

Le Jeu de Voronoï

Cheng Léo

2024

Numéro de candidat : 12426

1 Introduction

Le jeu de Voronoï consiste à maximiser la surface occupée sur un diagramme de Voronoï. Alors que le diagramme de Voronoï permet de modéliser des phénomènes naturels comme l'évolution de colonies de champignons ou le développement du pelage d'une girafe, le jeu de Voronoï s'intéresse à l'optimisation de l'espace comme l'installation d'une nouvelle antenne de télécommunication ou une nouvelle boutique, ou encore le placement d'un joueur sur un terrain.

2 Le diagramme de Voronoï

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On note d la distance associée à la norme N .

On considère un ensemble G de points de S que l'on appelle *graine* ou *germe*.

A chaque germe $p \in G$, on définit la *Région* ou *Cellule* de Voronoï associée à p définie par

$$R(p) = \{x \in E : \forall q \in G, d(x, p) \leq d(x, q)\}$$

On appelle *Paroi* ou *Arête* entre les cellules p et q le segment

$$P(p, q) = \{x \in E : \forall s \in G, d(x, p) = d(x, q) \leq d(x, s)\}$$

On appelle *Parois* de la cellule de graine p définie par le polygone convexe

$$P(p) = \{x \in E : \exists q \in G, d(x, p) = d(x, q)\} = \bigcup_{q \in G} P(p, q)$$

Un découpage de S en cellules de Voronoï est appelé *diagramme de Voronoï*.

3 Propriétés

Proposition 3.1. *Les arêtes des cellules de Voronoï sont incluses dans les médiatrices des segments reliant deux graines.*

Démonstration. Soit p un point d'une arête séparant les cellules $R(g_i)$ et $R(g_j)$. Alors $d(p, g_i) = d(p, g_j)$, donc p appartient à la médiatrice entre g_i et g_j . \square

Proposition 3.2. *Les sommets des cellules de Voronoï sont les centres des cercles circonscrits aux triangles formés par les graines tels qu'il n'existe pas de graines à l'intérieur de ce cercle.*

Proposition 3.3. *Les cellules de Voronoï sont des polygones ou surfaces convexes.*

Proposition 3.4. *Si les graines n'appartiennent pas à une même droite, alors le diagramme de Voronoï est un ensemble de segments et de demi-droites tous reliés entre eux. Autrement dit, si on considère le graphe non orienté dont les sommets correspondent aux sommets des cellules du diagramme et les arêtes aux parois finies, alors ce graphe est connexe.*

Proposition 3.5. *Une cellule de Voronoï a en moyenne moins de 6 côtés.*

Démonstration. Soit n_s le nombre de sommets et n_a le nombre d'arêtes du diagramme de Voronoï, n le nombre de graines.

Montrons dans un premier temps que $n_a \leq 3n - 6$ et $n_s \leq 2n - 5$.

D'une part, afin d'appliquer le théorème d'Euler sur un polyèdre déformable en une sphère, on ajoute un sommet s_∞ au diagramme de Voronoï.

Ce sommet s_∞ représente l'extrémité des demis-droites du diagrammes de Voronoï.

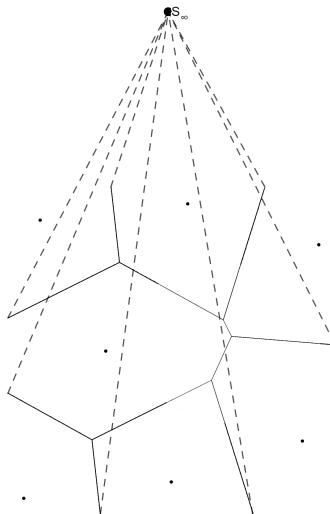


FIGURE 1 – Exemple d'ajout d'un point s_∞ sur un diagramme de Voronoï

Alors, d'après le théorème d'Euler, $(n_s + 1) - n_a + n = 2$.

D'autre part, d'après la proposition 3.2, tous les sommets du diagramme sont reliés au moins à trois arêtes et chaque arête ne compte qu'au plus deux extrémités. Donc, en sommant sur tous les sommets et arêtes, $3(n_s + 1) \leq 2n_a$

Ainsi, d'une part, $3(2 + n_a - n) \leq 2n_a$

donc $n_a \leq 3n - 6$

D'autre part, $3(n_s + 1) \leq 2(n_s - 1 + n)$

donc $n_s \leq 2n - 5$ Posons n_{moyen} le nombre moyen de côtés d'une cellule de Voronoï.

Alors $n_{moyen} \leq \frac{2n_a}{n} \leq 6 - \frac{12}{n} \leq 6$ car chaque arête participe à deux cellules.

