

## INVERSÃO RADIAL 3D DE DADOS MAGNÉTICOS

Leonardo Beserra Vital

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. Vanderlei Coelho  
Oliveira Junior

Co-orientador(a): Dra. Valéria Cristina  
Ferreira Barbosa

Rio de Janeiro  
Outubro de 2020

# Sumário

<b>1</b>	<b>Metodologia</b>	<b>1</b>
1.1	Problema direto . . . . .	1
1.2	Problema inverso . . . . .	3
1.2.1	Vínculos . . . . .	4
1.3	Algoritmo de inversão . . . . .	10
1.4	Considerações práticas . . . . .	13
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>16</b>

# Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática do modelo interpretativo. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética 3D localizada em subsuperfície (volume cinza escuro em b). (b) Modelo interpretativo formado por $L$ prismas retos, verticalmente justapostos e com seção horizontal descrita por um polígono. A profundidade do topo $z_0$ do modelo interpretativo coincide com a da fonte magnética (volume cinza escuro).	2
1.2	Representação esquemática do $k$ -ésimo prisma $P^k$ , $k = 1, \dots, L$ , que compõe o modelo interpretativo (Figura 1b). Este prisma tem espessura $dz$ , profundidade do topo $z_1^k$ e seção horizontal descrita por um polígono com $V$ vértices igualmente espaçados entre $0^\circ$ e $360^\circ$ . A posição dos vértices é descrita em termos das coordenadas polares $r_j^k$ e $\theta_j$ , $j = 1, \dots, V$ , em relação a uma origem $O^k$ com coordenadas Cartesianas $(x_0^k, y_0^k)$ .	3
1.3	Desenho esquemático do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes dentro de um mesmo prisma $\varphi_1$ . A figura exhibe o $k$ -ésimo prisma $P^k$ e as distâncias radiais adjacentes $r_j^k$ e $r_{j+1}^k$ relacionadas ao vínculo.	5
1.4	Desenho esquemático do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes pertencentes a prismas adjacentes $\varphi_2$ . A figura exhibe o $k$ -ésimo prisma $P^k$ e seu adjacente $P^{k+1}$ , assim como as distâncias radiais adjacentes $r_j^k$ e $r_j^{k+1}$ relacionadas ao vínculo.	6
1.5	Desenho esquemático do vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes $\varphi_3$ . A figura exhibe os prismas $P^k$ e $P^{k+1}$ e suas respectivas coordenadas Cartesianas $(x_0^k, y_0^k)$ , referidas à origem $O^k$ , e $(x_0^{k+1}, y_0^{k+1})$ , referidas à origem $O^{k+1}$ . A posição entre as origens deve ser a mínima possível.	7

- 1.6 Desenho esquemático do vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais de um prisma  $\varphi_4$ . A figura exhibe os prisma  $P^k$  e suas respectivas distâncias radiais  $r_j^k$  referidas à origem  $O^k$ . O vínculo atua sobre as distâncias radiais dos prismas, levando-as próximas a zero. 8
- 1.7 Desenho esquemático do vínculo de Tikhonov de ordem zero  $\varphi_5$  na espessura dos prismas  $dz$ . A figura exhibe os prisma  $P^k$  e sua espessura. O vínculo atua sobre a espessura de todos prismas levando-a próxima a zero, uma vez que  $dz$  é igual para todos os prismas. . . . . 9
- 1.8 Desenho esquemático dos vínculos de desigualdade. A figura exhibe os prisma  $P^k$  e os intervalos de máximo e mínimo de  $r_j^k$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  e  $dz$ . . . 14

# Capítulo 1

## Metodologia

### 1.1 Problema direto

Seja  $\mathbf{d}^o$  o vetor de dados observados, cujo  $i$ -ésimo elemento  $d_i^o$ ,  $i = 1, \dots, N$ , é a anomalia de campo total observada no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$  em um sistema de coordenadas Cartesiano com os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  apontando para Norte, para Leste e para baixo, respectivamente. Considere que as anomalias de campo total produzidas por pequenas fontes magnéticas interferências distorcem localmente a anomalia causada por uma fonte alvo 3-D principal. Por simplicidade, podemos assumir que o campo geomagnético principal é constante na área de estudo, com declinação  $D_0$  e inclinação  $I_0$ . Este trabalho segue a mesma abordagem apresentada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011), OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), e VITAL *et al.* (2019) para definir o modelo interpretativo que aproxima a geometria da fonte alvo. Esse modelo é formado por um conjunto de  $L$  prismas retos verticalmente justapostos tendo a mesma espessura  $dz$  e o mesmo vetor de magnetização total com intensidade  $m_0$ , declinação  $D$  e inclinação  $I$  (Figura 1.1).

A profundidade do topo do prisma mais raso é definida por  $z_0$ . Cada prisma possui a seção horizontal definida por um polígono com  $V$  vértices igualmente espaçados de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . As posições horizontais dos vértices que formam o  $k$ -ésimo prisma são definidas por distâncias radiais (ou apenas raios)  $r_j^k$ , com respeito a uma origem  $(x_0^k, y_0^k)$  localizada dentro do prisma,  $k = 1, \dots, L$ ,  $j = 1, \dots, V$  (Figura 1.2). A anomalia de campo total predita pelo modelo interpretativo no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , é dada por:

$$d_i(\mathbf{p}) \equiv \sum_{k=1}^L f_i^k(\mathbf{r}^k, x_0^k, y_0^k, dz, z_1^k, m_0, D, I, D_0, I_0), \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{r}^k$  é um vetor de dimensão  $V \times 1$  que contém os raios  $r_j^k$  dos vértices pertencentes ao  $k$ -ésimo prisma, que possui origem no ponto  $(x_0^k, y_0^k)$  e profundidade do topo em

$z_1^k = z_0 + (k - 1)dz$ . Na Equação 1.1,  $\mathbf{p}$  é um vetor de parâmetros de dimensão  $M \times 1$ ,  $M = L(V + 2) + 1$ , que define a geometria do modelo interpretativo:

$$\mathbf{p} = \left[ \mathbf{r}^1{}^\top \quad x_0^1 \quad y_0^1 \quad \dots \quad \mathbf{r}^L{}^\top \quad x_0^L \quad y_0^L \quad dz \right]^\top, \quad (1.2)$$

onde o sobre-escrito " $\top$ " indica transposição. A anomalia de campo total  $d_i(\mathbf{p})$  (Equação 1.1) é computada por meio das fórmulas de Plouff (PLOUFF, 1976) implementadas no pacote de Python Fatiando a Terra (UIEDA *et al.*, 2013).

