

A Análise Assintótica Realmente Faz o Que Se Propõe?

Na postagem passada, eu afirmei que com a **notação assintótica**, podemos realizar a análise da eficiência do algoritmo levando em consideração apenas o **termo de ordem superior** e **ignora os valores constantes**. Será que isso é verdade? Como podemos provar?

Como veremos, a prova é muito simples. Para tal, temos que:

$$T(n) = a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$$

Dado isso, queremos provar que:

$$T(n) = O(n^k)$$

A nossa prova se resume a demonstrar que o enunciado acima é verdade.

Relembrando a definição da notação O , para demonstrar que $T(n) = O(g(n))$ basta encontrarmos duas constantes positivas c e m tal que $f(n) \leq c * g(n)$ para todo $n \geq m$.

Então, vamos escolher:

$$m=1 \quad c = |a_k| + |a_{k-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|$$

Dado isso precisamos provar que:

$$\forall n \geq 1, T(n) \leq c \cdot n^k$$

Substituindo o valor de c:

$$T(n) \leq (|a_k| + |a_{k-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) \cdot n^k$$

Expandindo os valores dentro dos parêntes à direita da expressão, temos:

$$T(n) \leq |a_k|n^k + \dots + |a_1|n^k + |a_0|n^k$$

Expandindo T(n):

$$a_k \cdot n^k + \dots + a_1 n + a_0 \leq |a_k|n^k + \dots + |a_1| \cdot n^k + |a_0| \cdot n^k$$

Analisando apenas os coeficientes, temos dois cenários possíveis, (i) todos os coeficientes são positivos ou (ii) pelo menos um coeficiente é negativo. Em (i), as duas expressões são equivalentes. Em (ii), **a expressão da esquerda é necessariamente menor do que a da direita**, pois a da direita utiliza o operador módulo para todos os coeficientes. **Se considerarmos apenas as variáveis, a parte da direita é necessariamente maior**, pois todas as variáveis estão elevadas à k , enquanto que na expressão à esquerda, com exceção da primeira variável, as demais estão elevadas a um valor menor do que k . Então, no geral, **podemos concluir que a expressão é verdadeira**.

Com isso, fica provado que ao utilizar a notação O , **ignoramos os fatores de constantes** (os coeficientes do polinômio $T(n)$ no exemplo a cima) e **os termos de ordem inferior** (as variáveis com potência menor do que k).

Por isso, que a notação assintótica é tão útil. Como discutido anteriormente, na prática, ela possibilita a análise do algoritmo ignorando fatores como o código, compilador, processos em *background*, sistema operacional, arquitetura da máquina, processador, etc.

Na próxima postagem, vamos aprender a aplicar a análise assintótica em algoritmos com laços e condicionais.

Sumário

Nesta postagem, você aprendeu sobre:

- A prova de que a análise assintótica ignora os fatores constantes e os termos de ordem inferior. Na prática, isso significa ignorar fatores como código, compilador, processos em *background*, sistema operacional, arquitetura da máquina, processador, etc.