□

Proposition 3.6. *Le calcul d'un diagramme de Voronoï nécessite une complexité en $\mathcal{O}(n \log(n))$.*

Démonstration. Montrons que la complexité minimale pour le calcul d'un diagramme de Voronoï est en $\mathcal{O}(n \log(n))$ par réduction du problème de tri par comparaison.

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble de n réels à trier.

Posons $G = \{(0, 1), (x_1, 0), \dots, (x_n, 0)\}$ un ensemble de $n + 1$ graines.

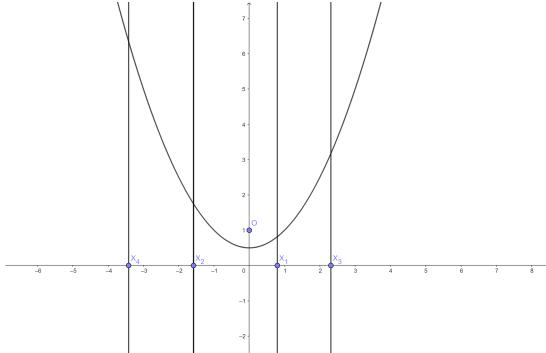


FIGURE 2 – Exemple d'ensemble de graines associées

Le calcul du diagramme de Voronoï associé permet alors de trier ces n réels.

En effet, la cellule correspondante à la graine $(0, 0)$ est voisine des autres graines car les autres graines appartiennent toutes à la droite d'équation $y = 0$ donc les autres cellules ne sont séparées que par $n - 1$ droites verticales.

Ainsi, pour chaque graine $(x_i, 0)$, il existe au moins un point appartenant à la parabole de foyer $(0, 1)$ et de droite directrice $y = 0$, qui est situé sur la droite $x = x_i$, donc qui est plus proche de $(0, 1)$ et de $(x_i, 0)$ que des autres graines.

Or le calcul du diagramme de Voronoï permet d'énumérer les voisins de $(0, 1)$ dans le sens trigonométrique, donc à n permutations circulaires près, permet de trier les n réels.

Ainsi, puisque la complexité requise pour trier n réels est en $\mathcal{O}(n \log(n))$, la complexité minimale pour calculer une diagramme de Voronoï est en $\mathcal{O}(n \log(n))$. \square

4 Structures de données

On se restreint ici à un diagramme de Voronoï à l'intérieur d'une fenêtre rectangulaire, dont les bords peuvent être considérés comme des cellules de Voronoï.

Un diagramme de Voronoï pourrait s'apparenter à un graphe étiqueté pondéré. Cependant, plutôt qu'une matrice d'adjacence ou une liste d'adjacence, on emploiera des listes triplement chaînées. Chaque cellule est représentée par une liste doublement chaînée circulaire dont chaque maillon incarne une arête de la cellule et contient un pointeur vers la cellule voisine correspondante. Ces listes triplement chaînées seront stockées dans un tableau dynamique qui contient les autres informations nécessaires comme l'emplacement de la graine.

5 Construction du diagramme de Voronoï

5.1 Algorithme de Green et Sibson

L'algorithme de Green et Sibson est un algorithme incrémental, c'est-à-dire qu'il procède par ajout successif des graines sur un diagramme de Voronoï. Ainsi, puisque l'ajout d'une nouvelle graine

n'affecte pas la totalité du diagramme, le calcul d'un diagramme de Voronoï après l'ajout d'une nouvelle graine ne nécessite pas de recalculer la totalité du diagramme.

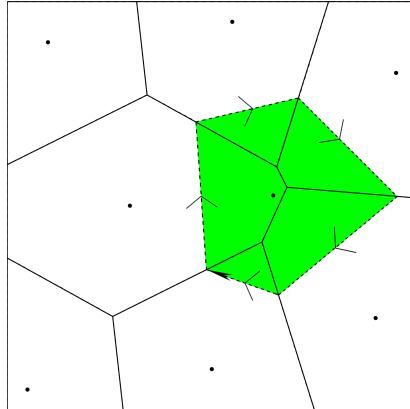


FIGURE 3 – Ajout d'une nouvelle graine sur un diagramme de Voronoï à l'aide de l'algorithme de Green et Sibson

Proposition 5.1. *Si g' est une nouvelle graine à placer dans un diagramme de Voronoï et g_0 une graine de ce diagramme, alors l'intersection de la médiatrice entre g' et g_0 et $R(g_0)$, éventuellement vide, correspond à la paroi $P(g', g_0)$ entre g' et g_0 dans le nouveau diagramme.*