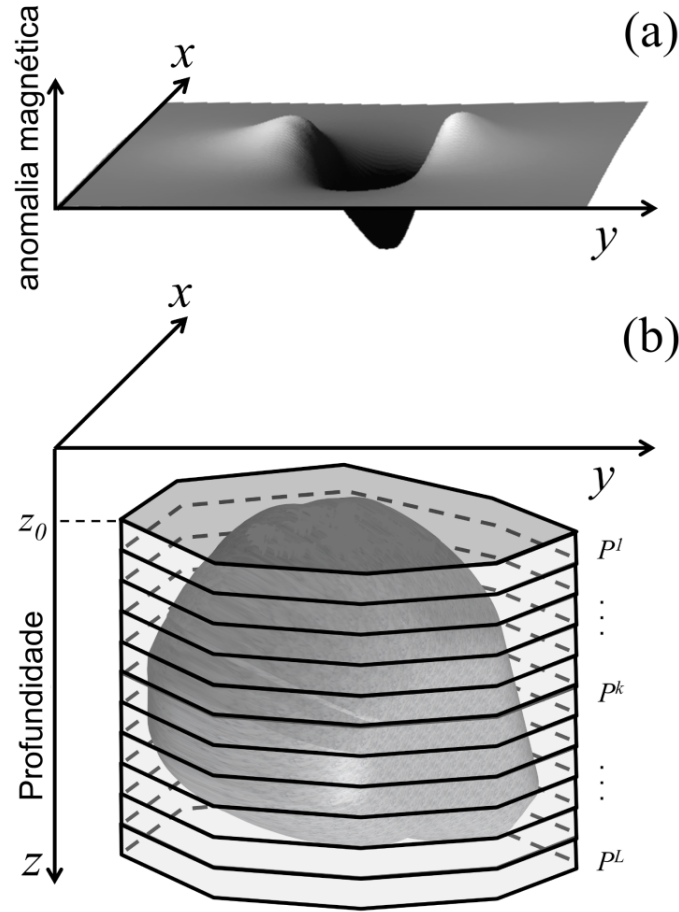


Figura 1.1: Representação esquemática do modelo interpretativo. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte magnética 3D localizada em subsuperfície (volume cinza escuro em b). (b) Modelo interpretativo formado por  $L$  prismas retos, verticalmente justapostos e com seção horizontal descrita por um polígono. A profundidade do topo  $z_0$  do modelo interpretativo coincide com a da fonte magnética (volume cinza escuro).

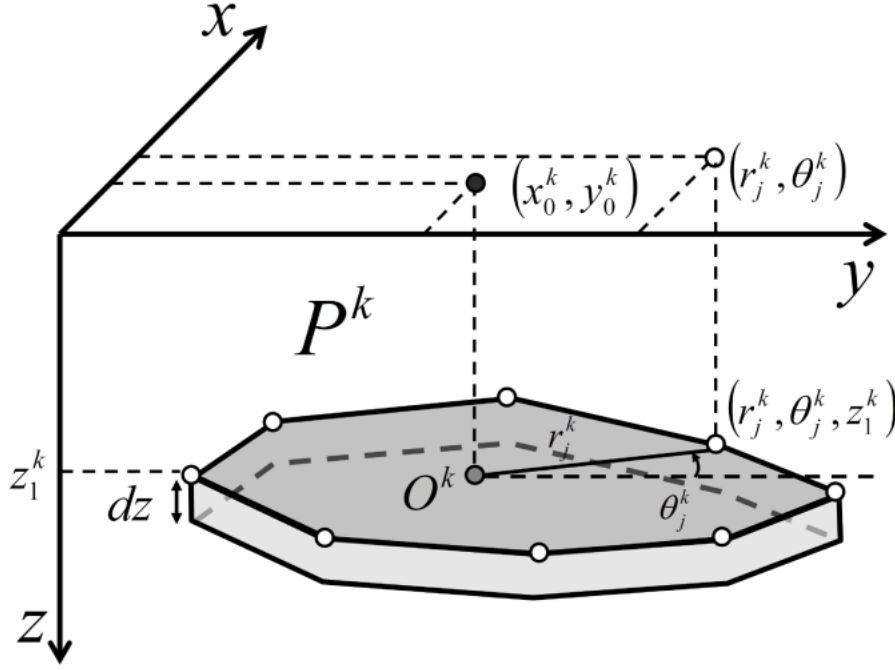


Figura 1.2: Representação esquemática do  $k$ -ésimo prisma  $P^k$ ,  $k = 1, \dots, L$ , que compõe o modelo interpretativo (Figura 1b). Este prisma tem espessura  $dz$ , profundidade do topo  $z_1^k$  e seção horizontal descrita por um polígono com  $V$  vértices igualmente espaçados entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . A posição dos vértices é descrita em termos das coordenadas polares  $r_j^k$  e  $\theta_j$ ,  $j = 1, \dots, V$ , em relação a uma origem  $O^k$  com coordenadas Cartesianas  $(x_0^k, y_0^k)$

## 1.2 Problema inverso

Este trabalho propõe um método robusto de inversão magnética para estimar a posição e a forma de uma fonte magnética alvo 3D na presença de fontes interferentes. A formulação do problema consiste em um problema de otimização não-linear vinculado para estimar um vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 1.2) minimizando a função objetivo

