

INVERSÃO RADIAL 3D DE DADOS MAGNÉTICOS

Leonardo Beserra Vital

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. Vanderlei Coelho
Oliveira Junior

Co-orientador(a): Dra. Valéria Cristina
Ferreira Barbosa

Rio de Janeiro
Novembro de 2020

Sumário

1 Metodologia	1
1.1 Problema direto	1
1.2 Problema inverso	3
1.2.1 Vínculos	4
1.3 Algoritmo de inversão	10
1.4 Considerações práticas	13
2 Aplicação a dados sintéticos	16
2.1 Resultados sem fontes interferentes	17
2.2 Resultados com uma fonte interferente pequena	21
2.3 Resultados com uma fonte interferente grande	22
Referências Bibliográficas	31

Listas de Figuras

1.1	Representação esquemática do modelo interpretativo. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética 3D localizada em subsuperfície (volume cinza escuro em b). (b) Modelo interpretativo formado por L prismas retos, verticalmente justapostos e com seção horizontal descrita por um polígono. A profundidade do topo z_0 do modelo interpretativo coincide com a da fonte magnética (volume cinza escuro).	2
1.2	Representação esquemática do k -ésimo prisma P^k , $k = 1, \dots, L$, que compõe o modelo interpretativo (Figura 1b). Este prisma tem espessura dz , profundidade do topo z_1^k e seção horizontal descrita por um polígono com V vértices igualmente espaçados entre 0° e 360° . A posição dos vértices é descrita em termos das coordenadas polares r_j^k e θ_j , $j = 1, \dots, V$, em relação a uma origem O^k com coordenadas Cartesianas (x_0^k, y_0^k)	3
1.3	Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes dentro de um mesmo prisma φ_1 . A figura exibe o k -ésimo prisma P^k e as distâncias radiais adjacentes r_j^k e r_{j+1}^k relacionadas ao vínculo.	5
1.4	Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes pertencentes a prismas adjacentes φ_2 . A figura exibe o k -ésimo prisma P^k e seu adjacente P^{k+1} , assim como as distâncias radiais adjacentes r_j^k e r_j^{k+1} relacionadas ao vínculo.	6
1.5	Representação esquemática do vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes φ_3 . A figura exibe os prismas P^k e P^{k+1} e suas respectivas as coordenadas Cartesianas (x_0^k, y_0^k) , referidas à origem O^k , e (x_0^{k+1}, y_0^{k+1}) , referidas à origem O^{k+1}	7
1.6	Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais de um prisma φ_4 . A figura exibe os prisma P^k e suas respectivas distâncias radiais r_j^k referidas à origem O^k . O vínculo atua sobre as distâncias radiais do prismas, levando-as próximas a zero.	8

1.7 Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero φ_5 na espessura dz dos prismas. A figura exibe os prisma P^k e sua espessura. O vínculo atua sobre a espessura de todos os prismas levando-a próxima a zero, uma vez que dz é igual para todos os prismas.	9
1.8 Representação esquemática dos vínculos de desigualdade. A figura exibe os prisma P^k e os intervalos de máximo e mínimo de r_j^k , x_0 , y_0 e dz .	14
2.1 Modelo da fonte alvo. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte alvo (prismas azuis mostrados nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ (prismas vermelhos nas Figuras 2.3c e 2.4c). (b) Coordenadas verticais dos pontos de observação que simulam um levantamento aéreo. (c) e (d) Visualizações em perspectiva do modelo da fonte alvo representado pelos prismas azuis.	17
2.2 Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 2.3c e 2.4c).	18
2.3 Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0 , assim como os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.	19

2.4 Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0 , assim como os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.	20
2.5 Modelo da fonte alvo com uma fonte interferente pequena. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e interferente (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e interferente, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte interferente. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte interferente (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e interferente (prisma amarelo).	23
2.6 Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte interferente pequena. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 2.7c e 2.8c).	24

2.9	Modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e interferente (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e interferente, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte interferente. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte interferente (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e interferente (prisma amarelo).	27
2.10	Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte interferente grande. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima das fontes alvo e interferente. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 2.11c e 2.12c).	28
2.11	Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . Os valores verdadeiros de m_0 e z_0) e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.	29

2.12 Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . Ambos valores verdadeiros de m_0 e z_0) e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo. . . . 30

Capítulo 1

Metodologia

1.1 Problema direto

Seja \mathbf{d}^o o vetor de dados observados, cujo i -ésimo elemento d_i^o , $i = 1, \dots, N$, é a anomalia de campo total observada no ponto (x_i, y_i, z_i) em um sistema de coordenadas Cartesiano com os eixos x , y e z apontando para Norte, para Leste e para baixo, respectivamente. Considere que as anomalias de campo total produzidas por pequenas fontes magnéticas interferentes distorcem localmente a anomalia causada por uma fonte alvo 3-D principal. Por simplicidade, podemos assumir que o campo geomagnético principal é constante na área de estudo, com declinação D_0 e inclinação I_0 . Este trabalho segue a mesma abordagem apresentada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011), OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), e VITAL *et al.* (2019) para definir o modelo interpretativo que aproxima a geometria da fonte alvo. Esse modelo é formado por um conjunto de L prismas retos verticalmente justapostos tendo a mesma espessura dz e o mesmo vetor de magnetização total com intensidade m_0 , declinação D e inclinação I (Figura 1.1).

A profundidade do topo do prisma mais raso é definida por z_0 . Cada prisma possui a seção horizontal definida por um polígono com V vértices igualmente espaçados de 0° a 360° . As posições horizontais dos vértices que formam o k -ésimo prisma são definidas por distâncias radiais (ou apenas raios) r_j^k , com respeito a uma origem (x_0^k, y_0^k) localizada dentro do prisma, $k = 1, \dots, L$, $j = 1, \dots, V$ (Figura 1.2). A anomalia de campo total predita pelo modelo interpretativo no ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$, é dada por:

$$d_i(\mathbf{p}) \equiv \sum_{k=1}^L f_i^k(\mathbf{r}^k, x_0^k, y_0^k, dz, z_1^k, m_0, D, I, D_0, I_0), \quad (1.1)$$

onde \mathbf{r}^k é um vetor de dimensão $V \times 1$ que contém os raios r_j^k dos vértices pertencentes ao k -ésimo prisma, que possui origem no ponto (x_0^k, y_0^k) e profundidade do topo em

$z_1^k = z_0 + (k - 1)dz$. Na Equação 1.1, \mathbf{p} é um vetor de parâmetros de dimensão $M \times 1$, $M = L(V + 2) + 1$, que define a geometria do modelo interpretativo:

$$\mathbf{p} = \left[\mathbf{r}^{1\top} \ x_0^1 \ y_0^1 \ \dots \ \mathbf{r}^{L\top} \ x_0^L \ y_0^L \ dz \right]^\top, \quad (1.2)$$

onde o sobre-escrito "⊤" indica transposição. A anomalia de campo total $d_i(\mathbf{p})$ (Equação 1.1) é computada por meio das fórmulas de PLOUFF (1976) implementadas no pacote de Python Fatiando a Terra (UIEDA *et al.*, 2013).

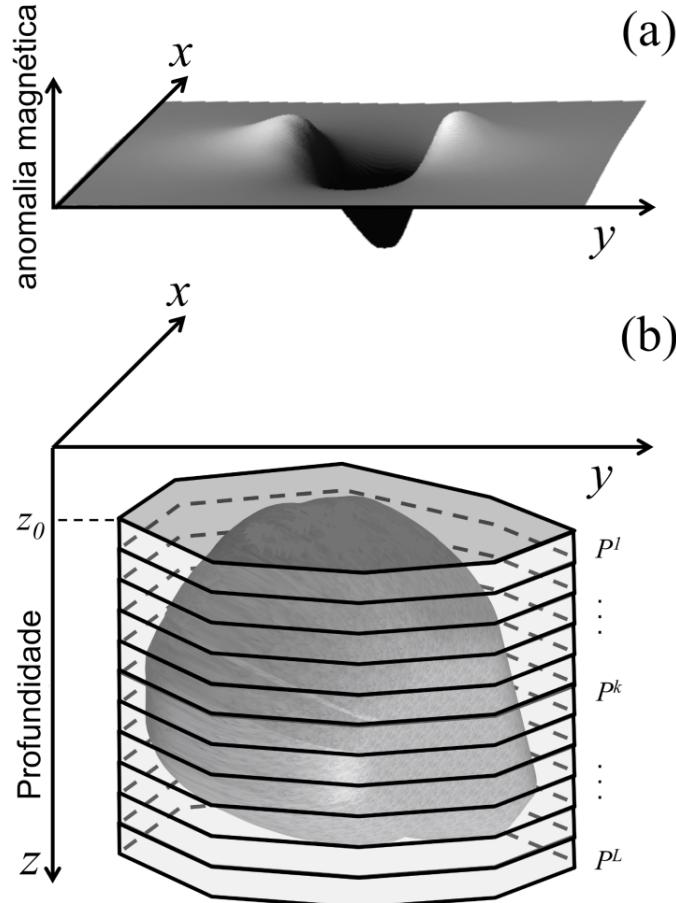


Figura 1.1: Representação esquemática do modelo interpretativo. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética 3D localizada em subsuperfície (volume cinza escuro em b). (b) Modelo interpretativo formado por L prismas retos, verticalmente justapostos e com seção horizontal descrita por um polígono. A profundidade do topo z_0 do modelo interpretativo coincide com a da fonte magnética (volume cinza escuro).

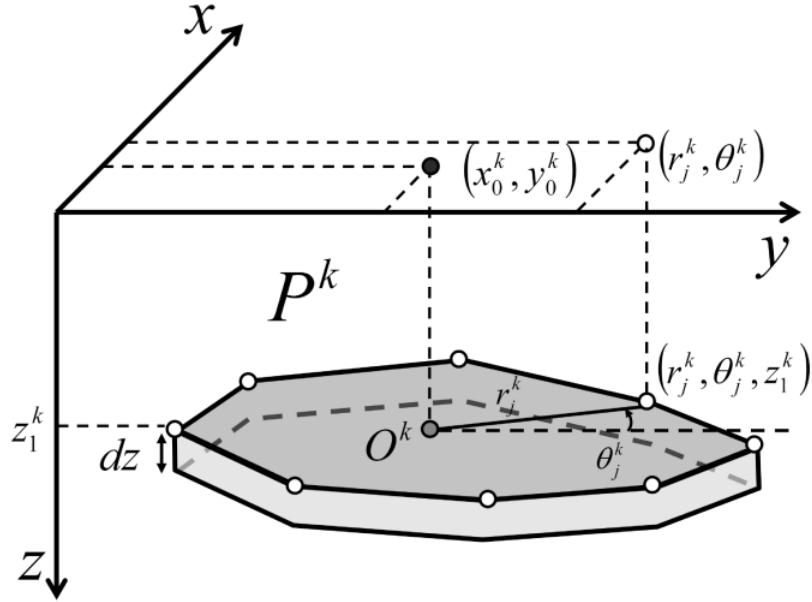


Figura 1.2: Representação esquemática do k -ésimo prisma P^k , $k = 1, \dots, L$, que compõe o modelo interpretativo (Figura 1b). Este prisma tem espessura dz , profundidade do topo z_1^k e seção horizontal descrita por um polígono com V vértices igualmente espaçados entre 0° e 360° . A posição dos vértices é descrita em termos das coordenadas polares r_j^k e θ_j , $j = 1, \dots, V$, em relação a uma origem O^k com coordenadas Cartesianas (x_0^k, y_0^k)

1.2 Problema inverso

Este trabalho propõe um método robusto de inversão magnética para estimar a posição e a forma de uma fonte magnética alvo 3D que podem ou não estar na presença de fontes interferentes. A formulação do problema consiste em um problema de otimização não-linear vinculado para estimar um vetor de parâmetros \mathbf{p} (Equação 1.2) minimizando a função objetivo

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \varphi_\ell(\mathbf{p}), \quad (1.3)$$

sujeito aos vínculos de desigualdade

$$p_l^{min} < p_l < p_l^{max}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (1.4)$$

onde p_l^{min} e p_l^{max} definem, respectivamente, os limites inferior e superior para o l -ésimo elemento p_l do vetor de parâmetros \mathbf{p} , $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ são as funções que representam os vínculos que impõem informação a priori sobre a forma da estimativa do corpo 3D, e $\phi(\mathbf{p})$ é a função desajuste dos dados ou *data-misfit* em inglês. Podemos definir $\phi(\mathbf{p})$ através de duas abordagens diferentes com o propósito de comparar os resultados.

