a próxima a zero, uma vez que $dz$ é igual para todos os prismas.	19
4.1 Exemplo ilustrativo de anomalia de campo total reduzida ao polo para a definição dos limites do vínculo de desigualdades e aproximação inicial. O círculo preto representa o valor máximo $r^{max}$ para os raios $r_j^k$ , $j = 1, \dots, V$ , $k = 1, \dots, L$ . O retângulo vermelho representa a área composta pelos valores mínimos ( $x_0^{min}$ e $y_0^{min}$ ) e máximos ( $x_0^{max}$ e $y_0^{max}$ ) das coordenadas Cartesianas horizontais $x_0^k$ e $y_0^k$ da origem $O^k$ . Já o círculo vermelho representa o raio $r_j^k$ da aproximação inicial cilíndrica $\hat{\mathbf{p}}_0$ .	25
4.2 Exemplo ilustrativo de um ajuste preliminar entre anomalia de campo total observada (linhas pretas) e os dados produzidos pela aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_0$ (linhas vermelhas). Linhas contínuas representam dados positivos e linhas tracejadas representam dados negativos.	26
5.1 Modelo simples. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte simples (prismas azuis mostrados nos painel b). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ (prismas vermelhos nas Figuras 5.3c). (b) Visualização em perspectiva do modelo da fonte simples representada pelos prismas azuis.	31
5.2 Anomalia RTP produzida pela fonte simples. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte simples. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.3c e 5.4c).	32

5.3 Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte simples. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo $z_0$ e intensidade de magnetização total $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para $m_0$ e $z_0$ , assim como os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte simples. . . . .	33
5.4 Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte simples. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo $z_0$ e intensidade de magnetização total $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para $m_0$ e $z_0$ , assim como os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte simples. . . . .	34
5.5 Modelo inclinado. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte alvo (prismas azuis mostrados nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ (prismas vermelhos nas Figuras 5.7c e 5.8c). (b) Coordenadas verticais dos pontos de observação que simulam um levantamento aéreo. (c) e (d) Visualizações em perspectiva do modelo da fonte alvo representada pelos prismas azuis. . . . .	37

5.6 Anomalia RTP produzida pela fonte alvo. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.7c e 5.8c). . . . .	38
5.7 Soluções L2 obtidas para o modelo inclinado. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo $z_0$ e intensidade de magnetização total $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para $m_0$ e $z_0$ , enquanto o losango branco definem os valores para a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo. . . . .	39
5.8 Soluções L1 obtidas para o modelo inclinado. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo $z_0$ e intensidade de magnetização total $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para $m_0$ e $z_0$ , enquanto o losango branco definem os valores para a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo. . . . .	40

5.9 Aplicação aos dados do modelo inclinado com regional. (a) Anomalia de campo total produzida pela modelo inclinado (Figura 5.5a) somada a um campo regional sintético (painel b). (b) Polinômio de primeira ordem que representa o campo regional sintético. (c) Anomalia de campo total residual obtida pela diferença entre (a) e (d). (d) Campo regional estimado por um polinômio simples através de mínimos quadrados. . . . .	42
5.10 Aplicação aos dados do modelo inclinado com regional. (a) Anomalia de campo total residual contida no retângulo rosa na Figura 5.9c. (b) Resíduos obtidos pela diferença entre as anomalias de campo total gerada no teste anterior (Figura 5.5a) e a residual (painel a). (c) Anomalia RTP sobre a área de estudo. Ambos painéis são limitados pelo retângulos rosa na Figura 5.9. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.11c e 5.12c). . . . .	43
5.11 Soluções L2 obtidas para o modelo inclinado com regional. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo $z_0$ e intensidade de magnetização total $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para $m_0$ e $z_0$ eo losango branco indica os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Figura 5.10a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo. . . . .	44

- 5.12 Soluções L1 obtidas para o modelo inclinado com regional. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$  e o losango branco indica os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Figura 5.10a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo. . . . . 45
- 5.13 Modelo da fonte alvo. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte alvo (prismas azuis mostrados nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  (prismas vermelhos nas Figuras 5.15c e 5.16c). (b) Coordenadas verticais dos pontos de observação que simulam um levantamento aéreo. (c) e (d) Visualizações em perspectiva do modelo da fonte alvo representada pelos prismas azuis. . . . . 48
- 5.14 Anomalia RTP produzida pela fonte alvo. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.15c e 5.16c). . . . . 49



- 5.18 Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte não-alvo pequena. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.19c e 5.20c). . . . . 54
- 5.19 Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Os valores verdadeiros de  $m_0$  e  $z_0$ ) e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.17a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo. . . . . 55
- 5.20 Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Os valores verdadeiros de  $m_0$  e  $z_0$ ) e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura ??a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo. . . . . 56





6.4 Soluções L1 obtidas para o complexo de Anitápolis. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo $z_0$ e intensidade de magnetização total $m_0$ . O losango branco representa os valores de $m_0$ e $z_0$ que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 6.2a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente. . . . .	67
6.5 Aplicação aos dados do complexo de Diorama. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Polinômio de primeira ordem que representa o campo regional. (c) e (d) Altura geométrica dos pontos de observação e topografia, ambas referenciadas ao elipsoide WGS84. Por simplicidade, foi removida uma constante de 430 m de seus valores. As coordenadas UTM estão referenciadas ao meridiano central 51°. Os pontos pretos representam os pontos observados. Apenas os dados delimitados pelo retângulo rosa foram usados para a inversão.	70
6.6 Aplicação aos dados do complexo de Diorama. (a) e (b) Anomalias residual e RTP sobre a área de estudo definida pelo retângulo rosa na Figura 6.5. A linha vermelha representa a projeção horizontal das aproximações iniciais usadas nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 6.7c e 6.8c). . . . .	71
6.7 Soluções L2 obtidas para o complexo de Diorama. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo $z_0$ e intensidade de magnetização total $m_0$ . O losango branco representa os valores de $m_0$ e $z_0$ que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 6.6a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente. . . . .	72

- 6.8 Soluções L1 obtidas para o complexo de Diorama. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O losango branco representa os valores de  $m_0$  e  $z_0$  que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 6.6a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente. . . . . 73

# Capítulo 1

## Introdução

A interpretação de anomalias de campo total sobre a superfície da Terra é um desafio na geofísica de exploração devido à falta de unicidade da solução em uma inversão magnética 3D. É bem estabelecido na literatura que diversas distribuições de magnetização em subsuperfície podem produzir o mesmo dado magnético com a mesma precisão. A fim de superar essa ambiguidade, é necessário introduzir informação a priori ao problema para reduzir o número de possíveis soluções que são coerentes com a geologia local. Existem basicamente três grupos de métodos de inversão magnética 3D. A informação a priori disponível determina a abordagem mais adequada para cada caso.

O primeiro grupo de métodos aproxima a fonte por um corpo causador geométricamente simples que possui geometria definida por um número pequeno de parâmetros (por exemplo, BALLANTYNE, 1980; BHATTACHARYYA, 1980; MEDEIROS e SILVA, 1995; SILVA e HOHMANN, 1983). Esses métodos estimam tanto a geometria quanto a propriedade física da fonte através da solução de um problema inverso não linear. Devido à parametrização muito restritiva, tais métodos são frequentemente menos ambíguos.

O segundo grupo é formado pela vasta maioria dos métodos. Eles aproximam a subsuperfície por uma malha de prismas retangulares justapostos com uma direção de magnetização constante. Alguns métodos presumem uma magnetização puramente induzida (por exemplo, CRIBB, 1976; LI e OLDENBURG, 1996; PILKINGTON, 1997) e as susceptibilidades magnéticas isotrópicas dos prismas são as quantidades estimadas pela solução de um problema inverso linear. Abordagens diferentes aperfeiçoaram este método de inversão para obter imagens da subsuperfície. Por exemplo, PORTNIAGUINE e ZHDANOV (1999) e PORTNIAGUINE e ZHDANOV (2002) introduziram o gradiente mínimo para minimizar o efeito de fortes variações e descontinuidades nos parâmetros obtidos pela inversão da anomalia de campo total ou qualquer componente do campo anômalo magnético. Outros estudos introduziram estratégias para restringir a falta de unicidade e delinear a fonte (ABEDI *et al.*,

2015; CARATORI TONTINI *et al.*, 2006; CELLA e FEDI, 2012; PILKINGTON, 2009; SHAMSIPOUR *et al.*, 2011). Excepcionalmente, alguns desses métodos permitem uma direção de magnetização diferente da direção do campo geomagnético principal (por exemplo, PIGNATELLI *et al.*, 2006). Nesse caso, os parâmetros a serem estimados são as intensidades de magnetização total dos prismas. Em todos esses métodos, portanto, as geometrias das fontes magnéticas são indiretamente recuperadas interpretando a distribuição estimada de intensidade de magnetização total. Teoricamente, esses métodos de inversão são capazes de recuperar a geometria de fontes complexas. No entanto, eles exigem uma infinidade de informações a priori para superar sua falta de unicidade e instabilidade devido ao grande número de parâmetros a serem estimados. Além disso, essas técnicas são caracterizadas por um alto custo computacional associado à solução de grandes sistemas lineares.

O terceiro grupo de métodos de inversão magnética 3D pressupõe algum conhecimento sobre a distribuição da propriedade física e estima a geometria das fontes. Eles geralmente são formulados como problemas inversos não lineares. WANG e HANSEN (1990) aproximam a fonte por um poliedro e estimam a posição de seus vértices no domínio de Fourier. LI *et al.* (2017) desenvolveram um método *level-set* para estimar a geometria de um conjunto de corpos com susceptibilidade magnética uniforme. HIDALGO-GATO e BARBOSA (2019) invertem a anomalia de campo total para estimar a geometria do relevo do embasamento de uma bacia sedimentar com uma intensidade de magnetização conhecida mas direção desconhecida. HIDALGO-GATO *et al.* (2020) invertem a amplitude do campo magnético anômalo para estimar o relevo do embasamento e a intensidade de magnetização aparente. Para tanto, eles também presumem que a direção de magnetização seja conhecida. Os métodos que compõem este terceiro grupo possuem um número relativamente pequeno de parâmetros a serem estimados por inversão e possuem muito menos ambiguidade em comparação ao segundo grupo.

É de amplo conhecimento que problemas inversos que usam medidas de desajuste dos dados com base na tradicional norma-2 quadrática dos resíduos (ou soma dos quadrados dos resíduos), ou seja, inversões por mínimos quadrados, podem ser drasticamente afetados pela presença de dados espúrios ou *outliers* e também pelo efeito causado por fontes não-alvo (ruído geológico) nos dados observados. Do ponto de vista estatístico, as inversões por mínimos quadrados não são robustas (HUBER, 1964; SCALES e GERSZTENKORN, 1988). Para contornar esse problema, medidas robustas de desajuste dos dados, como a norma-1 (ou soma dos resíduos absolutos), o estimador-*M* (HUBER, 1964), ou a “norma  $L_p$  perturbada” (EKBLOM, 1973) são usadas há muito tempo em problemas inversos em geofísica (FARQUHARSON e OLDENBURG, 1998). Existem diversos exemplos para interpretar, por exemplo, dados sísmicos (por exemplo, AMUNDSEN, 1991; CLAERBOUT e MUIR, 1973;

CRASE *et al.*, 1990; DA SILVA *et al.*, 2020; GUITTON e SYMES, 2003; JI, 2012; SCALES e GERSZTENKORN, 1988) e também dados magnetotelúricos (por exemplo, CHAVE *et al.*, 1987; EGBERT e BOOKER, 1986; LARSEN *et al.*, 1996; MATSUNO *et al.*, 2014; SUTARNO e VOZOFF, 1991). Neste trabalho, o foco será sobre os métodos para inversão de dados de campos potenciais na presença de fontes não-alvo que usam medidas robustas da função desajuste dos dados ou uma abordagem semelhante.

SILVA e HOHMANN (1983) apresentam uma inversão magnética não linear 2D para estimar a geometria de corpos simples via algoritmo de busca aleatória. Eles mostraram que as soluções obtidas usando a norma-1 são melhores do que a norma-2 quando há pequenas fontes não-alvo rasas. SILVA e CUTRIM (1989) propõem um estimador de máxima probabilidade para inverter dados gravimétricos e magnéticos com base na suposição de erros que seguem uma distribuição de Cauchy. Eles mostraram que seu método é mais robusto do que aqueles baseados nas normas 1 e 2 quando há a presença de ruído geológico. BELTRÃO *et al.* (1991) desenvolveram uma abordagem robusta de mínimos quadrados reponderados iterativamente – do inglês *Iteratively Reweighted Least Squares* (SCALES e GERSZTENKORN, 1988) – para estimar os coeficientes de um polinômio que representa o campo de gravidade regional. Eles assumem que o campo residual não muda seu sinal em toda a área de estudo. BARBOSA e SILVA (2006) introduziram uma inversão magnética 2D robusta para lidar com fontes não-alvo. Esse método estima indiretamente a espessura das fontes magnéticas alvo no entorno de um conjunto de elementos geométricos definidos pelo usuário como segmentos de reta e/ou pontos colocados em profundidade. Vale ressaltar que a robustez desse método não se deve ao uso de uma medida robusta de desajuste dos dados, mas ao seu esquema de concentração da distribuição de propriedade física estimada ao redor dos elementos geométricos. SILVA DIAS *et al.* (2007) propõem uma inversão gravimétrica 2D baseada em uma abordagem IRLS para estimar a geometria de uma interface complexa entre dois meios contendo heterogeneidades de densidade. UIEDA e BARBOSA (2012) apresentam um método robusto de inversão do gradiente de gravidade para estimar a distribuição de densidade 3D em uma malha de prismas retangulares. O método impõe que a solução cresça em torno de prismas especificados pelo usuário com valores de contraste de densidade predefinidos. Eles usam a função desajuste definida pela norma-1 para ignorar o efeito de fontes não-alvo. OLIVEIRA JR. *et al.* (2015) propõem um método IRLS robusto para estimar a direção da magnetização total de fontes magnéticas simples na presença de ruído geológico.

Este trabalho apresenta uma inversão magnética não linear robusta para estimar a geometria de uma fonte alvo 3D na presença ou não de fontes não-alvo. Este método é uma extensão dos trabalhados apresentados por OLIVEIRA JR. *et al.*

(2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), para inverter dados gravimétricos e de gradiometria da gravidade. Aproxima-se a fonte por um modelo interpretativo formado por prismas retos justapostos verticalmente com seções horizontais definidas por polígonos, todos eles com o mesmo número de vértices. Por conveniência, todos os prismas têm a mesma espessura e intensidade de magnetização total. Diferentemente de OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), este método estima não só a posição horizontal e a forma das seções horizontais de todos os prismas, mas também uma espessura constante comum para todos os prismas que formam o modelo de interpretativo. Presume-se que a fonte alvo tenha uma direção de magnetização total conhecida. Além disso, uma análise numérica é realizada para investigar a sensibilidade do método para dois parâmetros que são determinantes para a inversão: a intensidade de magnetização total e a profundidade do topo do prisma mais raso. Uma série de inversão é executada para diferentes combinações de valores desses dois parâmetros e computa-se o valor da função objetivo associada à solução. Dentre os modelos estimados, aqueles que produzem os menores valores de função objetivo formam o conjunto de soluções candidatas. Corpos estimados através da norma-2 quadrática dos resíduos geralmente falham em recuperar corretamente a geometria de uma fonte alvo na presença de uma fonte não-alvo. Por conveniência, chamamos esses corpos estimados de soluções L2. Para contornar essa limitação, diferentes corpos são estimados minimizando uma função objetivo composta de cinco funções de regularização e a função de desajuste dos dados definida pela norma-1 dos resíduos entre os dados observados e preditos. Os diferentes corpos estimados, convenientemente chamados de soluções L1, são obtidos a partir de um conjunto de valores especificados pelo usuário de profundidade do topo e intensidade de magnetização total. A melhor solução L1 é definida como aquela que produz o menor valor da função objetivo e representa a melhor aproximação para a fonte alvo. Este método também produz soluções L2 para comparação. Da mesma forma que OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), as funções de regularização são definidas através das regularizações Tikhonov de ordem zero e de primeira ordem (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019, p. 96 e 104) com o objetivo de obter soluções estáveis e também introduzir informação a priori sobre a fonte alvo.

Este método foi aplicado para inverter dados sintéticos produzidos por: um corpo geológico simples com forma de um lopólito que satisfaz a maioria dos vínculos, um corpo inclinado para recuperar geometria sem alinhamento vertical e investigar a influência de um campo regional intenso sobre a inversão dos dados produzidos por esse corpo; um corpo complexo que exibe uma forma variável com a profundidade e viola alguns dos vínculos impostos neste trabalho. Os corpos simulados representam as fontes alvo 3D. O método também foi aplicado para inverter os dados magnéticos produzidos pelo corpo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena e uma

grande com a finalidade de verificar a influência dos dados interferentes produzidos por elas sobre as soluções L2 e L1. Aplicações a dados magnéticos reais sobre os complexos alcalinos brasileiros de Diorama, GO, e Anitápolis, SC, foram realizadas para demonstrar a robustez do método e inferir sobre a presença de fontes não-alvo.

# Capítulo 2

## Dados magnéticos

### 2.1 Campo geomagnético

Em geomagnetismo, é muito comum dividir o campo geomagnético em duas componentes: campo interno e campo externo (HULOT *et al.*, 2015). Correntes elétricas localizadas na ionosfera e magnetosfera são responsáveis pela componente externa do campo geomagnético. Já o campo interno pode ser subdividido em outras duas componentes: campo principal e campo crustal. A componente mais intensa do campo geomagnético é o campo principal que é produzido por um dínamo autosustentável que age no núcleo externo da Terra. Por último, o campo crustal é produzido por rochas magnetizadas localizadas na litosfera (HULOT *et al.*, 2015; LANGEL e HINZE, 1998). Essas rochas magnetizadas em subsuperfície são usualmente chamadas de fontes magnéticas (BLAKELY, 1996; NABIGHIAN *et al.*, 2005).

Em geofísica aplicada, os interesses estão voltados em interpretar o campo crustal, devido ao valor econômico dessas rochas magnetizadas. As medidas realizadas em levantamentos magnéticos correspondem à resultante dos campos principal, crustal e externo. O campo externo é normalmente considerado ruído e é removido do dado junto aos ruídos antropogênicos. Então, o campo restante pode ser considerado a soma dos campos principal e crustal (HULOT *et al.*, 2015) que é chamado também de campo total (BLAKELY, 1996). Essa nomenclatura está presente na geofísica de exploração e será utilizada aqui. Frequentemente, modelos matemáticos como o IGRF – do inglês *International Geomagnetic Reference Field* – descrevem o campo principal em todos os pontos da Terra.

## 2.2 Anomalia de campo total

A diferença entre a magnitude do campo total e a magnitude do campo principal no mesmo ponto é denominada anomalia de campo total (BLAKELY, 1996; NABIGHIAN *et al.*, 2005):

$$\Delta T(x, y, z) = \|\mathbf{T}(x, y, z)\| - \|\mathbf{F}(x, y, z)\|, \quad (2.1)$$

em que “ $\| \|$ ” indica a norma Euclidiana,  $\mathbf{F}$  é o campo principal da Terra e  $\mathbf{T}$  é o campo total, que é representado por

$$\mathbf{T}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + \mathbf{B}(x, y, z), \quad (2.2)$$

em que  $\mathbf{B}$  é a indução magnética produzida pelas fontes magnéticas.

Para estudos locais, o campo principal pode ser considerado um vetor constante desde que a aquisição dos dados tenha sido feita em um curto período de tempo. Portanto, o campo principal ao longo da área de estudo pode ser escrito como

$$\mathbf{F}_0 = \|\mathbf{F}_0\| \hat{\mathbf{F}}, \quad (2.3)$$

em que

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \cos(I_0) \cos(D_0) \\ \cos(I_0) \sin(D_0) \\ \sin(I_0) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

é um versor que contém a inclinação  $I_0$  e declinação  $D_0$  do campo principal, que são constantes. Na maioria dos casos, podemos considerar que  $\|\mathbf{F}_0\| \gg \|\mathbf{B}(x, y, z)\|$  em todos os pontos sobre a área de estudo (BLAKELY, 1996). Em outras palavras, pode-se dizer que  $\mathbf{B}$  é uma pequena perturbação do campo principal  $\mathbf{F}_0$  na área de estudo. Essas premissas permitem aproximar a norma Euclidiana do campo total  $\mathbf{T}(x, y, z)$  em uma expansão de série de Taylor de primeira ordem obtendo:

$$\|\mathbf{T}(x, y, z)\| \approx \|\mathbf{F}_0\| + \hat{\mathbf{F}}^\top \mathbf{B}(x, y, z), \quad (2.5)$$

logo

$$\tilde{\Delta T}(x, y, z) = \hat{\mathbf{F}}^\top \mathbf{B}(x, y, z), \quad (2.6)$$

em que  $\tilde{\Delta T}(x, y, z)$  é a anomalia de campo total aproximada e o sobre-escrito “ $\top$ ” indica transposição.

Considere um corpo de volume  $v$  uniformemente magnetizado com um vetor constante de magnetização  $\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{m}}$ , em que  $m$  é intensidade de magnetização total e  $\hat{\mathbf{m}}$  é um versor que contém a direção de magnetização total da fonte. As unidades da intensidade de magnetização e das coordenadas são amperes por metro

(A/m) e metro (m), respectivamente. Assim, a indução magnética  $\mathbf{B}(x, y, z)$  em nanoteslas produzida no ponto  $(x, y, z)$  por uma fonte pode ser escrita como

$$\mathbf{B}(x, y, z) = c_m \frac{\mu_0}{4\pi} m \mathbf{M}(x, y, z) \hat{\mathbf{m}}, \quad (2.7)$$

em que  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  H/m é a permeabilidade magnética do vácuo,  $c_m = 10^9$  é uma constante de transformação de Tesla (T) para nanotesla (nT) e  $\mathbf{M}(x, y, z)$  é uma matriz dada por

$$\mathbf{M}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\Phi(x, y, z) & \partial_{xy}\Phi(x, y, z) & \partial_{xz}\Phi(x, y, z) \\ \partial_{xy}\Phi(x, y, z) & \partial_{yy}\Phi(x, y, z) & \partial_{yz}\Phi(x, y, z) \\ \partial_{xz}\Phi(x, y, z) & \partial_{yz}\Phi(x, y, z) & \partial_{zz}\Phi(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

em que  $\partial_{\alpha\beta}\Phi(x, y, z)$ ,  $\alpha = x, y, z$ ,  $\beta = x, y, z$ , são as segundas derivadas com respeito às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  da função

$$\Phi(x, y, z) = \int \int \int_v \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dv' \quad (2.9)$$

que é a integral tripla sobre as coordenadas  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  ao longo do volume  $v$  da fonte magnética.

Portanto, substituindo a Equação 2.7 na Equação 2.6, obtemos

$$\tilde{\Delta T}(x, y, z) = c_m \frac{\mu_0}{4\pi} m \hat{\mathbf{F}}^\top \mathbf{M}(x, y, z) \hat{\mathbf{m}}. \quad (2.10)$$

## 2.3 Anomalia de campo total reduzida ao polo

De acordo com a Equação 2.10, a direção de magnetização total e a direção do campo geomagnético principal são arbitrárias, assim a anomalia de campo total pode assumir tanto valores positivos quanto negativos. Por essa razão, os valores máximos ou mínimos da anomalia de campo total não estarão localizados sobre a fonte, diferentemente de dados gravimétricos, impedindo uma interpretação direta dos dados magnéticos. Para contornar esse problema, BARANOV (1957) propôs uma transformação chamada de redução ao polo que é feita sobre os dados de anomalia de campo total. Esse método utiliza a anomalia de campo total  $\tilde{\Delta T}(x, y, z)$  (2.10) para estimar uma anomalia mais simples dada por

$$\Delta T^P(x, y, z) = c_m \frac{\mu_0}{4\pi} m \partial_{zz}\Phi(x, y, z), \quad (2.11)$$

a qual descreve a anomalia de campo total que seria produzida pela fonte se ela estivesse magnetizada na direção do campo principal e localizada no polo. Nessa

situação, tanto o campo principal e quanto a magnetização da fonte possuem uma direção vertical, ou seja, os vetores  $\hat{\mathbf{F}}$  e  $\hat{\mathbf{m}}$  (Equação 2.10) seriam iguais a  $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 1]^\top$ . Podemos notar que  $\Delta T^P(x, y, z)$  (Equação 2.11) depende do conhecimento exato do volume e localização da fonte magnética, o qual é impossível de saber na prática. Assim, se faz necessário o uso de uma técnica de processamento de dados como a camada equivalente para obter uma estimativa de  $\Delta T^P(x, y, z)$ . Essa estimativa é conhecida como anomalia de campo total reduzida ao polo ou anomalia RTP – do inglês *reduced to the pole*.

A camada equivalente é uma técnica de processamento e interpretação dados magnéticos e gravimétricos. A técnica teve início há mais de 50 anos com DAMPNEY (1969) e EMILIA (1973) e vem sendo utilizada como uma ferramenta versátil no processamento e interpretação de dados em métodos potenciais. Os trabalhos publicados mostram uma vasta gama de aplicações para a técnica tais como interpolação, redução ao polo, separação regional-residual, continuações para cima e para baixo (por exemplo, HANSEN e MIYAZAKI, 1984; LI e LI, 2014; MACLENNAN e LI, 2013; MENDONÇA, 1992; MENDONÇA e SILVA, 1995; MENDONÇA, 2004; SILVA, 1986). Um dos obstáculos da técnica é seu alto custo computacional e, por isso, alguns estudos são direcionados a reduzir o tempo de processamento da camada equivalente (por exemplo, LEÃO e SILVA, 1989; MENDONÇA e SILVA, 1994; MENDONÇA, 2020; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2013; REIS *et al.*, 2020; SIQUEIRA *et al.*, 2017; TAKAHASHI *et al.*, 2020). Essa técnica se aproveita da ambiguidade presente nos métodos potenciais para reproduzir um conjunto de dados observados a partir de uma distribuição 2D fictícia de propriedade física. Isso permite diversas aplicações e uma delas é obter a anomalia de campo total reduzida ao polo.

# Capítulo 3

## Metodologia

### 3.1 Problema direto

Seja  $\mathbf{d}^o$  o vetor de dados observados, cujo  $i$ -ésimo elemento  $d_i^o$ ,  $i = 1, \dots, N$ , é a anomalia de campo total observada (Equação 2.10) no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$ . Considere que as anomalias de campo total produzidas por pequenas fontes magnéticas não-alvo podem distorcer localmente a anomalia causada por uma fonte alvo 3D. Adicionalmente considere que o campo geomagnético principal é constante na área de estudo, com declinação  $D_0$  e inclinação  $I_0$ . Este trabalho segue a mesma abordagem apresentada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013) para definir o modelo interpretativo que aproxima a geometria da fonte alvo. Esse modelo é formado por um conjunto de  $L$  prismas retos verticalmente justapostos tendo a mesma espessura  $dz$  e o mesmo vetor de magnetização total com intensidade  $m_0$ , declinação  $D$  e inclinação  $I$  (Figura 3.1).

A profundidade do topo do prisma mais raso é definida por  $z_0$ . Cada prisma possui a seção horizontal definida por um polígono com  $V$  vértices igualmente espaçados de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . As posições horizontais dos vértices que formam o  $k$ -ésimo prisma são definidas por distâncias radiais (ou apenas raios)  $r_j^k$ , com respeito a uma origem  $(x_0^k, y_0^k)$  localizada dentro do prisma,  $k = 1, \dots, L$ ,  $j = 1, \dots, V$  (Figura 3.2). A anomalia de campo total predita pelo modelo interpretativo no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , é dada por:

$$d_i(\mathbf{p}) \equiv \sum_{k=1}^L f_i^k(\mathbf{r}^k, x_0^k, y_0^k, dz, z_1^k, m_0, D, I, D_0, I_0), \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{r}^k$  é um vetor de dimensão  $V \times 1$  que contém os raios  $r_j^k$  dos vértices pertencentes ao  $k$ -ésimo prisma, que possui origem no ponto  $(x_0^k, y_0^k)$  e profundidade do topo em  $z_1^k = z_0 + (k - 1)dz$ . Na Equação 3.1,  $\mathbf{p}$  é um vetor de parâmetros de

dimensão  $M \times 1$ ,  $M = L(V+2)+1$ , que define a geometria do modelo interpretativo:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^1^\top & x_0^1 & y_0^1 & \dots & \mathbf{r}^L^\top & x_0^L & y_0^L & dz \end{bmatrix}^\top. \quad (3.2)$$

A anomalia de campo total  $d_i(\mathbf{p})$  (Equação 3.1) é computada por meio das fórmulas de PLOUFF (1976) implementadas no pacote de Python Fatiando a Terra (UIEDA *et al.*, 2013).