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \varphi_\ell(\mathbf{p}), \quad (1.3)$$

sujeito aos vínculos de desigualdade

$$p_l^{\min} < p_l < p_l^{\max}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (1.4)$$

onde  $p_l^{\min}$  e  $p_l^{\max}$  definem, respectivamente, os limites inferior e superior para o  $l$ -ésimo elemento  $p_l$  do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$ ,  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  são as funções que representam os vínculos que impõem informação a priori sobre a forma da estimativa do corpo 3D, e  $\phi(\mathbf{p})$  é a função desajuste dos dados ou *data-misfit*. Podemos definir  $\phi(\mathbf{p})$

através de duas abordagens diferentes com o propósito de comparar os resultados. Na primeira abordagem,  $\phi(\mathbf{p})$  é definida de acordo com o trabalho de VITAL *et al.* (2019) como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_2^2, \quad (1.5)$$

a qual é a norma-2 quadrática (e.g., ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre o vetor de dados observados  $\mathbf{d}^o$ , cujo  $i$ -ésimo elemento  $d_i^o$  representa a anomalia de campo total observada no ponto  $(x_i, y_i, z_i)$ , e o vetor de dados preditos  $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ , cujo  $i$ -ésimo elemento  $d_i(\mathbf{p})$  é definido pela Equação 1.1. Alternativamente, podemos definir a função *data-misfit* como

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\mathbf{p})\|_1, \quad (1.6)$$

que representa a norma-1 (e.g., ASTER *et al.*, 2019, p. 331) dos resíduos entre os vetores de dados observados  $\mathbf{d}^o$  e preditos  $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ . É de amplo conhecimento que o vetor de parâmetros que minimiza a norma-2 quadrática (Equação 1.5) pode ser muito afetado negativamente pela presença de pontos espúrios ou *outliers* e também pelo efeito causado por fontes não-alvos (e.g., ASTER *et al.*, 2019; CLAERBOUT e MUIR, 1973; FARQUHARSON e OLDENBURG, 1998; OLIVEIRA JR. *et al.*, 2015; SCALES e GERSZTENKORN, 1988; SILVA e CUTRIM, 1989; SILVA e HOHMANN, 1983; UIEDA e BARBOSA, 2012). Através da estimativa do vetor de parâmetros obtida pela minimização da norma-1 (Equação 1.6), espera-se que a posição e a forma estimadas do corpo 3D durante a inversão ajustem a anomalia de campo total produzida pela fonte alvo e ignorem a causada pelas fontes interferentes.

Na Equação 1.3,  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, 5$ , são escalares positivos que definem o peso relativo das funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$ . Essas funções são definidas seguindo a mesma abordagem utilizada por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011), OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013), and VITAL *et al.* (2019).

### 1.2.1 Vínculos

As funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equação 1.3),  $\ell = 1, \dots, 5$ , utilizadas aqui para obter soluções estáveis e introduzir informação a priori sobre o corpo estimado, foram organizadas em dois grupos.

#### Vínculos de suavidade

Esse grupo é formado pelas variações da regularização de Tikhonov de primeira ordem (ASTER *et al.*, 2019, p. 103) que impõe suavidade sobre os raios  $r_j^k$  e sobre as coordenadas Cartesianas  $x_0^k$  e  $y_0^k$  da origem  $O^k$ ,  $j = 1, \dots, V$ ,  $k = 1, \dots, L$ , que define a seção horizontal de cada prisma (Fig.1.1b). Elas foram propostas por



OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013) e possuem um papel muito importante em introduzir informação a prior sobre a forma da fonte alvo.

O primeiro vínculo desse grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes que definem a seção horizontal de cada prisma*. Esse vínculo impõe que os raios adjacentes  $r_j^k$  e  $r_{j+1}^k$  dentro do mesmo prisma devem ser próximos entre si. Isso força que o prisma estimado terá uma forma aproximadamente cilíndrica, que evita descontinuidades abruptas entre as estimativas das distâncias radiais dentro de um mesmo prisma. Sua representação esquemática é mostrada na Figura 1.3.

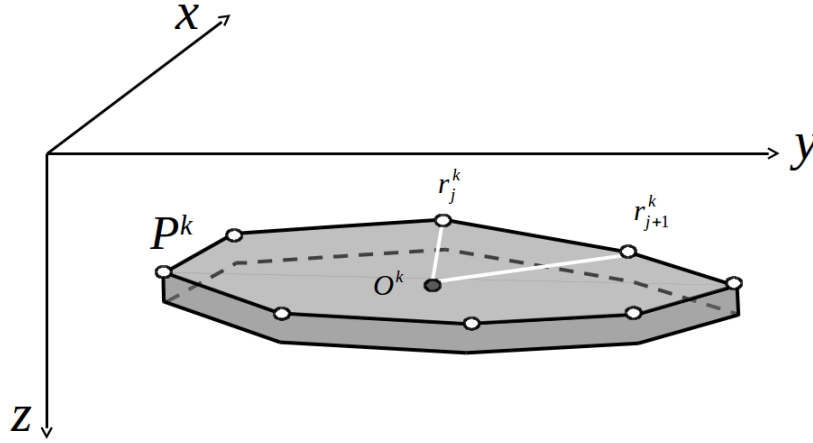


Figura 1.3: Desenho esquemático do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes dentro de um mesmo prisma  $\varphi_1$ . A figura exibe o  $k$ -ésimo prisma  $P^k$  e as distâncias radiais adjacentes  $r_j^k$  e  $r_{j+1}^k$  relacionadas ao vínculo.

Matematicamente, o vínculo é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^L \left[ (r_V^k - r_1^k)^2 + \sum_{j=1}^{V-1} (r_j^k - r_{j+1}^k)^2 \right] \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1 \mathbf{p} \quad , \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_L \otimes \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_V - \mathbf{D}_V^\top) & \mathbf{0}_{V \times 2} \end{bmatrix}_{(L-1)V \times M} \quad , \tag{1.8}$$

$\mathbf{I}_L$  é a matriz identidade de ordem  $L$ , " $\otimes$ " indica o produto de Kronecker (HORN e JOHNSON, 1991, p. 243),  $\mathbf{0}_{V \times 2}$  é uma matriz de ordem  $V \times 2$  com elementos nulos,  $\mathbf{I}_V$  é a matriz identidade de ordem  $V$  e  $\mathbf{D}_V^\top$  é a matriz de permutação superior de ordem  $V$  (GOLUB e LOAN, 2013, p. 20). O vetor gradiente e a matriz Hessiana

da função  $\varphi_1(\mathbf{p})$  (Equação 1.7) são dados por:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1 \mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_1 \quad .\end{aligned}\tag{1.9}$$

O segundo vínculo do grupo é a *suavidade sobre os raios adjacentes de prismas adjacentes*, o qual impõe que os raios adjacentes  $r_j^k$  e  $r_j^{k+1}$  entre prismas verticalmente adjacentes sejam próximos entre si. Esse vínculo força que a forma de prismas verticalmente adjacentes seja similar. Uma representação esquemática do vínculo é apresentada na Figura 1.4.