Algorithme 1 : Algorithme de Green et Sibson

Données : un diagramme de Voronoï V

Entrées : g une nouvelle graine à ajouter

Déterminer la cellule p dans laquelle se trouve g ;

Déterminer les intersections I_i et I_f de la médiatrice entre p et g avec $P(p)$;

Ajouter $[I_i I_f]$ à $P(p, g)$;

Supprimer les parois de $P(p)$ plus proches de g que de p entre I_i et I_f ;

Déterminer $v_i \in G$ tel que $I_i \in P(p, v_i)$;

tant que v_i est différent de p **faire**

Déterminer les intersections I_1 et I_2 de la médiatrice entre v_i et g avec $P(v_i)$;

Ajouter $[I_1 I_2]$ à $P(v_i, g)$;

Supprimer les parois de $P(v_i)$ plus proches de g que de v_i entre I_1 et I_2 ;

$v_i \leftarrow v \in G$ tel que I_1 ou $I_2 \in P(v, v_i)$ et v non visité au tour de boucle précédent;

fin

La complexité de l'algorithme de Green et Sibson pour l'ajout d'une nouvelle graine est en $\mathcal{O}(n)$ avec n le nombre de graines.

5.2 Algorithme de Fortune

L'algorithme de Fortune est un algorithme par balayage. Étant donné que chaque graine n'a qu'une influence limitée sur le diagramme de Voronoï, on peut déterminer les cellules qui ne seront pas affectées par l'ajout d'une nouvelle graine en-dessous d'une certaine ligne. La complexité de l'algorithme de Fortune pour le calcul d'un diagramme de Voronoï est en $\mathcal{O}(n \log(n))$ avec n le nombre de graines.

Pour une certaine droite $y = K$, on définit alors la plage comme la succession d'arcs de paraboles qui délimitent la partie du diagramme qui ne sera pas affectée par l'ajout d'une nouvelle graine dans le demi-plan $y \leq K$. La plage est stockée dans une liste doublement chaînée, mais il est possible de la stocker dans un arbre binaire de recherche équilibré ou une liste à enjambements.

Remarque. Toute droite verticale ne possède qu'un point d'intersection avec la plage.

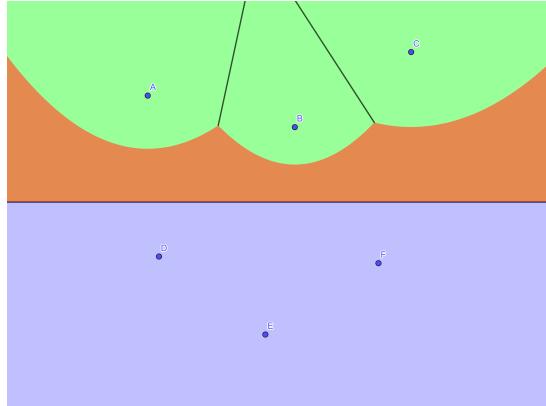


FIGURE 4 – Diagramme de Voronoï en cours de construction à l'aide de l'algorithme de Fortune

Ainsi, on définit deux types d'événements :

- **Un événements de Site** correspond à l'ajout d'une nouvelle graine, au moment où la ligne de balayage passe par une graine.
- **Un événements de Cercle** correspond à la disparition d'un arc de parabole, au moment où une nouvelle graine ajoutée au niveau de la ligne de balayage n'est pas voisine de la cellule dont l'arc de parabole a disparu..

Proposition 5.2. *Un événement de cercle correspond à l'ajout d'un nouveau sommet du diagramme de Voronoï.*

Algorithme 2 : Algorithme de Fortune

```

Entrées :  $p_1, \dots, p_n$   $n$  points distincts
Initialiser  $T$  une file de priorité
Initialiser Plage une liste doublement chaînée
pour  $i = 1$  à  $n$  faire
| Ajouter  $Site(p_i)$  à  $T$ 
fin
tant que  $T$  n'est pas vide faire
| cas où  $Site(p_i)$  est extrait de  $T$  faire
| | Déterminer  $a(x)$  l'arc de parabole situé au-dessus de  $p_i$ ;
| | Ajouter un arc de parabole correspondant à  $p_i$  à Plage;
| | Ajouter une paroi entre les Cellule  $p_i$  et  $x$ ;
| | Supprimer les événements de Cercle impliquant  $x$ 
| fin
| cas où  $Cercle(x, y, z)$  est extrait de  $T$  faire
| | Supprimer  $a(y)$  de Plage;
| | Ajouter le point d'intersection de  $x, y$  et  $z$  au diagramme
| fin
fin
retourner le diagramme

```

6 Stratégies de jeu

6.1 Force brute

La stratégie de force brute consiste à essayer tous les points possibles pour ne conserver que la graine qui occupe la surface la plus grande. Comme il est impossible de tester tous les points, on se restreint à un maillage du diagramme.