Na primeira abordagem, $\phi(\mathbf{p})$ é definida de acordo com o trabalho de VITAL *et al.* (2019) como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_2^2 , \quad (1.5)$$

que é a norma-2 quadrática (e.g., ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre o vetor de dados observados \mathbf{d}^o , cujo i -ésimo elemento d_i^o representa a anomalia de campo total observada no ponto (x_i, y_i, z_i) , e o vetor de dados preditos $\mathbf{d}(\mathbf{p})$, cujo i -ésimo elemento $d_i(\mathbf{p})$ é definido pela Equação 1.1. Alternativamente, podemos definir a função *data-misfit* como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_1 , \quad (1.6)$$

que representa a norma-1 (e.g., ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre os vetores de dados observados \mathbf{d}^o e preditos $\mathbf{d}(\mathbf{p})$. É de amplo conhecimento que o vetor de parâmetros que minimiza a norma-2 quadrática (Equação 1.5) pode ser muito afetado negativamente pela presença de pontos espúrios ou *outliers* e também pelo efeito causado por fontes não-alvos (e.g., ASTER *et al.*, 2019; CLAERBOUT e MUIR, 1973; FARQUHARSON e OLDENBURG, 1998; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015; SCALES e GERSZTENKORN, 1988; SILVA e CUTRIM, 1989; SILVA e HOHMANN, 1983; UIEDA e BARBOSA, 2012). Através da estimativa do vetor de parâmetros obtida pela minimização da norma-1 (Equação 1.6), espera-se que a posição e a forma estimadas do corpo 3D durante a inversão ajustem a anomalia de campo total produzida pela fonte alvo e ignorem a causada pelas fontes interferentes.

Na Equação 1.3, α_ℓ , $\ell = 1, \dots, 5$, são escalares positivos que definem o peso relativo das funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$. Essas funções são definidas seguindo a mesma abordagem utilizada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011), OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), and VITAL *et al.* (2019).

1.2.1 Vínculos

As funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equação 1.3), $\ell = 1, \dots, 5$, utilizadas aqui para obter soluções estáveis e introduzir informação a priori sobre o corpo estimado, foram organizadas em dois grupos.

Vínculos de suavidade

Este grupo é formado pelas variações da regularização de Tikhonov de primeira ordem (ASTER *et al.*, 2019, p. 103) que impõe suavidade sobre os raios r_j^k e sobre as coordenadas Cartesianas x_0^k e y_0^k da origem O^k , $j = 1, \dots, V$, $k = 1, \dots, L$, que define a seção horizontal de cada prisma (Fig.1.1b). Elas foram propostas por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013) e possuem um

papel muito importante em introduzir informação a priori sobre a forma da fonte alvo.

O primeiro vínculo deste grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes que definem a seção horizontal de cada prisma*. Esse vínculo impõe que os raios adjacentes r_j^k e r_{j+1}^k dentro do mesmo prisma devem ter comprimento semelhantes. Isso força que o prisma estimado terá uma forma aproximadamente cilíndrica, que evita descontinuidades abruptas entre as estimativas das distâncias radiais dentro de um mesmo prisma. Sua representação esquemática é mostrada na Figura 1.3.

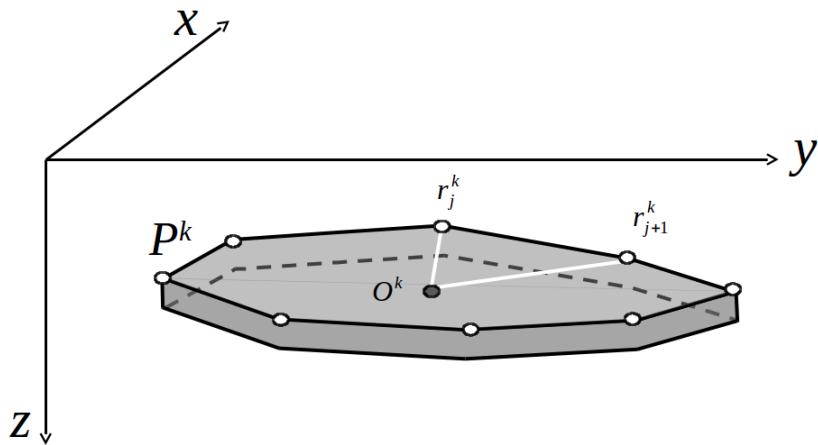


Figura 1.3: Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes dentro de um mesmo prisma φ_1 . A figura exibe o k-ésimo prisma P^k e as distâncias radiais adjacentes r_j^k e r_{j+1}^k relacionadas ao vínculo.

Matematicamente, o vínculo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^L \left[(r_V^k - r_1^k)^2 + \sum_{j=1}^{V-1} (r_j^k - r_{j+1}^k)^2 \right] \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1 \mathbf{p} ,\end{aligned}\quad (1.7)$$

onde

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_L \otimes \left[(\mathbf{I}_V - \mathbf{D}_V^\top) \quad \mathbf{0}_{V \times 2} \right]_{(L-1)V \times M} , \quad (1.8)$$

\mathbf{I}_L é a matriz identidade de ordem L , “ \otimes ” indica o produto de Kronecker (HORN e JOHNSON, 1991, p. 243), $\mathbf{0}_{V \times 2}$ é uma matriz de ordem $V \times 2$ com elementos nulos, \mathbf{I}_V é a matriz identidade de ordem V e \mathbf{D}_V^\top é a matriz de permutação superior de ordem V (GOLUB e LOAN, 2013, p. 20). O vetor gradiente e a matriz Hessiana

da função $\varphi_1(\mathbf{p})$ (Equação 1.7) são dados por:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \quad .\end{aligned}\tag{1.9}$$

O segundo vínculo do grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes de prismas adjacentes*, o qual impõe que os raios adjacentes r_j^k e r_j^{k+1} entre prismas verticalmente adjacentes tenham comprimentos semelhantes. Esse vínculo força que a forma de prismas verticalmente adjacentes seja similar. Uma representação esquemática do vínculo é apresentada na Figura 1.4.

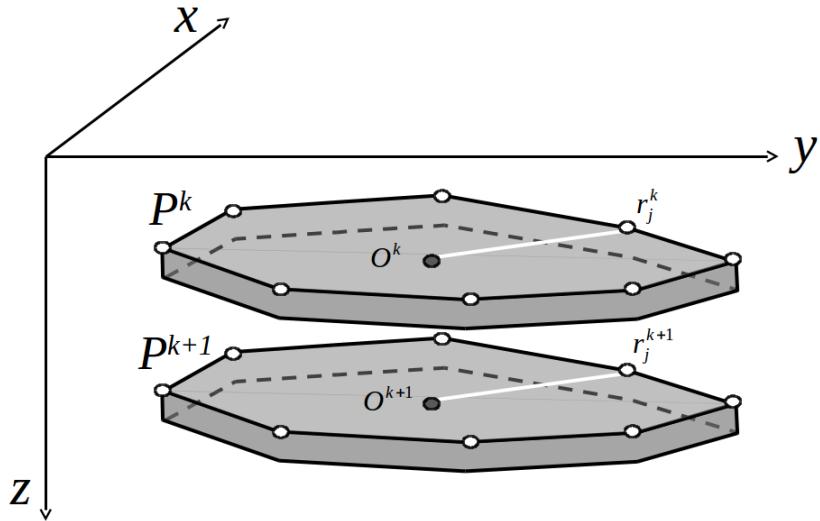


Figura 1.4: Representação esquemática do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes pertencentes a prismas adjacentes φ_2 . A figura exibe o k-ésimo prisma P^k e seu adjacente P^{k+1} , assim como as distâncias radiais adjacentes r_j^k e r_j^{k+1} relacionadas ao vínculo.

De forma matemática o vínculo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_2(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1} \left[\sum_{j=1}^V (r_j^{k+1} - r_j^k)^2 \right] \quad , \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 \mathbf{p}\end{aligned}\tag{1.10}$$

onde

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2 & \mathbf{0}_{(L-1)V \times 1} \end{bmatrix}_{(L-1)V \times M} \quad ,\tag{1.11}$$

$$\mathbf{S}_2 = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-1} & \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} & \mathbf{I}_{L-1} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V \times 2} \end{bmatrix} \quad ,\tag{1.12}$$

$\mathbf{0}_{(L-1)V \times 1}$ é um vetor de ordem $(L-1)V \times 1$ com elementos nulos, $\mathbf{0}_{(L-1) \times 1}$ é um

vetor de ordem $(L - 1) \times 1$ com elementos nulos e \mathbf{I}_{L-1} é a matriz identidade de ordem $L - 1$. O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_2(\mathbf{p})$ (Equação 1.10) são dados por:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_2 \mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_2 \quad .\end{aligned}\tag{1.13}$$

O último vínculo deste grupo é a *suavidade sobre a posição horizontal das origens arbitrárias de prismas verticalmente adjacentes*. Esse vínculo impõe que as coordenadas Cartesianas horizontais estimadas (x_0^k, y_0^k) e (x_0^{k+1}, y_0^{k+1}) das origens O^k e O^{k+1} de prismas verticalmente adjacentes devem ser próximas entre si. Isso controla o mergulho do corpo estimado através da regularização do deslocamento horizontal de prismas verticalmente adjacentes (Figura 1.5).