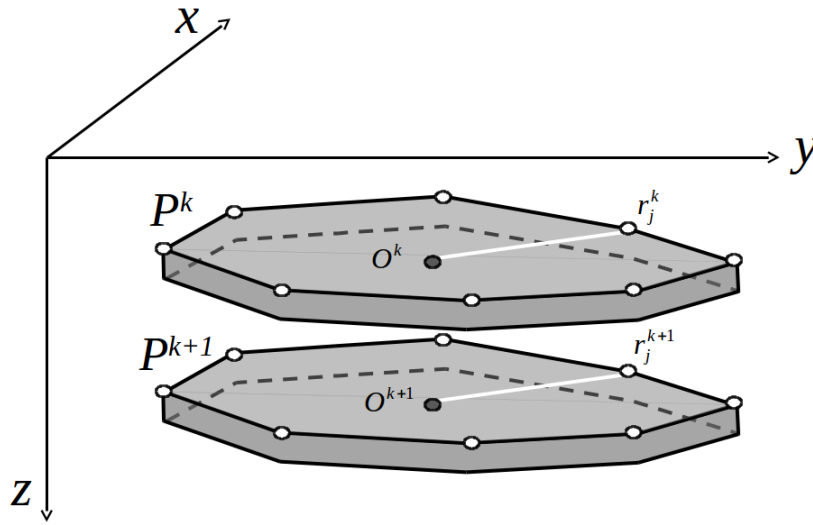


Figura 1.4: Desenho esquemático do vínculo de suavidade sobre distâncias adjacentes pertencentes a prismas adjacentes  $\varphi_2$ . A figura exhibe o  $k$ -ésimo prisma  $P^k$  e seu adjacente  $P^{k+1}$ , assim como as distâncias radiais adjacentes  $r_j^k$  e  $r_j^{k+1}$  relacionadas ao vínculo.

De forma matemática é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_2(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1} \left[ \sum_{j=1}^V (r_j^{k+1} - r_j^k)^2 \right] \quad , \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_2 \mathbf{p}\end{aligned}\tag{1.10}$$

onde

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2 & \mathbf{0}_{(L-1)V \times 1} \end{bmatrix}_{(L-1)V \times M} \quad ,\tag{1.11}$$

$$\mathbf{S}_2 = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-1} & \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} & \mathbf{I}_{L-1} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V \times 2} \end{bmatrix} \quad ,\tag{1.12}$$

$\mathbf{0}_{(L-1)V \times 1}$  é um vetor de ordem  $(L-1)V \times 1$  com elementos nulos,  $\mathbf{0}_{(L-1) \times 1}$  é um

vetor de ordem  $(L - 1) \times 1$  com elementos nulos e  $\mathbf{I}_{L-1}$  é a matriz identidade de ordem  $L - 1$ . O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_2(\mathbf{p})$  (Equação 1.10) são dados por:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_2 \mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_2^\top \mathbf{R}_2 \quad .\end{aligned}\tag{1.13}$$

O último vínculo deste grupo é a *suavidade sobre a posição horizontal das origens arbitrárias de prismas verticalmente adjacentes*. Esse vínculo impõe que as coordenadas Cartesianas horizontais estimadas  $(x_0^k, y_0^k)$  e  $(x_0^{k+1}, y_0^{k+1})$  das origens  $O^k$  e  $O^{k+1}$  de prismas verticalmente adjacentes devem ser próximas entre si. Isso controla o mergulho do corpo estimado através da regularização do deslocamento horizontal de prismas verticalmente adjacentes (Figura 1.5).

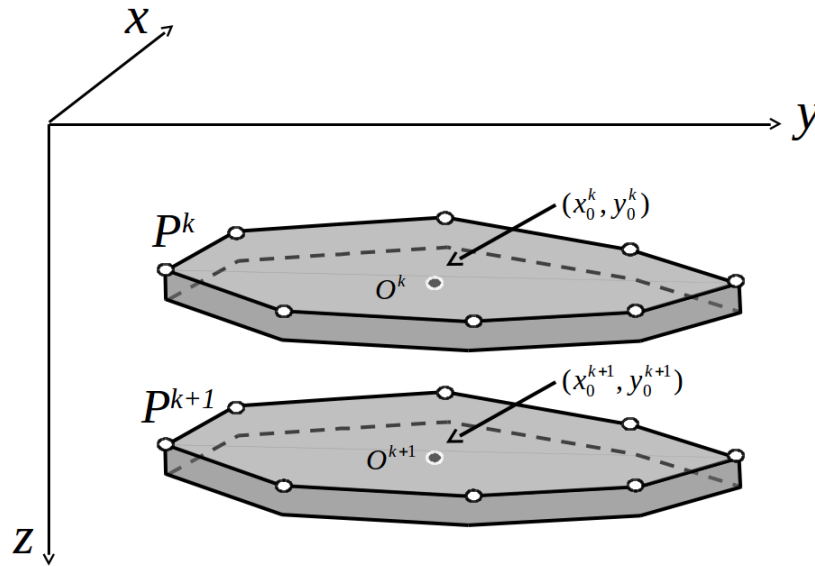


Figura 1.5: Desenho esquemático do vínculo de suavidade nas coordenadas das origens pertencentes a prismas adjacentes  $\varphi_3$ . A figura exhibe os prismas  $P^k$  e  $P^{k+1}$  e suas respectivas coordenadas Cartesianas  $(x_0^k, y_0^k)$ , referidas à origem  $O^k$ , e  $(x_0^{k+1}, y_0^{k+1})$ , referidas à origem  $O^{k+1}$ . A posição entre as origens deve ser a mínima possível.