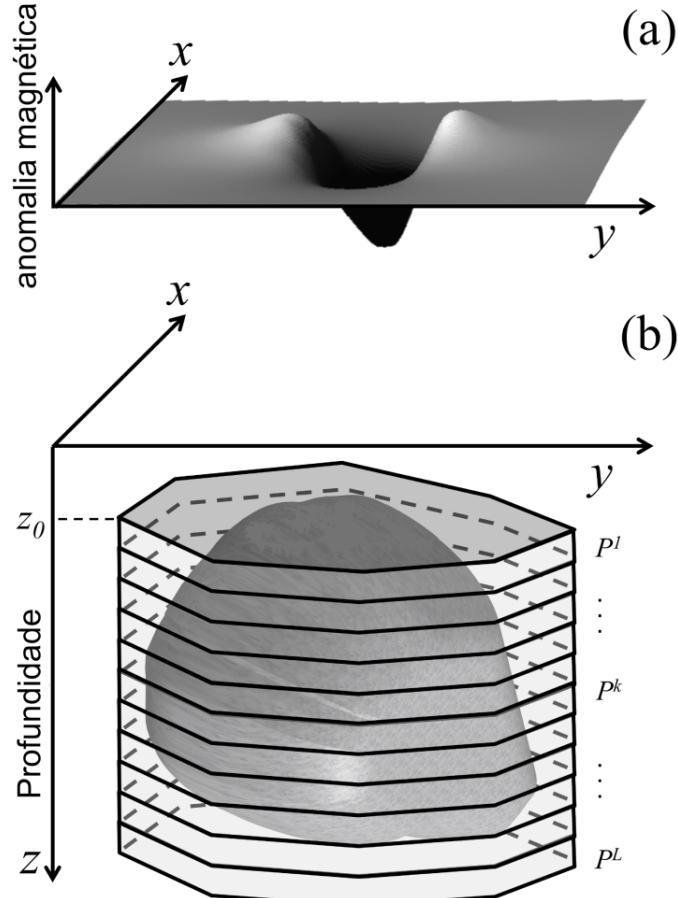


Figura 3.1: Representação esquemática do modelo interpretativo. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética 3D localizada em subsuperfície (volume cinza escuro em b). (b) Modelo interpretativo formado por  $L$  prismas retos  $P^k$ ,  $k = 1, \dots, L$  (prismas cinza claro), verticalmente justapostos e com seção horizontal descrita por um polígono. A profundidade do topo  $z_0$  do modelo interpretativo coincide com a da fonte magnética (volume cinza escuro).

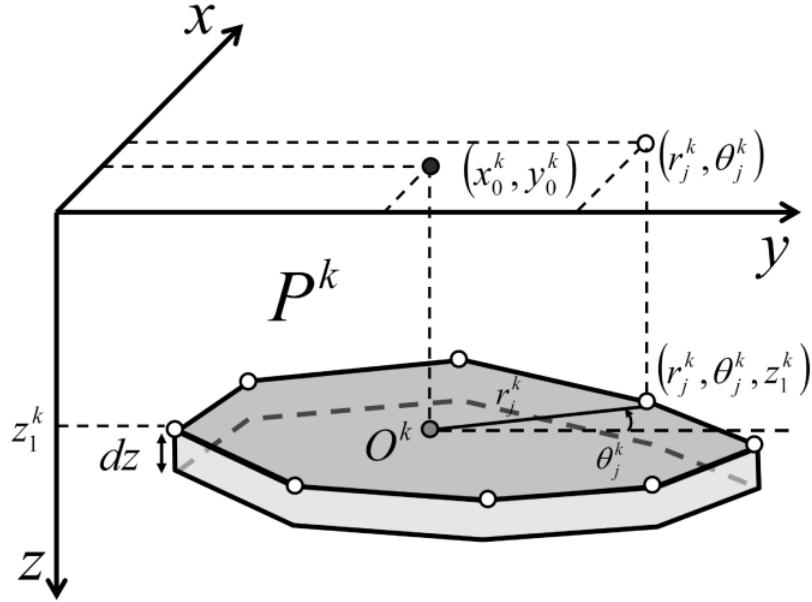


Figura 3.2: Representação esquemática do  $k$ -ésimo prisma  $P^k$ ,  $k = 1, \dots, L$ , que compõe o modelo interpretativo (Figura 1b). Este prisma tem espessura  $dz$ , profundidade do topo  $z_1^k$  e seção horizontal descrita por um polígono com  $V$  vértices igualmente espaçados entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ .

### 3.2 Problema inverso

Este trabalho propõe um método robusto de inversão magnética para estimar a posição e a forma de uma fonte magnética alvo 3D, que pode ou não estar na presença de fontes não-alvo. A fonte alvo é aquela que gera a anomalia de campo total de maior extensão horizontal e que é geralmente a mais intensa. Já as fontes não-alvo não aquelas que produzem um sinal interferente menos intenso que ocupa uma área menor em relação à fonte principal. O método foi formulado como um problema de otimização não-linear vinculado para estimar um vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 3.2) minimizando a função objetivo

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \varphi_\ell(\mathbf{p}), \quad (3.3)$$

sujeito aos vínculos de desigualdade

$$p_l^{min} < p_l < p_l^{max}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (3.4)$$

em que  $p_l^{min}$  e  $p_l^{max}$  definem, respectivamente, os limites inferior e superior para o  $l$ -ésimo elemento  $p_l$  do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Fig. 3.3),  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  são as funções que representam os vínculos que impõem informação a priori sobre a forma da estimativa

do corpo 3D, e  $\phi(\mathbf{p})$  é a função desajuste dos dados – ou *data-misfit* em inglês.

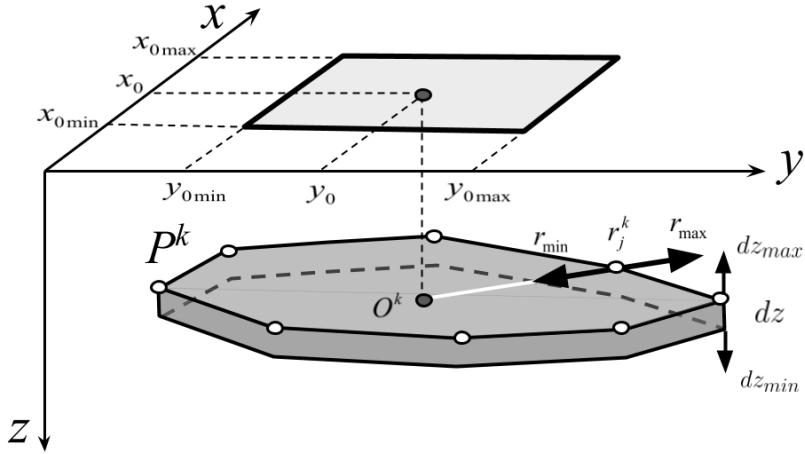


Figura 3.3: Representação esquemática dos vínculos de desigualdade. A figura exibe os prisma  $P^k$  e os intervalos de máximo e mínimo de  $r_j^k$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  e  $dz$ .

Podemos definir  $\phi(\mathbf{p})$  através de duas abordagens diferentes com o propósito de comparar os resultados. Na primeira abordagem,  $\phi(\mathbf{p})$  como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_2^2 , \quad (3.5)$$

que é a norma-2 quadrática (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre o vetor de dados observados  $\mathbf{d}^o$ , cujo  $i$ -ésimo elemento  $d_i^o$  representa a anomalia de campo total observada no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$ , e o vetor de dados preditos  $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ , cujo  $i$ -ésimo elemento  $d_i(\mathbf{p})$  é definido pela Equação 3.1. Alternativamente, podemos definir a função *data-misfit* como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_1 , \quad (3.6)$$

que representa a norma-1 (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre os vetores de dados observados  $\mathbf{d}^o$  e preditos  $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ . É de amplo conhecimento que o vetor de parâmetros que minimiza a norma-2 quadrática (Equação 3.5) pode sofrer distorções causadas pela presença de *outliers* e também pelo efeito causado por fontes não-alvo (por exemplo, ASTER *et al.*, 2019; CLAERBOUT e MUIR, 1973; FARQUHARSON e OLDENBURG, 1998; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015; SCALES e GERSZTENKORN, 1988; SILVA e CUTRIM, 1989; SILVA e HOHMANN, 1983; UIEDA e BARBOSA, 2012). Através da estimativa do vetor de parâmetros obtida pela minimização da norma-1 (Equação 3.6), espera-se que a posição e a

forma estimadas do corpo 3D durante a inversão ajustem a anomalia de campo total produzida pela fonte alvo e ignorem a causada pelas fontes não-alvo.

Na Equação 3.3,  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, 5$ , são escalares positivos que definem o peso relativo das funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ . Essas funções são definidas seguindo a mesma abordagem utilizada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013).

### 3.3 Vínculos

As funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equação 3.3),  $\ell = 1, \dots, 5$ , utilizadas aqui para obter soluções estáveis e introduzir informação a priori sobre o corpo estimado, foram organizadas em dois grupos para um melhor entendimento.

#### 3.3.1 Vínculos de suavidade

Este grupo é formado pelas variações da regularização de Tikhonov de primeira ordem (ASTER *et al.*, 2019, p. 103) que impõe suavidade sobre os raios  $r_j^k$  e sobre as coordenadas Cartesianas  $x_0^k$  e  $y_0^k$  da origem  $O^k$ ,  $j = 1, \dots, V$ ,  $k = 1, \dots, L$ , que define a seção horizontal de cada prisma (Fig.3.1b). Elas foram propostas por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013) e possuem um papel muito importante em introduzir informação a priori sobre a forma da fonte alvo.

O primeiro vínculo deste grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes que definem a seção horizontal de cada prisma*. Esse vínculo impõe que os raios adjacentes  $r_j^k$  e  $r_{j+1}^k$  dentro do mesmo prisma devam ter comprimento semelhantes. Isso força uma forma aproximadamente cilíndrica de cada prisma estimado, evita descontinuidades abruptas entre as estimativas das distâncias radiais dentro de um mesmo prisma. Sua representação esquemática é mostrada na Figura 3.4.

Matematicamente, o vínculo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^L \left[ (r_V^k - r_1^k)^2 + \sum_{j=1}^{V-1} (r_j^k - r_{j+1}^k)^2 \right] \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1 \mathbf{p} ,\end{aligned}\tag{3.7}$$

em que

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0}_{LV \times 1} \end{bmatrix}_{LV \times M} ,\tag{3.8}$$

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}_L \otimes \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_V - \mathbf{D}_V^\top) & \mathbf{0}_{V \times 2} \end{bmatrix}_{V \times (V+2)} ,\tag{3.9}$$

$\mathbf{0}_{LV \times 1}$  é um vetor com  $LV \times 1$  elementos nulos,  $\mathbf{I}_L$  é a matriz identidade de ordem

$L$ , “ $\otimes$ ” indica o produto de Kronecker (HORN e JOHNSON, 1991, p. 243),  $\mathbf{0}_{V \times 2}$  é uma matriz de ordem  $V \times 2$  com elementos nulos,  $\mathbf{I}_V$  é a matriz identidade de ordem  $V$  e  $\mathbf{D}_V^T$  é a matriz de permutação superior de ordem  $V$  (GOLUB e LOAN, 2013, p. 20). O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_1(\mathbf{p})$  (Equação 3.7) são dados por:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{p} , \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 .\end{aligned}\quad (3.10)$$

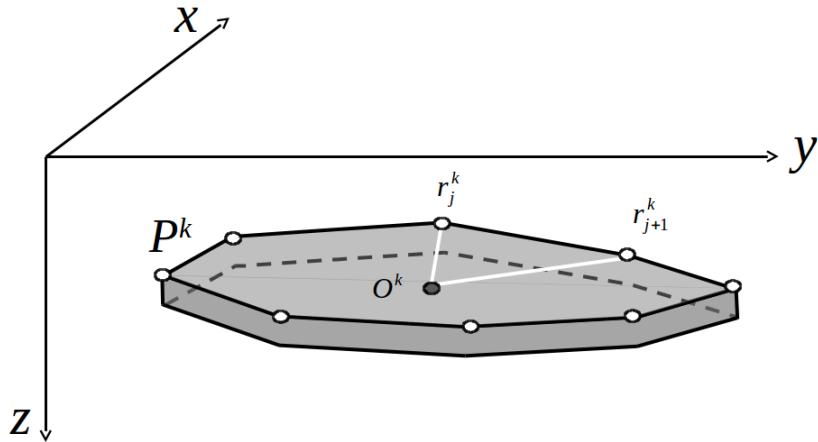


Figura 3.4: Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes dentro de um mesmo prisma  $\varphi_1$ . A figura exibe o  $k$ -ésimo prisma  $P^k$  e as distâncias radiais adjacentes  $r_j^k$  e  $r_{j+1}^k$  relacionadas ao vínculo.

O segundo vínculo do grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes de prismas adjacentes*, o qual impõe que os raios adjacentes  $r_j^k$  e  $r_{j+1}^k$  entre prismas verticalmente adjacentes tenham comprimentos semelhantes. Esse vínculo força que a forma de prismas verticalmente adjacentes seja similar. Uma representação esquemática do vínculo é apresentada na Figura 3.5.

De forma matemática o vínculo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_2(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1} \left[ \sum_{j=1}^V (r_{j+1}^{k+1} - r_j^k)^2 \right] , \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 \mathbf{p}\end{aligned}\quad (3.11)$$

em que

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2 & \mathbf{0}_{(L-1)V \times 1} \end{bmatrix}_{(L-1)V \times M} , \quad (3.12)$$

$$\mathbf{S}_2 = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-1} & \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} & \mathbf{I}_{L-1} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V \times 2} \end{bmatrix} , \quad (3.13)$$

$\mathbf{0}_{(L-1)V \times 1}$  é um vetor de ordem  $(L-1)V \times 1$  com elementos nulos,  $\mathbf{0}_{(L-1) \times 1}$  é um vetor de ordem  $(L-1) \times 1$  com elementos nulos e  $\mathbf{I}_{L-1}$  é a matriz identidade de ordem  $L-1$ . O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_2(\mathbf{p})$  (Equação 3.11) são dados por:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_2 \mathbf{p} , \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_2 . \end{aligned} \quad (3.14)$$

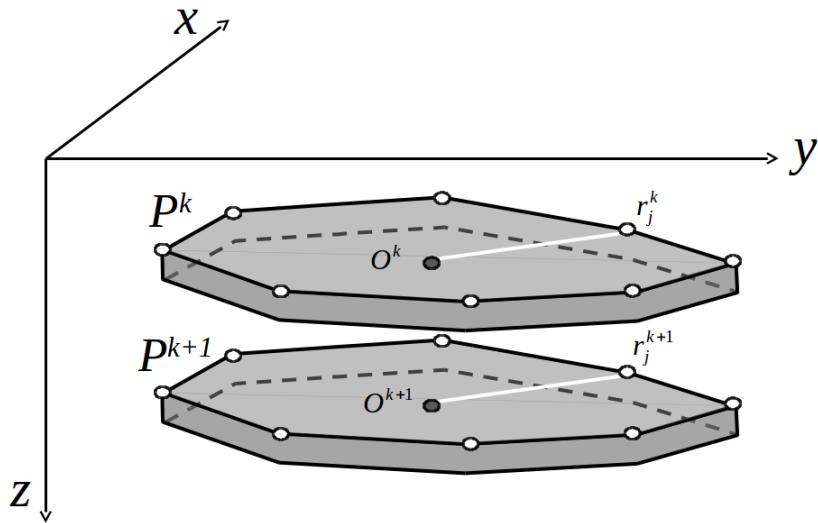


Figura 3.5: Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes pertencentes a prismas adjacentes  $\varphi_2$ . A figura exibe o  $k$ -ésimo prisma  $P^k$  e seu adjacente  $P^{k+1}$ , assim como as distâncias radiais adjacentes  $r_j^k$  e  $r_j^{k+1}$  relacionadas ao vínculo.

O último vínculo deste grupo é a *suavidade sobre a posição horizontal das origens arbitrárias de prismas verticalmente adjacentes*. Esse vínculo impõe que as coordenadas Cartesianas horizontais estimadas  $(x_0^k, y_0^k)$  e  $(x_0^{k+1}, y_0^{k+1})$  das origens  $O^k$  e  $O^{k+1}$  de prismas verticalmente adjacentes devem ser próximas entre si. Isso controla o mergulho do corpo estimado através da regularização do deslocamento horizontal de prismas verticalmente adjacentes (Figura 3.6).

Algebraicamente o vínculo é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_3(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1} \left[ (x_0^{k+1} - x_0^k)^2 + (y_0^{k+1} - y_0^k)^2 \right] , \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3 \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_3 & \mathbf{0}_{(L-1)2 \times 1} \end{bmatrix}_{(L-1)2 \times M}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{S}_3 = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-1} & \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} & \mathbf{I}_{L-1} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times V} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$\mathbf{0}_{(L-1)2 \times 1}$  é um vetor de ordem  $(L-1)2 \times 1$  com elementos nulos,  $\mathbf{0}_{2 \times V}$  é uma matriz de ordem  $2 \times V$  com elementos nulos e  $\mathbf{I}_2$  é uma matriz identidade de ordem 2. O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_3(\mathbf{p})$  (Equação 3.15) são dados por:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3 \mathbf{p}, \\ \mathbf{H}_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

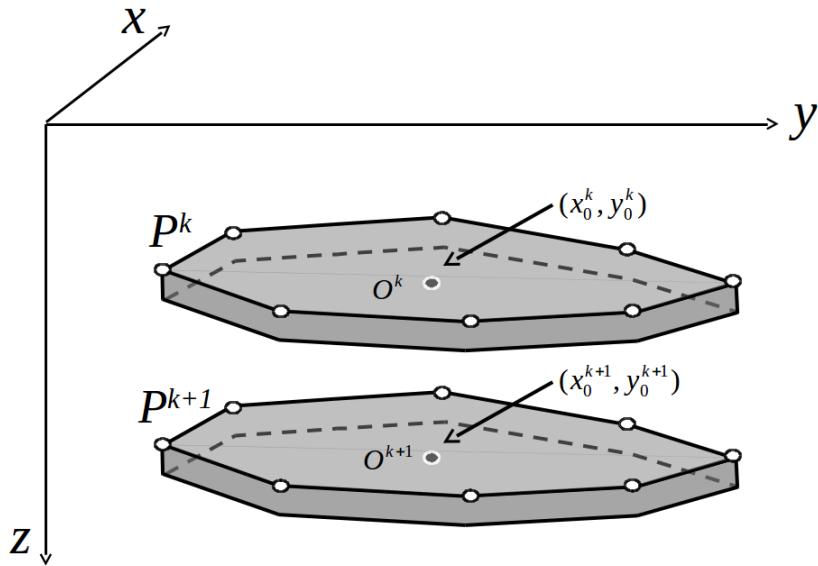


Figura 3.6: Representação esquemática do vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes  $\varphi_3$ . A figura exibe os prismas  $P^k$  e  $P^{k+1}$  e suas respectivas coordenadas Cartesianas  $(x_0^k, y_0^k)$ , referidas à origem  $O^k$ , e  $(x_0^{k+1}, y_0^{k+1})$ , referidas à origem  $O^{k+1}$ .

### 3.3.2 Vínculos de norma Euclidiana mínima

Dois vínculos utilizam a regularização Tikhonov de ordem zero com o propósito de estabilizar de maneira puramente matemática o problema inverso sem necessariamente introduzir informação a priori com significado físico sobre a fonte.

A *norma Euclidiana mínima dos raios* impõe que todos os raios estimados dentro de um prisma devem ser próximos de zero (Figura 3.7).

Esse vínculo foi proposto por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e

BARBOSA (2013) e pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\varphi_4(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^V (r_j^k)^2 , \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 \mathbf{p}\end{aligned}\quad (3.19)$$

em que

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_4 & \mathbf{0}_{(M-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} & 0 \end{bmatrix}_{M \times M}, \quad (3.20)$$

e

$$\mathbf{S}_4 = \mathbf{I}_L \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times V} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{(V+2) \times (V+2)}. \quad (3.21)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_4(\mathbf{p})$  (Equação 3.19) são:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 \mathbf{p} , \\ \mathbf{H}_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 .\end{aligned}\quad (3.22)$$

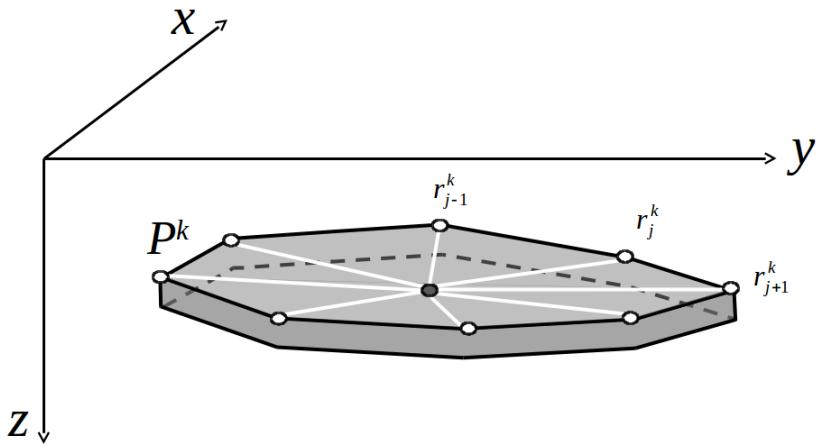


Figura 3.7: Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais de um prisma  $\varphi_4$ . A figura exibe os prismas  $P^k$  e suas respectivas distâncias radiais  $r_j^k$  referidas à origem  $O^k$ . O vínculo atua sobre as distâncias radiais do prismas, levando-as próximas a zero.

Finalmente, o último vínculo é a *norma Euclidiana mínima da espessura*, que impõe que a espessura comum  $dz$  de todos os prismas seja próxima de zero. Esse vínculo força que a profundidade da base do modelo seja o mais rasa possível (Figura 3.8)

Esse vínculo pode ser escrito matematicamente como

$$\begin{aligned}\varphi_5(\mathbf{p}) &= dz^2 \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \mathbf{p} \quad ,\end{aligned}\tag{3.23}$$

em que

$$\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(M-1) \times (M-1)} & \mathbf{0}_{(M-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} & 1 \end{bmatrix}_{M \times M} .\tag{3.24}$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_5(\mathbf{p})$  (Equação 3.23) são:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \quad .\end{aligned}\tag{3.25}$$

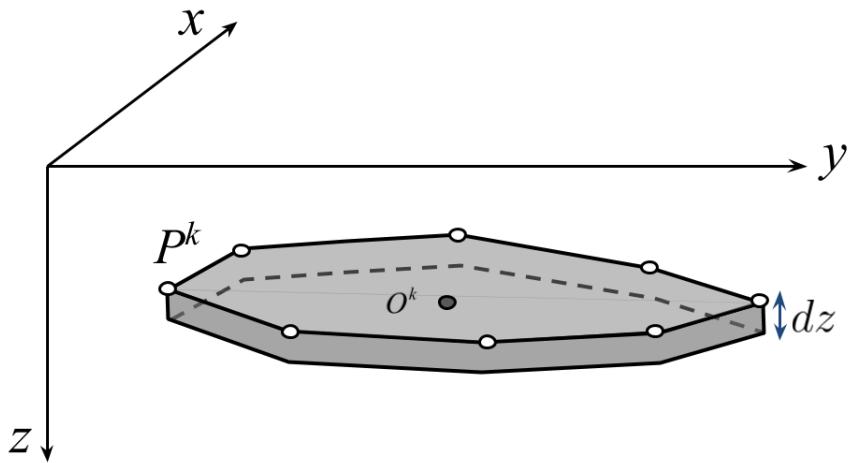


Figura 3.8: Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero  $\varphi_5$  na espessura  $dz$  dos prismas. A figura exibe os prisma  $P^k$  e sua espessura. O vínculo atua sobre a espessura de todos os prismas levando-a próxima a zero, uma vez que  $dz$  é igual para todos os prismas.

### 3.4 Algoritmo de inversão

Dada uma profundidade do topo do prisma mais raso  $z_0$ , a intensidade de magnetização total  $m_0$  de todos os prismas, uma aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 3.2), e os limites  $p_l^{min}$  e  $p_l^{max}$  (Equação 3.4), o método de Levenberg-Marquardt (por exemplo, SEBER e WILD, 2003, p. 624) é utilizado para estimar o vetor de parâmetros  $\hat{\mathbf{p}}^*$  que minimiza a função objetivo  $\Gamma(\mathbf{p})$

(Equação 3.3), sujeita aos vínculos de desigualdade definidos pela Equação 3.4. Para incorporar esses vínculos de desigualdade, foi empregada a mesma abordagem apresentada por BARBOSA *et al.* (1999), OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013). Abaixo, segue o algoritmo de inversão aqui proposto:

**entrada**  $\mathbf{d}^o$ ,  $D_0$ ,  $I_0$ ,  $z_0$ ,  $m_0$ ,  $D$ ,  $I$ ,  $p_l^{min}$  e  $p_l^{max}$  (Equação 3.4),  $k = 0$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ , e  $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$ , em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $M$ .

- (1)** Computa a matriz  $N \times M$   $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ , cujo elemento  $ij$  é a derivada do dado  $d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  (Equação 3.1) com respeito ao  $j$ -ésimo elemento  $p_j$  do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 3.2):

$$g_{ij} = \frac{\partial d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})}{\partial p_j}.$$

- (2)** Computa o vetor gradiente

$$\nabla \phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = -\frac{2}{N} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top \mathbf{W}_{(k)} [\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})]$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \frac{2}{N} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top \mathbf{W}_{(k)} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

da função *data-misfit*  $\phi(\mathbf{p})$  (Equação 3.5), quando  $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$ , ou  $\phi(\mathbf{p})$  (Equação 3.6), quando  $\mathbf{W}_{(k)} \neq \mathbf{I}$ . Na próxima seção, será discutido como usar a matriz Hessiana  $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$  (computada na iteração  $k = 0$ ) para definir os pesos  $\alpha_\ell$  (Equação 3.3) das funções de vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

- (3)** Computa o vetor gradiente

$$\nabla \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \nabla \phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \nabla \varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \mathbf{H}_\ell$$

da função objetivo  $\Gamma(\mathbf{p})$  (Equação 3.3), em que  $\nabla \varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  e  $\mathbf{H}_\ell$  são, respectivamente, o vetor gradiente e a matriz Hessiana (Equações 3.10, 3.14, 3.18, 3.22 e 3.25) das funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

- (4) Computa o  $l$ -ésimo elemento  $\hat{p}_l^\dagger \in (-\infty, +\infty)$  de um vetor não vinculado  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$  como:

$$\hat{p}_l^\dagger = -\ln \left( \frac{p_l^{max} - \hat{p}_l}{\hat{p}_l - p_l^{min}} \right),$$

em que  $\hat{p}_l$  é o  $l$ -ésimo elemento de  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ .

- (5) Computa uma matriz diagonal  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  com o elemento  $t_{ll}$  dado por

$$t_{ll}(\hat{p}_l) = \frac{(p_l^{max} - \hat{p}_l)(\hat{p}_l - p_l^{min})}{p_l^{max} - p_l^{min}},$$

em que  $p_l$  é o  $l$ -ésimo elemento do vetor  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ . Para evitar qualquer elemento da diagonal de  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  assuma um valor nulo, foi adicionada uma constante pequena e positiva de  $10^{-10}$  a cada termo do numerador, seguindo a estratégia apresentada por BARBOSA *et al.* (1999).

- (6) Computa uma matriz

$$\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}).$$

- (7) Computa uma matriz diagonal  $\mathbf{Q}_{(k)}$  com elemento  $q_{ll}$  dado por

$$q_{ll} = \frac{1}{\sqrt{h_{ll}^\dagger}},$$

em que  $h_{ll}^\dagger$  é o elemento  $ll$  da matriz  $\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ .

- (8) Computa uma correção  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$  para o vetor  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$  pela solução do sistema linear

$$\mathbf{Q}_{(k)}^{-1} [\mathbf{Q}_{(k)} \mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) \mathbf{Q}_{(k)} + \lambda_{(k)} \mathbf{I}_M] \mathbf{Q}_{(k)}^{-1} \Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger = -\nabla \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}),$$

em que  $\lambda_{(k)}$  é o parâmetro de Marquardt, um escalar positivo ajustado à cada iteração (por exemplo, SEBER e WILD, 2003, p. 624).

- (9) Computa um novo vetor

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger + \Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger.$$

- (10) Computa o  $l$ -ésimo elemento  $\hat{p}_l \in (p_l^{min}, p_l^{max})$  do novo vetor vinculado  $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$  como:

$$\hat{p}_l = p_l^{min} + \left( \frac{p_l^{max} - p_l^{min}}{1 + e^{-\hat{p}_l^\dagger}} \right).$$

(11) Se o seguinte critério de convergência for satisfeito,

$$\left| \frac{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}) - \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})}{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})} \right| \leq \tau ,$$

em que  $\tau$  é um número positivo pequeno, que varia de  $\approx 10^{-3}$  a  $10^{-4}$ , que controla a convergência, o vetor de parâmetros  $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$  é a solução. Senão, atualiza o vetor de parâmetros

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k)} \leftarrow \hat{\mathbf{p}}_{(k+1)} ,$$

atualiza o elemento  $ii$  da matriz  $\mathbf{W}_{(k)}$  para quando função de desajuste  $\phi$  é definida como a norma-1 (Eq. 3.6)

$$w_{ii} = \frac{1}{|d_i^o - d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})| + \varepsilon} ,$$

em que  $\varepsilon$  possui um valor positivo pequeno ( $\approx 10^{-10}$ ) usado para prevenir uma divisão por zero, atualiza o contador da iteração  $k$

$$k \leftarrow k + 1 ,$$

e retorna à etapa (1).

Neste algoritmo, os elementos da matriz  $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  (etapa 1) são computados pelo uso das diferenças finitas centradas. É importante notar que na etapa 3 as matrizes Hessianas  $\mathbf{H}_\ell$  (Equações 3.10, 3.14, 3.18, 3.22 e 3.25) das funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23) não dependem do vetor de parâmetros. Por essa razão, eles são computados apenas uma vez antes da primeira iteração e armazenados para serem usados até a convergência ser alcançada (etapa 11).