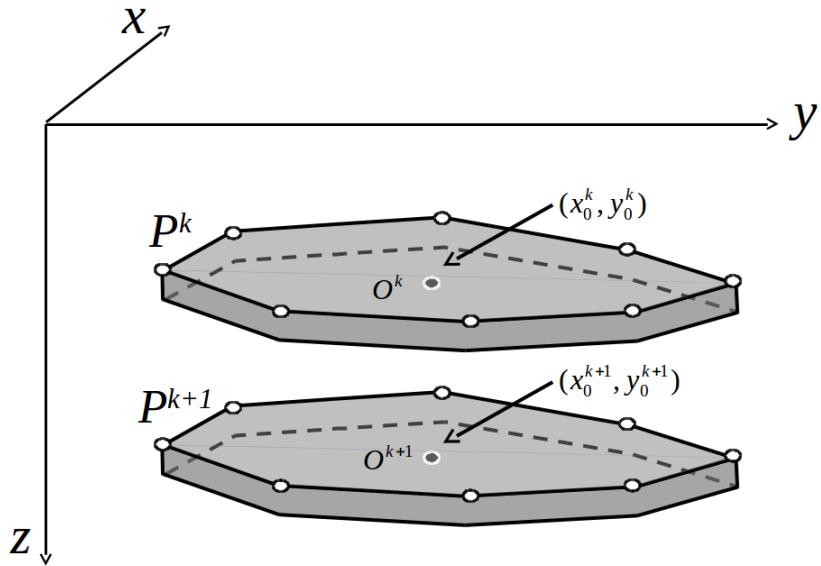


Figura 1.5: Representação esquemática do vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes φ_3 . A figura exibe os prismas P^k e P^{k+1} e suas respectivas as coordenadas Cartesianas (x_0^k, y_0^k) , referidas à origem O^k , e (x_0^{k+1}, y_0^{k+1}) , referidas à origem O^{k+1} .

Algebraicamente o vínculo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_3(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1} \left[(x_0^{k+1} - x_0^k)^2 + (y_0^{k+1} - y_0^k)^2 \right] \quad , \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3 \mathbf{p}\end{aligned}\tag{1.14}$$

onde

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_3 & \mathbf{0}_{(L-1)2 \times 1} \end{bmatrix}_{(L-1)2 \times M} \quad ,\tag{1.15}$$

$$\mathbf{S}_3 = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-1} & \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} & \mathbf{I}_{L-1} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times V} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} , \quad (1.16)$$

$\mathbf{0}_{(L-1)2 \times 1}$ é um vetor de ordem $(L-1)2 \times 1$ com elementos nulos, $\mathbf{0}_{2 \times V}$ é uma matriz de ordem $2 \times V$ com elementos nulos e \mathbf{I}_2 é uma matriz identidade de ordem 2. O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_3(\mathbf{p})$ (Equação 1.14) são dados por:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3 \mathbf{p} , \\ \mathbf{H}_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3 . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Vínculos de norma Euclidiana mínima

Dois vínculos utilizam a regularização Tikhonov de ordem zero com o propósito de estabilizar de maneira puramente matemática o problema inverso sem necessariamente introduzir informação a priori com significado físico sobre a fonte.

A *norma Euclidiana mínima dos raios* impõe que todos os raios estimados dentro de um prisma devem ser próximos de zero (Figura 1.6).

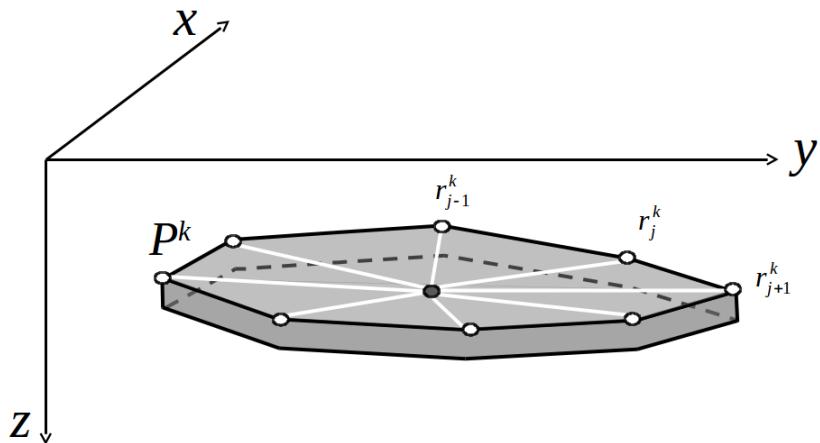


Figura 1.6: Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais de um prisma φ_4 . A figura exibe os prisma P^k e suas respectivas distâncias radiais r_j^k referidas à origem O^k . O vínculo atua sobre as distâncias radiais do prismas, levando-as próximas a zero.

Esse vínculo foi proposto por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013) e pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \varphi_4(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^V (r_j^k)^2 , \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 \mathbf{p} \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_4 & \mathbf{0}_{(M-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} & 0 \end{bmatrix}_{M \times M}, \quad (1.19)$$

e

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times V} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}_{(V+2) \times (V+2)}. \quad (1.20)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_4(\mathbf{p})$ (Equação 1.18) são:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 \mathbf{p} , \\ \mathbf{H}_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Finalmente, o último vínculo é a *norma Euclidiana mínima da espessura*, que impõe que a espessura comum dz de todos os prismas seja próxima de zero. Esse vínculo força que a profundidade da base do modelo seja o mais rasa possível (Figura 1.7)

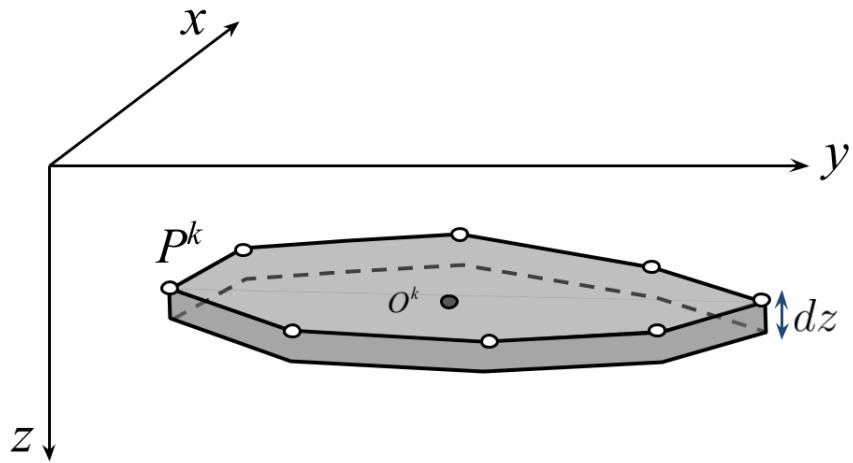


Figura 1.7: Representação esquemática do vínculo de Tikhonov de ordem zero φ_5 na espessura dz dos prismas. A figura exibe os prismas P^k e sua espessura. O vínculo atua sobre a espessura de todos os prismas levando-a próxima a zero, uma vez que dz é igual para todos os prismas.

Esse vínculo pode ser escrito matematicamente como

$$\begin{aligned} \varphi_5(\mathbf{p}) &= dz^2 \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \mathbf{p} \end{aligned} \quad , \quad (1.22)$$

onde

$$\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(M-1) \times (M-1)} & \mathbf{0}_{(M-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} & 1 \end{bmatrix}_{M \times M}. \quad (1.23)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função $\varphi_5(\mathbf{p})$ (Equação 1.22) são:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \mathbf{p}, \\ \mathbf{H}_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5. \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.3 Algoritmo de inversão

Dada um profundidade do topo do prisma mais raso z_0 , a intensidade de magnetização total m_0 de todos os prismas, uma aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros \mathbf{p} (Equação 1.2), e os limites p_l^{min} e p_l^{max} (Equação 1.4), o método de Levenberg-Marquardt (e.g., SEBER e WILD, 2003, p. 624) é utilizado para estimar o vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}^*$ que minimiza a função objetivo $\Gamma(\mathbf{p})$ (Equação 1.3), sujeita aos vínculos de desigualdade definidos pela Equação 1.4. Para incorporar esses vínculos de desigualdade, foi empregada a mesma abordagem apresentada por BARBOSA *et al.* (1999), OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013). Abaixo, segue o algoritmo de inversão aqui proposto:

entrada \mathbf{d}^o , D_0 , I_0 , z_0 , m_0 , D , I , p_l^{min} e p_l^{max} (Equação 1.4), $k = 0$, $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$, e $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$,
onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem M .

- (1) Computa a matriz $N \times M$ $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$, cujo elemento ij é a derivada do dado $d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ (Equação 1.1) com respeito ao j -ésimo elemento p_j do vetor de parâmetros \mathbf{p} (Equação 1.2).
- (2) Computa o vetor gradiente

$$\nabla \phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = -\frac{2}{N} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top \mathbf{W}_{(k)} [\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})]$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \frac{2}{N} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top \mathbf{W}_{(k)} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

da função *data-misfit* $\phi(\mathbf{p})$ (Equação 1.5), quando $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$, ou $\phi(\mathbf{p})$ (Equação 1.6), quando $\mathbf{W}_{(k)} \neq \mathbf{I}$. Na próxima seção, será discutido como usar a matriz Hessiana $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$ (computada na iteração $k = 0$) para definir os pesos α_ℓ (Equação 1.3) das funções de vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22).

(3) Computa o vetor gradiente

$$\nabla \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \nabla \phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \nabla \varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \mathbf{H}_\ell$$

da função objetivo $\Gamma(\mathbf{p})$ (Equação 1.3), onde $\nabla \varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ e \mathbf{H}_ℓ são, respectivamente, o vetor gradiente e a matriz Hessiana (Equações 1.9, 1.13, 1.17, 1.21, 1.24) das funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22).

(4) Computa o l -ésimo elemento \hat{p}_l^\dagger de um vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$ como:

$$\hat{p}_l^\dagger = -\ln \left(\frac{p_l^{max} - \hat{p}_l}{\hat{p}_l - p_l^{min}} \right) ,$$

onde \hat{p}_l é o l -ésimo elemento de $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$.

(5) Computa uma matriz diagonal $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ com o elemento t_{ll} dado por

$$t_{ll}(\hat{p}_l) = \frac{(p_l^{max} - \hat{p}_l)(\hat{p}_l - p_l^{min})}{p_l^{max} - p_l^{min}} ,$$

onde p_l é o l -ésimo elemento do vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$.

(6) Computa uma matriz

$$\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) \mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) .$$

(7) Computa uma matriz diagonal $\mathbf{Q}_{(k)}$ com elemento q_{ll} dado por

$$q_{ll} = \frac{1}{\sqrt{h_{ll}^\dagger}} ,$$

onde h_{ll}^\dagger é o elemento ll da matriz $\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$.

(8) Computa uma correção $\Delta \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$ para o vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$ pela solução do sistema linear

$$\mathbf{Q}_{(k)}^{-1} [\mathbf{Q}_{(k)} \mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) \mathbf{Q}_{(k)} + \lambda_{(k)} \mathbf{I}_M] \mathbf{Q}_{(k)}^{-1} \Delta \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger = -\nabla \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) ,$$

onde $\lambda_{(k)}$ é um escalar positivo ajustado à cada iteração (e.g., SEBER e WILD, 2003, p. 624).