Algebricamente o vínculo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_3(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{L-1} \left[ (x_0^{k+1} - x_0^k)^2 + (y_0^{k+1} - y_0^k)^2 \right] \quad , \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3 \mathbf{p}\end{aligned}\tag{1.14}$$

onde

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_3 & \mathbf{0}_{(L-1)2 \times 1} \end{bmatrix}_{(L-1)2 \times M}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{S}_3 = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-1} & \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-1) \times 1} & \mathbf{I}_{L-1} \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times V} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

$\mathbf{0}_{(L-1)2 \times 1}$  é um vetor de ordem  $(L-1)2 \times 1$  com elementos nulos,  $\mathbf{0}_{2 \times V}$  é uma matriz de ordem  $2 \times V$  com elementos nulos e  $\mathbf{I}_2$  é uma matriz identidade de ordem 2. O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_3(\mathbf{p})$  (Equação 1.14) são dados por:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3 \mathbf{p}, \\ \mathbf{H}_3(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_3^\top \mathbf{R}_3. \end{aligned} \quad (1.17)$$

### Vínculos de norma Euclidiana mínima

Dois vínculos utilizam a regularização Tikhonov de ordem zero com o propósito de estabilizar o problema inverso sem necessariamente introduzir informação a priori com significado físico significativo sobre a fonte.

A *norma Euclidiana mínima dos raios* impõe que todos os raios estimados dentro de um prisma devem ser próximos de zero (Figura 1.6).

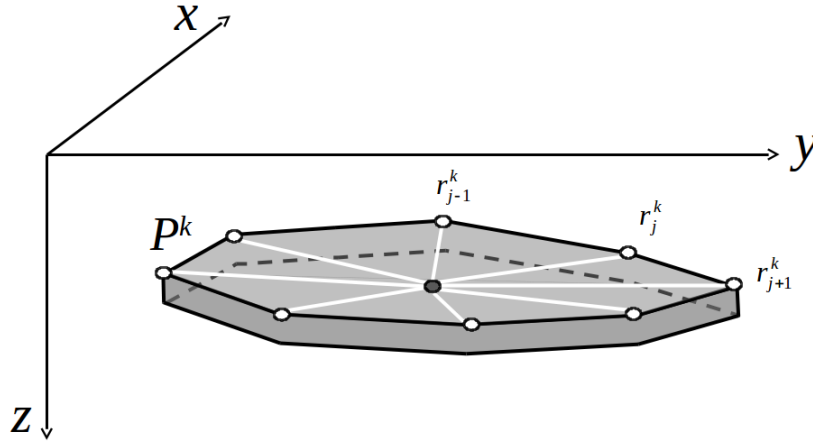


Figura 1.6: Desenho esquemático do vínculo de Tikhonov de ordem zero nas distâncias radiais de um prisma  $\varphi_4$ . A figura exibe os prisma  $P^k$  e suas respectivas distâncias radiais  $r_j^k$  referidas à origem  $O^k$ . O vínculo atua sobre as distâncias radiais do prisma, levando-as próximas a zero.

Esse vínculo foi proposto por OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e

BARBOSA (2013) e pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\varphi_4(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^V (r_j^k)^2, \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 \mathbf{p}\end{aligned}\quad (1.18)$$

onde

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_4 & \mathbf{0}_{(M-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} & 0 \end{bmatrix}_{M \times M}, \quad (1.19)$$

e

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_V & \mathbf{0}_{V \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times V} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}_{(V+2) \times (V+2)}. \quad (1.20)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_4(\mathbf{p})$  (Equação 1.18) são:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4 \mathbf{p}, \\ \mathbf{H}_4(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_4^\top \mathbf{R}_4.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Finalmente, o último vínculo é a *norma Euclidiana mínima da espessura*, que impõe que a espessura comum  $dz$  de todos os prismas seja próxima de zero. Esse vínculo força que a profundidade da base do modelo seja o mais rasa possível (Figura 1.7)

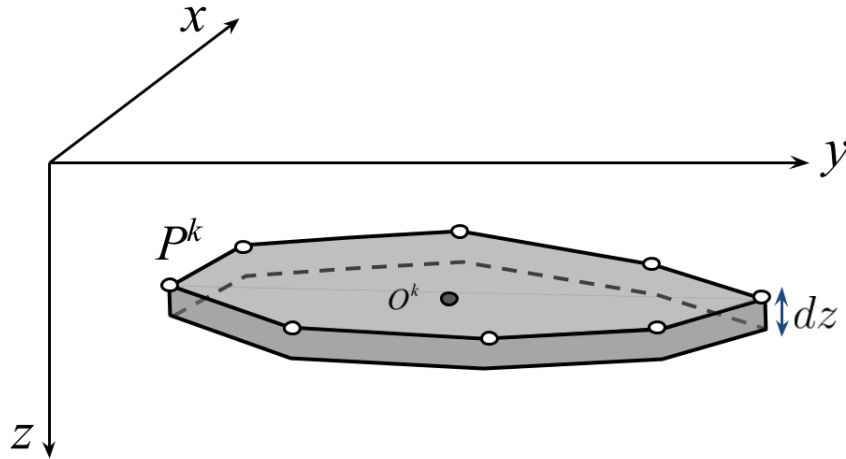


Figura 1.7: Desenho esquemático do vínculo de Tikhonov de ordem zero  $\varphi_5$  na espessura dos prismas  $dz$ . A figura exhibe os prisma  $P^k$  e sua espessura. O vínculo atua sobre a espessura de todos os prismas levando-a próxima a zero, uma vez que  $dz$  é igual para todos os prismas.