Este algoritmo é executado para obter um corpo estimado para cada ponto  $(m_0, z_0)$  em uma malha de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$  definida pelo usuário. Todos os corpos estimados são obtidos através da utilização de uma aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 3.2), dos mesmos valores para os pesos  $\alpha_\ell$  (Equação 3.3) e dos limites  $p_l^{min}$  e  $p_l^{max}$  (Eq. 3.4) para os parâmetros estimados. Os valores ótimos da profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$  são escolhidos como aqueles associados aos corpos estimados que produzem os menores valores da função objetivo  $\Gamma(\mathbf{p})$  (Equação 3.3).

Note que, ao manter a matriz  $\mathbf{W}_{(k)}$  (etapa 2 e 10) igual à identidade ao longo das iterações, o corpo estimado minimiza a norma-2 quadrática dos resíduos entre os dados observados e preditos (Equação 3.5). Nesse caso, o corpo estimado é a

solução L2. A atualização iterativa dos elementos da matriz  $\mathbf{W}_{(k)}$  com os valores absolutos dos resíduos de acordo com a etapa 10 é feita através do método IRLS (ASTER *et al.*, 2019; SCALES e GERSZTENKORN, 1988, p. 46) para obter um corpo estimado que minimiza a norma-1 dos resíduos entre os dados observados e preditos (Equação 3.6). Nesse caso, o corpo estimado é a solução L1.

# Capítulo 4

## Procedimentos pré-inversão

Os procedimentos computacionais pré-inversão deste método têm como propósito definir: (1) a aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ , (2) os limites superiores  $p_l^{max}$  e inferiores  $p_l^{min}$ ,  $l = 1, \dots, M$ , do vínculo de desigualdade (Eq. 3.4) e (3) os pesos normalizados  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, 5$  (Eq. 3.3).

### 4.1 Aproximação inicial e vínculo de desigualdades

Estimar um vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Eq. 3.2) que minimiza a função objetivo (Eq. 3.3) para um dado par de intensidade de magnetização total  $m_0$  e profundidade do topo do prisma mais raso  $z_0$  a partir de um conjunto de dados de anomalia de campo total, sujeito ao vínculo de desigualdade (Eq. 3.4), é um problema não linear que requer uma aproximação inicial da forma da fonte alvo 3D. A aproximação inicial é um simples cilindro cujos raio e coordenadas Cartesianas horizontais do seu centro são definidas após calcular a redução ao polo da anomalia de campo total observada (anomalia RTP). Então, a primeira etapa consiste em calcular a anomalia de campo total reduzida ao polo (Eq. 2.11) que possui três propósitos: verificar se os valores usados para a direção de magnetização total (declinação  $D$  e inclinação  $I$ ) são válidos; definir os limites  $p_l^{min}$  e  $p_l^{max}$ ,  $l = 1, \dots, M$ , do vínculo de desigualdade (Eq. 3.4); por último, definir o raio e as coordenadas Cartesianas do centro do corpo cilíndrico que forma a aproximação inicial.

É de amplo conhecimento que se a fonte alvo possui uma direção de magnetização uniforme, a anomalia RTP é predominantemente positiva e decai a zero próximo aos seus limites horizontais (por exemplo, BLAKELY, 1996, p. 331). Para realizar essa transformação sobre os dados, entretanto, o intérprete precisa utilizar valores de declinação e inclinação próximos da direção de magnetização total verdadeira da fonte alvo. Logo, o intérprete pode validar a direção de magnetização total da fonte

alvo se houver a predominância de valores positivos presentes na anomalia RTP calculada.

Através da anomalia RTP estimada pela técnica da camada equivalente, é possível definir os limites  $p_l^{min}$  e  $p_l^{max}$  para cada parâmetro  $p_l$ ,  $l = 1, \dots, M$  (Figura 4.1) dos vínculos de desigualdade (Eq. 3.4). Para os parâmetros que representam os raios dos vértices de todos os prismas ( $r_j^k$ ,  $j = 1, \dots, V$ ,  $k = 1, \dots, L$ ), o limite inferior é definido como um valor pequeno próximo de zero e o limite superior  $r^{max}$  é definido aproximadamente como o raio de uma área circular que abrange a região onde a anomalia RTP é positiva e decai a zero (círculo preto na Figura 4.1). Os valores mínimos ( $x_0^{min}$  e  $y_0^{min}$ ) e máximos ( $x_0^{max}$  e  $y_0^{max}$ ) para as coordenadas Cartesianas horizontais  $x_0^k$  e  $y_0^k$  da origem  $O^k$ ,  $k = 1, \dots, L$ , são definidos através de um retângulo, em vermelho na Figura 4.1, que contenha a área circular que define o  $r^{max}$  (círculo preto na Figura 4.1). Por último, os valores limites  $dz^{min}$  e  $dz^{max}$  para a espessura de todos os prismas são escolhidos como um valor próximo a zero e um valor alto de maneira que a profundidade da base seja maior do que a esperada para a fonte alvo.

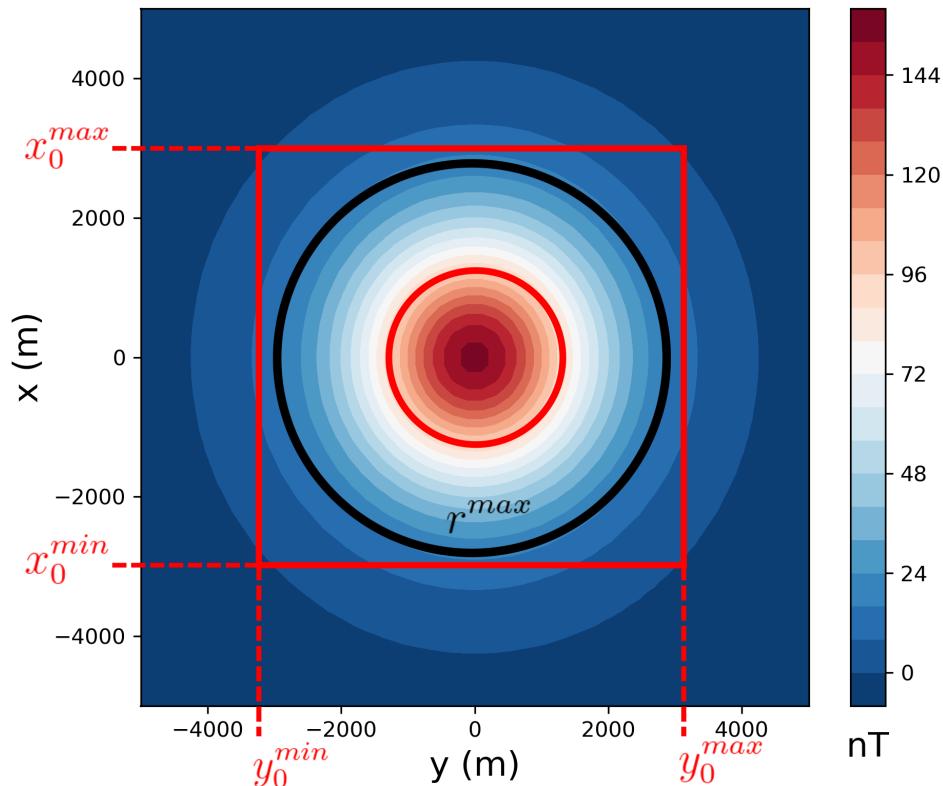


Figura 4.1: Exemplo ilustrativo de anomalia de campo total reduzida ao polo para a definição dos limites do vínculo de desigualdades e aproximação inicial. O círculo preto representa o valor máximo  $r^{max}$  para os raios  $r_j^k$ ,  $j = 1, \dots, V$ ,  $k = 1, \dots, L$ . O retângulo vermelho representa a área composta pelos valores mínimos ( $x_0^{min}$  e  $y_0^{min}$ ) e máximos ( $x_0^{max}$  e  $y_0^{max}$ ) das coordenadas Cartesianas horizontais  $x_0^k$  e  $y_0^k$  da origem  $O^k$ . Já o círculo vermelho representa o raio  $r_j^k$  da aproximação inicial cilíndrica  $\hat{p}_0$ .

Para definir o raio e as coordenadas horizontais do centro da aproximação inicial cilíndrica  $\hat{\mathbf{p}}_0$ , é escolhida a área circular que compreende a região onde a anomalia RTP é positiva e possui seu máximo. O ideal aqui é que o raio da aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_0$  coincida com a região de máximo gradiente da anomalia RTP, ou seja, onde se encontra a variação máxima desse dado que pode indicar os limites laterais da fonte alvo (BARANOV, 1957). Essa definição não exige um rigor matemático muito acurado. Depois de definir o raio e as coordenadas Cartesianas horizontais do centro da aproximação cilíndrica inicial  $\hat{\mathbf{p}}_0$ , devem ser escolhidos sua espessura de modo que a aproximação inicial seja mais profunda que a extensão vertical esperada fonte alvo. A próxima etapa consiste em um modelagem direta da anomalia de campo total (Eq. 3.1) com o intuito de ajustar o volume e definir os intervalos para a sua intensidade de magnetização total  $m_0$  e a profundidade do topo  $z_0$ , as quais ajustam preliminarmente o dado observado  $\mathbf{d}^o$ . A Figura 4.2 exemplifica esse ajuste preliminar dos dados observados e os dados produzidos pela aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_0$ . Note que essa modelagem direta é realizada antes de iniciar o processo de inversão e que o corpo cilíndrico resultante pode produzir um ajuste impreciso dos dados.

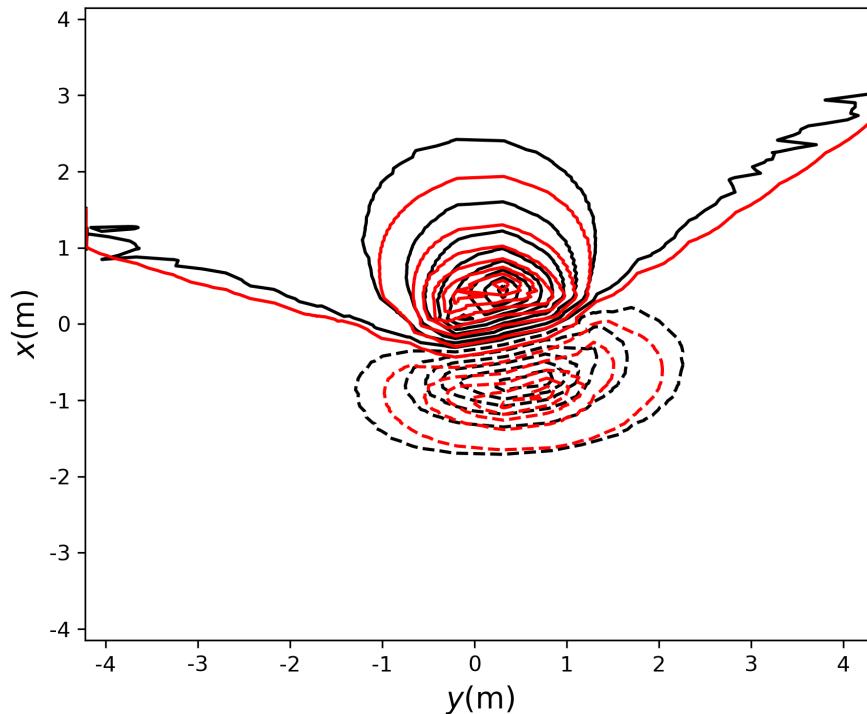


Figura 4.2: Exemplo ilustrativo de um ajuste preliminar entre anomalia de campo total observada (linhas pretas) e os dados produzidos pela aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_0$  (linhas vermelhas). Linhas contínuas representam dados positivos e linhas tracejadas representam dados negativos.

## 4.2 Escolha dos pesos $\alpha_1 - \alpha_5$

Atribuir valores aos pesos  $\alpha_\ell$  (Eq. 3.3) é uma etapa muito importante deste método. Entretanto, não existe uma regra analítica para definí-los e seus valores podem ser dependentes das características particulares da configuração geológica onde o método está sendo aplicado (SILVA *et al.*, 2001).

Neste ponto, vale ressaltar que os pesos  $\alpha_\ell$  (eq. 3.3) são quantidades com dimensão. Note que as unidades da função data-misfit para a norma-2 e norma-1 dos resíduos (Eqs. 3.5 e 3.6) são  $nT^2$  e  $nT$ , respectivamente. E as funções dos vínculos (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23) possuem unidade de  $m^2$ . Por essa razão, a unidade dos pesos  $\alpha_\ell$  (Eq. 3.3) é  $nT^2/m^2$  para quando a função data-misfit é a norma-2 dos resíduos (Eq. 3.5) e  $nT/m^2$  para o caso da utilização da norma-1 dos resíduos (Eq. 3.6).

A dimensão física dos pesos  $\alpha_\ell$  faz com que a solução do problema inverso seja variável. Para tornar esses pesos comparáveis entre si, realiza-se a seguinte normalização sobre  $\alpha_\ell$ :

$$\alpha_\ell = \tilde{\alpha}_\ell \frac{E_\phi}{E_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, 5, \quad (4.1)$$

em que  $\tilde{\alpha}_\ell$  é um escalar positivo e  $E_\phi/E_\ell$  é um fator de normalização que permite que os  $\tilde{\alpha}_\ell$  sejam independentes de unidades físicas utilizadas. Nesta equação,  $E_\ell$  representa o traço da matriz Hessian  $\mathbf{H}_\ell$  (eqs 3.10, 3.14, 3.18, 3.22 e 3.25) do  $\ell$ -ésima função de vínculo  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (eqs 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23). A constante  $E_\phi$  é o traço da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$  da função data-misfit  $\phi(\mathbf{p})$  (Eqs. 3.5 e 3.6) computada com a aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Eq. 3.2) no início do algoritmo de inversão. Note que o traço da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_\ell$  é adimensional e o traço da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$  tem unidade de  $nT^2/m^2$  para a norma-2 e  $nT/m^2$  para a norma-1. Logo, os escalares positivos  $\tilde{\alpha}_\ell$  na Equação 4.1 são quantidades adimensionais.

De acordo com essa estratégia empírica, os pesos  $\alpha_\ell$  (Eq. 3.3) são redefinidos usando os escalares positivos  $\tilde{\alpha}_\ell$  (eq. 4.1), os quais são independentes de unidades físicas e menos dependentes das características particulares da configuração geológica.

## 4.3 Considerações práticas

Os valores atribuídos ao pesos adimensionais  $\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_5$  (eq. 4.1) impactam significativamente os modelos estimados e não podem ser automaticamente escolhidos sem o julgamento do intérprete. Baseado em experiência empírica, este trabalho sugere alguns procedimentos para a escolha desses parâmetros.

Os parâmetros  $\tilde{\alpha}_1$  e  $\tilde{\alpha}_2$  impõem informação a priori na forma da seção horizontal dos prismas. O primeiro força todos os prismas a terem uma seção horizontal circular, enquanto o segundo força todos os prismas a terem uma seção horizontal parecida. Geralmente, seus valores variam de  $10^{-5}$  a  $10^{-3}$  e diferem entre si de uma ordem de grandeza, no máximo. O parâmetro  $\tilde{\alpha}_3$  também varia de  $10^{-5}$  a  $10^{-3}$  e controla a posição relativa dos prismas adjacentes que formam o modelo interpretativo. Um valor alto privilegia um corpo estimado vertical, enquanto um valor pequeno tende a gerar um corpo estimado inclinado.

O parâmetro  $\tilde{\alpha}_4$  possui um significado puramente matemático e é usado somente para estabilizar as soluções do problema inverso. Seu valor é escolhido como o menor possível. O parâmetro  $\tilde{\alpha}_7$  controla a extensão vertical total do corpo estimado. Quanto maior é o seu valor, mais rasa é a profundidade da base estimada e vice versa. Uma regra geral é começar com os valores iniciais  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$  e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ , e mudá-los para refinar os resultados. Finalmente, é importante enfatizar que  $\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_5$  (Eq. 4.1) não são alterados ao longo das iterações do algoritmo de inversão.

## 4.4 Critério de escolha da melhor solução

Para selecionar a melhor solução entre L2 e L1, é utilizado um critério numérico. O critério estabelecido para a escolha da melhor solução entre L2 e L1 é uma comparação entre os valores dos vínculos  $\varphi_1-\varphi_5$ . Cada uma das soluções L2 e L1 possuem valores de vínculos associados calculados pelas Equações 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23. Valores pequenos para os vínculos indicam uma melhor incorporação da informação a priori durante o problema inverso. Portanto, a partir desses valores, a solução que possuir a maior quantidade de vínculos menores em comparação à outra é eleita a melhor. Ou seja, se a solução possuir três ou mais vínculos menores será escolhida como a melhor.

# Capítulo 5

## Aplicação a dados sintéticos

Todos os dados sintéticos apresentados neste capítulo foram simulados na presença de um campo geomagnético principal com inclinação  $I_0 = -21,5$  e declinação  $D_0 = -18,7$ .

### 5.1 Modelo simples

Foi simulado um corpo geológico simples imerso em meio não magnético (prismas azuis nas Figuras 5.1, 5.3 e 5.4) que representa a fonte alvo 3D com profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 1600 m, centro em  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  e um vetor de magnetização total constante com inclinação  $-50^\circ$ , declinação  $9^\circ$ , e intensidade 9 A/m. Esse modelo é composto de 8 prismas com 20 vértices cada e raios que diminuem com a profundidade: (1920 m, 1760 m, 1600 m, 1440 m, 1280 m, 1120 m, 960 m, 800 m). Recuperar a geometria desse corpo é uma tarefa relativamente simples para este método porque ele possui um alinhamento vertical e suas fatias horizontais mostram uma forma circular que diminui de tamanho ao longo da profundidade, assim, é possível notar que o corpo satisfaz perfeitamente quase todos os vínculos impostos neste método. A anomalia de campo total (Figura 5.1a) produzida pela fonte alvo foi calculada em 1939 pontos localizados sobre uma malha irregular com linhas que simulam um levantamento aéreo (Figura 5.1b) no plano  $z = -150$  m. Esses dados sintéticos foram contaminados com um ruído Gaussiano pseudo-aleatório de média zero e desvio padrão igual a 5 nT. O método foi aplicado para inverter esse dado contaminado com ruído e obter soluções L2 e L1. Para cada tipo de solução, foram geradas 36 soluções L2 e 36 soluções L1, todas elas foram obtidas com a mesma malha de varredura  $6 \times 6$  de profundidades do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . A melhor solução L2 e L1 são definidas como aquelas que produzem o menor valor da função objetivo para cada caso.

A Figura 5.2 mostra a anomalia RTP obtida via camada equivalente a partir da anomalia de campo total contaminada com ruído (Figura 5.1a) e a projeção

horizontal das aproximações iniciais  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  usadas nas sucessivas inversões (Figuras 5.3 e 5.4). As aproximações iniciais são compostas de  $L = 5$  prismas com  $V = 20$  vértices, mesma direção de magnetização do corpo verdadeiro, espessura  $dz = 350$  m e centro em  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . A Figura 5.3a mostra que a melhor solução L2 foi obtida através dos valores verdadeiros da profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Essa solução L2 produz um ótimo ajuste dos dados (Figura 5.3b), possui uma profundidade da base em 1581,5 m e também recupera a geometria do corpo verdadeiro (Figura 5.3d). A Figura 5.4 mostra um resultado similar para a solução L1, porém com um ajuste dos dados e geometria inferiores aos da solução L2. A profundidade da base foi estimada em 1412,9 m. Podemos observar que nesse teste ambas as abordagens L2 e L1 foram bem sucedidas em estimar a forma do corpo e recuperaram as feições principais da fonte alvo. Entretanto, nesse caso, a Tabela 5.1 mostra que solução L2 foi ligeiramente superior à solução L1 utilizando o critério apresentado na Seção 4.4. Todas as soluções L2 e L1 produzidas neste teste foram obtidas usando o seguinte conjunto de pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-3}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-4}$ . É importante notar que, mesmo a solução L2 sendo superior à solução L1, não há diferenças significativas entre as soluções L2 e L1 obtidas pelo método.

Tabela 5.1: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao corpo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	2,09	17,78	$7,42 \times 10^{-3}$	7,30	18,78
Solução L1	3,99	11,96	0,21	7,58	14,75

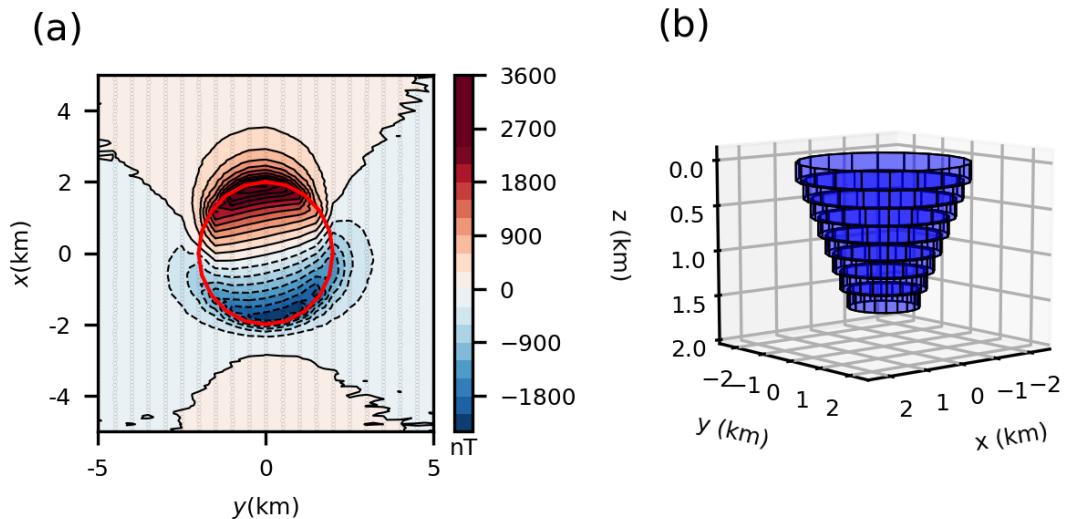


Figura 5.1: Modelo simples. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte simples (prismas azuis mostrados nos painel b). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  (prismas vermelhos nas Figuras 5.3c). (b) Visualização em perspectiva do modelo da fonte simples representada pelos prismas azuis.

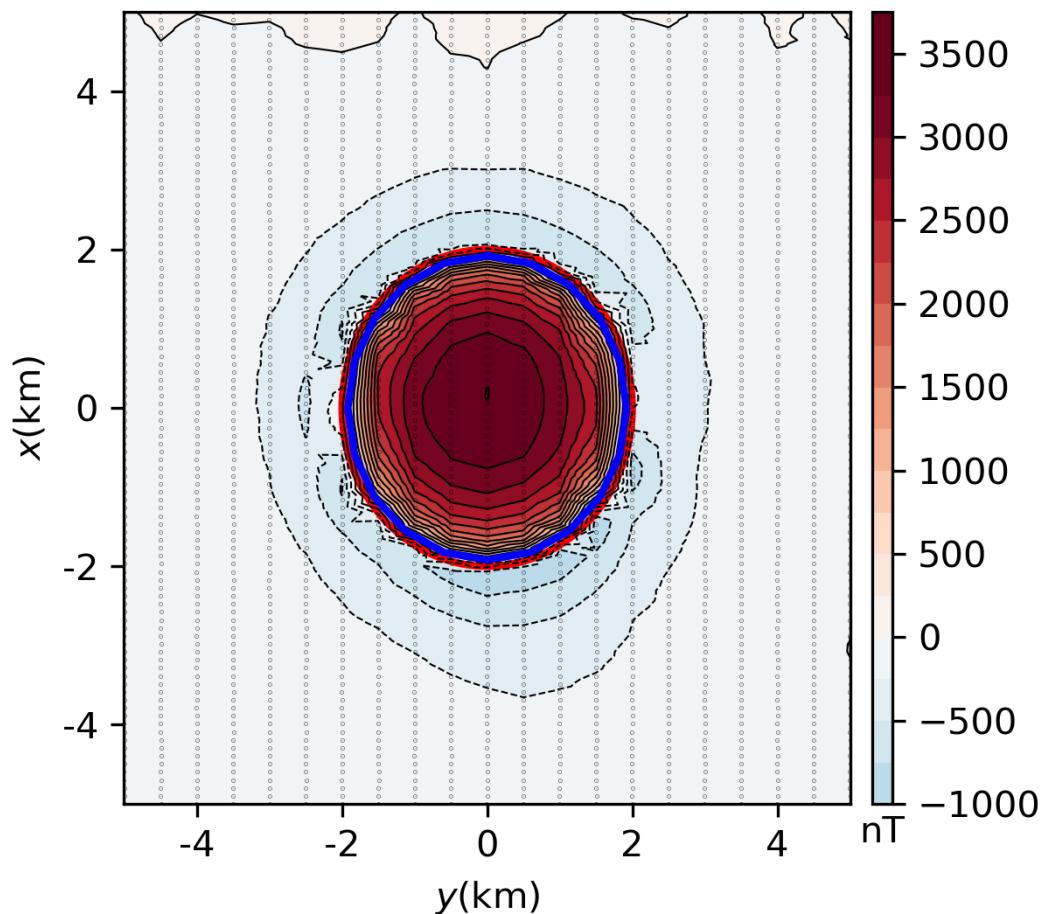


Figura 5.2: Anomalia RTP produzida pela fonte simples. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte simples. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.3c e 5.4c).

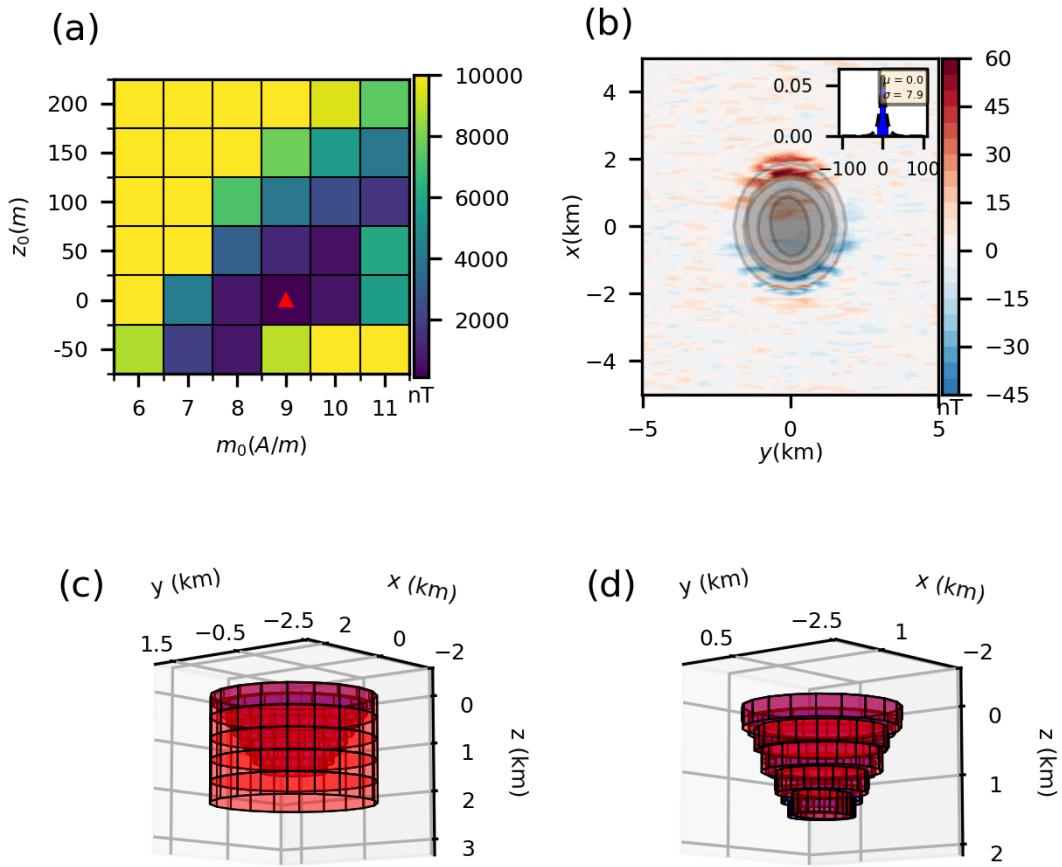


Figura 5.3: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte simples. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$ , assim como os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte simples.