(9) Computa um novo vetor

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger + \Delta \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger .$$

(10) Computa o l -ésimo elemento \hat{p}_l do novo vetor $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$ como:

$$\hat{p}_l = p_l^{min} + \left(\frac{p_l^{max} - p_l^{min}}{1 + e^{-\hat{p}_l^\dagger}} \right) .$$

(11) Se o seguinte critério de convergência for satisfeito,

$$\left| \frac{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}) - \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})}{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})} \right| \leq \tau ,$$

onde τ é um número positivo pequeno, que varia de $\approx 10^{-3}$ a 10^{-4} , que controla a convergência, o vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$ é a solução. Senão, atualiza o vetor de parâmetros

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k)} \leftarrow \hat{\mathbf{p}}_{(k+1)} ,$$

atualiza o elemento ii da matriz $\mathbf{W}_{(k)}$

$$w_{ii} = \frac{1}{|d_i^o - d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})| + \varepsilon} ,$$

onde ε possui um valor positivo pequeno ($\approx 10^{-10}$) usado para prevenir uma divisão por zero, atualiza o contador da iteração k

$$k \leftarrow k + 1 ,$$

e retorna à etapa (1).

Neste algoritmo, os elementos da matriz $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ (etapa 1) são computados pelo uso das diferenças finitas centradas. É importante notar que na etapa 3 as matrizes Hessianas \mathbf{H}_ℓ (Equações 1.9, 1.13, 1.17, 1.21, 1.24) das funções dos vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22) não dependem do vetor de parâmetros. Por essa razão, eles são computados apenas uma vez antes da primeira iteração e armazenados para serem usados até a convergência ser alcançada (etapa 11).

Este algoritmo é executado para obter um corpo estimado para cada ponto (m_0, z_0) em uma malha de valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 definida pelo usuário. Todos os corpos estimados são obtidos através da utilização de uma aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros \mathbf{p} (Equação 1.2), dos mesmos valores para os pesos α_ℓ (Equação 1.3) e dos limites p_l^{min} e p_l^{max} (Eq. 1.4) para os parâmetros estimados. Os valores ótimos da profundidade

do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 são escolhidos como aqueles associados aos corpos estimados que produzem os menores valores da função objetivo $\Gamma(\mathbf{p})$ (Equação 1.3).

Note que, ao manter a matriz $\mathbf{W}_{(k)}$ (etapa 2 e 10) igual à identidade ao longo das iterações, o corpo estimado minimiza a norma-2 quadrática dos resíduos entre os dados observados e preditos (Equação 1.5). Nesse caso, os corpos estimados são convenientemente denominados *solução L2*. A atualização iterativa dos elementos da matriz $\mathbf{W}_{(k)}$ com os valores absolutos dos resíduos de acordo com a etapa 10 é feita através do método Mínimos Quadrados Reponderados Iterativamente ou *Iteratively Reweighted Least Squares* (ASTER *et al.*, 2019; SCALES e GERSZTENKORN, 1988, p. 46) para obter um corpo estimado que minimiza a norma-1 dos resíduos entre os dados observados e preditos (Equação 1.6). Nesse caso, o corpo estimado é convenientemente chamado de *solução L1*.

1.4 Considerações práticas

Nesta seção serão apresentados alguns aspectos práticos de como definir o conjunto de valores de profundidade do topo do prisma mais raso z_0 , a intensidade de magnetização total m_0 , a aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros \mathbf{p} (Equação 1.2), os pesos α_ℓ (Equação 1.3) das funções de vínculos $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22) e os limites p_l^{\min} e p_l^{\max} dos vínculos de desigualdade (Equação 1.4).

Inicialmente, se calcula a redução ao polo da anomalia de campo total observada. Essa é uma etapa dupla: ele permite a verificação dos valores usados para a direção de magnetização total (declinação D e inclinação I) e é utilizado para estimar as dimensões horizontais da fonte alvo. Se a fonte alvo possui uma direção de magnetização uniforme com valores de declinação e inclinação próximos daqueles escolhidos para D e I , a anomalia reduzida ao polo ou RTP (do inglês *reduction to the pole*) é predominantemente positiva sobre a fonte alvo e decai a zero perto de seus limites laterais. Através da anomalia RTP, é possível definir os limites p_l^{\min} e p_l^{\max} (Figura 1.8) dos vínculos de desigualdade (Equação 1.4) e uma aproximação inicial cilíndrica $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$, isto é, todos os prismas que formam $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ possuem os vértices definidos por uma mesma distância radial constante r_0 e a mesma origem (x_0, y_0) . Nesta etapa, os pesos são α_ℓ (Equação 1.3) estabelecidos iguais a zero e se define uma malha de valores para a profundidade do topo z_0 , intensidade de magnetização total m_0 e espessura dz que produz, sem grande rigor, um ajuste entre dados observados \mathbf{d}^o e dados preditos $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$.

Um segundo aspecto crucial desse algoritmo consiste em definir os valores dos pesos α_ℓ (Equação 1.3). Não existe uma regra analítica para defini-los e seus valores podem depender das particularidades da área de estudo e do conjunto de dados

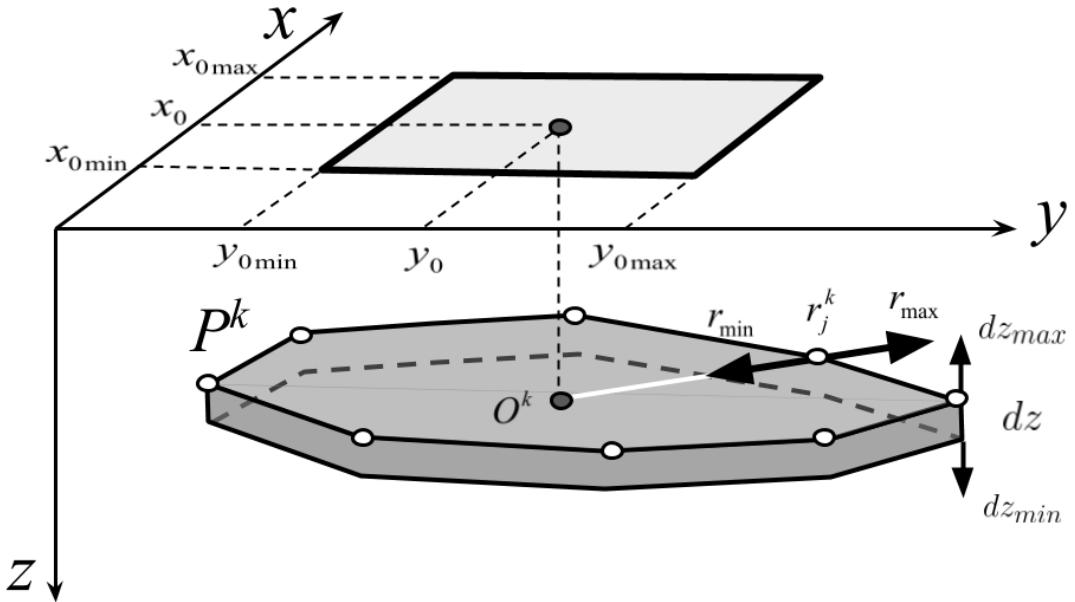


Figura 1.8: Representação esquemática dos vínculos de desigualdade. A figura exibe os prisma P^k e os intervalos de máximo e mínimo de r_j^k , x_0 , y_0 e dz .

observados. Para contornar esse problema, os pesos α_ℓ são definidos da seguinte maneira:

$$\alpha_\ell = \tilde{\alpha}_\ell \frac{E_\phi}{E_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, 5, \quad (1.25)$$

onde $\tilde{\alpha}_\ell$ é um escalar positivo e E_ϕ/E_ℓ é o fator de normalização. Nessa equação, E_ℓ representa o traço da matriz Hessiana \mathbf{H}_ℓ (Equações 1.9, 1.13, 1.17, 1.21, 1.24) da ℓ -ésima função de vínculo $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22). A constante E_ϕ é o traço da matriz Hessiana $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$ (etapa 2 do algoritmo) da função *data-misfit* $\phi(\mathbf{p})$ (Equação 1.6) computada na iteração $k = 0$, com a aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ para o vetor de parâmetros \mathbf{p} (Equação 1.2). Essa estratégia empírica permite definir indiretamente os pesos α_ℓ (Equação 1.3) pela utilização dos pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 1.25), os quais dependem menos das características particulares do problema. Baseado em experiência prática, os valores iniciais propostos aqui para os pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ se a função *data-misfit* é definida pela Equação 1.5 são: $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. Para o caso no qual a função *data-misfit* é definida pela Equação 1.6, a recomendação é: $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-3}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. Esses valores são comumente refinados de acordo com a informação a priori sobre a complexidade da fonte alvo. Por exemplo,

ao aumentar ou diminuir valor de $\tilde{\alpha}_1$, força-se que o corpo estimado tenha fatias horizontais mais ou menos suaves; ao aumentar ou diminuir o valor de $\tilde{\alpha}_3$, força-se que o corpo estimado seja mais ou menos vertical. Os pesos normalizados $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, e $\tilde{\alpha}_3$ são comumente usados para introduzir informação a priori sobre o formato da fonte alvo. O peso normalizado $\tilde{\alpha}_4$ é geralmente usado como um parâmetro de regularização puramente matemático para obter soluções estáveis. Finalmente, o peso normalizado $\tilde{\alpha}_5$ é usualmente escolhido com o propósito de obter um corpo estimado com a profundidade da base mais rasa o possível.

Capítulo 2

Aplicação a dados sintéticos

Foi simulado um corpo geológico complexo (prismas azuis nas Figuras 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.8, 2.9, 2.11, e 2.12) que representa a fonte alvo 3D com profundidade do topo em 130 m, profundidade da base em 6130 m, e um vetor de magnetização total constante com inclinação -50° , declinação 9° , e intensidade 12 A/m. Recuperar a geometria desse corpo simulado é particularmente uma tarefa complicada porque ele possui um mergulho NO-SE e suas fatias horizontais mostram uma forma que varia ao longo da profundidade, assim, é possível notar que o corpo não satisfaz perfeitamente os vínculos impostos nesse método. A anomalia de campo total (Figura 2.1a) produzida pela fonte alvo foi calculada em 1939 pontos localizados sobre uma superfície ondulada que simula um levantamento aéreo (Figura 2.1b). Esses dados sintéticos foram contaminados com um ruído Gaussiano pseudoaleatório de média nula e desvio padrão igual a 5 nT. O método foi aplicado para inverter esse dado contaminado com ruído e obter soluções L2 e L1 para três cenários: sem fontes interferentes, com uma relativamente pequena e com uma relativamente grande fonte interferente. Para cada cenário, foram geradas 36 soluções L2 e 36 soluções L1, todas elas foram obtidas com a mesma malha de varredura 6×6 de profundidades do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . A melhor solução L2 e L1 são definidos como aqueles que produzem o menor valor da função objetivo para cada caso.