Esse vínculo pode ser escrito matematicamente como

$$\begin{aligned}\varphi_5(\mathbf{p}) &= dz^2 \\ &= \mathbf{p}^\top \mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \mathbf{p}\end{aligned}\quad , \quad (1.22)$$

onde

$$\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(M-1) \times (M-1)} & \mathbf{0}_{(M-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} & 1 \end{bmatrix}_{M \times M} . \quad (1.23)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da função  $\varphi_5(\mathbf{p})$  (Equação 1.22) são:

$$\begin{aligned}\nabla \varphi_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \mathbf{p} \quad , \\ \mathbf{H}_5(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{R}_5^\top \mathbf{R}_5 \quad .\end{aligned}\quad (1.24)$$

### 1.3 Algoritmo de inversão

Dada um profundidade do top  $z_0$  do prisma mais raso, a intensidade de magnetização total  $m_0$  de todos os prismas, uma aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 1.2), e os limites  $p_l^{\min}$  e  $p_l^{\max}$  (Equação 1.4), o método de Levenberg-Marquardt (e.g., SEBER e WILD, 2003, p. 624) é utilizado para estimar o vetor de parâmetros  $\hat{\mathbf{p}}^*$  que minimiza a função objetivo  $\Gamma(\mathbf{p})$  (Equação 1.3), sujeita aos vínculos de desigualdade definidos pela Equação 1.4. Para incorporar esses vínculos de desigualdade, foi empregada a mesma abordagem apresentada por BARBOSA *et al.* (1999), OLIVEIRA JR. *et al.* (2011) e OLIVEIRA JR. e BARBOSA (2013). Abaixo, segue o algoritmo de inversão aqui proposto:

**entrada**  $\mathbf{d}^o$ ,  $D_0$ ,  $I_0$ ,  $z_0$ ,  $m_0$ ,  $D$ ,  $I$ ,  $p_l^{\min}$  e  $p_l^{\max}$  (Equação 1.4),  $k = 0$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ , e  $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $M$ .

- (1) Computa a matriz  $N \times M$   $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ , cujo elemento  $ij$  é a derivada do dado  $d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  (Equação 1.1) com respeito ao  $j$ -ésimo elemento  $p_j$  do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 1.2).
- (2) Computa o vetor gradiente

$$\nabla \phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = -\frac{2}{N} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top \mathbf{W}_{(k)} [\mathbf{d}^o - \mathbf{d}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})]$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \frac{2}{N} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})^\top \mathbf{W}_{(k)} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

da função *data-misfit*  $\phi(\mathbf{p})$  (Equação 1.5), quando  $\mathbf{W}_{(k)} = \mathbf{I}$ , ou  $\phi(\mathbf{p})$  (Equação 1.6), quando  $\mathbf{W}_{(k)} \neq \mathbf{I}$ . Na próxima seção, será discutido como usar a matriz

Hessiana  $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$  (computada na iteração  $k = 0$ ) para definir os pesos  $\alpha_\ell$  (Equação 1.3) das funções de vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22).

(3) Computa o vetor gradiente

$$\nabla\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \nabla\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \nabla\varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$$

e a matriz Hessiana

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \sum_{\ell=1}^5 \alpha_\ell \mathbf{H}_\ell$$

da função objetivo  $\Gamma(\mathbf{p})$  (Equação 1.3), onde  $\nabla\varphi_\ell(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  e  $\mathbf{H}_\ell$  são, respectivamente, o vetor gradiente e a matriz Hessiana (Equações 1.9, 1.13, 1.17, 1.21, 1.24) das funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22).

(4) Computa o  $l$ -ésimo elemento  $\hat{p}_l^\dagger$  de um vetor  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$  como:

$$\hat{p}_l^\dagger = -\ln\left(\frac{p_l^{\max} - \hat{p}_l}{\hat{p}_l - p_l^{\min}}\right),$$

onde  $\hat{p}_l$  é o  $l$ -ésimo elemento de  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ .

(5) Computa uma matriz diagonal  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  com o elemento  $ll$  dado por

$$t(\hat{p}_l) = \frac{(p_l^{\max} - \hat{p}_l)(\hat{p}_l - p_l^{\min})}{p_l^{\max} - p_l^{\min}},$$

onde  $p_l$  é o  $l$ -ésimo elemento do vetor  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ .

(6) Computa uma matriz

$$\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})\mathbf{T}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}).$$

(7) Compute uma matriz diagonal  $\mathbf{Q}_{(k)}$  com elemento  $ll$  dado por

$$q_{ll} = \frac{1}{\sqrt{h_{ll}^\dagger}},$$

onde  $h_{ll}^\dagger$  é o elemento  $ll$  da matriz  $\mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$ .

- (8) Computa uma correção  $\Delta \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$  para o vetor  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger$  pela solução do sistema linear

$$\mathbf{Q}_{(k)}^{-1} [\mathbf{Q}_{(k)} \mathbf{H}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) \mathbf{Q}_{(k)} + \lambda_{(k)} \mathbf{I}_M] \mathbf{Q}_{(k)}^{-1} \Delta \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger = -\nabla \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) ,$$

onde  $\lambda_{(k)}$  é um escalar positivo ajustado à cada iteração (e.g., SEBER e WILD, 2003, p. 624).

- (9) Computa um novo vetor

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger + \Delta \hat{\mathbf{p}}_{(k)}^\dagger .$$

- (10) Computa o  $l$ -ésimo elemento do novo vetor  $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$  como:

$$\hat{p}_l = p_l^{\min} + \left( \frac{p_l^{\max} - p_l^{\min}}{1 + e^{-\hat{p}_l^\dagger}} \right) .$$

- (11) Se o seguinte critério de convergência for satisfeito,

$$\left| \frac{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}) - \Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})}{\Gamma(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})} \right| \leq \tau ,$$

onde  $\tau$  é um número positivo pequeno, que varia de  $\approx 10^{-3}$  a  $10^{-4}$ , que controla a convergência, o vetor de parâmetros  $\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)}$  é a solução. Senão, atualiza o vetor de parâmetros

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k)} \leftarrow \hat{\mathbf{p}}_{(k+1)} ,$$

atualiza o elemento  $ii$  da matriz  $\mathbf{W}_{(k)}$

$$w_{ii} = \frac{1}{|d_i^o - d_i(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})| + \varepsilon} ,$$

onde  $\varepsilon$  possui um valor positivo pequeno ( $\approx 10^{-10}$ ) usado para prevenir uma divisão por zero, atualiza o contador da iteração  $k$

$$k \leftarrow k + 1 ,$$

e retorna à etapa (1).