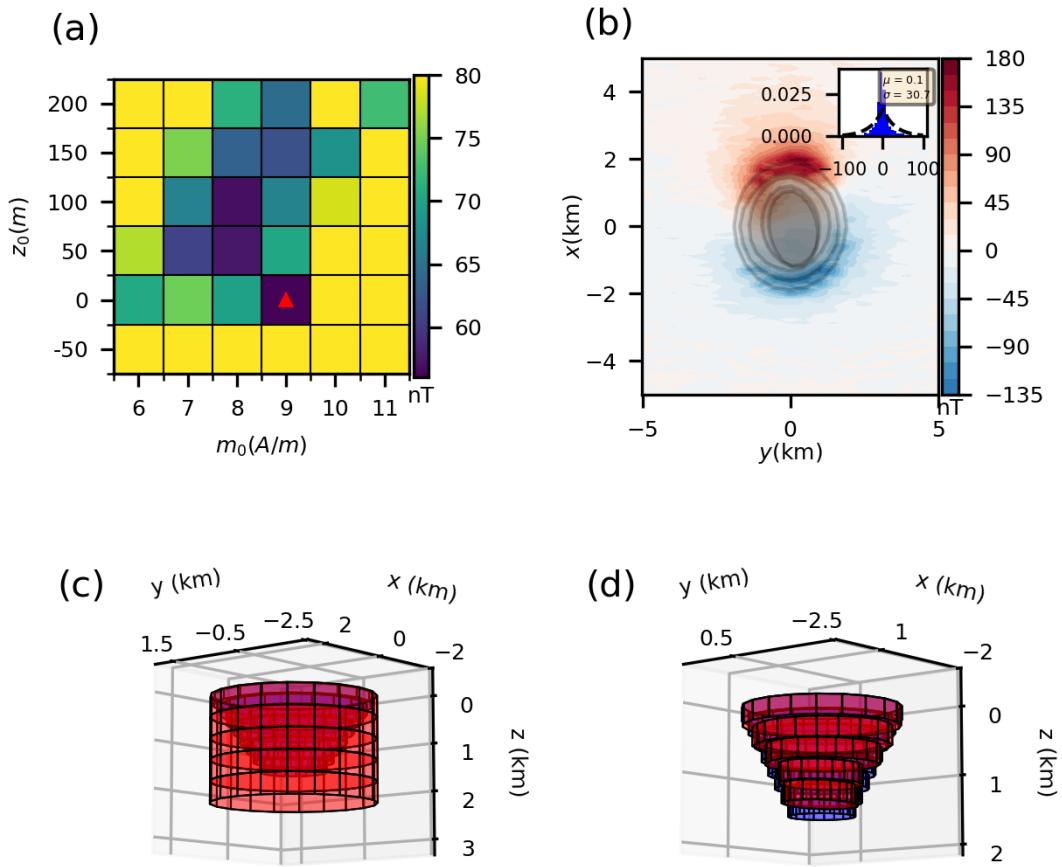


Figura 5.4: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte simples. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$ , assim como os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte simples.

## 5.2 Modelo inclinado

Para verificar se o método é capaz de recuperar um corpo que possui um mergulho de baixo ângulo  $\approx 26,5^\circ$ , foi simulado um corpo geológico inclinado imerso em meio não magnético (prismas azuis nas Figuras 5.5, 5.7 e 5.8) que representa a fonte alvo 3D com profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 3040 m, centro em  $(x_0, y_0) = (-300, 600)$  e um vetor de magnetização total constante com inclinação  $-50^\circ$ , declinação  $9^\circ$ , e intensidade 9 A/m. Esse modelo é composto de 8 prismas com 20 vértices. Recuperar a geometria desse corpo simulado é uma tarefa relativamente complicada para este método porque ele possui um mergulho baixo em uma direção aproximadamente N-S e suas fatias horizontais mostram uma forma irregular que varia de tamanho ao longo da profundidade, assim, é possível notar que o corpo não satisfaz os vínculos impostos neste método. A anomalia de campo total (Figura 5.5a) produzida pela fonte alvo foi calculada em 1674 pontos localizados sobre uma malha irregular sobre uma superfície ondulada com linhas que simulam um levantamento aéreo (Figura 5.5b). Esses dados sintéticos foram contaminados com um ruído Gaussiano pseudo-aleatório de média zero e desvio padrão igual a 5 nT. O método foi aplicado para inverter esse dado contaminado com ruído e obter soluções L2 e L1. Para cada tipo de solução, foram geradas 36 soluções L2 e 36 soluções L1, todas elas foram obtidas com a mesma malha de varredura  $6 \times 6$  de profundidades do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . A melhor solução L2 e L1 são definidas como aquelas que produzem o menor valor da função objetivo para cada caso.

A Figura 5.6 mostra a anomalia RTP obtida a partir da anomalia de campo total contaminada com ruído (Figura 5.5a) e a projeção horizontal das aproximações iniciais  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  usadas nas sucessivas inversões (Figuras 5.7 e 5.8). As aproximações iniciais são compostas de  $L = 5$  prismas com  $V = 20$  vértices, mesma direção de magnetização do corpo verdadeiro, espessura  $dz = 350$  m e centro em  $(x_0, y_0) = (-200, 0)$ . A Figura 5.7a mostra que a melhor solução L2 obtida superestima a profundidade do topo  $z_0$  e acerta o valor da intensidade de magnetização total  $m_0$  verdadeira. Essa solução L2 produz um ótimo ajuste dos dados (Figura 5.7b), possui uma profundidade da base em 3453,0 m e também recupera a geometria do corpo verdadeiro (Figura 5.7d). A Figura 5.8 mostra um resultado similar para a solução L1, porém a profundidade da base estimada em 3107,2 m foi muito próxima da verdadeira. Podemos observar que nesse teste ambas as abordagens L2 e L1 foram bem sucedidas em estimar a forma do corpo e recuperaram as feições principais da fonte alvo. Entretanto, nesse caso, a Tabela 5.2 mostra que a solução L1 foi superior à solução L2. Todas as soluções L2 produzidas neste teste foram obtidas usando o seguinte conjunto de pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-3}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-3}$ ,

$\tilde{\alpha}_3 = 10^{-6}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ . Já as soluções L1 foram obtidas utilizando o conjunto:  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-6}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ . É importante notar que, mesmo a solução L1 sendo superior à solução L2, não há diferenças significativas entre as soluções L2 e L1 obtidas pelo método.

Tabela 5.2: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao corpo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	3,21	7,97	0,10	0,17	0,62
Solução L1	0,31	0,56	0,10	0,18	0,47

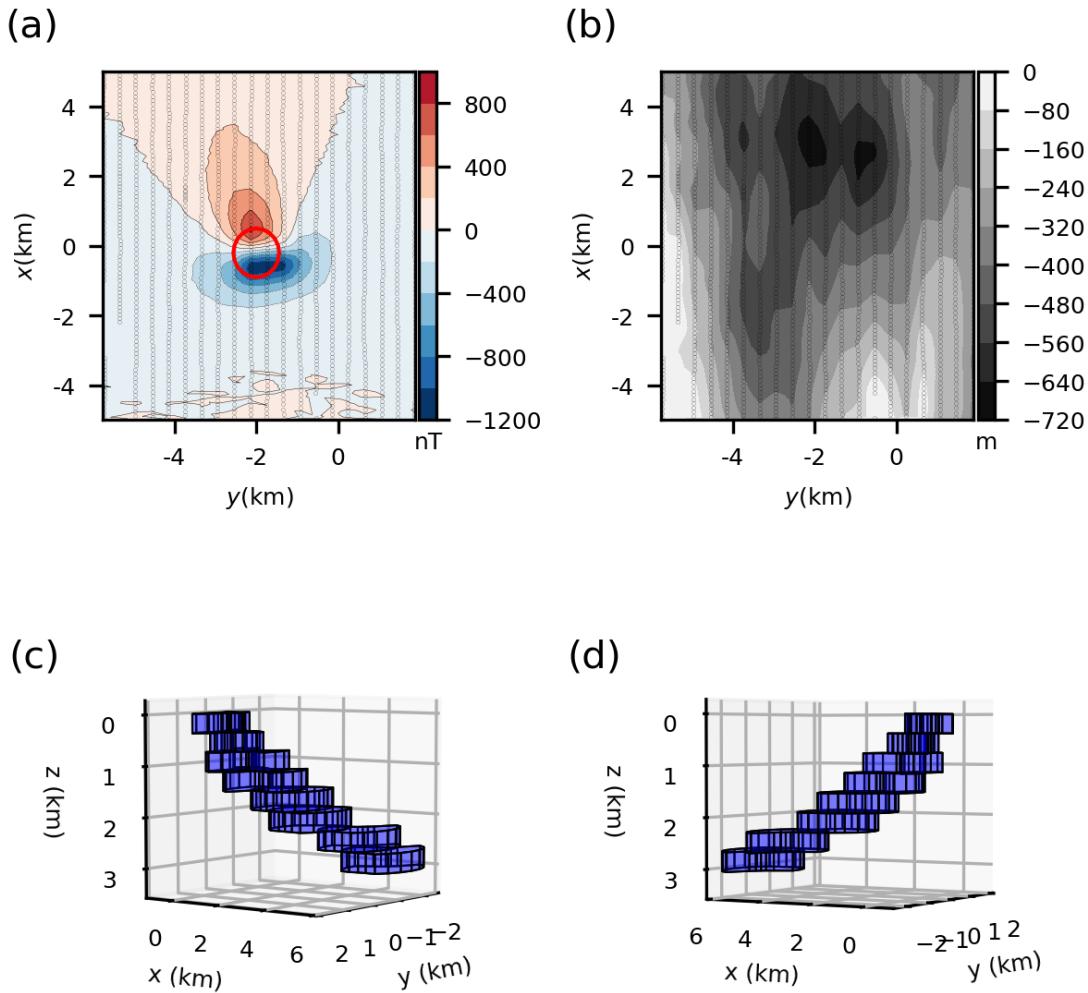


Figura 5.5: Modelo inclinado. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte alvo (prismas azuis mostrados nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial  $\hat{p}_{(0)}$  (prismas vermelhos nas Figuras 5.7c e 5.8c). (b) Coordenadas verticais dos pontos de observação que simulam um levantamento aéreo. (c) e (d) Visualizações em perspectiva do modelo da fonte alvo representada pelos prismas azuis.

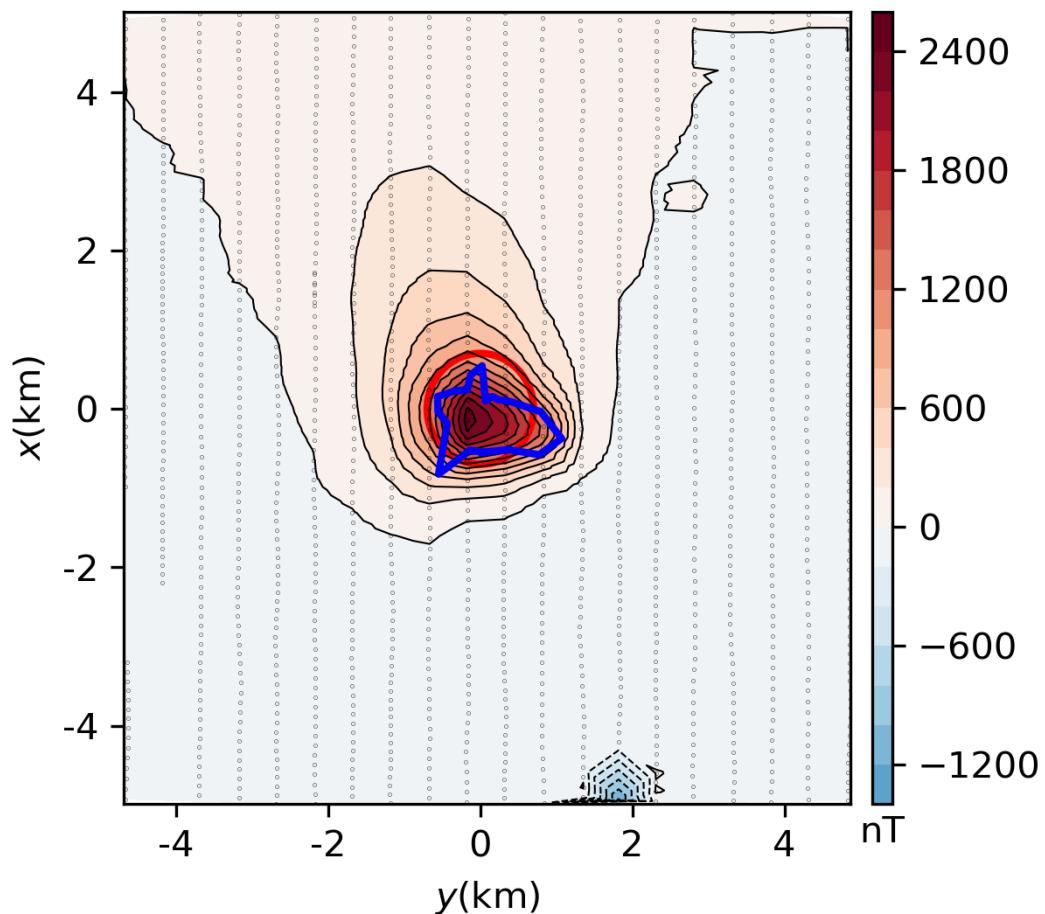


Figura 5.6: Anomalia RTP produzida pela fonte alvo. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.7c e 5.8c).

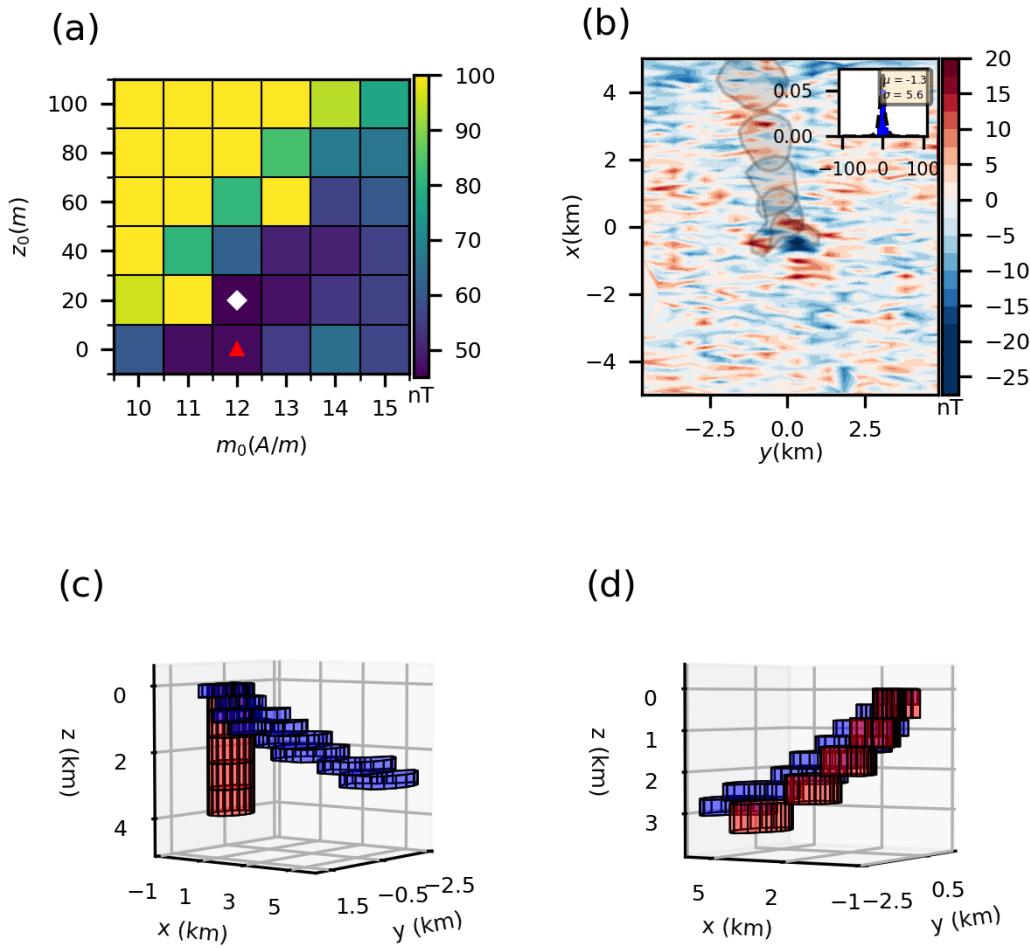


Figura 5.7: Soluções L2 obtidas para o modelo inclinado. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$ , enquanto o losango branco definem os valores para a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas azuis) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

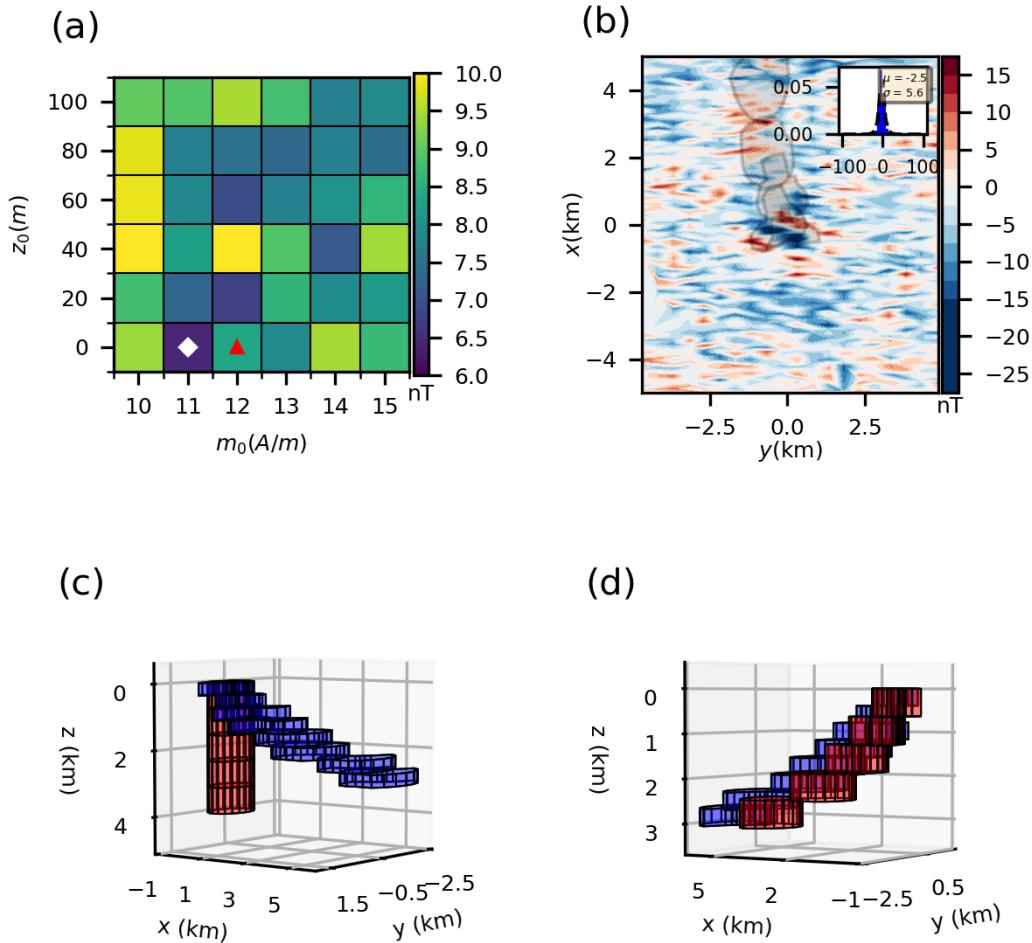


Figura 5.8: Soluções L1 obtidas para o modelo inclinado. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$ , enquanto o losango branco definem os valores para a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.5a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

### 5.3 Modelo inclinado com regional

Este teste tem o objetivo de avaliar o desempenho do método em uma situação muito comum em um estudo com dados reais: a presença de um campo regional. Para simular essa situação, a anomalia de campo total produzida pelo modelo inclinado (Figura 5.5a) foi calculada em uma área maior e somada a um campo regional gerado através de um polinômio de primeira ordem (Figuras 5.9a e 5.9b). A partir desses dados, foi estimado um polinômio de primeira ordem por meio do método de mínimos quadrados (Figura 5.9c) a fim de remover a influência do campo regional da anomalia de campo total (Figura 5.9d). Embora a direção do campo regional estimado (Figura 5.9d) tenha uma direção diferente da verdadeira (Figura 5.9b), ele recupera muito bem sua amplitude. A Figura 5.10a mostra a anomalia de campo total residual obtida pela remoção do campo regional estimado (Figura 5.9d) e a Figura 5.10b mostra que os resíduos entre a anomalia de campo total residual e a verdadeira (Figuras 5.10a e 5.5a) se comportam como ruído, o que indica um bom ajuste dos dados. O método foi aplicado para inverter a anomalia de campo total residual (Figura 5.10a) e obter soluções L2 e L1. Para cada tipo de solução, foram geradas 36 soluções L2 e 36 soluções L1, todas elas obtidas com a mesma malha de varredura  $6 \times 6$  de profundidades do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . As melhores soluções L2 e L1 são definidas como aquelas que produzem o menor valor da função objetivo para cada caso.

A Figura 5.10c mostra a anomalia RTP obtida a partir da anomalia de campo total residual (Figura 5.10a) e a projeção horizontal das aproximações iniciais  $\hat{\mathbf{P}}(0)$  usadas nas sucessivas inversões (Figuras 5.11 e 5.12). As aproximações iniciais são compostas de  $L = 5$  prismas com  $V = 20$  vértices, mesma direção de magnetização do corpo verdadeiro, espessura  $dz = 350$  m e centro em  $(x_0, y_0) = (-200, 0)$ . A Figura 5.11a mostra que a melhor solução L2 obtida superestima tanto a profundidade do topo  $z_0$  quanto o valor da intensidade de magnetização total  $m_0$  verdadeira. Essa solução L2 produz um bom ajuste dos dados (Figura 5.11b), possui uma profundidade da base em 3063,2 m e também recupera a geometria do corpo verdadeiro (Figura 5.11d). A Figura 5.12 mostra um resultado similar em relação a geometria, porém superestima menos os valores de profundidade do topo  $z_0$  e subestima pouco o valor da intensidade de magnetização total  $m_0$ . A profundidade da base estimada foi de 2655,6 m que é um pouco inferior à estimada pela solução L2. Podemos observar que nesse teste ambas as abordagens L2 e L1 foram bem sucedidas em estimar a forma do corpo e recuperaram as feições principais da fonte alvo. Entretanto, nesse caso, a Tabela 5.3 mostra que a solução L1 foi superior à solução L2 na estimativa de  $z_0$  e  $m_0$ . Todas as soluções L2 produzidas neste teste foram obtidas usando o seguinte conjunto de pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-3}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-3}$ ,

$\tilde{\alpha}_3 = 10^{-6}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ . Já as soluções L1 foram obtidas utilizando o conjunto:  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-5}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-6}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-4}$ . É importante notar que, mesmo a solução L1 sendo superior à solução L2, não há diferenças significativas entre as soluções L2 e L1 obtidas pelo método.

Tabela 5.3: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao corpo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	6,05	16,32	0,15	0,28	0,75
Solução L1	0,79	0,22	0,10	0,02	3,38

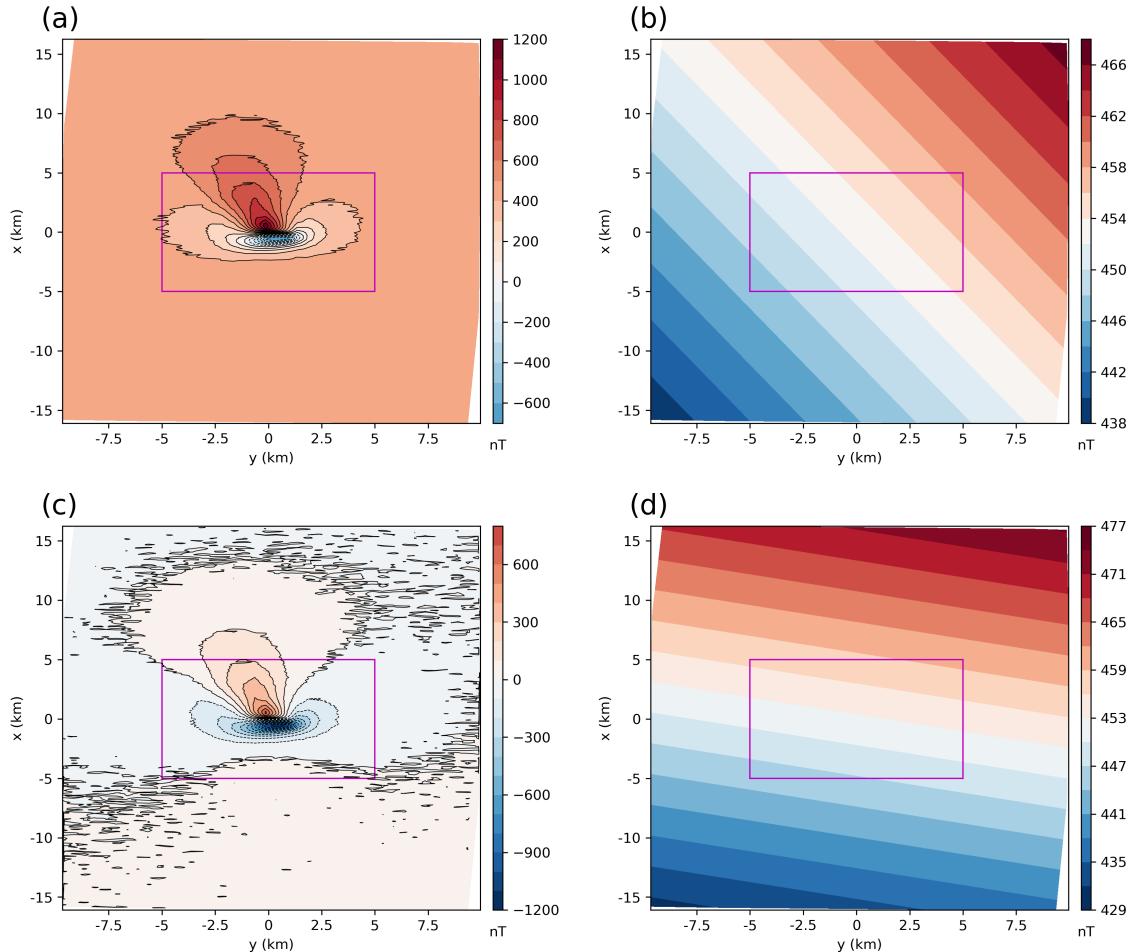


Figura 5.9: Aplicação aos dados do modelo inclinado com regional. (a) Anomalia de campo total produzida pela modelo inclinado (Figura 5.5a) somada a um campo regional sintético (painel b). (b) Polinômio de primeira ordem que representa o campo regional sintético. (c) Anomalia de campo total residual obtida pela diferença entre (a) e (d). (d) Campo regional estimado por um polinômio simples através de mínimos quadrados.

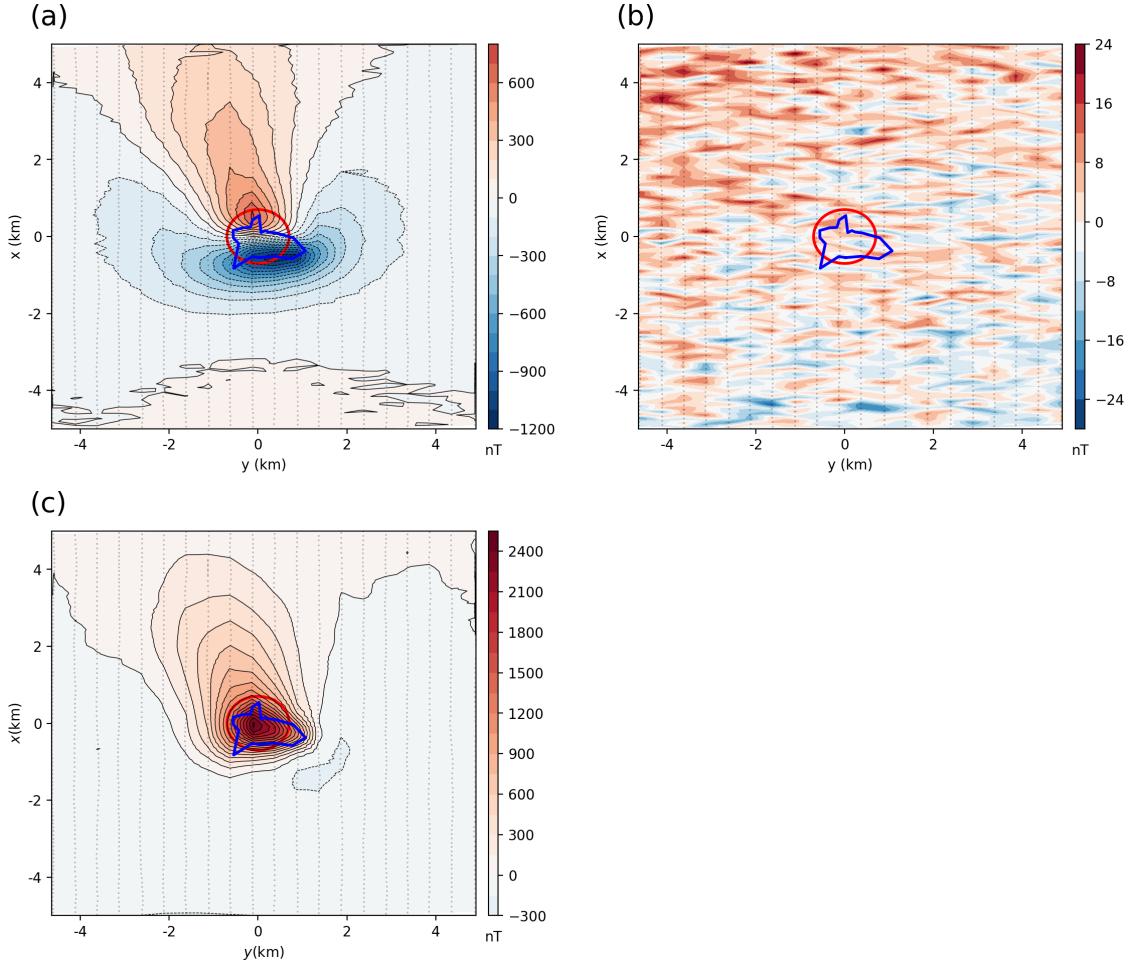


Figura 5.10: Aplicação aos dados do modelo inclinado com regional. (a) Anomalia de campo total residual contida no retângulo rosa na Figura 5.9c. (b) Resíduos obtidos pela diferença entre as anomalias de campo total gerada no teste anterior (Figura 5.5a) e a residual (painel a). (c) Anomalia RTP sobre a área de estudo. Ambos painéis são limitados pelo retângulos rosa na Figura 5.9. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.11c e 5.12c).