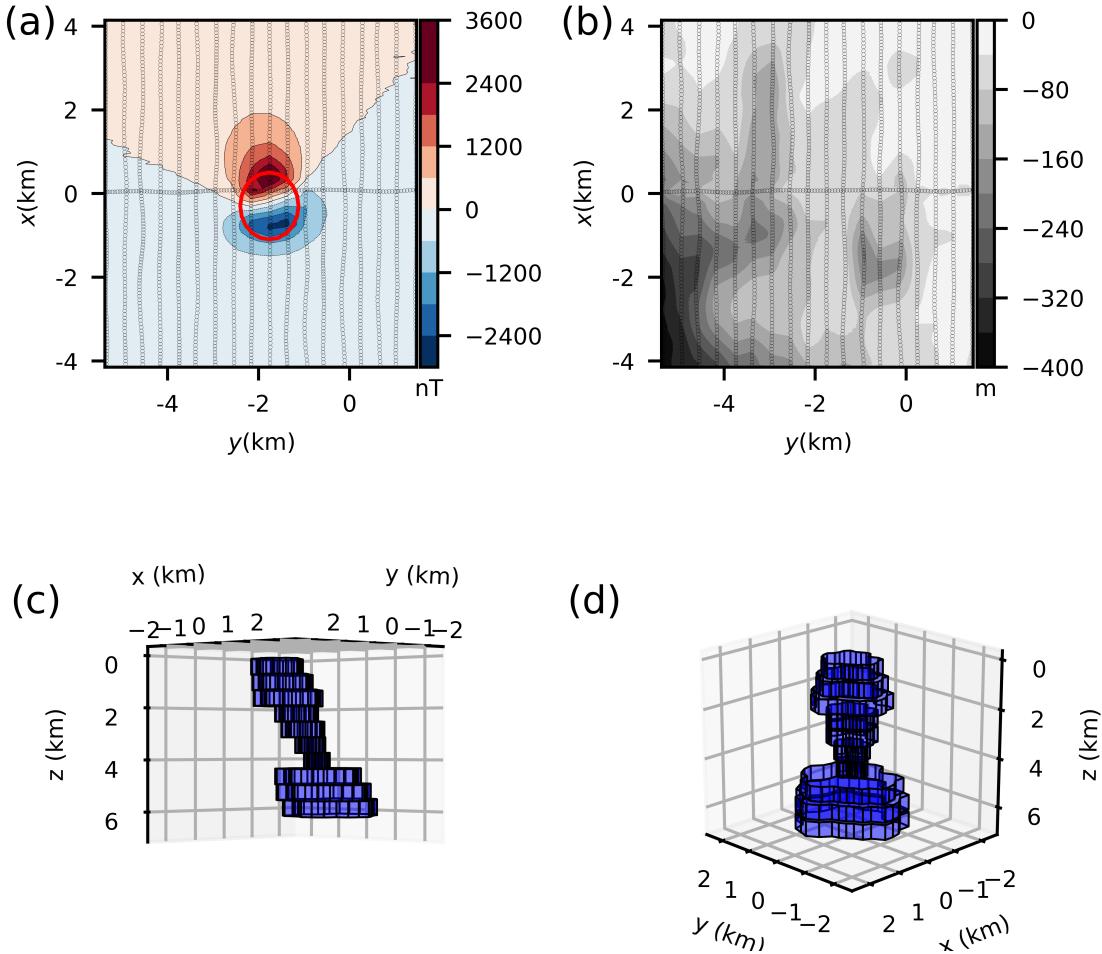


Figura 2.1: Modelo da fonte alvo. (a) Anomalia de campo total contaminada com ruído produzida pela fonte alvo (prismas azuis mostrados nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. O círculo vermelho representa a projeção horizontal da aproximação inicial $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ (prismas vermelhos nas Figuras 2.3c e 2.4c). (b) Coordenadas verticais dos pontos de observação que simulam um levantamento aéreo. (c) e (d) Visualizações em perspectiva do modelo da fonte alvo representado pelos prismas azuis.

2.1 Resultados sem fontes interferentes

A Figura 2.2 mostra a anomalia RTP obtida da anomalia de campo total contaminada com ruído (Figura 2.1a) e a projeção horizontal das aproximações iniciais $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ usadas nas sucessivas inversões (Figuras 2.3 e 2.4). A Figura 2.3a mostra que a melhor solução L2 foi obtida através dos valores verdadeiros de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . Essa solução L2 produz um ótimo ajuste dos dados (Figura 2.3b), possui uma profundidade da base em 6641.8 m e também recupera a geometria do corpo verdadeiro (Figura 2.3d). A Figura 2.4 mostra um resultado similarmente ótimo produzido pela melhor solução L1, que tem profundidade da base 6156.5 m. O aspecto mais interessante das soluções L2 e L1 obtidas

neste teste é que eles recuperam não só as feições principais da fonte mas também seu mergulho e a variação de sua forma ao longo da profundidade. Todas as soluções L2 e L1 produzidas neste teste foram obtidas usando o seguinte conjunto de pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 1.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. É importante notar que, devido à ausência de fontes interferentes neste teste, não há diferenças práticas entre as soluções L2 e L1 obtidas pelo método aqui proposto.

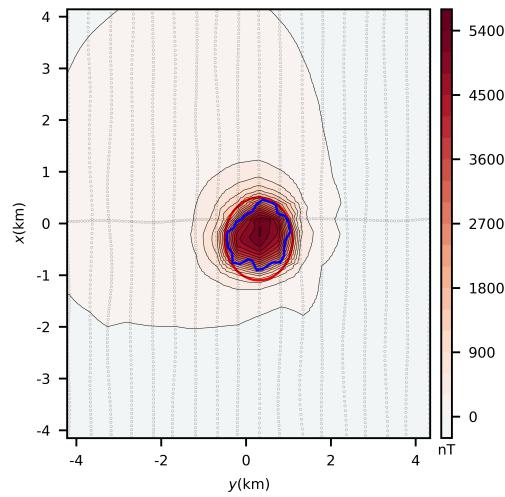


Figura 2.2: Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 2.3c e 2.4c).

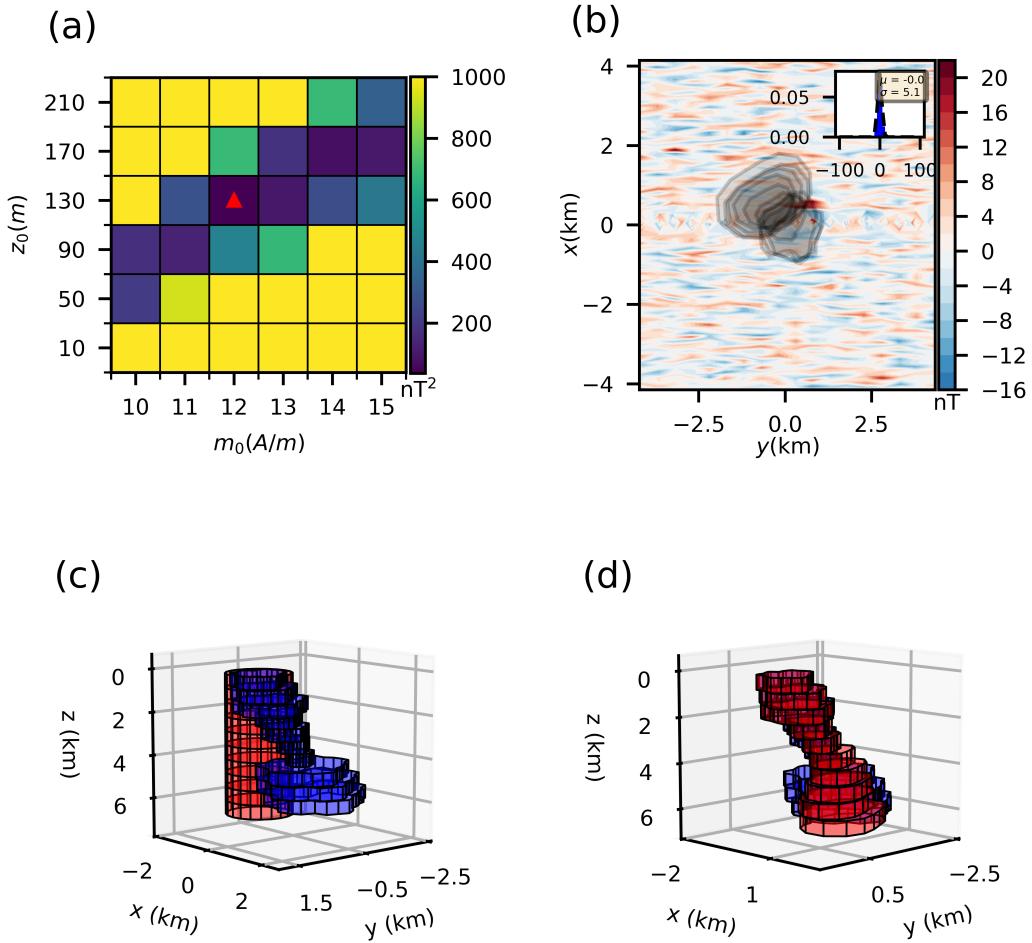


Figura 2.3: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0 , assim como os valores que definem a melhor solução L2. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

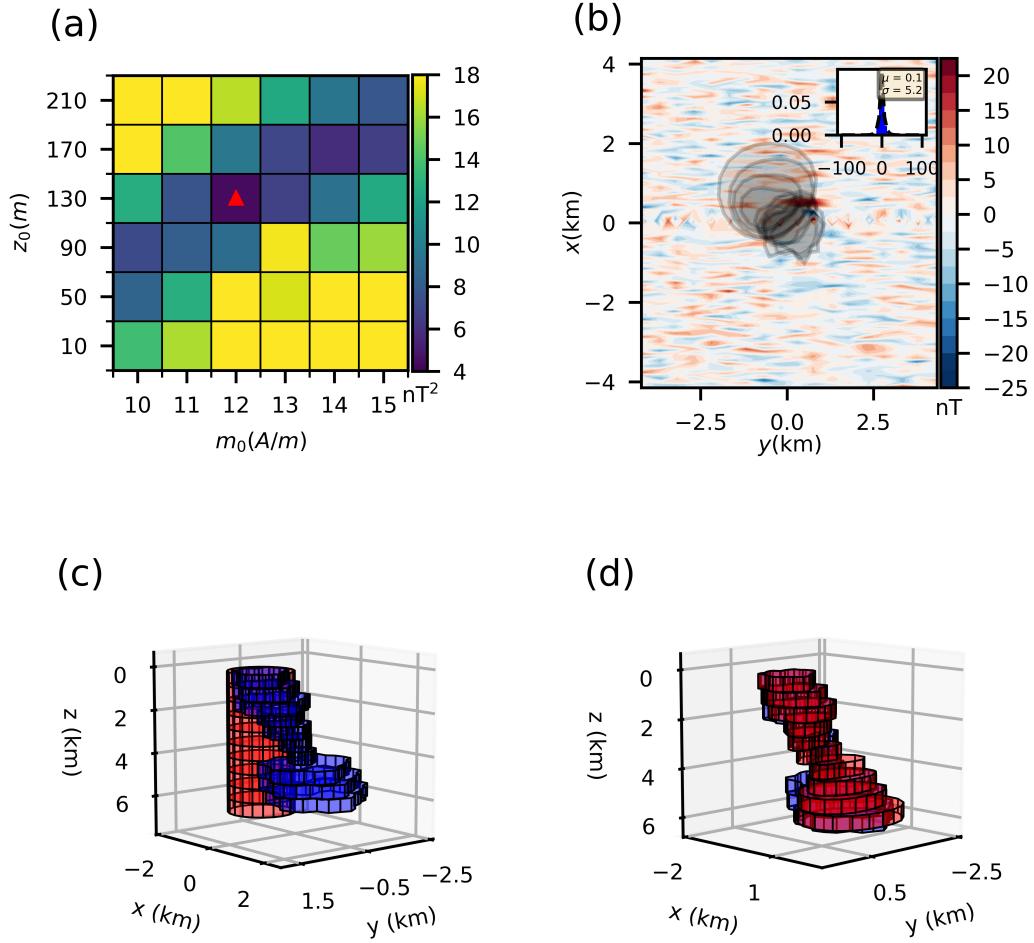


Figura 2.4: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo sem interferência. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . O triângulo vermelho representa os valores verdadeiros para m_0 e z_0 , assim como os valores que definem a melhor solução L1. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Laplaciana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

2.2 Resultados com uma fonte interferente pequena

O mapa da Figura 2.5a representa a soma entre as anomalias de campo total produzidas pela fonte interferente pequena (Figura 2.5b), cuja forma é exibida nas Figuras 2.5c e 2.5d, e aquela produzida pela fonte alvo simulada (Figura 2.1a). A fonte interferente possui profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 70 m, centro em $(x, y) = (-250, 250)$, logo acima a parte mais rasa da fonte alvo, e o mesmo vetor magnetização total da fonte alvo. Embora a nova anomalia RTP produzida com a fonte interferente (Figura 2.6) tem uma amplitude maior que a produzida pela fonte alvo isolada (Figura 2.2), a extensão horizontal da área positiva não muda substancialmente e conduz uma aproximação inicial (Figuras 2.7c e 2.8c) igual àquela utilizada no teste anterior (Figuras 2.3c e 2.4c).