Nesse algoritmo, os elementos da matriz  $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{p}}_{(k)})$  (etapa 1) são computados pelo uso das diferenças finitas centradas. É importante notar que na etapa 3 as matrizes Hessianas  $\mathbf{H}_\ell$  (Equações 1.9, 1.13, 1.17, 1.21, 1.24) das funções dos vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22) não dependem do vetor de parâmetros. Por essa razão, eles são computados apenas uma vez antes da primeira iteração e armazenados para serem usados até a convergência ser alcançada (etapa 11).



Esse algoritmo é executado para obter um corpo estimado para cada ponto  $(m_0, z_0)$  em uma malha de valores de profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$  definida pelo usuário. Todos os corpos estimados são obtidos através da utilização de uma aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 1.2), dos mesmos valores para os pesos  $\alpha_\ell$  (Equação 1.3) e dos limites  $p_l^{\min}$  e  $p_l^{\max}$  (Eq. 1.4) para os parâmetros estimados. Os valores ótimos da profundidade do topo  $z_0$  e intensidade de magnetização total  $m_0$  são escolhidos como aqueles associados aos corpos estimados que produzem valores pequenos da função objetivo  $\Gamma(\mathbf{p})$  (Equação 1.3).

Note, que ao manter a matriz  $\mathbf{W}_{(k)}$  (etapa 2 e 10) igual à identidade ao longo das iterações, o corpo estimado minimiza a norma-2 quadrática dos resíduos entre os dados observados e preditos (Equação 1.5). Nesse caso, os corpos estimados são convenientemente denominados *solução L2*. A atualização iterativa dos elementos da matriz  $\mathbf{W}_{(k)}$  com os valores absolutos dos resíduos de acordo com a etapa 10 é feita através do método Mínimos Quadrados Reponderados Iterativamente *Iteratively Reweighted Least Squares* (ASTER *et al.*, 2019; SCALES e GERSZTENKORN, 1988, p. 46) para obter um corpo estimado que minimiza a norma-1 dos resíduos entre os dados observados e preditos (Equação 1.6). Nesse caso, o corpo estimado é convenientemente chamado de *solução L1*.

## 1.4 Considerações práticas

Nesta seção são apresentados alguns aspectos práticos de como definir o conjunto de valores de profundidade do topo  $z_0$  do prisma mais raso, a intensidade de magnetização total  $m_0$ , a aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 1.2), os pesos  $\alpha_\ell$  (Equação 1.3) das funções de vínculos  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22) e os limites  $p_l^{\min}$  e  $p_l^{\max}$  dos vínculos de desigualdade (Equação 1.4).

Inicialmente, se calcula a redução ao polo da anomalia de campo total observada. Essa é uma etapa dupla: ele permite a verificação dos valores usados para a direção de magnetização total (declinação  $D$  e inclinação  $I$ ) e é utilizado para estimar as dimensões horizontais da fonte alvo. Se a fonte alvo possui uma direção de magnetização uniforme com valores de declinação e inclinação próximos daqueles escolhidos para  $D$  e  $I$ , a anomalia reduzida ao polo (anomalia RTP) é predominantemente positiva sobre a fonte alvo e decai a zero perto de seus limites laterais. Através da anomalia RTP, é possível definir os limites  $p_l^{\min}$  e  $p_l^{\max}$  (Figura 1.8) dos vínculos de desigualdade (Equação 1.4) e uma aproximação inicial cilíndrica  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$ , isto é, todos os prismas que formam  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  possuem os vértices definidos por uma mesma distância radial constante  $r_0$  e a mesma origem  $(x_0, y_0)$ . Nessa etapa, os pesos são  $\alpha_\ell$  (Equação 1.3) estabelecidos iguais a zero e se define uma malha de

valores para a profundidade do topo  $z_0$ , intensidade de magnetização total  $m_0$  e espessura  $dz$  que produz, sem grande rigor, um ajuste entre dados observados  $\mathbf{d}^o$  e dados preditos  $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$ .

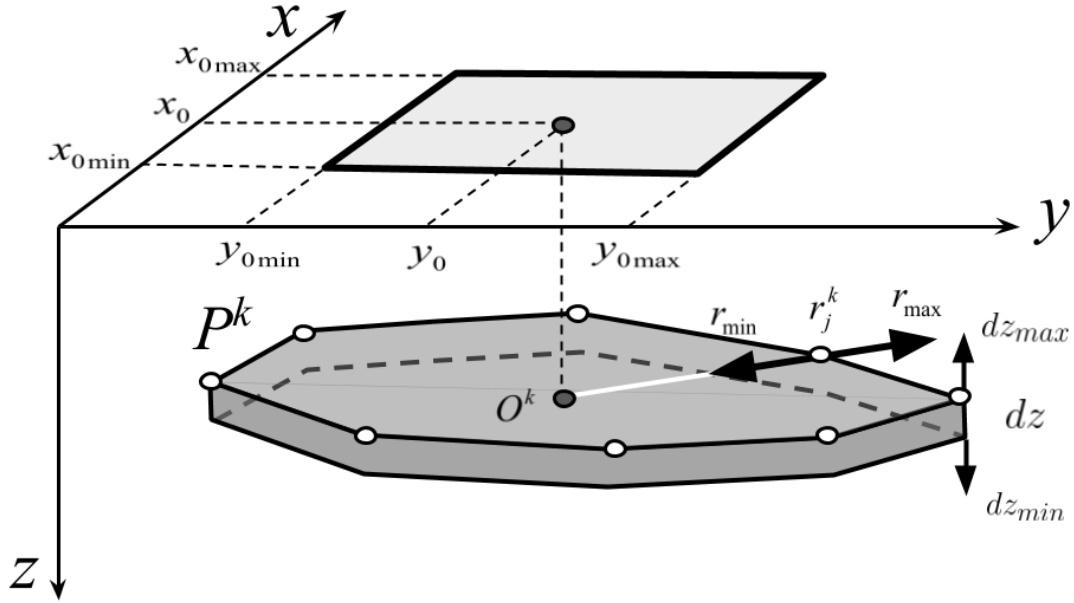


Figura 1.8: Desenho esquemático dos vínculos de desigualdade. A figura exhibe o prisma  $P^k$  e os intervalos de máximo e mínimo de  $r_j^k$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  e  $dz$ .