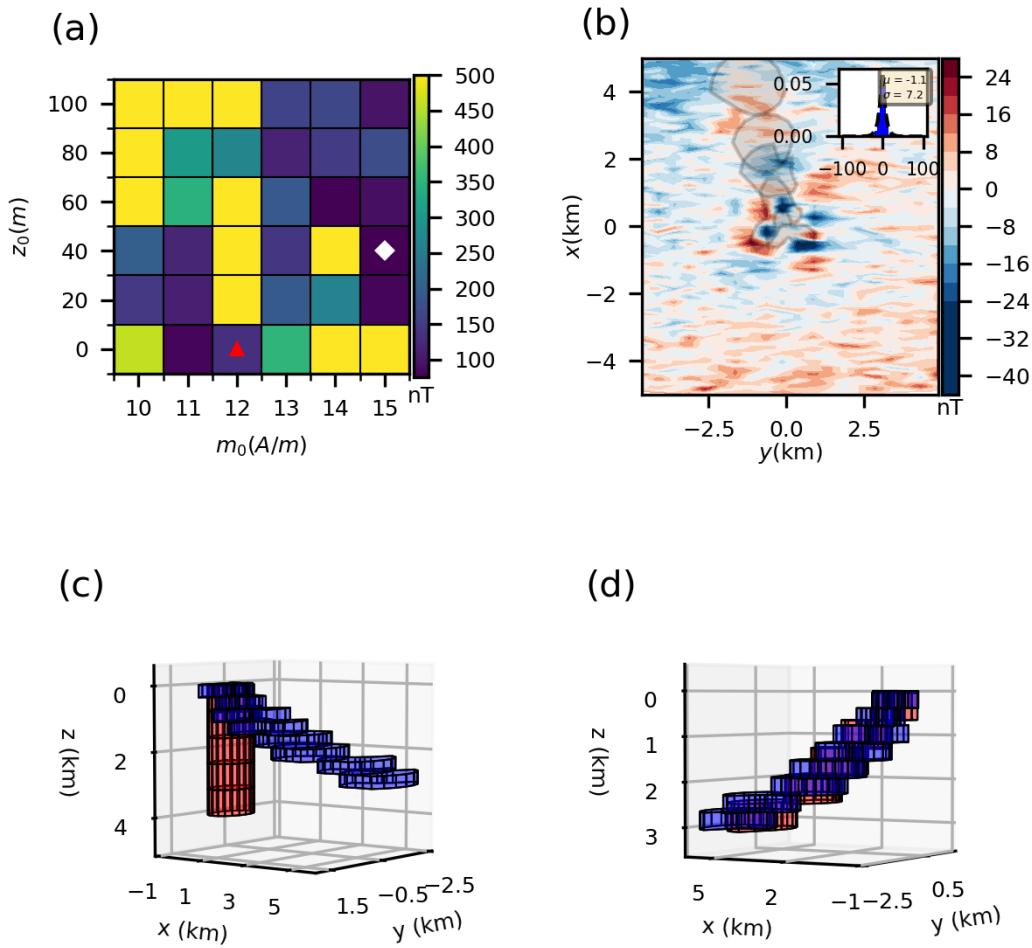


Figura 5.11: Soluções L2 obtidas para o modelo inclinado com regional. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$  e o losango branco indica os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Figura 5.10a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

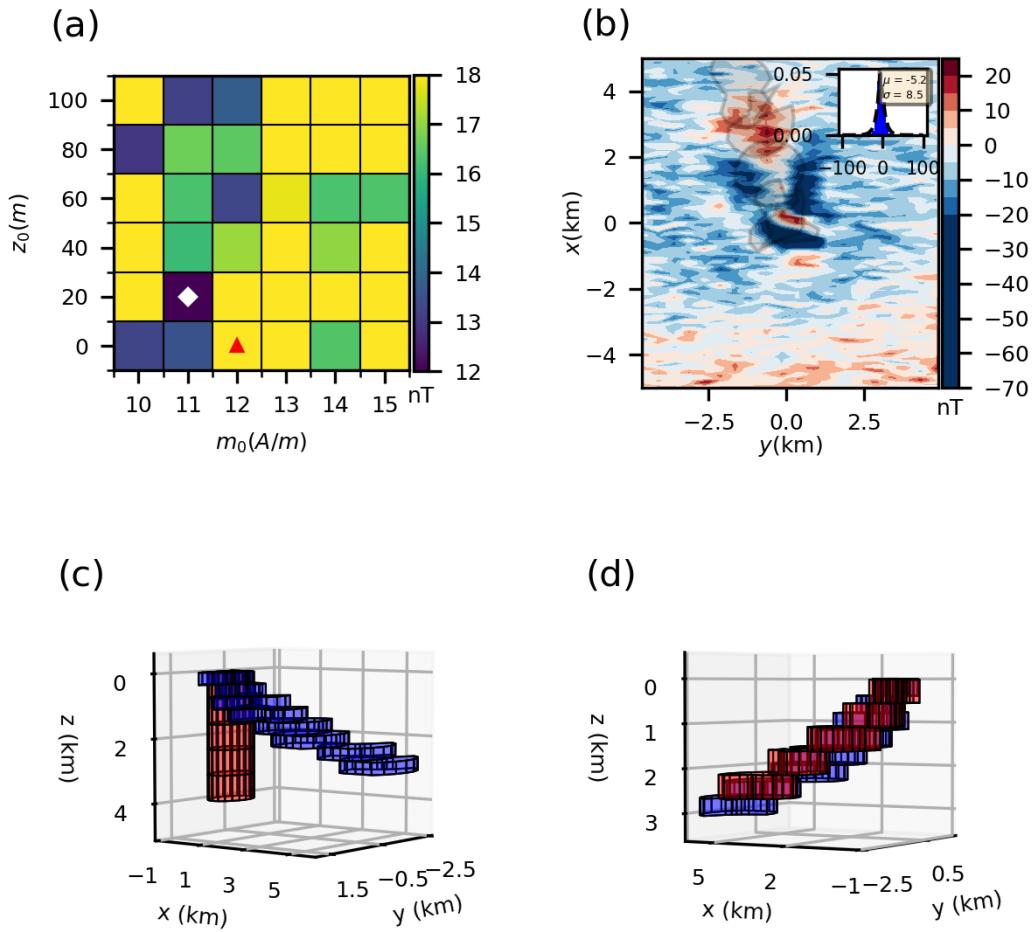


Figura 5.12: Soluções L1 obtidas para o modelo inclinado com regional. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$  e o losango branco indica os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Figura 5.10a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

## 5.4 Modelo complexo

Com o propósito de aplicar o método a problemas mais realistas, foi simulado um corpo geológico complexo imerso em meio não magnético (prismas azuis nas Figuras 5.13, 5.15, 5.16, 5.17, 5.19, 5.20, 5.21, 5.23, e 5.24) que representa a fonte alvo 3D com profundidade do topo em 130 m, profundidade da base em 6130 m, centro em  $(x_0, y_0) = (-250, 250)$  e um vetor de magnetização total constante com inclinação  $-50^\circ$ , declinação  $9^\circ$ , e intensidade 12 A/m. Esse modelo é composto de 10 prismas verticalmente justapostos com um deslocamento horizontal entre eles, que simula uma intrusão em forma de dique, e mergulho de alto ângulo para NO. Recuperar a geometria desse corpo simulado é uma tarefa complicada porque ele possui um mergulho NO-SE e suas fatias horizontais mostram uma forma que varia ao longo da profundidade, assim, é possível notar que o corpo não satisfaz perfeitamente os vínculos impostos nesse método. A violação dos vínculos pode ser visualizada pela falta de suavidade entre os raios adjacentes que definem a seção horizontal de cada prisma e entre os raios adjacentes entre prismas verticalmente adjacentes. A anomalia de campo total (Figura 5.13a) produzida pela fonte alvo foi calculada em 1939 pontos localizados sobre uma superfície ondulada que simula um levantamento aéreo (Figura 5.13b). Esses dados sintéticos foram contaminados com um ruído Gaussiano pseudo-aleatório de média zero e desvio padrão igual a 5 nT. O método foi aplicado para inverter esse dado contaminado com ruído e obter soluções L2 e L1 para três cenários: sem fontes não-alvo, com uma fonte não-alvo relativamente pequena e com uma fonte não-alvo relativamente grande. Para cada cenário, foram geradas 36 soluções L2 e 36 soluções L1, todas elas obtidas com a mesma malha de varredura  $6 \times 6$  de profundidades do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . A melhor solução L2 e L1 são definidas como aquelas que produzem o menor valor da função objetivo para cada caso.

A Figura 5.14 mostra a anomalia RTP obtida a partir da anomalia de campo total contaminada com ruído (Figura 5.13a) e a projeção horizontal das aproximações iniciais  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  usadas nas sucessivas inversões (Figuras 5.15 e 5.16). As aproximações iniciais são compostas de  $L = 10$  prismas com  $V = 20$  vértices, mesma direção de magnetização do corpo verdadeiro, espessura  $dz = 650$  m e centro em  $(x_0, y_0) = (-300, 300)$ . A Figura 5.15a mostra que a melhor solução L2 foi obtida através dos valores verdadeiros da profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Essa solução L2 produz um ótimo ajuste dos dados (Figura 5.15b), possui uma profundidade da base em 6663,8 m e também recupera a geometria do corpo verdadeiro (Figura 5.15d). A Figura 5.16 mostra um resultado similar produzido pela melhor solução L1, que tem profundidade da base em 6703,0 m. O aspecto mais interessante das soluções L2 e L1 obtidas neste teste é que elas recuperam

não só as feições principais da fonte mas também seu mergulho e a variação de sua forma ao longo da profundidade. Todas as soluções L2 e L1 produzidas neste teste foram obtidas usando o seguinte conjunto de pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-5}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-6}$ . Segundo a Tabela 5.4, a solução L1 é ligeiramente superior à solução L2, porém os valores dos vínculos para cada solução são muito próximos. É importante notar que, devido à ausência de fontes não-alvo neste teste, não há diferenças práticas entre as soluções L2 e L1 obtidas pelo método aqui proposto.

Tabela 5.4: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao corpo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	0,39	4,05	0,86	$1,80 \times 10^{-2}$	0,60
Solução L1	0,26	2,18	0,85	$1,81 \times 10^{-2}$	0,61

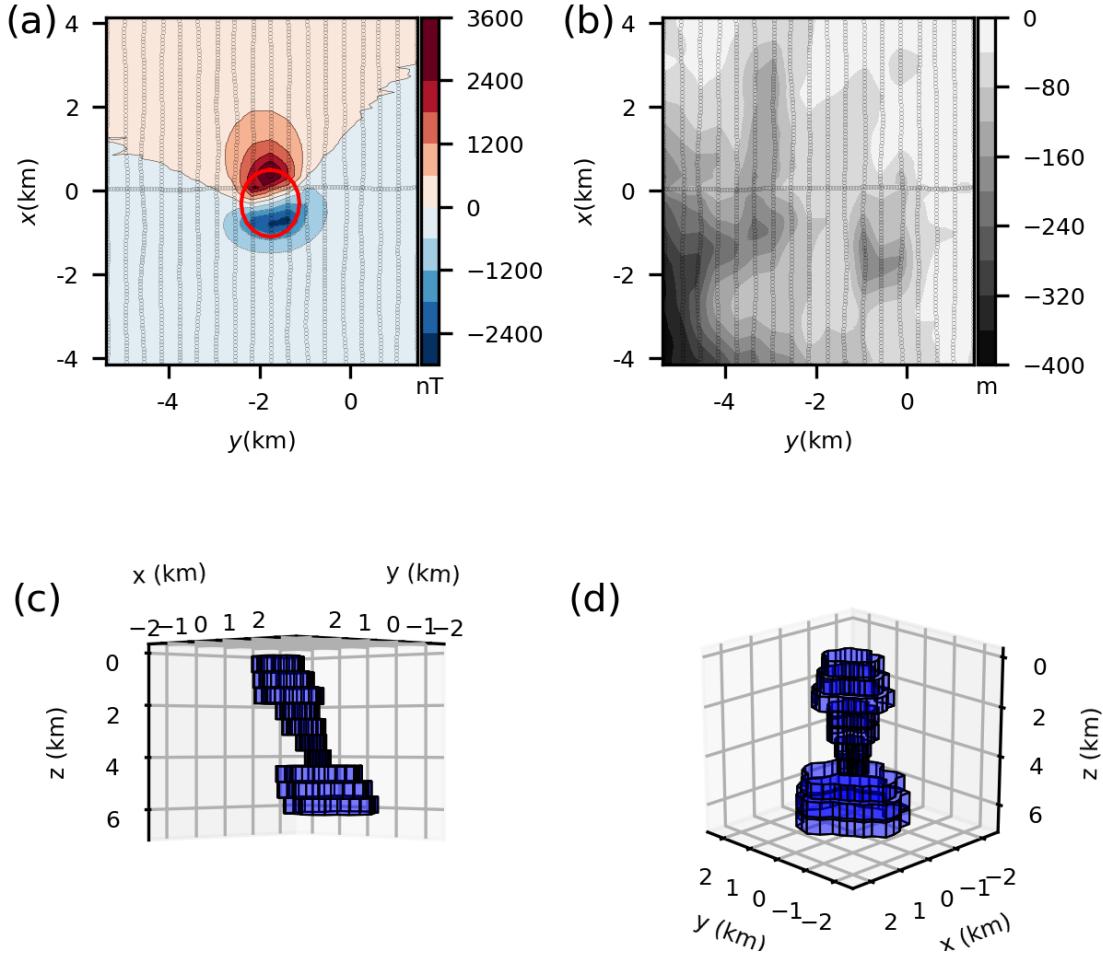


Figura 5.13: Modelo da fonte alvo. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte alvo (prismas azuis mostrados nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  (prismas vermelhos nas Figuras 5.15c e 5.16c). (b) Coordenadas verticais dos pontos de observação que simulam um levantamento aéreo. (c) e (d) Visualizações em perspectiva do modelo da fonte alvo representada pelos prismas azuis.

## 5.5 Modelo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena

O mapa da Figura 5.17a representa a soma entre as anomalias de campo total produzidas pela fonte não-alvo pequena (Figura 5.17b), cuja forma é exibida nas Figuras 5.17c e 5.17d, e aquela produzida pela fonte alvo simulada (Figura 5.13a). A fonte não-alvo possui profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 70 m, centro em  $(x, y) = (-250, 250)$ , logo acima da parte mais rasa da fonte alvo, e o mesmo vetor magnetização total da fonte alvo. Embora a nova anomalia RTP produzida com a fonte não-alvo (Figura 5.18) tenha uma amplitude maior que a produzida pela fonte alvo isolada (Figura 5.14), a extensão horizontal da área

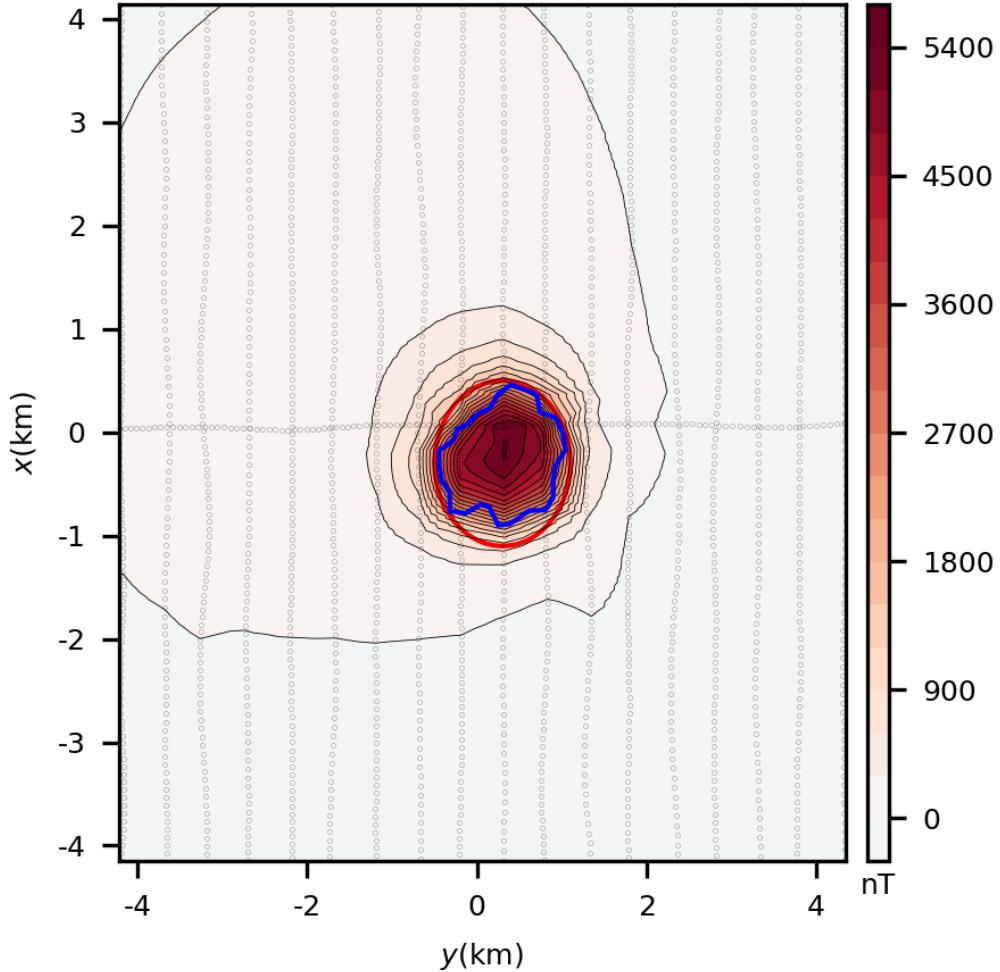


Figura 5.14: Anomalia RTP produzida pela fonte alvo. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.15c e 5.16c).

positiva não muda substancialmente e conduz a uma aproximação inicial (Figuras 5.19c e 5.20c) igual àquela utilizada no teste anterior (Figuras 5.15c e 5.16c).

A Figura 5.19 mostra as soluções L2 obtidas pela inversão da anomalia de campo total na Figura 5.17a com os seguintes pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-5}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ . A Figura 5.19a mostra que a melhor solução L2 possui profundidade do topo  $z_0$  igual à verdadeira, porém possui uma intensidade de magnetização total  $m_0$  superestimada. Por esse motivo, sua profundidade máxima (3046.8 m) é muito distante da verdadeira (6130 m). Essa solução produz valores de resíduos altos logo acima da fonte não-alvo (Figura 5.19b),

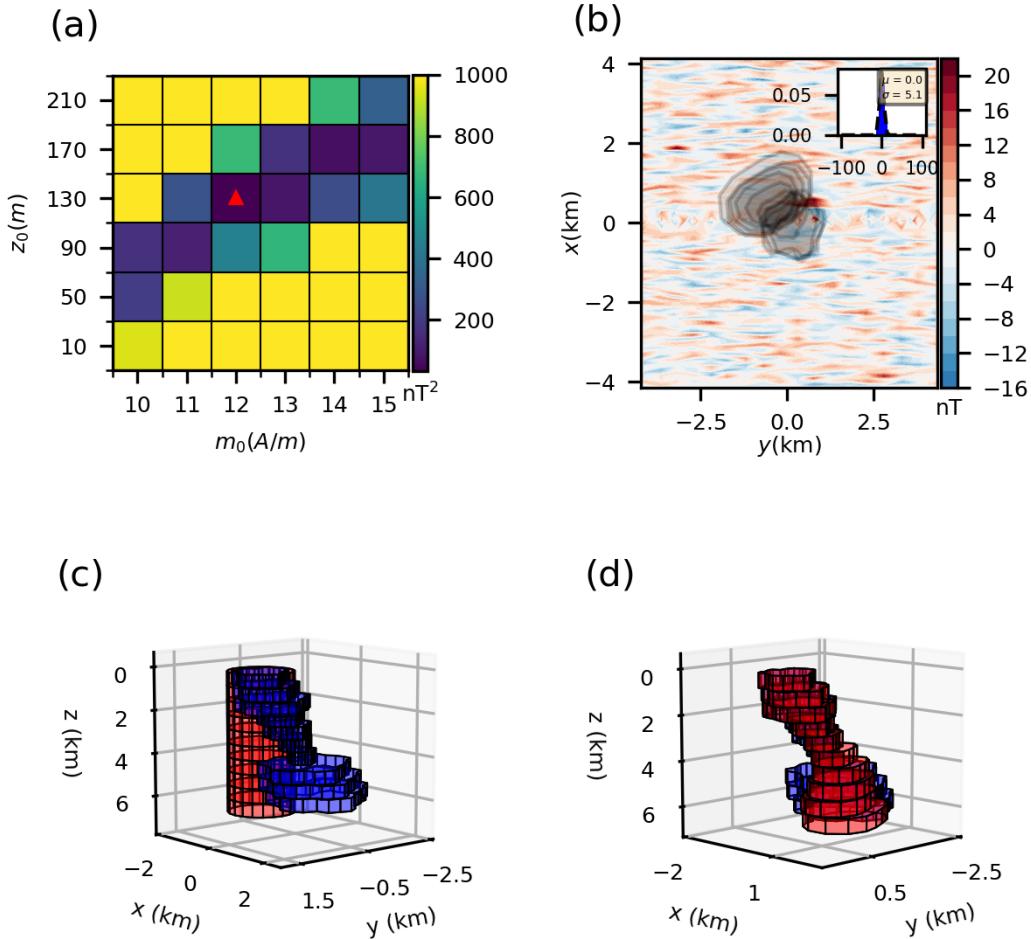


Figura 5.15: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$ , assim como os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.13a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

mas esses resíduos diferem consideravelmente da anomalia de campo total produzida pela fonte não-alvo (Figura 5.17b). Isso significa que, nesse caso, a inversão não foi capaz de ignorar o efeito causado pela fonte não-alvo. Além disso, a Figura 5.19d mostra que a melhor solução L2 não recupera a forma da fonte alvo.

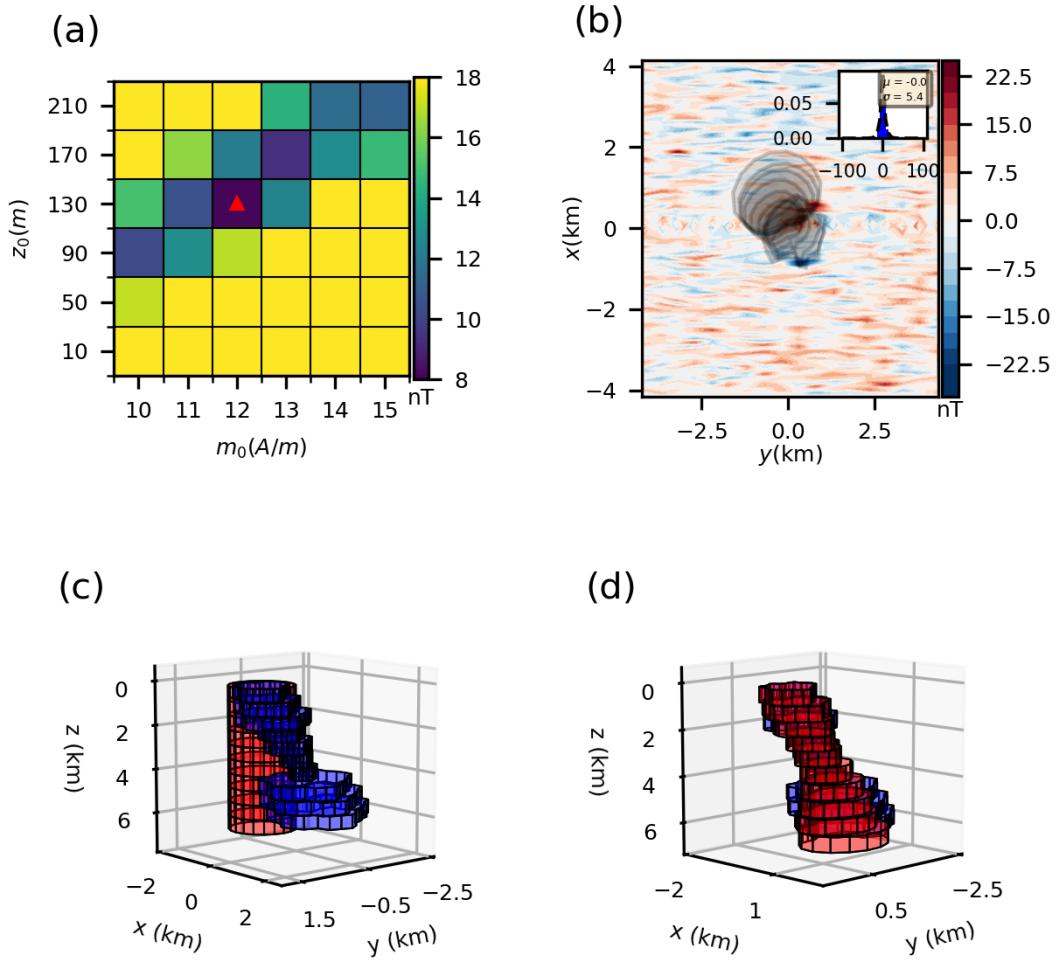


Figura 5.16: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para  $m_0$  e  $z_0$ , assim como os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.13a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

A Figura 5.20 mostra as soluções L1 obtidas pela inversão da anomalia de campo total exibida na Figura 5.17a com os mesmos pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1) utilizados para as soluções L2 (Figura 5.19). Comparada à solução L2 mostrada na Figura 5.19, a melhor solução L1 apresenta uma intensidade de magnetização

total menos superestimada (Figura 5.20a) e profundidade da base (4993.7 m) menos subestimada cerca de 1 km de diferença em relação à verdadeira (6130 m). Essa solução produz valores de resíduos (Figura 5.20b) próximos à anomalia de campo total produzida pela fonte não-alvo (Figura 5.17b). Isso significa que, nesse caso, a performance do método foi mais eficaz em filtrar a anomalia de campo total não-alvo (Figura 5.17b). Como consequência, a solução L1 (Figura 5.20d) foi muito menos afetada pela fonte não-alvo e recuperou satisfatoriamente a forma da fonte alvo. A Tabela 5.5 mostra que para este teste a solução L1 é superior à solução L2 mesmo que a fonte não-alvo seja muito localizada e menor do que a fonte alvo.

Tabela 5.5: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao corpo complexo na presença de uma fonte não-alvo pequena (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	0,45	20,75	1,94	0,29	1,94
Solução L1	0,25	3,56	0,83	0,22	4,49

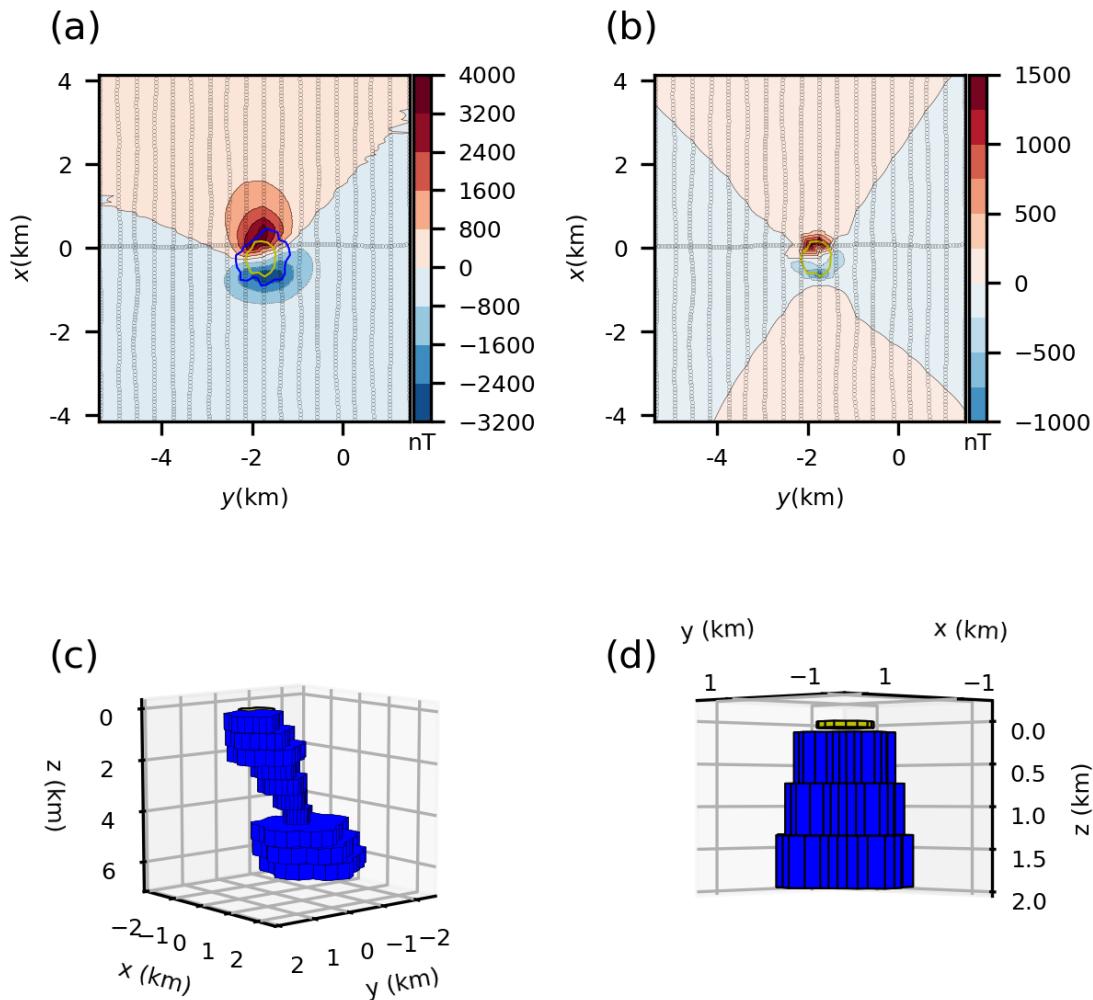


Figura 5.17: Modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo pequena. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e não-alvo (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e não-alvo, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte não-alvo. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte não-alvo (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e não-alvo (prisma amarelo).