A Figura 2.7 mostra as soluções L2 obtidas pela inversão da anomalia de campo total na Figura 2.5a com os seguintes pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 1.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-8}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$. A Figura 2.7a mostra que a melhor solução L2 possui profundidade do topo z_0 igual à verdadeira, porém possui uma intensidade de magnetização total m_0 superestimada. Por esse motivo, sua profundidade máxima (3046.8 m) é muito distante da verdadeira (6130 m). Essa solução produz valores de resíduos altos logo acima a fonte interferente (Figura 2.7b), mas esses resíduos diferem consideravelmente da anomalia de campo total produzida pela fonte interferente (Figura 2.5b). Isso significa que, nesse caso, a inversão não foi capaz de ignorar o efeito causado pela fonte interferente. Além disso, a Figura 2.7d mostra que a melhor solução L2 não recupera a forma da fonte alvo.

A Figura 2.8 mostra as soluções L1 obtidas pela inversão da anomalia de campo total exibida na Figura 2.5a com os mesmos pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 1.25) utilizados para as soluções L2 (Figura 2.7). Comparada à solução L2 mostrada na Figura 2.7, a melhor solução L1 apresenta uma intensidade de magnetização total menos superestimada (Figura 2.8a) e profundidade da base (5176.4 m) próxima à verdadeira (6130 m). Essa solução produz valores de resíduos (Figura 2.8b) próximos à anomalia de campo total produzida pela fonte interferente (Figura 2.5b). Isso significa que, nesse caso, a performance do método foi mais eficaz em filtrar a anomalia de campo total interferente (Figura 2.5b). Como consequência, a solução L1 (Figura 2.8d) foi muito menos afetada pela fonte interferente e recuperou satisfatoriamente a forma da fonte alvo. Este teste numérico mostra que a solução L1 é superior à solução L2 mesmo que a fonte interferente seja muito localizada e menor do que a fonte alvo.

2.3 Resultados com uma fonte interferente grande

O mapa da Figura 2.9a representa a soma entre as anomalias de campo total produzidas pela fonte interferente pequena (Figura 2.9b), cuja forma é exibida nas Figuras 2.9c e 2.9d, e aquela produzida pela fonte alvo simulada (Figura 2.1a). A fonte interferente possui profundidade do topo em 0 m, profundidade da base em 500 m, centro em $(x, y) = (500, 1500)$, ao lado do topo da fonte alvo, e o mesmo vetor magnetização total da fonte alvo. Neste caso, a fonte interferente estende consideravelmente a área positiva da anomalia RTP (Figura 2.10) em comparação com a da fonte alvo isolada (Figura 2.2). Entretanto, ainda é possível identificar os limites laterais da fonte alvo e gerar a mesma aproximação inicial usada nos testes anteriores.

A Figura 2.11 mostra as soluções L2 obtidas pela inversão da anomalia de campo total na Figura 2.9a com os seguintes pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 1.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-7}$. Como podemos ver, a melhor solução L2 não recupera os valores de profundidade do topo z_0 e nem de intensidade de magnetização total m_0 , assim como não recuperou a forma da fonte alvo. A estimativa da profundidade da base (2010.1 m) é muito distante da verdadeira (6130 m). Comparado ao valor verdadeiro, a profundidade do topo estimada z_0 está deslocada em direção à da fonte interferente. Neste caso, a fonte interferente induz severamente ao erro a geometria do corpo estimado (Figura 2.11d).

A Figura 2.12 mostra as soluções L1 obtidas pela inversão da anomalia de campo total mostrada na Figura 2.9a com os seguintes pesos normalizados $\tilde{\alpha}_\ell$ (Equação 1.25): $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-5}$, $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$, $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$, e $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-7}$. A melhor solução L1 (Figura 2.12) filtra parcialmente a anomalia de campo total interferente (Figura 2.9b) e recupera as principais feições da fonte alvo sintética, assim como a profundidade do topo z_0 e a intensidade de magnetização total m_0 verdadeiras. A estimativa da profundidade da base (5840.9 m) é muito próxima à verdadeira (6130 m). Essa solução é inferior à mostrada no teste anterior (Figura 2.8) em filtrar a anomalia de campo total interferente e também em recuperar a forma da fonte alvo. Apesar disso, ela é significativamente superior à melhor solução L2 (Figura 2.11) obtida pela inversão do mesmo dado, uma vez que é muito menos afetada pela presença de uma grande fonte interferente.

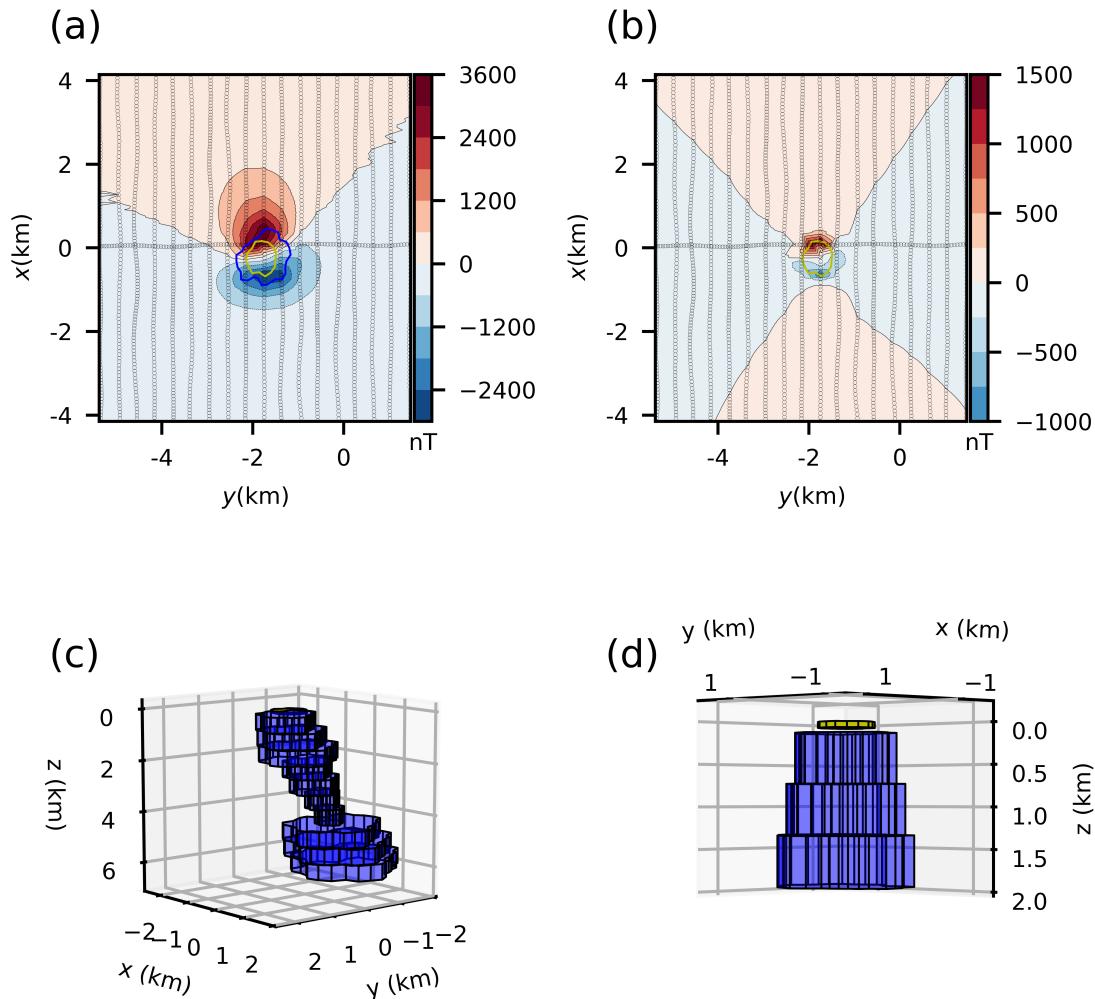


Figura 2.5: Modelo da fonte alvo com uma fonte interferente pequena. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e interferente (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e interferente, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte interferente. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte interferente (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e interferente (prisma amarelo).

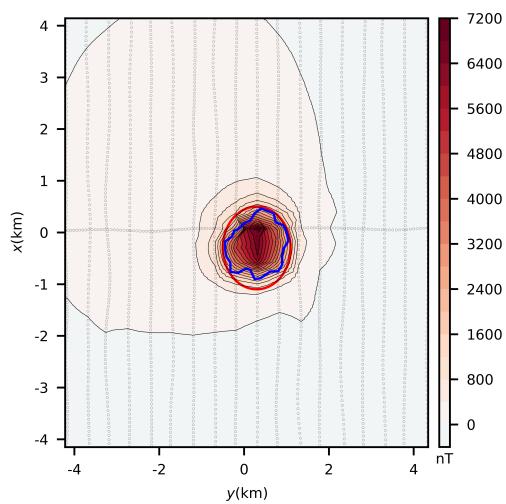


Figura 2.6: Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte interferente pequena. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima da fonte alvo. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 2.7c e 2.8c).