Um segundo aspecto crucial desse algoritmo consiste em definir os valores dos pesos  $\alpha_\ell$  (Equação 1.3). Não existe uma regra analítica para defini-los e seus valores podem depender nas particularidades da área de estudo e do conjunto de dados observados. Para contornar esse problema, os pesos  $\alpha_\ell$  são definidos da seguinte maneira:

$$\alpha_\ell = \tilde{\alpha}_\ell \frac{E_\phi}{E_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, 5, \quad (1.25)$$

onde  $\tilde{\alpha}_\ell$  é um escalar positivo e  $E_\phi/E_\ell$  é o fator de normalização. Nessa equação,  $E_\ell$  representa o traço da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_\ell$  (Equações 1.9, 1.13, 1.17, 1.21, 1.24) da  $\ell$ -ésima função de vínculo  $\varphi_\ell(\mathbf{p})$  (Equações 1.7, 1.10, 1.14, 1.18, 1.22). A constante  $E_\phi$  é o traço da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_\phi(\hat{\mathbf{p}}_{(0)})$  (etapa 2 do algoritmo) da função *data-misfit*  $\phi(\mathbf{p})$  (Equação 1.6) computada na iteração  $k = 0$ , com a aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}_{(0)}$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  (Equação 1.2). Essa estratégia empírica permite definir indiretamente os pesos  $\alpha_\ell$  (Equação 1.3) pela utilização dos pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  (Equação 1.25), o quais são dependentes menos das características particulares do

problema. Baseado em experiência prática, os valores iniciais propostos aqui para os pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_\ell$  se a função *data-misfit* é definida pela Equação 1.5 são:  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-7}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ . Para o caso no qual a função *data-misfit* é definida pela Equação 1.6, a recomendação é:  $\tilde{\alpha}_1 = 10^{-3}$ ,  $\tilde{\alpha}_2 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_3 = 10^{-4}$ ,  $\tilde{\alpha}_4 = 10^{-6}$ , e  $\tilde{\alpha}_5 = 10^{-5}$ . Esses valores são comumente refinados de acordo com a informação a priori sobre a complexidade da fonte alvo. Por exemplo, ao aumentar ou diminuir valor de  $\tilde{\alpha}_1$ , força-se que o corpo estimado tenha fatias horizontais mais ou menos suaves; ao aumentar ou diminuir o valor de  $\tilde{\alpha}_3$ , força-se que o corpo estimado seja mais ou menos vertical. Os pesos normalizados  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2$ , e  $\tilde{\alpha}_3$  são comumente usados para introduzir informação a priori sobre o formato da fonte alvo. O peso normalizado  $\tilde{\alpha}_4$  é geralmente usado como um parâmetro de regularização puramente matemática para obter soluções estáveis. Finalmente, o peso normalizado  $\tilde{\alpha}_5$  é usualmente escolhido com o propósito de obter um corpo estimado com a profundidade da base mais raso o possível.

# Referências Bibliográficas

- ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2019, *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier. ISBN: 978-0-12-804651-7.
- BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., MEDEIROS, W. E., 1999, “Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations”, *Geophysics*, v. 64, n. 3, pp. 754–764. doi: 10.1190/1.1444585.
- CLAERBOUT, J. F., MUIR, F., 1973, “ROBUST MODELING WITH ERRATIC DATA”, *Geophysics*, v. 38, n. 5, pp. 826–844. doi: 10.1190/1.1440378.
- FARQUHARSON, C. G., OLDENBURG, D. W., 1998, “Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure”, *Geophysical Journal International*, v. 134, n. 1 (07), pp. 213–227. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1046/j.1365-246x.1998.00555.x.
- GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V., 2013, *Matrix Computations (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences)*. Johns Hopkins University Press. ISBN: 978-1-4214-0794-4.
- HORN, R. A., JOHNSON, C. R., 1991, *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press. ISBN: 0-521-30587-X.
- OLIVEIRA JR., V. C., SALES, D. P., BARBOSA, V. C. F., et al., 2015, “Estimation of the total magnetization direction of approximately spherical bodies”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 215–232. doi: 10.5194/npg-22-215-2015.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, “3-D radial gravity gradient inversion”, *Geophysical Journal International*, v. 195, n. 2, pp. 883–902. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggt307.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., SILVA, J. B. C., 2011, “Source geometry estimation using the mass excess criterion to constrain 3-D radial

- inversion of gravity data”, *Geophysical Journal International*, v. 187, n. 2, pp. 754–772. ISSN: 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05172.x.
- PLOUFF, D., 1976, “Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections”, *Geophysics*, v. 41, n. 4, pp. 727–741. ISSN: 0016-8033. doi: 10.1190/1.1440645.
- SCALES, J. A., GERSZTENKORN, A., 1988, “Robust methods in inverse theory”, *Inverse Problems*, v. 4, n. 4 (oct), pp. 1071–1091. doi: 10.1088/0266-5611/4/4/010.
- SEBER, G. A. F., WILD, C. J., 2003, *Nonlinear regression*. John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-47135-6.
- SILVA, J. B., CUTRIM, A. O., 1989, “A robust maximum likelihood method for gravity and magnetic interpretation”, *Geoexploration*, v. 26, n. 1, pp. 1 – 31. ISSN: 0016-7142. doi: 10.1016/0016-7142(89)90017-3.
- SILVA, J. B., HOHMANN, G. W., 1983, “Nonlinear magnetic inversion using a random search method”, *Geophysics*, v. 48, n. 12, pp. 1645–1658. doi: 10.1190/1.1441445.
- UIEDA, L., BARBOSA, V. C. F., 2012, “Robust 3D gravity gradient inversion by planting anomalous densities”, *Geophysics*, v. 77, n. 4, pp. G55–G66. doi: 10.1190/geo2011-0388.1.
- UIEDA, L., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2013, “Modeling the Earth with Fatiando a Terra”. In: van der Walt, S., Millman, J., Huff, K. (Eds.), *Proceedings of the 12th Python in Science Conference*, pp. 96–103. doi: 10.25080/Majora-8b375195-010.
- VITAL, L. B., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, “Radial magnetic inversion to retrieve the geometry of 3D sources”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2019*, pp. 1754–1758. doi: 10.1190/segam2019-3215805.1.