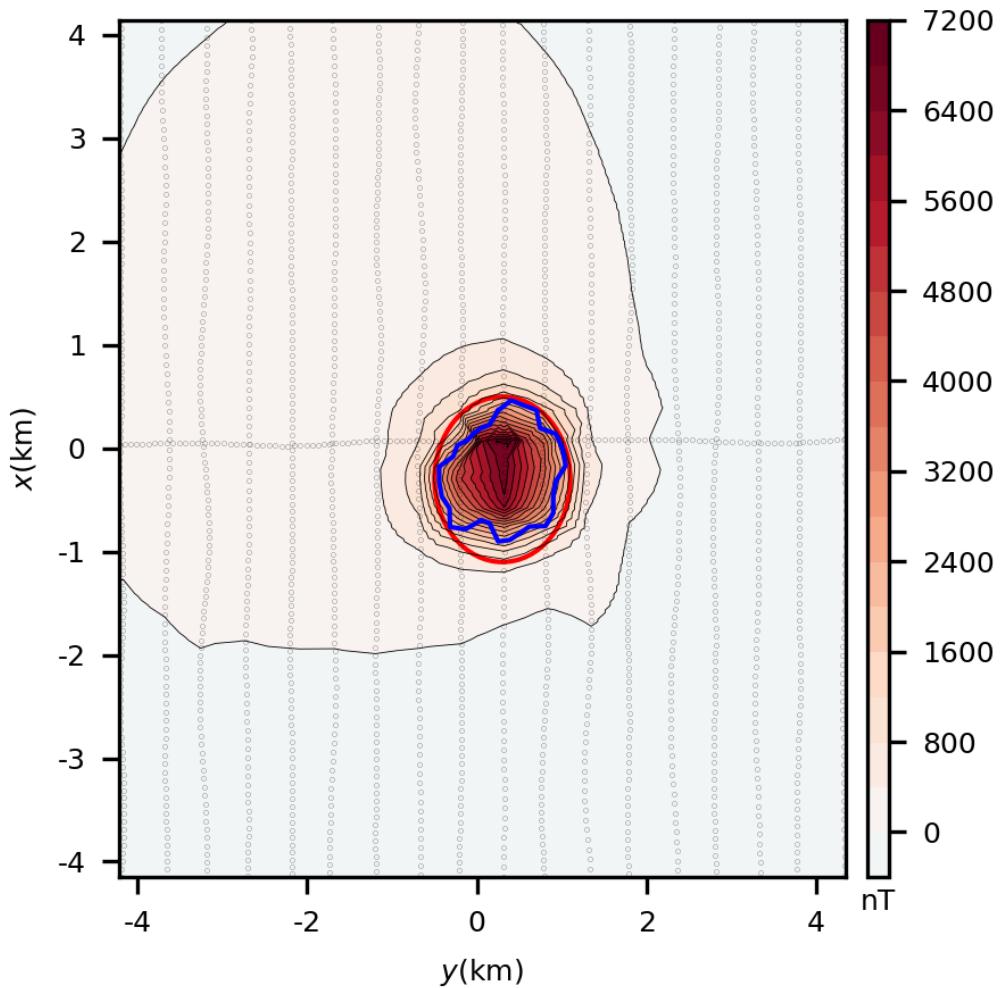


Figura 5.18: Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte não-alvo pequena. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.19c e 5.20c).

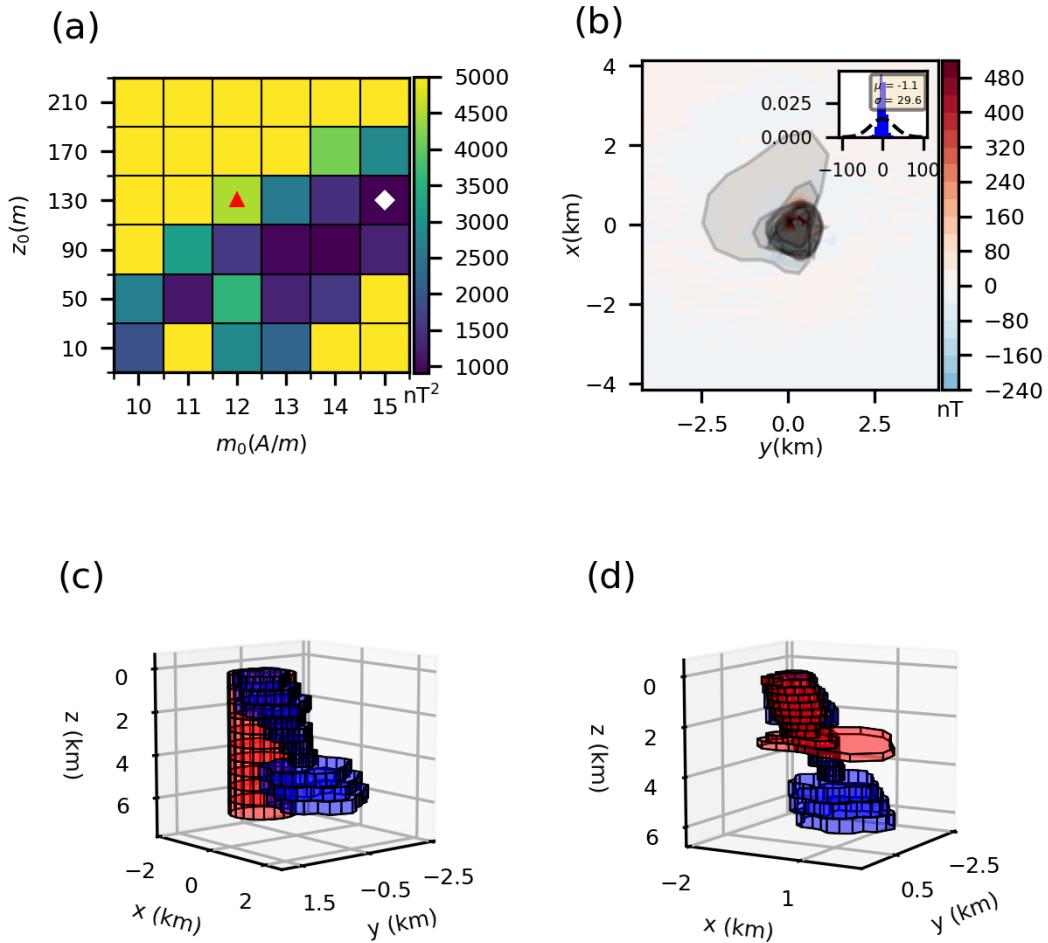


Figura 5.19: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Os valores verdadeiros de  $m_0$  e  $z_0$  e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.17a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

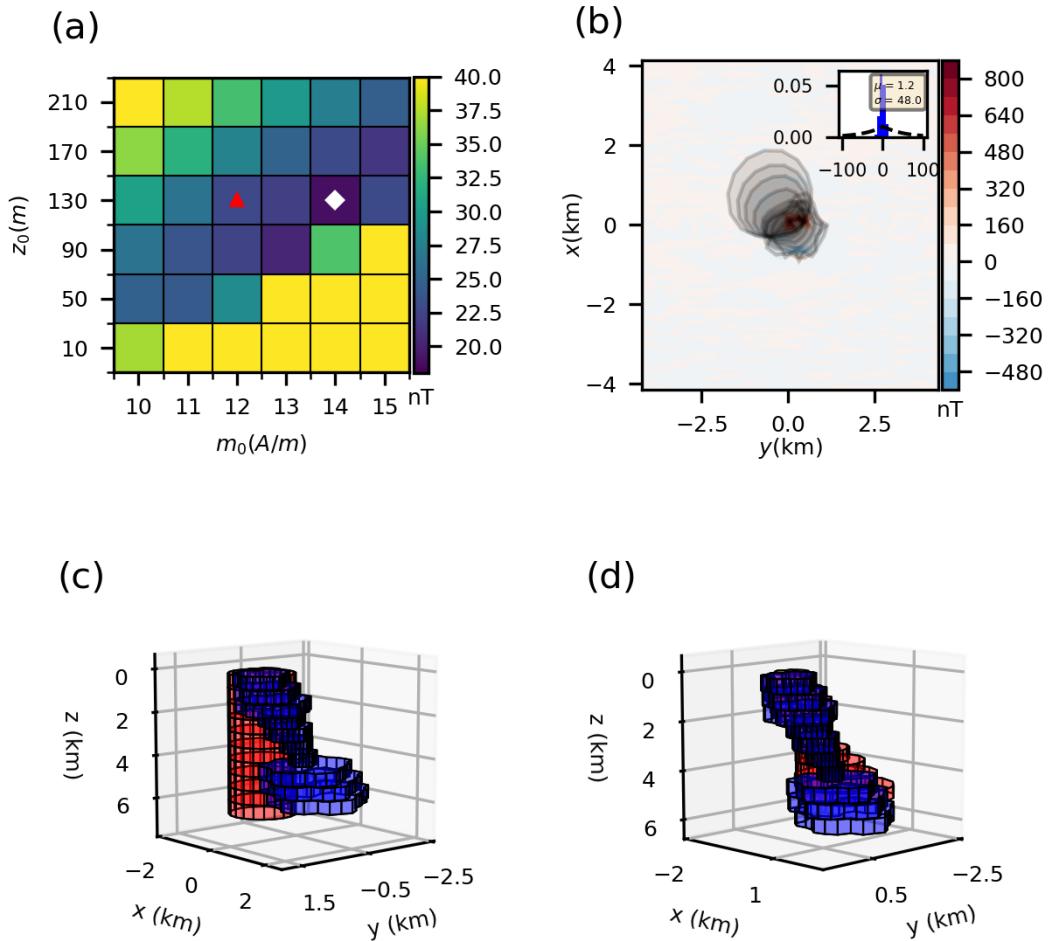


Figura 5.20: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Os valores verdadeiros de  $m_0$  e  $z_0$  e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura ??a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

## 5.6 Modelo complexo na presença de uma fonte não-alvo grande

O mapa da Figura 5.21a representa a soma entre as anomalias de campo total produzidas pela fonte não-alvo pequena (Figura 5.21b), cuja forma é exibida nas Figuras 5.21c e 5.21d, e aquela produzida pela fonte alvo simulada (Figura 5.13a). A fonte não-alvo possui profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 500 m, centro em  $(x, y) = (500, 1500)$ , ao lado do topo da fonte alvo, e o mesmo vetor magnetização total da fonte alvo. Neste caso, a fonte não-alvo estende consideravelmente a área positiva da anomalia RTP (Figura 5.22) em comparação com a da fonte alvo isolada (Figura 5.14). Entretanto, ainda é possível identificar os limites laterais da fonte alvo e gerar a mesma aproximação inicial usada nos testes anteriores.

A Figura 5.23 mostra as soluções L2 obtidas pela inversão da anomalia de campo total na Figura 5.21a com os seguintes pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-3}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-5}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-6}$ . Como podemos ver, a melhor solução L2 não recupera os valores da profundidade do topo  $z_0$  e nem da intensidade de magnetização total  $m_0$ , assim como não recuperou a forma da fonte alvo. A estimativa da profundidade da base (1931,0 m) é muito distante da verdadeira (6130 m). Comparado ao valor verdadeiro, a profundidade do topo estimada  $z_0$  está deslocada em direção à da fonte não-alvo. Nesse caso, a fonte não-alvo induz severamente ao erro da estimativa da geometria do corpo (Figura 5.23d).

A Figura 5.24 mostra as soluções L1 obtidas pela inversão da anomalia de campo total mostrada na Figura 5.21a com os seguintes pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1) utilizados para as soluções L2 (Figura 5.23). A melhor solução L1 (Figura 5.24) filtra parcialmente a anomalia de campo total não-alvo (Figura 5.21b) e recupera as principais feições da fonte alvo sintética, assim como a profundidade do topo  $z_0$  e a intensidade de magnetização total  $m_0$  verdadeiras. Essa solução estima a profundidade da base (5820.4 m) melhor do que a do teste anterior, no entanto, a solução é inferior à mostrada no teste anterior em filtrar a anomalia de campo total não-alvo e também em recuperar a geometria da fonte alvo. Apesar disso, a Tabela 5.6 mostra que ela é significativamente superior à melhor solução L2 (Figura 5.23) obtida pela inversão do mesmo dado, uma vez que é muito menos afetada pela presença de uma grande fonte não-alvo.

Tabela 5.6: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao corpo complexo na presença de uma fonte não-alvo grande (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	145, 68	2, 13	7, 15	2, 36	$3, 88 \times 10^{-2}$
Solução L1	16, 17	0, 42	2, 36	1, 58	0, 38

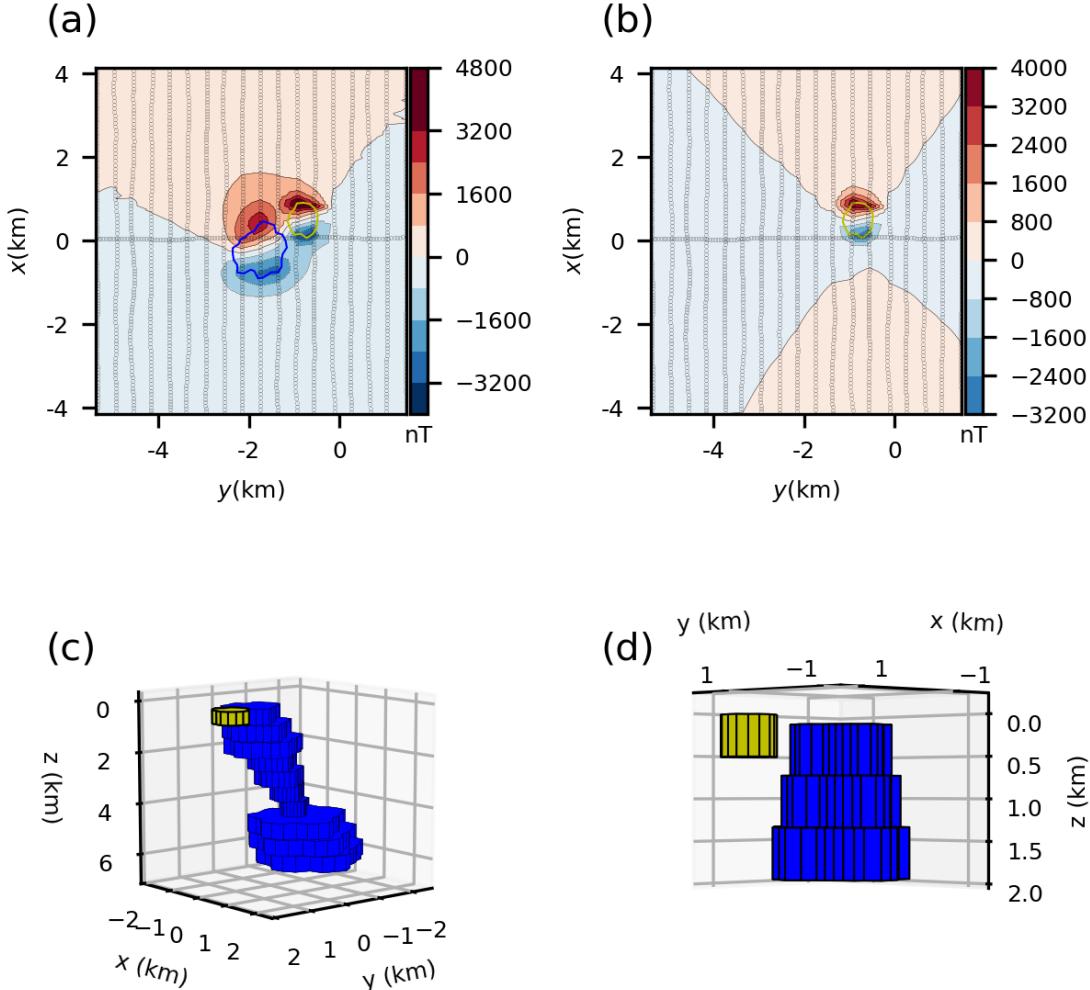


Figura 5.21: Modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo grande. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e não-alvo (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e não-alvo, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte não-alvo. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte não-alvo (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e não-alvo (prisma amarelo).

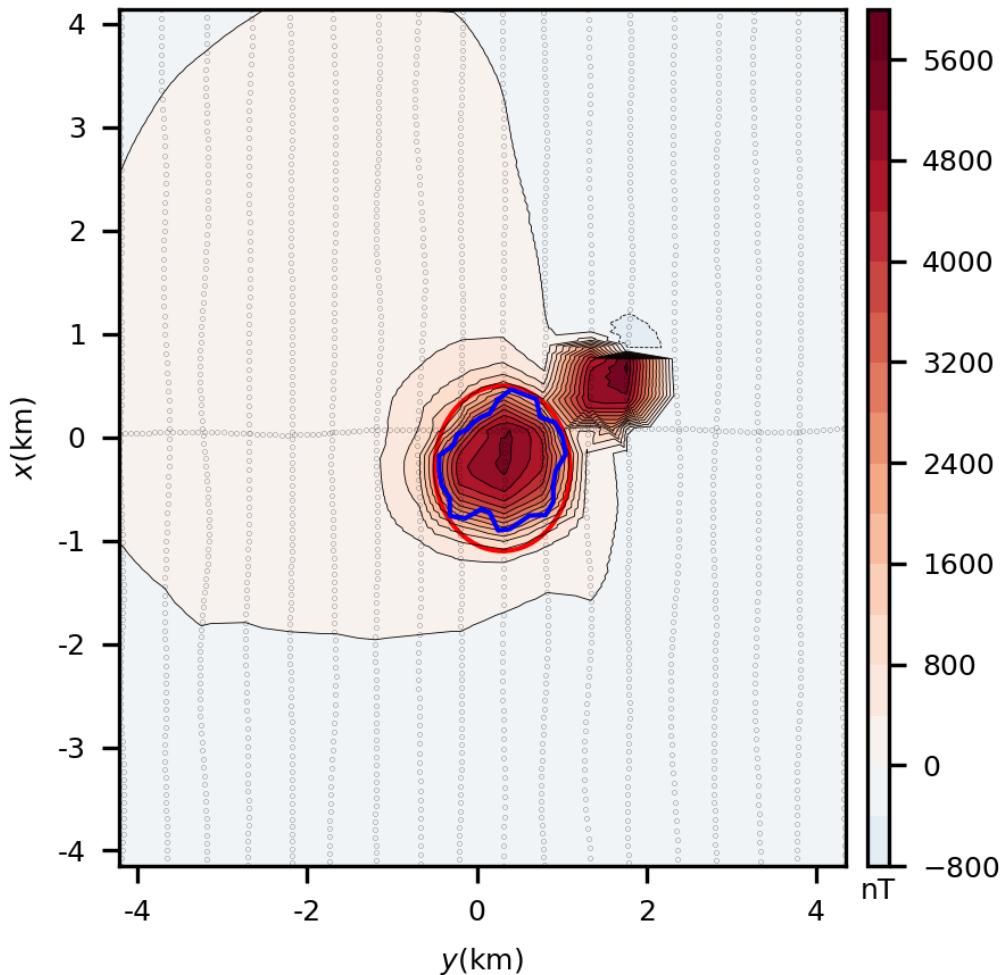


Figura 5.22: Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte não-alvo grande. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima das fontes alvo e não-alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 5.23c e 5.24c).

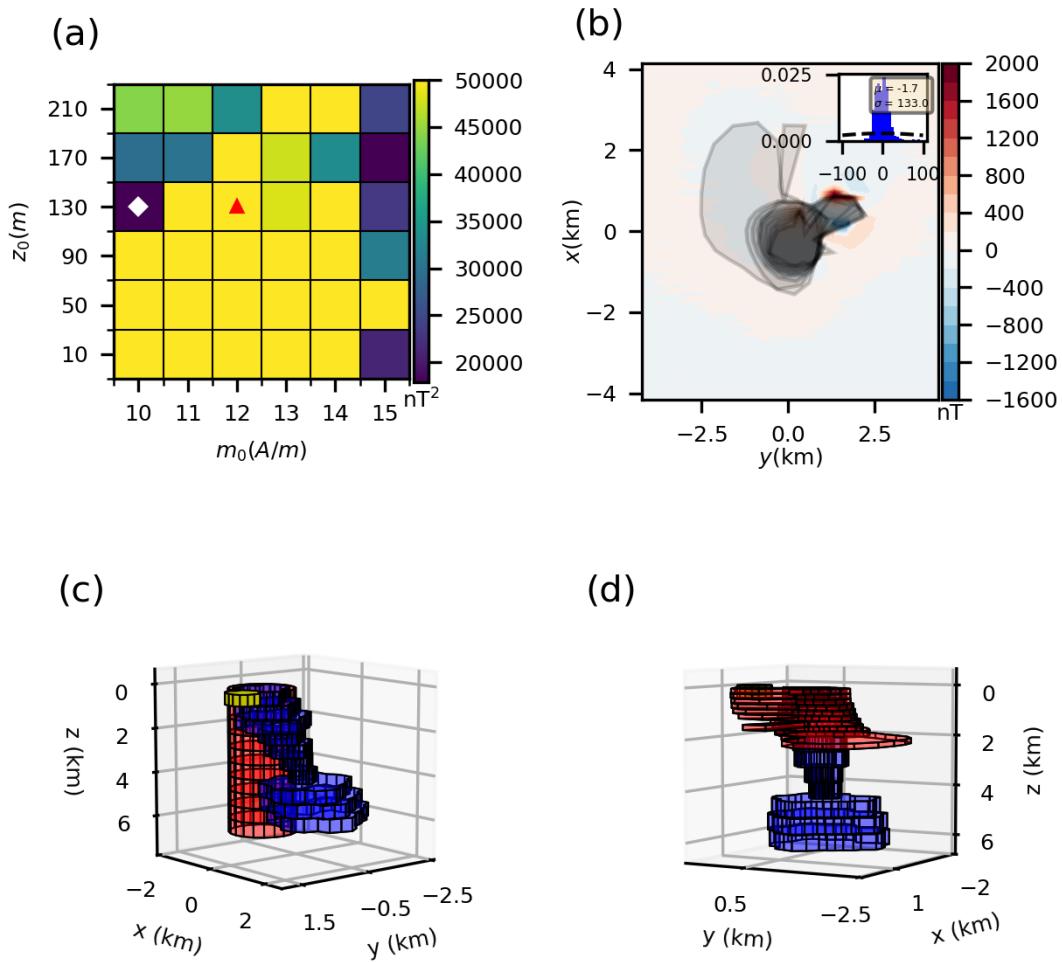


Figura 5.23: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Os valores verdadeiros de  $m_0$  e  $z_0$  e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.21a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

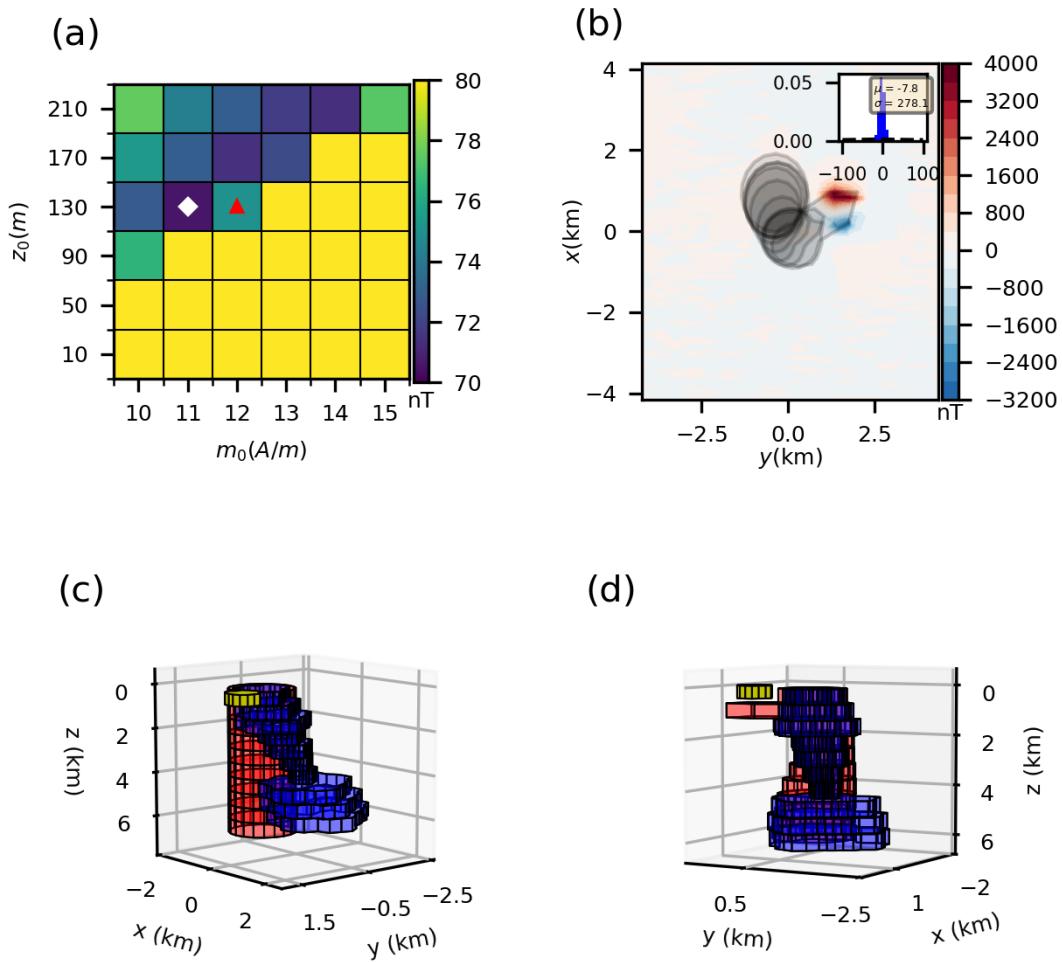


Figura 5.24: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte não-alvo grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . Ambos valores verdadeiros de  $m_0$  e  $z_0$  e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Figura 5.21a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

# Capítulo 6

## Aplicação a dados reais

### 6.1 Complexo de Anitápolis

O complexo alcalino-carbonatítico de Anitápolis forma um corpo circular ( $\approx 6 \text{ km}^2$ ) que contém magnetita e intrudiu leucogranitos do Cretáceo Inferior (132 Ma), aparentemente na mesma época do derramamento basáltico da formação Serra Geral (133 – 130 Ma) na Bacia do Paraná (GOMES *et al.*, 2018; SCHEIBE *et al.*, 2005). De acordo com RICCOMINI *et al.* (2005) e GOMES *et al.* (2018), este complexo não mostra um controle estrutural claro e ainda há debate sobre sua intrusão. Por exemplo, MELCHER e COUTINHO (1966) propôs a influência de falhas orientadas preferencialmente em N-S enquanto que HORBACH e MARIMON (1980) e SCHEIBE *et al.* (2005) consideram que o complexo é controlado por lineamentos N30W e Leste-Oeste, respectivamente.

As Figuras 6.1a e 6.1b exibem a anomalia de campo total observada e o campo regional estimado sobre o complexo de Anitápolis, respectivamente. O levantamento aéreo foi adquirido com linhas N-S e L-O espaçadas em 500 m e 10.000 m umas das outras, respectivamente, sobre a superfície ondulada mostrada na Figura 6.1c. A Figura 6.1d mostra a topografia da área de estudo. A inclinação e a declinação do campo geomagnético principal na área de estudo, para a época da aquisição (2009 – 2011), são  $-37,05^\circ$  e  $-18,17^\circ$ , respectivamente.

A Figura 6.2a mostra a anomalia de campo total residual obtida pela subtração do campo regional estimado (Fig. 6.1b) da anomalia de campo total observada (Fig. 6.1a). A partir dessa anomalia residual, foi calculada a anomalia RTP mostrada na Figura 6.2b utilizando a direção de magnetização estimada por REIS *et al.* (2019) com inclinação  $-21^\circ$  e declinação  $-11^\circ$ . A área positiva da anomalia RTP estimada foi usada para definir as aproximações iniciais para todas as soluções L2 (Fig. 6.3) e L1 (Fig. 6.4) obtidas pelo método ao realizar a inversão da anomalia de campo total residual mostrada na Figura 6.2a. Todas essas soluções L2 e L1 foram obtidas

através da utilização do seguinte conjunto de pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-3}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ .

A Figura 6.3a mostra os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L2 obtidas por uma malha de varredura de  $10 \times 10$  valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . A melhor solução L2 possui uma profundidade do topo de  $z_0 = 0$  m, intensidade de magnetização total de  $m_0 = 15$  A/m e uma profundidade da base em 3032,7 m. A Figura 6.4a exibe os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L1 obtidas por uma malha de varredura de  $10 \times 10$  valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . A melhor solução L1 possui uma profundidade do topo de  $z_0 = 240$  m, intensidade de magnetização total de  $m_0 = 14$  A/m e uma profundidade da base em 3259,6 m.

As intensidades de magnetização total das soluções estão ambas em acordo com as medidas de laboratório conduzidas por ALVA-VALDIVIA *et al.* (2009) nas amostras de rochas do complexo de Jacupiranga, outro complexo alcalino localizado ao norte da área de estudo, com a mesma idade do complexo de Anitápolis. De acordo com o esses autores, os valores podem variar de  $\approx 0,01$  a  $\approx 29,90$  A/m. A extensão vertical total da melhor solução L2 (3032,7 m) é muito similar à extensão da solução L1 (3019,6 m). Ambas as soluções mostram uma intrusão com direção preferencial de N30W tendo praticamente a mesma forma, alinhada com o baixo da topografia exibida na Figura 6.1d (no centro do retângulo rosa). Essa orientação é consistente com a proposta por HORBACH e MARIMON (1980) para um grande lineamento na área de estudo. O topo da solução L1 é mais profundo do que o da solução L2, o que sugere a possível presença de uma pequena fonte não-alvo rasa. Finalmente, a Tabela 6.1 mostra que a solução L1 é superior à solução L2 mesmo que ambas exibam semelhanças em suas geometrias.

Tabela 6.1: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao complexo de Anitápolis (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	1,48	22,2	17,24	$3,00 \times 10^{-3}$	0,48
Solução L1	0,12	1,63	1,77	$8,30 \times 10^{-4}$	0,14

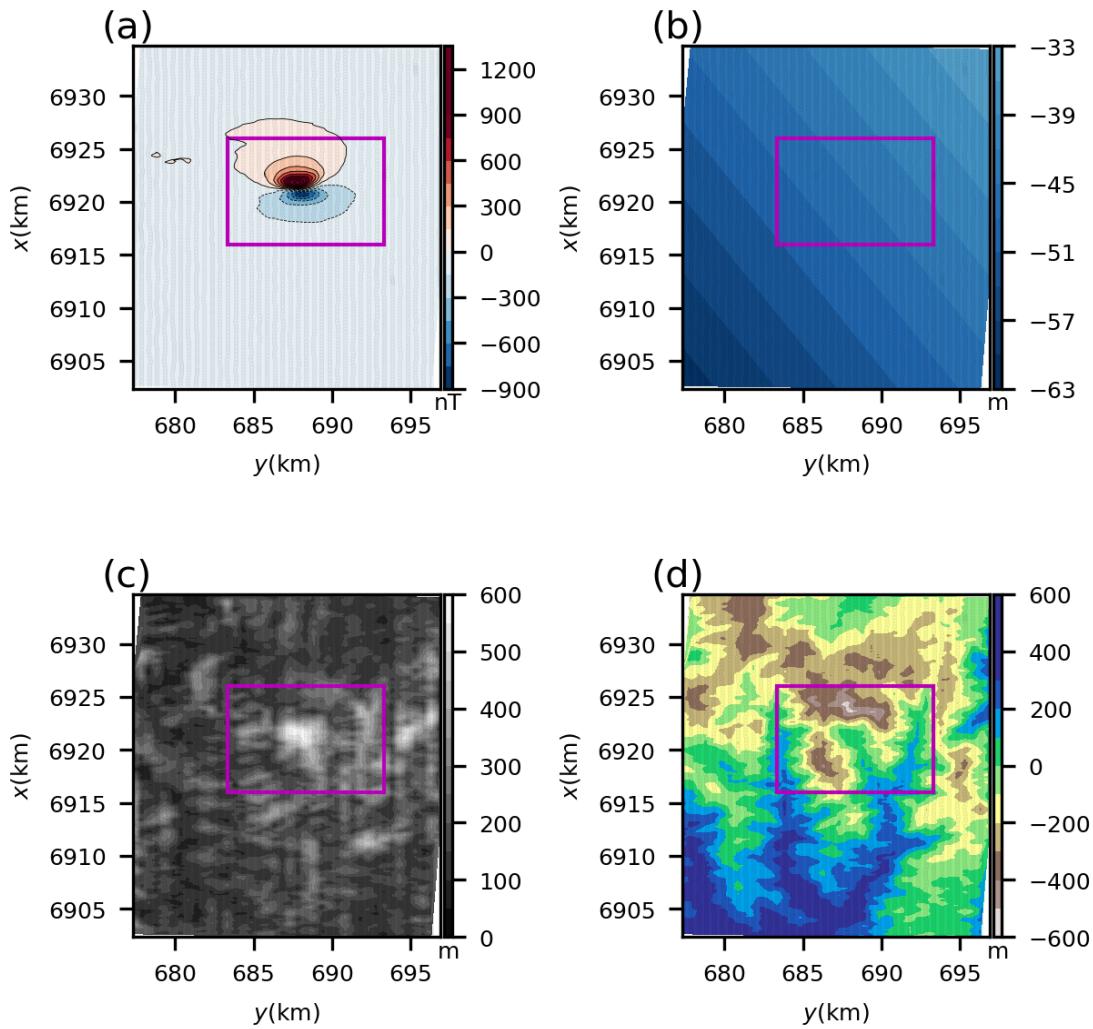


Figura 6.1: Aplicação aos dados do complexo de Anitápolis. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Polinômio de primeira ordem que representa o campo regional. (c) e (d) Altura geométrica dos pontos de observação e topografia, ambas referenciadas ao elipsoide WGS84. Por simplicidade, foi removida uma constante de 800 m de seus valores. As coordenadas UTM estão referenciadas ao meridiano central  $51^\circ$ . Os pontos pretos representam os pontos observados. Apenas os dados delimitados pelo retângulo rosa foram usados para a inversão.

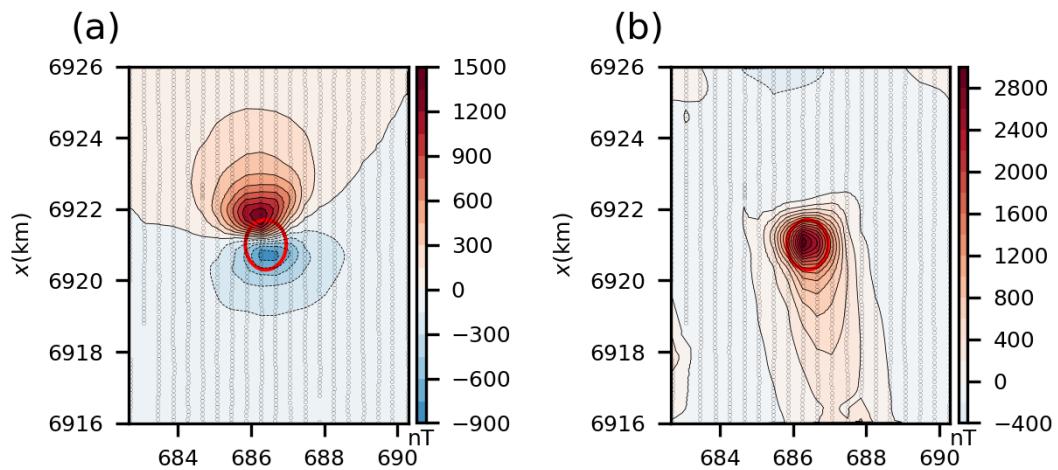


Figura 6.2: Aplicação aos dados do complexo de Anitápolis. (a) e (b) Anomalias residual e RTP sobre a área de estudo definida pelo retângulo rosa na Figura 6.1. A linha vermelha representa a projeção horizontal das aproximações iniciais usadas nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 6.3c e 6.4c).

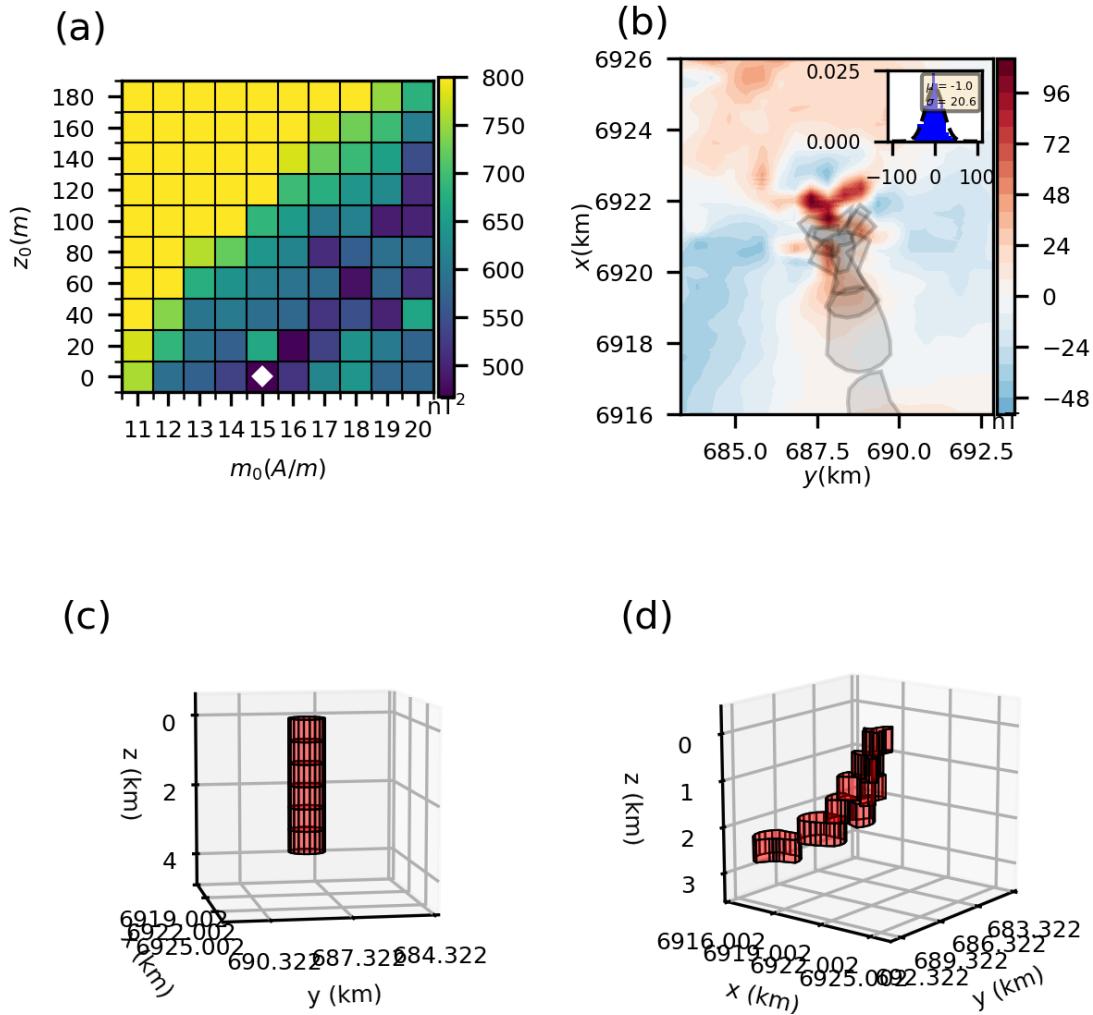


Figura 6.3: Soluções L2 obtidas para o complexo de Anitápolis. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O losango branco representa os valores de  $m_0$  e  $z_0$  que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 6.2a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

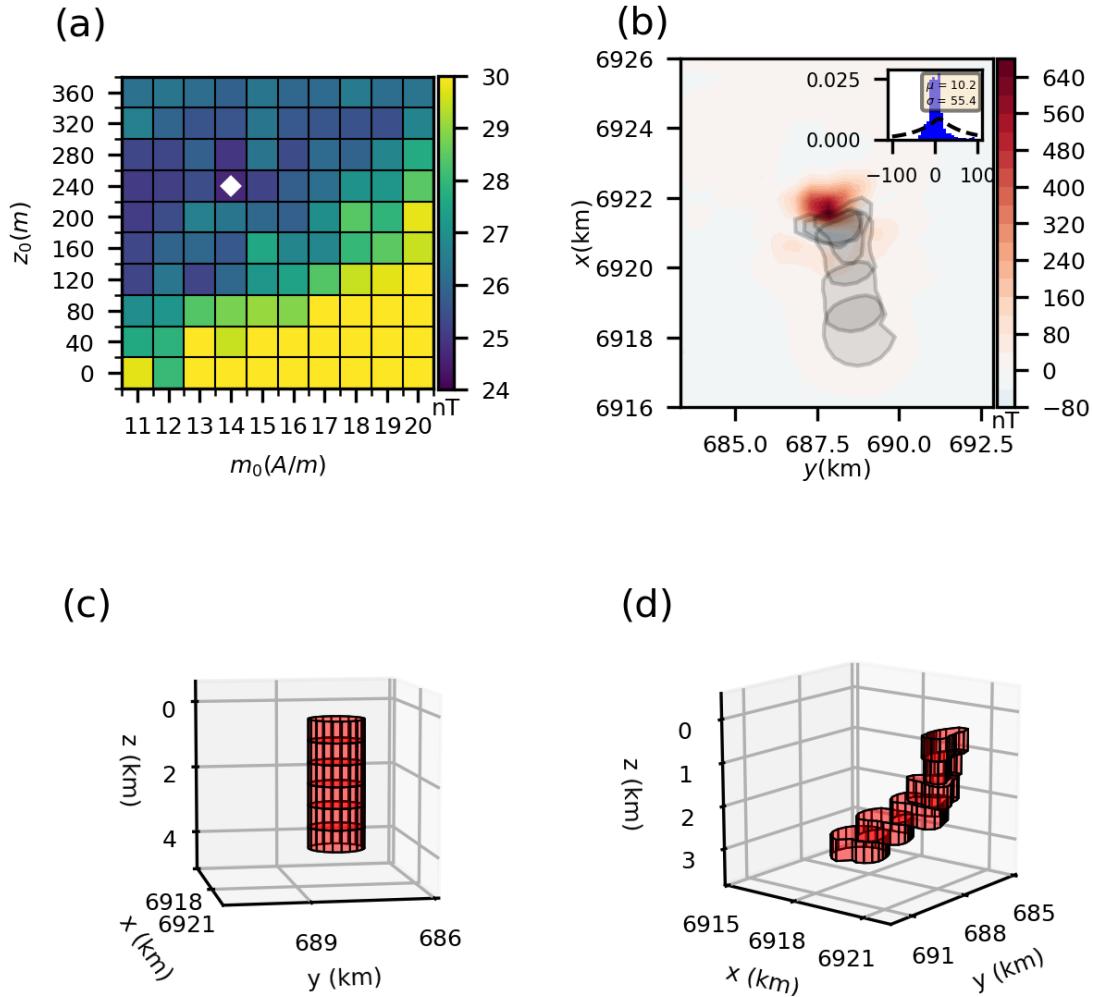


Figura 6.4: Soluções L1 obtidas para o complexo de Anitápolis. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O losango branco representa os valores de  $m_0$  e  $z_0$  que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 6.2a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

## 6.2 Complexo de Diorama

A província alcalina de Goiás (PAGO) é resultado de um magmatismo máfico-alcalino que ocorreu no final do Cretáceo, na borda da Bacia do Paraná. Ela é associada com uma grande variedade petrográfica que incluem complexos máficos e ultra-máficos, intrusões alcalinas subvulcânicas e vulcânicas que coincidem com uma bem definida tendência de falhas no embasamento de N50E (JUNQUEIRA-BROD *et al.*, 2002, 2005). Diferentes estudos geofísicos indicam que as anomalias magnéticas associadas às intrusões alcalinas na PAGO são afetadas por notáveis magnetizações remanentes (por exemplo, DUTRA *et al.*, 2012, 2014; MARANGONI e MANTOVANI, 2013; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015; REIS *et al.*, 2020; ZHANG *et al.*, 2018).

As Figuras 6.5a e 6.5b mostram, respectivamente, a anomalia de campo total observada e o campo regional estimado sobre o complexo de Diorama na parte norte da PAGO (JUNQUEIRA-BROD *et al.*, 2005; MARANGONI e MANTOVANI, 2013; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015). O levantamento aéreo foi adquirido com linhas N-S e L-O espaçadas em 500 m e 10.000 m umas das outras, respectivamente, sobre a superfície ondulada mostrada na Figura 6.5c. A Figura 6.5d mostra a topografia na área de estudo. A inclinação e a declinação do campo geomagnético principal na área de estudo, para a época da aquisição (2004), são  $-19,5^\circ$  e  $-18,5^\circ$ , respectivamente.

A Figura 6.6a mostra a anomalia de campo total residual obtida pela subtração do campo regional estimado (Fig. 6.5b) da anomalia de campo total observada (Fig. 6.5a). A partir dessa anomalia residual, foi calculada a anomalia RTP mostrada na Figura 6.6b utilizando a direção de magnetização estimada por ZHANG *et al.* (2018) com inclinação  $-46^\circ$  e declinação  $24^\circ$ . Considerando o máximo e o máximo gradiente (ponto de inflexão), a área positiva da anomalia RTP estimada foi usada para definir as aproximações iniciais para todas as soluções L2 (Fig. 6.7) e L1 (Fig. 6.8) obtidas pelo método ao realizar a inversão da anomalia de campo total residual mostrada na Figura 6.6a. Todas essas soluções L2 e L1 foram obtidas através da utilização do seguinte conjunto de pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 4.1):  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-6}$ .

A Figura 6.7a mostra os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L2 obtidas por uma malha de varredura de  $10 \times 10$  valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . A melhor solução L2 possui uma profundidade do topo de  $z_0 = 200$  m, intensidade de magnetização total de  $m_0 = 19$  A/m e uma profundidade da base em 2090,0 m. A Figura 6.8a exibe os valores da função objetivo produzidos pelas 100 soluções L2 obtidas por uma malha de varredura de  $10 \times 10$  valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . A melhor solução L1 possui uma profundidade do topo de  $z_0 = 250$  m, intensidade

de magnetização total de  $m_0 = 18 \text{ A/m}$  e uma profundidade da base em 2692,0 m.

As intensidades de magnetização total das soluções estão ambas em acordo com as medidas de laboratório conduzidas por DUTRA (2011) e DUTRA *et al.* (2014) em amostras de rochas da PAGO. Eles encontraram valores que variam de  $\approx 0,01$  a 20 A/m. A extensão vertical total da melhor solução L2 (1890,0 m) é  $\approx 500$  m menor que a extensão da melhor solução L1 (2442,0 m), o que é consistente com a intensidade de magnetização menor da solução L1. A extensão vertical total da solução L1 (2442,0 m), entretanto, é significativamente menor do que a obtida por DUTRA (2011, Fig. 4.9, p. 78) para o complexo de Diorama ( $\approx 3000,0$  m). É importante enfatizar que DUTRA (2011) obteve essa extensão vertical total indiretamente a partir da distribuição de susceptibilidade magnética estimada em uma malha 3D pouco refinada de prismas retangulares justapostos com lado de 1 km de comprimento e valores máximos de susceptibilidade limitados a 0,01 SI. Essa malha foi projetada para investigar não só o complexo de Diorama como também todas as anomalias produzidas por extensos complexos alcalinos na área de estudo. Como consequência, os resultados apresentados por DUTRA (2011), também relatado por MARANGONI e MANTOVANI (2013), não parecem ter resolução espacial suficiente para representar o complexo de Diorama, que é relativamente menor que os complexos ao seu redor. Essa falta de resolução espacial associada ao limite superior imposto à distribuição de susceptibilidade magnética podem resultar em uma extensão vertical total exagerada obtida para o complexo de Diorama. Comparado à abordagem utilizada por DUTRA (2011), o método apresentado neste trabalho é capaz de representar o complexo de Diorama com uma maior resolução espacial e esta pode ser a principal causa da estimativa discrepante da extensão vertical total.

A solução L2 mostra uma forma complexa que depende da profundidade com nenhum controle estrutural aparente. É possível notar que seu prisma mais profundo possui uma área maior que a dos prismas restantes. As características dessa solução assemelham-se às da solução L2 obtida para o dado sintético com a presença de uma fonte não-alvo pequena (Fig. 5.19). Por outro lado, a Figura 6.8 mostra uma solução L1 com uma forma que varia continuamente ao longo da profundidade que parece ser influenciada por uma falha aproximadamente orientada a N50E. Essa direção concorda com a relatada por JUNQUEIRA-BROD *et al.* (2002) para dique que cruzam o embasamento Pré-cambriano na área de estudo. Esses resultados sugerem a presença de fontes não-alvo rasas localizadas próximas ao topo do complexo de Diorama. Segundo a Tabela 6.2, a solução L1 é significativamente superior à solução L2, incorporando melhor a informação a priori introduzida.

Tabela 6.2: Valores dos vínculos na iteração final para as melhores soluções L2 e L1 da aplicação ao complexo de Diorama (Eqs. 3.7, 3.11, 3.15, 3.19 e 3.23).

Vínculo	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
Solução L2	29, 24	64, 05	1, 37	4, 24	0, 19
Solução L1	7, 57	6, 61	0, 35	2, 42	0, 22

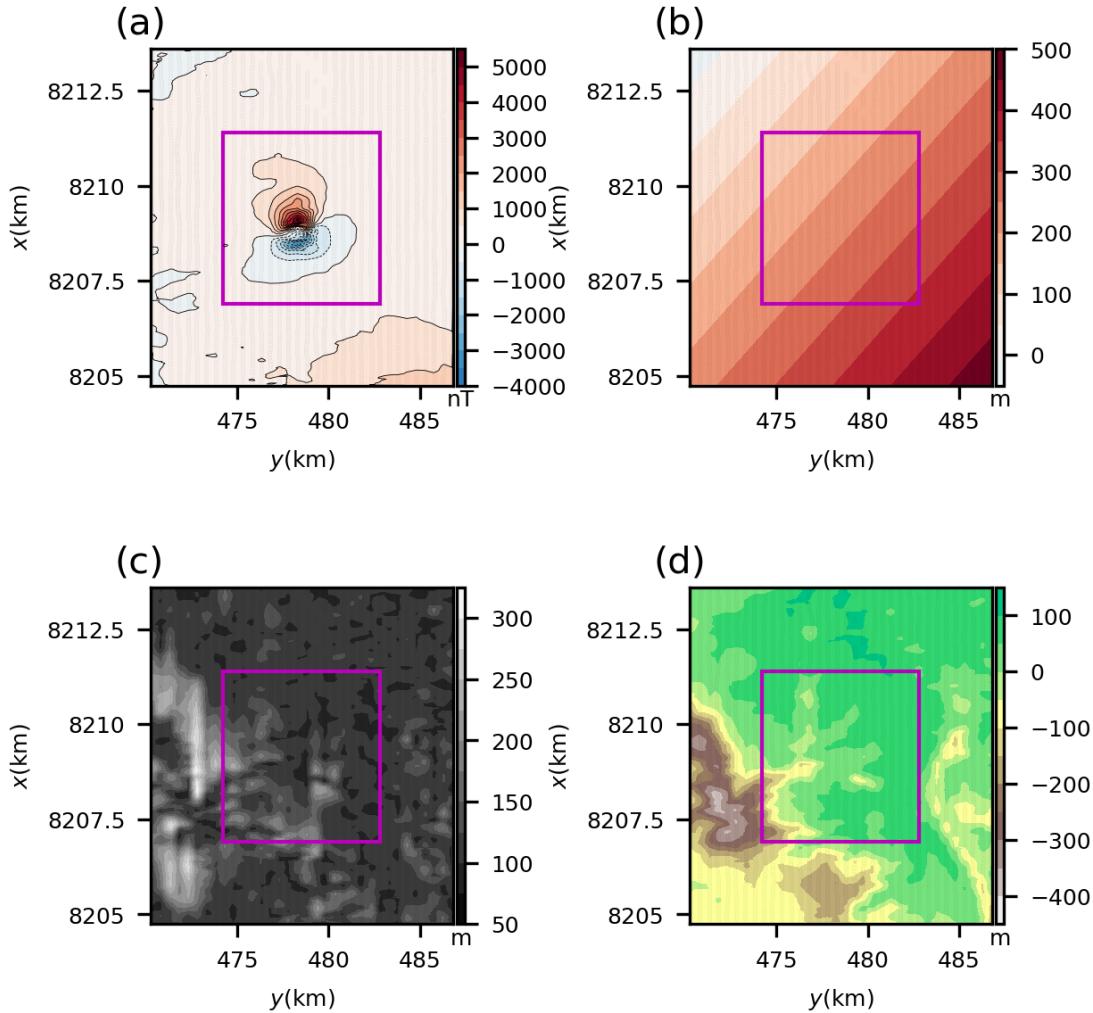


Figura 6.5: Aplicação aos dados do complexo de Diorama. (a) Anomalia de campo total observada. (b) Polinômio de primeira ordem que representa o campo regional. (c) e (d) Altura geométrica dos pontos de observação e topografia, ambas referenciadas ao elipsoide WGS84. Por simplicidade, foi removida uma constante de 430 m de seus valores. As coordenadas UTM estão referenciadas ao meridiano central 51°. Os pontos pretos representam os pontos observados. Apenas os dados delimitados pelo retângulo rosa foram usados para a inversão.

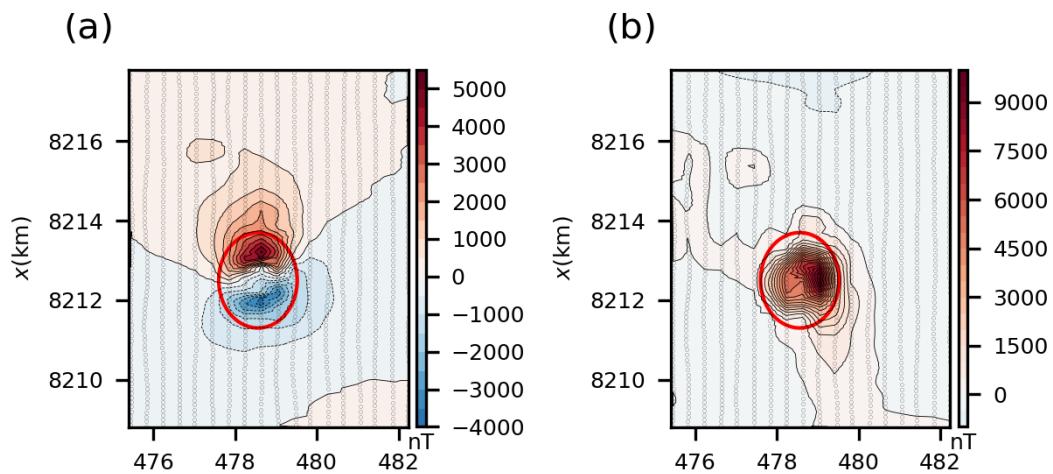


Figura 6.6: Aplicação aos dados do complexo de Diorama. (a) e (b) Anomalias residual e RTP sobre a área de estudo definida pelo retângulo rosa na Figura 6.5. A linha vermelha representa a projeção horizontal das aproximações iniciais usadas nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 6.7c e 6.8c).