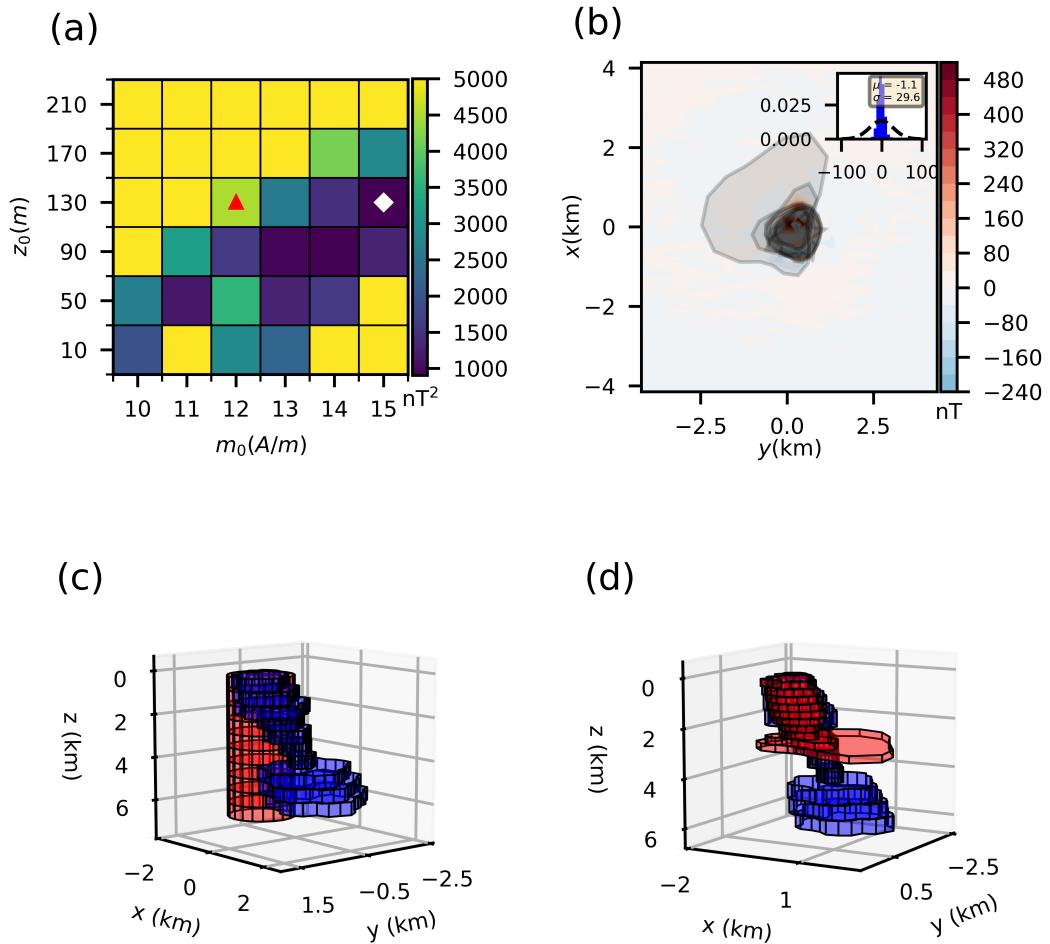


Figura 2.7: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . Os valores verdadeiros de m_0 e z_0 e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

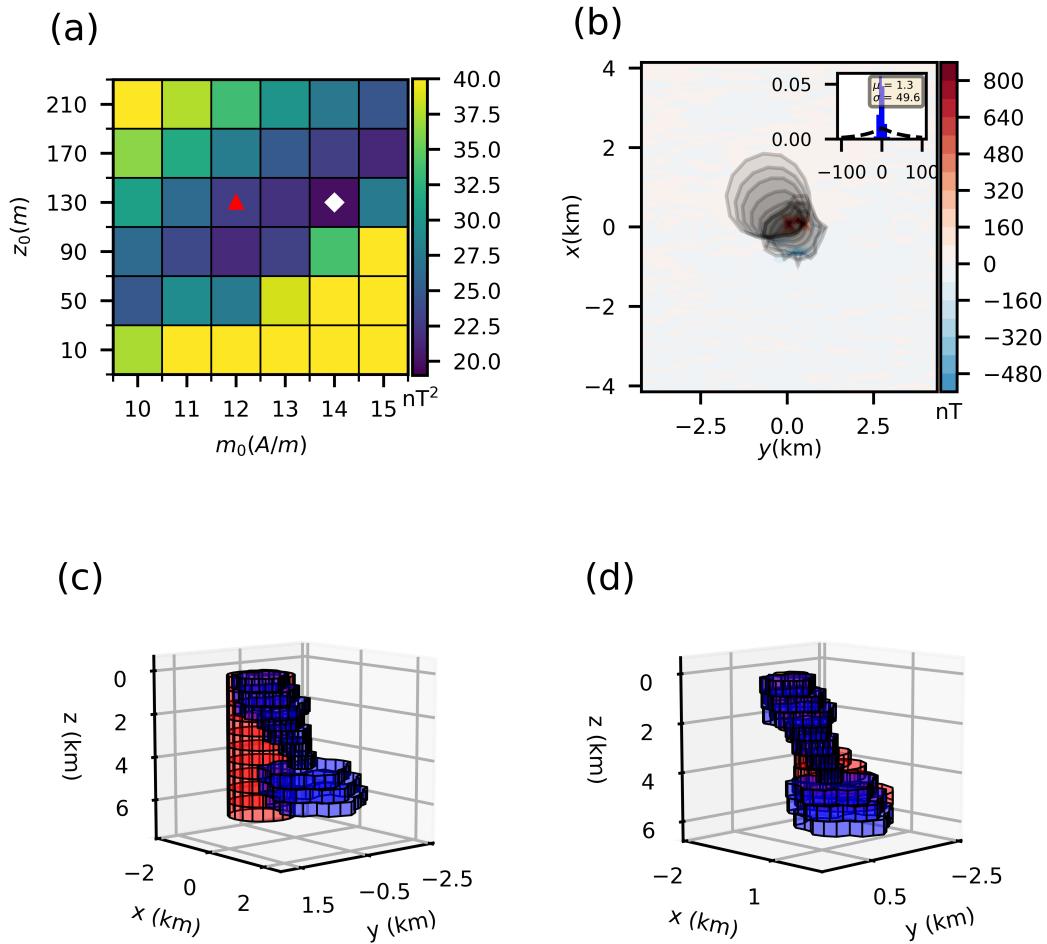


Figura 2.8: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente pequena. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . Os valores verdadeiros de m_0 e z_0 e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

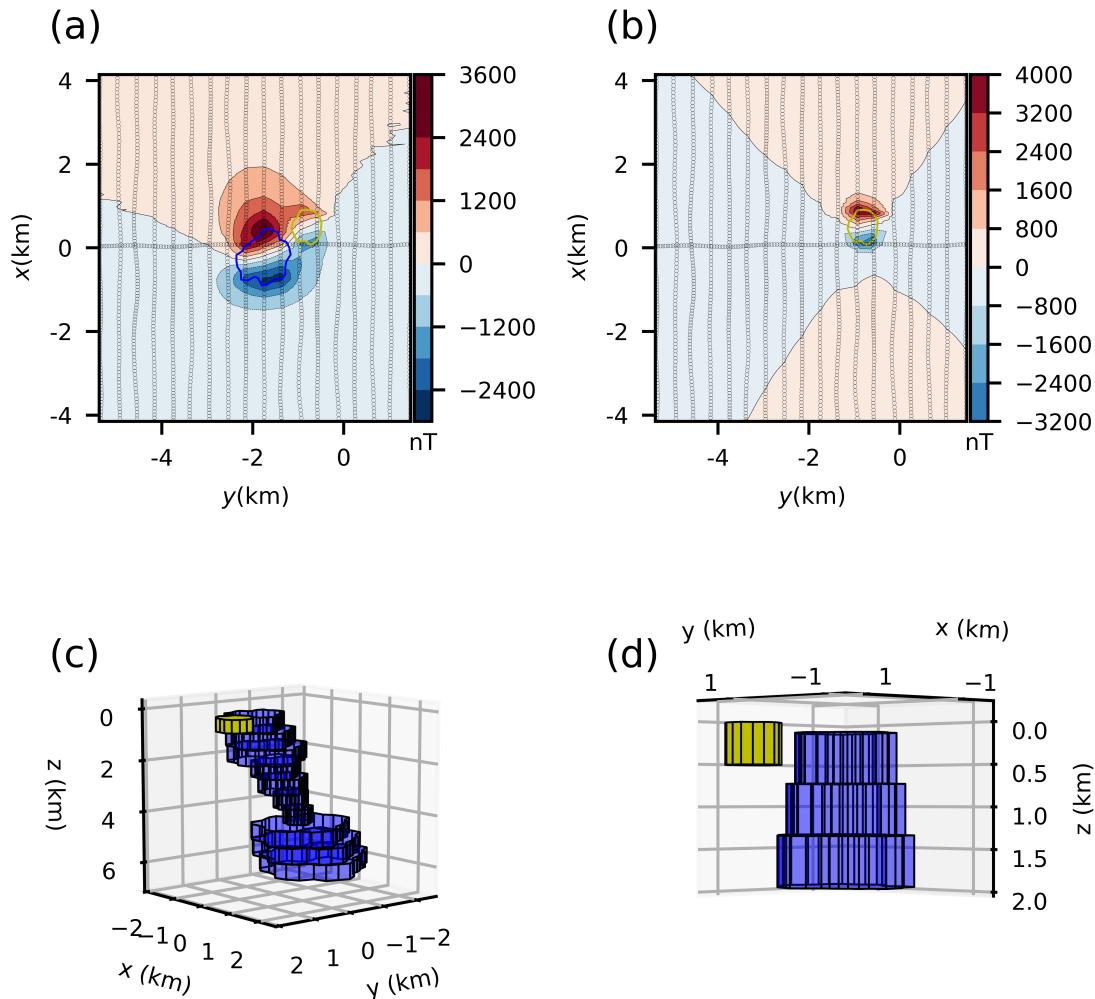


Figura 2.9: Modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Anomalia de campo total produzida pelas fontes alvo e interferente (prismas azuis e amarelos nos painéis c e d). Os pontos pretos representam os pontos de observação. Os polígonos azul e amarelo são as projeções horizontais das fontes alvo e interferente, respectivamente. (b) A anomalia de campo total produzida pela fonte interferente. (c) Visualização em perspectiva da fonte alvo (prismas azuis) e da fonte interferente (prisma amarelo). (d) Visualização em perspectiva aproximada das fontes alvo (prismas azuis) e interferente (prisma amarelo).

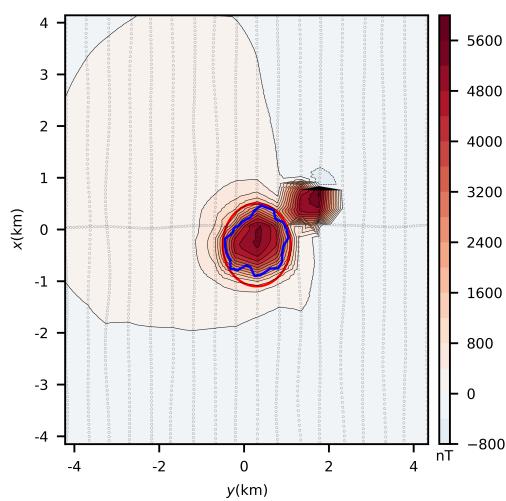


Figura 2.10: Anomalia RTP estimada produzida pela fonte alvo com uma fonte interferente grande. A anomalia RTP mostra valores predominantemente positivos logo acima das fontes alvo e interferente. Os pontos pretos representam os pontos de observação. As linhas azuis e vermelhas correspondem, respectivamente, às projeções horizontais da porção mais rasa da fonte alvo e da aproximação inicial utilizada nas inversões subsequentes (prismas vermelhos nas Figuras 2.11c e 2.12c).