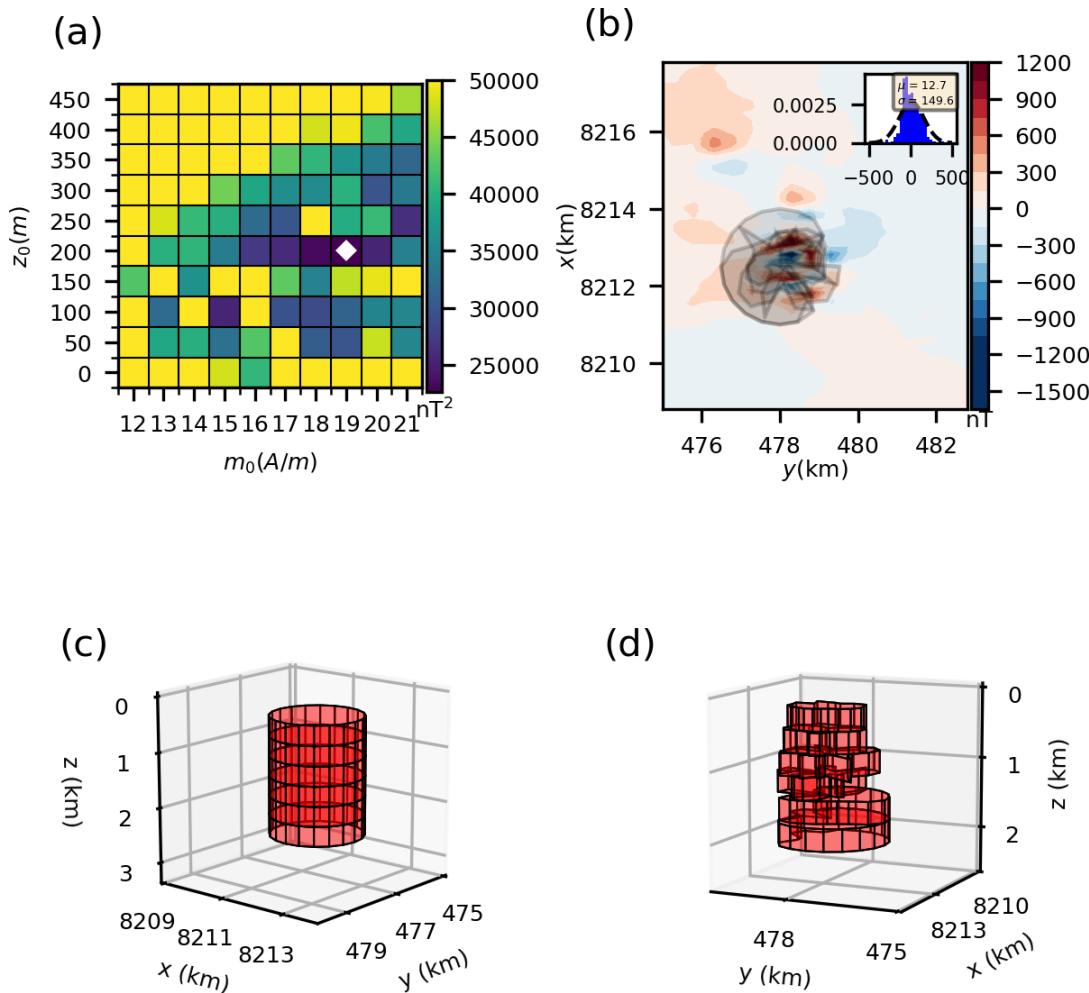


Figura 6.7: Soluções L2 obtidas para o complexo de Diorama. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O losango branco representa os valores de  $m_0$  e  $z_0$  que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 6.6a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

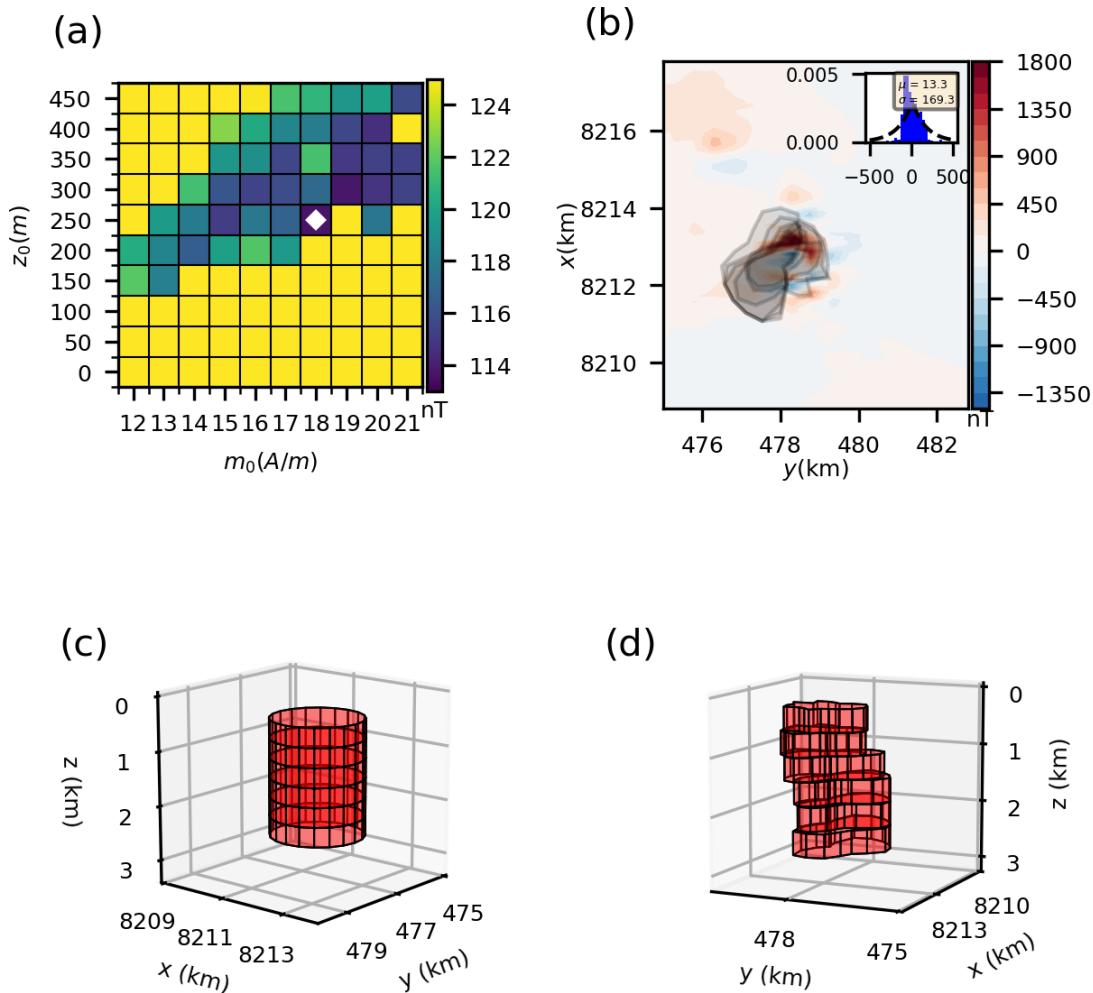


Figura 6.8: Soluções L1 obtidas para o complexo de Diorama. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos obtidos a partir da varredura de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$ . O losango branco representa os valores de  $m_0$  e  $z_0$  que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre a anomalia de campo total residual (Fig. 6.6a) e os dados preditos (não exibidos) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (linha tracejada). (c) e (d) Visualizações em perspectiva da aproximação inicial e da melhor solução, respectivamente.

# Capítulo 7

## Conclusões

Do ponto de vista geofísico, os sinais produzidos por fontes não-alvo podem ser considerados um ruído geológico e devem ser filtrados dos sinais produzidos pelas fontes alvo que são de grande interesse em uma interpretação geológica. Aqui, uma fonte alvo é aquela que dá origem ao sinal geofísico mais forte, independentemente de ser um alvo geológico de alto valor econômico. Este trabalho apresentou uma inversão regularizada não linear com um ajuste robusto para inverter dados magnéticos a fim de estimar a forma 3D de uma fonte alvo na presença ou não de fontes não-alvo. Essa inversão não requer filtrar o sinal produzido pelas fontes não-alvo para isolar o sinal das fontes alvo. Isso é realizado por meio da minimização das funções dos vínculos definidas no espaço dos parâmetros e a função de desajuste de dados magnéticos definida no espaço dos dados como a norma-1 do vetor dos resíduos (a diferença entre os dados observados e preditos). As soluções estimadas são estabilizadas por funções de regularização definidas pelas regularizações de Tikhonov de ordem zero e de primeira ordem. A inversão magnética robusta assume a direção de magnetização total da fonte alvo é conhecida e recupera: i) a intensidade de magnetização total, ii) as profundidades do topo e da base, e iii) as bordas das faixas de profundidade horizontal do corpo 3D. A solução recuperada é chamada de solução L1 e nós a comparamos com a solução L2 que minimiza as mesmas funções dos vínculos e a função de desajuste dos dados magnéticos definida pela norma-2 do vetor dos resíduos.

Testes em dados sintéticos mostram que a fonte estimada (solução L1) recupera a forma 3D de uma fonte alvo, mesmo na presença de fontes não-alvo que produzem anomalias interferentes. Neste caso a solução L1 mostra um melhor desempenho que a L2 não apenas na recuperação da geometria da fonte alvo, mas também na estimativa dos valores de profundidade do topo e de intensidade de magnetização total mais próximos dos verdadeiros. Na ausência de dados magnéticos interferentes, as soluções L1 e L2 apresentam comportamentos semelhantes. Além disso, quando há ou não a influência de um campo regional sobre os dados, ambas as soluções L1

e L2 foram bem sucedidas em estimar a geometria da fonte alvo que foi simulada como um corpo inclinado.

Aplicações a dados aeromagnéticos de levantamentos sobre complexos alcalinos brasileiros permitiram inferir algumas características geológicas. As soluções L1 e L2 produzem estimativas semelhantes no complexo Anitápolis, as quais sugerem a presença de fontes não-alvo pequenas e rasas. Em relação à fonte alvo do complexo Anitápolis, ambas as soluções L1 e L2 mostram uma intrusão mergulhando para noroeste que concorda com um lineamento tectônico conhecido na área. No caso do complexo alcalino de Diorama, em GO, é possível afirmar que ele é composto de fontes alvo e não-alvo que produzem anomalias magnéticas de interferência intermediária. No entanto, as fontes não-alvo do complexo de Diorama não devem ser pequenas porque as soluções L1 e L2 não produzem estimativas semelhantes. A fonte-alvo do complexo Diorama mostra uma forma sub-vertical que parece ser controlada por uma falha conhecida com tendência a nordeste.

Numa perspectiva futura, um novo desafio seria generalizar a inversão apresentada para estimar múltiplas fontes simultaneamente. Além disso, essa generalização pode ser acompanhada pela inversão conjunta de diversos dados, como dados magnéticos, dados de gravidade e dados de gradiometria da gravidade.

# Referências Bibliográficas

- ABEDI, M., ASGHARI, O., NOROUZI, G.-H., 2015, “Collocated cokriging of iron deposit based on a model of magnetic susceptibility: a case study in Morvarid mine, Iran”, *Arabian Journal of Geosciences*, v. 8, n. 4 (abr.), pp. 2179–2189. ISSN: 1866-7511, 1866-7538. doi: 10.1007/s12517-014-1282-5. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s12517-014-1282-5>>.
- ALVA-VALDIVIA, L. M., PERRIN, M., RIVAS-SÁNCHEZ, M. L., et al., 2009, “Rock magnetism and microscopy of the Jacupiranga alkaline-carbonatitic complex, southern Brazil”, *Earth, Planets and Space*, v. 61, n. 1, pp. 161–171. doi: 10.1186/BF03352896.
- AMUNDSEN, L., 1991, “Comparison of the least-squares criterion and the Cauchy criterion in frequency-wavenumber inversion”, *Geophysics*, v. 56, n. 12, pp. 2027–2035. doi: 10.1190/1.1443015.
- ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2019, *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier. ISBN: 978-0-12-804651-7.
- BALLANTYNE, E. J., 1980, “Magnetic curve fit for a thin dike; calculator program (TI 59)”, *Geophysics*, v. 45, n. 3 (03), pp. 447–455. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1441093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1441093>>.
- BARANOV, V., 1957, “A new method for interpretation of aeromagnetic maps: Pseudo-gravimetric anomalies”, *Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 359–382. doi: 10.1190/1.1438369.
- BARBOSA, V. C., SILVA, J. B., 2006, “Interactive 2D magnetic inversion: A tool for aiding forward modeling and testing geologic hypotheses”, *Geophysics*, v. 71, n. 5 (set.), pp. L43–L50. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.2258093. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/10.1190/1.2258093>>.

- BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., MEDEIROS, W. E., 1999, "Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations", *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 754–764. doi: 10.1190/1.1444585.
- BELTRÃO, J. F., SILVA, J. B. C., COSTA, J. C., 1991, "Robust polynomial fitting method for regional gravity estimation", *Geophysics*, v. 56, n. 1, pp. 80–89. doi: 10.1190/1.1442960.
- BHATTACHARYYA, B. K., 1980, "A generalized multibody model for inversion of magnetic anomalies", *Geophysics*, v. 45, n. 2 (02), pp. 255–270. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1441081. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1441081>>.
- BLAKELY, R. J., 1996, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press. ISBN: 0521575478.
- CARATORI TONTINI, F., COCCHI, L., CARMISCIANO, C., 2006, "Depth-to-the-bottom optimization for magnetic data inversion: Magnetic structure of the Latium volcanic region, Italy", *Journal of Geophysical Research*, v. 111 (11), pp. B11104. doi: 10.1029/2005JB004109.
- CELLA, F., FEDI, M., 2012, "Inversion of potential field data using the structural index as weighting function rate decay: Inversion of potential field data", *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 2 (mar.), pp. 313–336. ISSN: 00168025. doi: 10.1111/j.1365-2478.2011.00974.x. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1111/j.1365-2478.2011.00974.x>>.
- CHAVE, A. D., THOMSON, D. J., ANDER, M. E., 1987, "On the robust estimation of power spectra, coherences, and transfer functions", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 92, n. B1, pp. 633–648. doi: 10.1029/JB092iB01p00633.
- CLAERBOUT, J. F., MUIR, F., 1973, "ROBUST MODELING WITH ERRATIC DATA", *Geophysics*, v. 38, n. 5, pp. 826–844. doi: 10.1190/1.1440378.
- CRASE, E., PICA, A., NOBLE, M., et al., 1990, "Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data", *Geophysics*, v. 55, n. 5, pp. 527–538. doi: 10.1190/1.1442864.
- CRIBB, J., 1976, "Application Of The Generalized Linear Inverse To The Inversion Of Static Potential Data", *Geophysics*, v. 41, n. 6 (12), pp. 1365–1369. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1440686. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1440686>>.

- DA SILVA, S. L. E. F., DA COSTA, C. A., CARVALHO, P. T. C., et al., 2020, “Robust full-waveform inversion using q-statistics”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 548, pp. 124473. ISSN: 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124473>.
- DAMPNEY, C. N. G., 1969, “The equivalent source technique”, *Geophysics*, v. 34, n. 1 (fev.), pp. 39–53. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1439996. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1439996>>.
- DUTRA, A. C., MARANGONI, Y. R., JUNQUEIRA-BROD, T. C., 2012, “Investigation of the Goiás Alkaline Province, Central Brazil: Application of gravity and magnetic methods”, *Journal of South American Earth Sciences*, v. 33, n. 1, pp. 43 – 55. doi: 10.1016/.jsames.2011.06.004.
- DUTRA, A. C., MARANGONI, Y. R., TRINDADE, R. I. F., 2014, “Aeromagnetic and physical-chemical properties of some complexes from Goiás Alkaline Province”, *Brazilian Journal of Geology*, v. 44, n. 3, pp. 361–373. doi: 10.5327/Z2317-4889201400030003.
- DUTRA, A. C., 2011. “Inversão tridimensional de dados gravimétricos e magnéticos da Província Alcalina de Goiás: investigando o controle tectônico”. Disponível em: <<https://www.iag.usp.br/pos/geofisica/portugues/teses>>.
- EGBERT, G. D., BOOKER, J. R., 1986, “Robust estimation of geomagnetic transfer functions”, *Geophysical Journal International*, v. 87, n. 1, pp. 173–194. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1986.tb04552.x.
- EKBLOM, H., 1973, “Calculation of linear best  $L_p$ -approximations”, *BIT*, v. 13, pp. 292–300. doi: 10.1007/BF01951940.
- EMILIA, D. A., 1973, “Equivalent sources used as an analytic base for processing total magnetic field profiles”, *Geophysics*, v. 38, n. 2 (abr.), pp. 339–348. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1440344. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1440344>>.
- FARQUHARSON, C. G., OLDENBURG, D. W., 1998, “Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure”, *Geophysical Journal International*, v. 134, n. 1 (07), pp. 213–227. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1046/j.1365-246x.1998.00555.x.

- GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V., 2013, *Matrix Computations (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences)*. Johns Hopkins University Press. ISBN: 978-1-4214-0794-4.
- GOMES, C. B., COMIN-CHIARAMONTI, P., AZZONE, R. G., et al., 2018, “Cretaceous carbonatites of the southeastern brazilian platform: a review”, *Brazilian Journal of Geology*, v. 48 (06), pp. 317 – 345. ISSN: 2317-4889. doi: 10.1590/2317-4889201820170123.
- GUITTON, A., SYMES, W. W., 2003, “Robust inversion of seismic data using the Huber norm”, *Geophysics*, v. 68, n. 4, pp. 1310–1319. doi: 10.1190/1.1598124.
- HANSEN, R. O., MIYAZAKI, Y., 1984, “Continuation of potential fields between arbitrary surfaces”, *GEOPHYSICS*, v. 49, n. 6, pp. 787–795. doi: 10.1190/1.1441707.
- HIDALGO-GATO, M. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, “Fast 3D magnetic inversion of a surface relief in the space domain”, *Geophysics*, v. 84, n. 5, pp. J57–J67. doi: 10.1190/geo2018-0712.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2018-0712.1>>.
- HIDALGO-GATO, M. C., BARBOSA, V. C. F., JR, V. C. O., 2020, “Magnetic amplitude inversion for depth-to-basement and apparent magnetization-intensity estimates”, *GEOPHYSICS*, v. 2020, n. ja, pp. 1–49. doi: 10.1190/geo2019-0726.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2019-0726.1>>.
- HORBACH, R., MARIMON, R. G., 1980, “Esboço da evolução tectônica e seu significado na gênese dos depósitos de fluorita no sudeste catarinense”. In: *Anais do XXXI congresso*, v. 3, pp. 1540–1551, Camboriú, SC, Brazil, Sociedade Brasileira de Geologia. Disponível em: <<http://www.sbgc.org.br/home/pages/44>>.
- HORN, R. A., JOHNSON, C. R., 1991, *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press. ISBN: 0-521-30587-X.
- HUBER, P. J., 1964, “Robust Estimation of a Location Parameter”, *Annals of Mathematical Statistics*, v. 35, n. 1, pp. 73–101. doi: 10.1214/aoms/1177703732.
- HULOT, G., SABAКА, T., OLSEN, N., et al., 2015, “5.02 - The Present and Future Geomagnetic Field”. In: Schubert, G. (Ed.), *Treatise on Geophysics*,

- second edition ed., Elsevier, pp. 33–78. ISBN: 978-0-444-53803-1. doi: 10.1016/B978-0-444-53802-4.00096-8.
- JI, J., 2012, “Robust inversion using biweight norm and its application to seismic inversion”, *Exploration Geophysics*, v. 43, n. 2, pp. 70–76. doi: 10.1071/EG12014.
- JUNQUEIRA-BROD, T. C., ROIG, H. L., CASPAR, J. C., et al., 2002, “A Província Alcalina de Goiás e a extensão do seu vulcanismo kamafugítico”, *Revista Brasileira de Geociências*, v. 32, n. 4, pp. 559–566. ISSN: 0375-7536. doi: 10.25249/0375-7536.2002324559566.
- JUNQUEIRA-BROD, T. C., GASPAR, J. C., BROD, J. A., et al., 2005, “Kamafugitic diatremes: their textures and field relationships with examples from the Goiás alkaline province, Brazil”, *Journal of South American Earth Sciences*, v. 18, n. 3–4, pp. 337–353. doi: 10.1016/j.jsames.2004.11.002.
- LANGEL, R. A., HINZE, W. J., 1998, *The Magnetic Field of the Earth's Lithosphere: The Satellite Perspective*. Cambridge University Press. ISBN: 0521473330.
- LARSEN, J. C., MACKIE, R. L., MANZELLA, A., et al., 1996, “Robust smooth magnetotelluric transfer functions”, *Geophysical Journal International*, v. 124, n. 3, pp. 801–819. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1996.tb05639.x.
- LEÃO, J. W. D., SILVA, J. B. C., 1989, “Discrete linear transformations of potential field data”, *GEOPHYSICS*, v. 54, n. 4, pp. 497–507. doi: 10.1190/1.1442676.
- LI, S.-L., LI, Y., 2014, “Inversion of magnetic anomaly on rugged observation surface in the presence of strong remanent magnetization”, *GEOPHYSICS*, v. 79, n. 2 (mar.), pp. J11–J19. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/geo2013-0126.1. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/10.1190/geo2013-0126.1>>.
- LI, W., LU, W., QIAN, J., et al., 2017, “A multiple level-set method for 3D inversion of magnetic data”, *Geophysics*, v. 82, n. 5, pp. J61–J81. doi: 10.1190/geo2016-0530.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2016-0530.1>>.
- LI, Y., OLDENBURG, D. W., 1996, “3-D inversion of magnetic data”, *Geophysics*, v. 61, n. 2, pp. 394–408. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1443968>>.

- MACLENNAN, K., LI, Y., 2013, “Denoising multicomponent CSEM data with equivalent source processing techniques”, *Geophysics*, v. 78, n. 3, pp. E125–E135. doi: 10.1190/geo2012-0226.1.
- MARANGONI, Y. R., MANTOVANI, M. S., 2013, “Geophysical signatures of the alkaline intrusions bordering the Paraná Basin”, *Journal of South American Earth Sciences*, v. 41, pp. 83–98. doi: 10.1016/j.jsames.2012.08.004.
- MATSUNO, T., CHAVE, A. D., JONES, A. G., et al., 2014, “Robust magnetotelluric inversion”, *Geophysical Journal International*, v. 196, n. 3, pp. 1365–1374. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggt484.
- MEDEIROS, W. E., SILVA, J. B., 1995, “Simultaneous estimation of total magnetization direction and 3-D spatial orientation”, *GEOPHYSICS*, v. 60, n. 5, pp. 1365–1377. doi: 10.1190/1.1443872.
- MELCHER, G. C., COUTINHO, J. M. V., 1966, “Rochas alcalinas e carbonatito de Anitápolis, Estado de Santa Catarina”, *Boletim da Sociedade Brasileira de Geologia*, v. 15, n. 1, pp. 59–93. Disponível em: <<https://pgegeo.igc.usp.br/index.php/BSBG/article/view/12743>>.
- MENDONÇA, C. A., 1992, *Interpolação de dados de campo potencial através da camada equivalente*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém do Pará, Brazil.
- MENDONÇA, C. A., SILVA, J. B. C., 1994, “The equivalent data concept applied to the interpolation of potential field data”, *GEOPHYSICS*, v. 59, n. 5, pp. 722–732. doi: 10.1190/1.1443630.
- MENDONÇA, C. A., SILVA, J. B. C., 1995, “Interpolation of potential-field data by equivalent layer and minimum curvature: A comparative analysis”, *GEOPHYSICS*, v. 60, n. 2, pp. 399–407. doi: 10.1190/1.1443776.
- MENDONÇA, C. A., 2004, “Automatic determination of the magnetization–density ratio and magnetization inclination from the joint interpretation of 2D gravity and magnetic anomalies”, *GEOPHYSICS*, v. 69, n. 4, pp. 938–948. doi: 10.1190/1.1778237.
- MENDONÇA, C. A., 2020, “Subspace method for solving large-scale equivalent layer and density mapping problems”, *GEOPHYSICS*, v. 85, n. 3, pp. G57–G68. doi: 10.1190/geo2019-0302.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2019-0302.1>>.

- NABIGHIAN, M. N., GRAUCH, V. J. S., HANSEN, R. O., et al., 2005, “The historical development of the magnetic method in exploration”, *GEOPHYSICS*, v. 70, n. 6, pp. 33ND–61ND. doi: 10.1190/1.2133784.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., UIEDA, L., 2013, “Polynomial equivalent layer”, *GEOPHYSICS*, v. 78, n. 1, pp. G1–G13. doi: 10.1190/geo2012-0196.1.
- OLIVEIRA JR., V. C., SALES, D. P., BARBOSA, V. C. F., et al., 2015, “Estimation of the total magnetization direction of approximately spherical bodies”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 215–232. doi: 10.5194/npg-22-215-2015.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, “3-D radial gravity gradient inversion”, *Geophysical Journal International*, v. 195, n. 2, pp. 883–902. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggt307.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., 2011, “Source geometry estimation using the mass excess criterion to constrain 3-D radial inversion of gravity data”, *Geophysical Journal International*, v. 187, n. 2, pp. 754–772. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05172.x.
- PIGNATELLI, A., NICOLOSI, I., CHIAPPINI, M., 2006, “An alternative 3D inversion method for magnetic anomalies with depth resolution”, *Annals of geophysics = Annali di geofisica*, (08). doi: 10.4401/ag-3114.
- PILKINGTON, M., 1997, “3-D magnetic imaging using conjugate gradients”, *Geophysics*, v. 62, n. 4 (jul.), pp. 1132–1142. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1444214. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1444214>>.
- PILKINGTON, M., 2009, “3D magnetic data-space inversion with sparseness constraints”, *Geophysics*, v. 74, n. 1 (jan.), pp. L7–L15. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.3026538. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/10.1190/1.3026538>>.
- PLOUFF, D., 1976, “Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections”, *Geophysics*, v. 41, n. 4, pp. 727–741. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1440645.
- PORTNIAGUINE, O., ZHDANOV, M. S., 2002, “3-D magnetic inversion with data compression and image focusing”, *Geophysics*, v. 67, n. 5 (set.), pp. 1532–1541. ISSN: 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.1512749. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/10.1190/1.1512749>>.

- PORNIAGUINE, O., ZHDANOV, M. S., 1999, “Focusing geophysical inversion images”, *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 874–887. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1444596>>.
- REIS, A. L. A., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, “Equivalent layer technique for estimating magnetization direction”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2019*, pp. 1769–1773. doi: 10.1190/segam2019-3216745.1.
- REIS, A. L. A., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2020, “Generalized positivity constraint on magnetic equivalent layers”, *Geophysics*, v. 85, n. 6, pp. 1–45. doi: 10.1190/geo2019-0706.1.
- RICCOMINI, C., VELÁZQUEZ, V. F., GOMES, C. B., 2005, “Tectonic controls of the Mesozoic and Cenozoic alkaline magmatism in the central-southeastern Brazilian Platform”. In: Comin-Chiaromonti, P., Gomes, C. B. (Eds.), *Mesozoic to Cenozoic Alkaline Magmatism in the Brazilian Platform*, Edusp/Fapesp, cap. 2, pp. 31–55, São Paulo.
- SCALES, J. A., GERSZTENKORN, A., 1988, “Robust methods in inverse theory”, *Inverse Problems*, v. 4, n. 4 (oct), pp. 1071–1091. doi: 10.1088/0266-5611/4/4/010.
- SCHEIBE, L., FURTADO, S., COMIN-CHIARAMONTI, P., et al., 2005, “Cretaceous alkaline magmatism from Santa Catarina state, southern Brazil”. In: Comin-Chiaromonti, P., Gomes, C. (Eds.), *Mesozoic to Cenozoic Alkaline Magmatism in the Brazilian Platform*, Edusp/Fapesp, cap. 16, pp. 523–571, São Paulo.
- SEBER, G. A. F., WILD, C. J., 2003, *Nonlinear regression*. John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-47135-6.
- SHAMSIPOUR, P., CHOUTEAU, M., MARCOTTE, D., 2011, “3D stochastic inversion of magnetic data”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 73, n. 4 (abr.), pp. 336–347. ISSN: 09269851. doi: 10.1016/j.jappgeo.2011.02.005. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0926985111000425>>.
- SILVA, J. B. C., 1986, “Reduction to the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies”, *GEOPHYSICS*, v. 51, n. 2, pp. 369–382. doi: 10.1190/1.1442096.

- SILVA, J. B., CUTRIM, A. O., 1989, “A robust maximum likelihood method for gravity and magnetic interpretation”, *Geoexploration*, v. 26, n. 1, pp. 1 – 31. ISSN: 0016-7142. doi: 10.1016/0016-7142(89)90017-3.
- SILVA, J. B., HOHMANN, G. W., 1983, “Nonlinear magnetic inversion using a random search method”, *Geophysics*, v. 48, n. 12, pp. 1645–1658. doi: 10.1190/1.1441445.
- SILVA, J. B. C., MEDEIROS, W. E., BARBOSA, V. C. F., 2001, “Potential-field inversion: Choosing the appropriate technique to solve a geologic problem”, *GEOPHYSICS*, v. 66, n. 2, pp. 511–520. doi: 10.1190/1.1444941. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1444941>>.
- SILVA DIAS, F. J., BARBOSA, V. C., SILVA, J. B., 2007, “2D gravity inversion of a complex interface in the presence of interfering sources”, *Geophysics*, v. 72, n. 2, pp. I13–I22. doi: 10.1190/1.2424545.
- SIQUEIRA, F., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2017, “Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint”, *GEOPHYSICS*, v. 82, n. 4, pp. G57–G69. doi: 10.1190/GEO2016-0332.1.
- SUTARNO, D., VOZOFF, K., 1991, “Phase-smoothed robust M-estimation of magnetotelluric impedance functions”, *Geophysics*, v. 56, n. 12, pp. 1999–2007. doi: 10.1190/1.1443012.
- TAKAHASHI, D., JR., V. C. O., BARBOSA, V. C. F., 2020, “Convolutional equivalent layer for gravity data processing”, *GEOPHYSICS*, v. 0, n. ja, pp. 1–54. doi: 10.1190/geo2019-0826.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2019-0826.1>>.
- UIEDA, L., BARBOSA, V. C. F., 2012, “Robust 3D gravity gradient inversion by planting anomalous densities”, *Geophysics*, v. 77, n. 4, pp. G55–G66. doi: 10.1190/geo2011-0388.1.
- UIEDA, L., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, “Modeling the Earth with Fatiando a Terra”. In: van der Walt, S., Millman, J., Huff, K. (Eds.), *Proceedings of the 12th Python in Science Conference*, pp. 96–103. doi: 10.25080/Majora-8b375195-010.
- WANG, X., HANSEN, R. O., 1990, “Inversion for magnetic anomalies of arbitrary three-dimensional bodies”, *Geophysics*, v. 55, n. 10, pp. 1321–1326. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1442779>>.

- ZHANG, H., RAVAT, D., MARANGONI, Y. R., et al., 2018, “Improved total magnetization direction determination by correlation of the normalized source strength derivative and the reduced-to-pole fields”, *Geophysics*, v. 83, n. 6, pp. J75–J85. doi: 10.1190/geo2017-0178.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2017-0178.1>>.