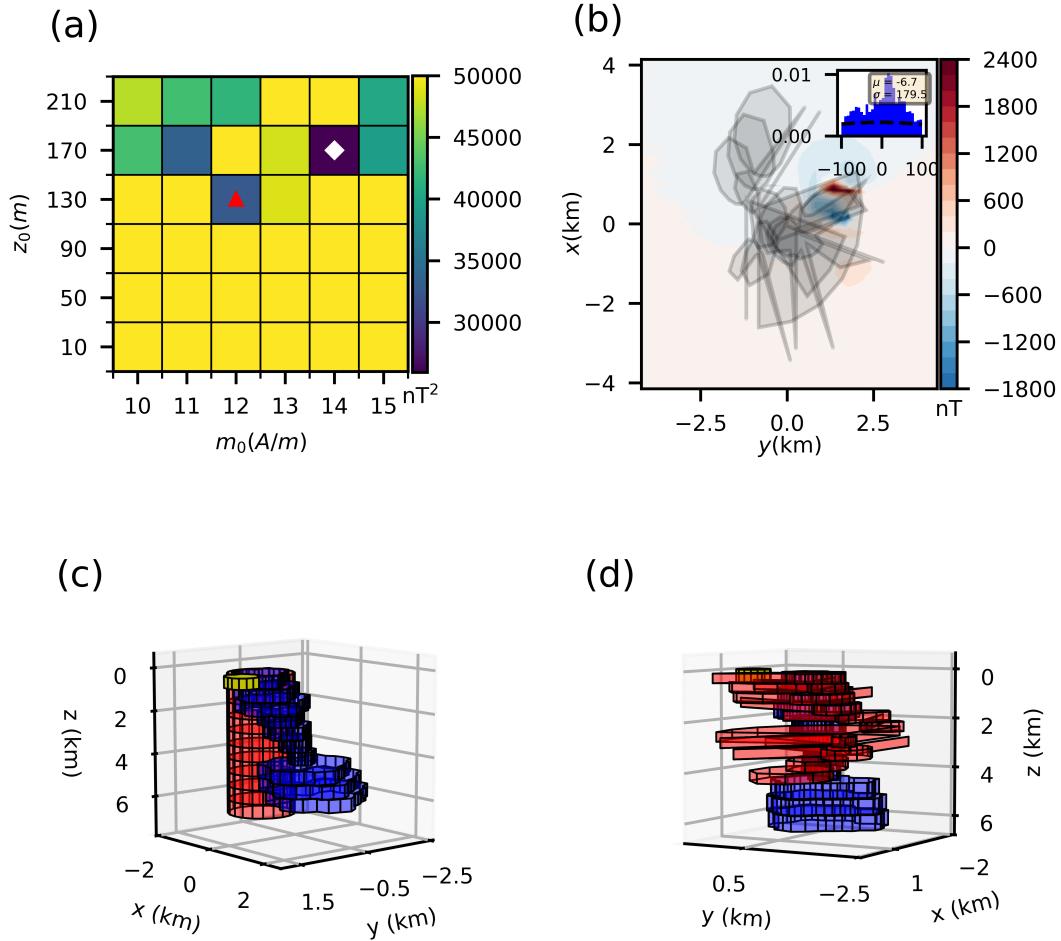


Figura 2.11: Soluções L2 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . Os valores verdadeiros de m_0 e z_0) e aqueles que definem a melhor solução L2 são representados pelo triângulo vermelho e pelo losango branco, respectivamente. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L2 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

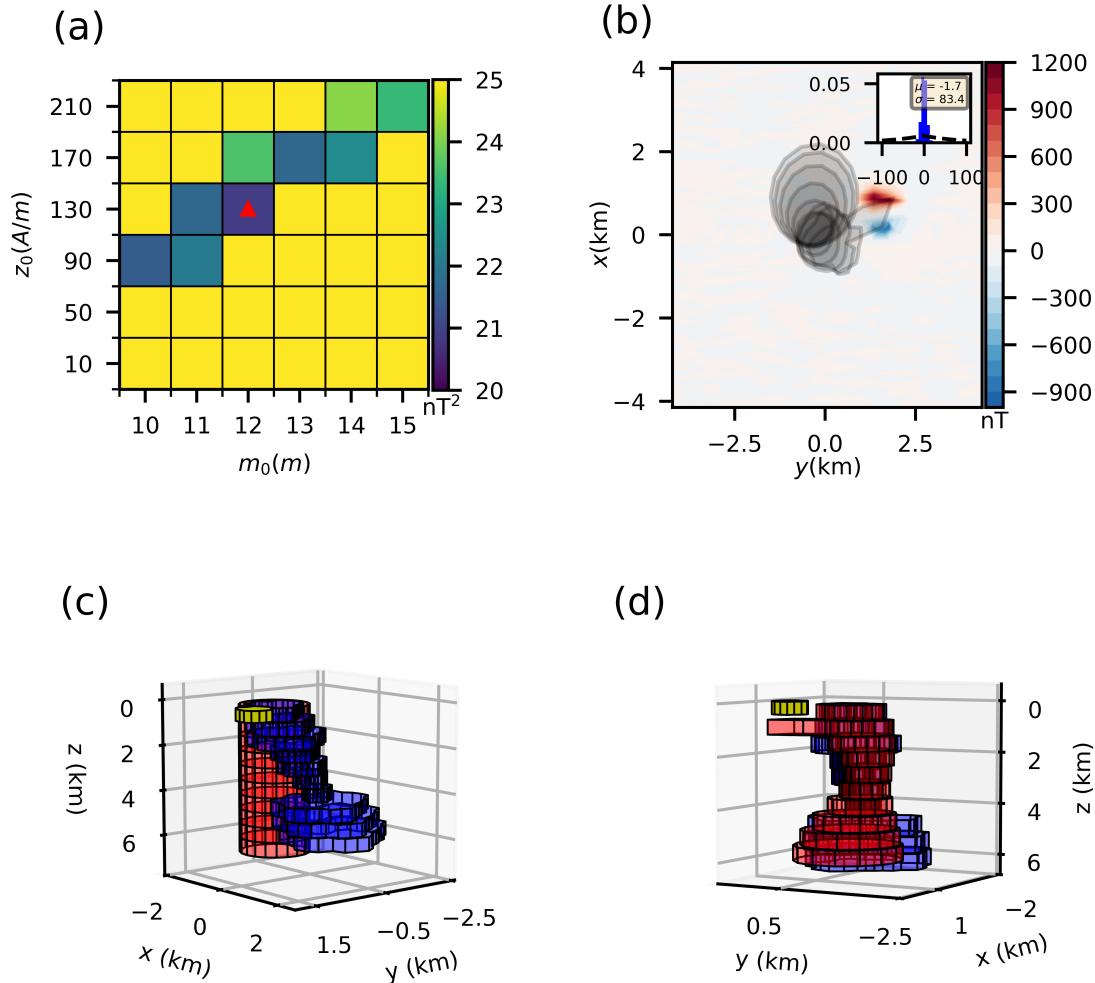


Figura 2.12: Soluções L1 obtidas para o modelo da fonte alvo com uma fonte interferente grande. (a) Mapa discreto da função objetivo produzida pelos modelos da malha de varredura para valores de profundidade do topo z_0 e intensidade de magnetização total m_0 . Ambos valores verdadeiros de m_0 e z_0 e aqueles que definem a melhor solução L1 são representados pelo triângulo vermelho. (b) Resíduos entre os dados contaminados com ruído (Fig. 2.1a) e os dados preditos (não mostrados) produzidos pela melhor solução L1 (prismas vermelhos no painel d). O histograma dos resíduos inserido em (b) mostra a curva Gaussiana ajustada (curva tracejada). Os polígonos cinzas representam as projeções horizontais de todos os prismas que compõe a melhor solução. (c) e (d) Visualização em perspectiva da aproximação inicial (prismas vermelhos) e a melhor solução (prismas vermelhos), respectivamente. Os prismas azuis são o modelo da fonte alvo.

Referências Bibliográficas

- ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2019, *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier. ISBN: 978-0-12-804651-7.
- BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., MEDEIROS, W. E., 1999, “Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations”, *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 754–764. doi: 10.1190/1.1444585.
- CLAERBOUT, J. F., MUIR, F., 1973, “ROBUST MODELING WITH ERRATIC DATA”, *Geophysics*, v. 38, n. 5, pp. 826–844. doi: 10.1190/1.1440378.
- FARQUHARSON, C. G., OLDENBURG, D. W., 1998, “Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure”, *Geophysical Journal International*, v. 134, n. 1 (07), pp. 213–227. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1046/j.1365-246x.1998.00555.x.
- GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V., 2013, *Matrix Computations (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences)*. Johns Hopkins University Press. ISBN: 978-1-4214-0794-4.
- HORN, R. A., JOHNSON, C. R., 1991, *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press. ISBN: 0-521-30587-X.
- OLIVEIRA JR., V. C., SALES, D. P., BARBOSA, V. C. F., et al., 2015, “Estimation of the total magnetization direction of approximately spherical bodies”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 215–232. doi: 10.5194/npg-22-215-2015.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, “3-D radial gravity gradient inversion”, *Geophysical Journal International*, v. 195, n. 2, pp. 883–902. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggt307.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., 2011, “Source geometry estimation using the mass excess criterion to constrain 3-D radial

- inversion of gravity data”, *Geophysical Journal International*, v. 187, n. 2, pp. 754–772. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05172.x.
- PLOUFF, D., 1976, “Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections”, *Geophysics*, v. 41, n. 4, pp. 727–741. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1440645.
- SCALES, J. A., GERSZTENKORN, A., 1988, “Robust methods in inverse theory”, *Inverse Problems*, v. 4, n. 4 (oct), pp. 1071–1091. doi: 10.1088/0266-5611/4/4/010.
- SEBER, G. A. F., WILD, C. J., 2003, *Nonlinear regression*. John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-47135-6.
- SILVA, J. B., CUTRIM, A. O., 1989, “A robust maximum likelihood method for gravity and magnetic interpretation”, *Geoexploration*, v. 26, n. 1, pp. 1 – 31. ISSN: 0016-7142. doi: 10.1016/0016-7142(89)90017-3.
- SILVA, J. B., HOHMANN, G. W., 1983, “Nonlinear magnetic inversion using a random search method”, *Geophysics*, v. 48, n. 12, pp. 1645–1658. doi: 10.1190/1.1441445.
- UIEDA, L., BARBOSA, V. C. F., 2012, “Robust 3D gravity gradient inversion by planting anomalous densities”, *Geophysics*, v. 77, n. 4, pp. G55–G66. doi: 10.1190/geo2011-0388.1.
- UIEDA, L., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, “Modeling the Earth with Fatiando a Terra”. In: van der Walt, S., Millman, J., Huff, K. (Eds.), *Proceedings of the 12th Python in Science Conference*, pp. 96–103. doi: 10.25080/Majora-8b375195-010.
- VITAL, L. B., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, “Radial magnetic inversion to retrieve the geometry of 3D sources”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2019*, pp. 1754–1758. doi: 10.1190/segam2019-3215805.1.