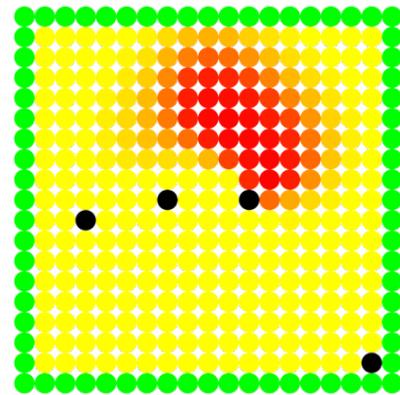
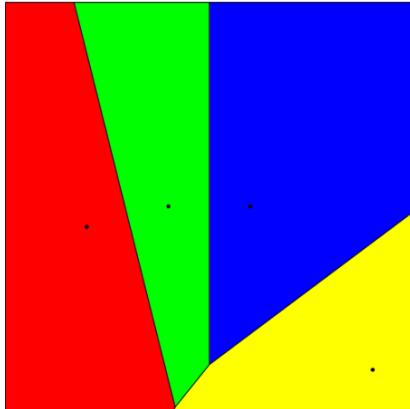
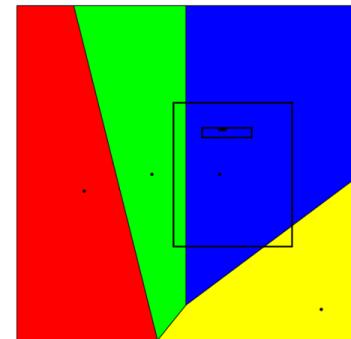


FIGURE 5 – Exemple de résolution par force brute sur un diagramme

6.2 Monte-Carlo

En constatant que la solution optimale peut être approchée par des points proches, la stratégie de Monte-Carlo consiste à prendre un certain nombre de points aléatoires et à les classer par surface occupée. Puis, comme un algorithme génétique, on sélectionne des nouveaux points à tester entre les deux points de plus grande surface.



6.3 K-moyennes

La stratégie des k-moyennes cherche à approcher les germes déjà présents par la méthode des k-moyennes. Toutefois, elle est peu performante si les graines déjà présents sont très proches. Mais elle reste intéressante pour son utilisation du diagramme de Voronoï dans la méthode des k-moyennes.

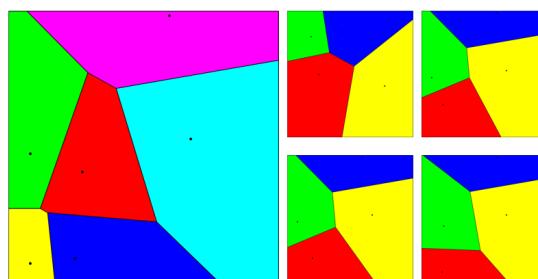


FIGURE 6 – Exemple d'exécution de l'algorithme des k-moyennes sur un diagramme de Voronoï

6.4 Glouton

Un point occupant la plus grande surface, c'est-à-dire la solution optimale, est entouré sur une large zone de solutions approchées. La stratégie gloutonne teste alors le diagramme en neuf points, avant de recommencer autour du point de plus grande surface occupée. Le temps de calcul et la surface occupée de la stratégie gloutonne se révèle alors peu variable.

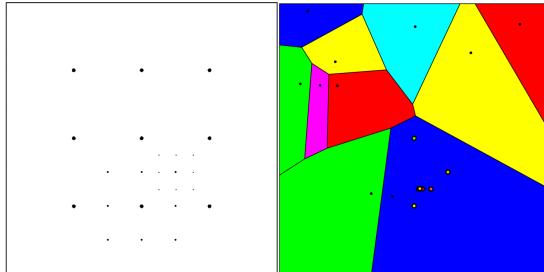


FIGURE 7 – Exemple d'exécution de l'algorithme glouton sur un diagramme de Voronoï

Références

- [1] Hee-Kap AHN et al. “Competitive facility location : the Voronoi game”. In : *Theoretical Computer Science* 310 (2004), p. 457-467.
- [2] Mark DE BERG et al. *Computational Geometry, Algorithms and Applications*. Third Edition. Springer, 2008, p. 147-172.
- [3] Jean-Daniel BOISSONNAT. “Géométrie algorithmique : des données géométriques à la géométrie des données”. In : sous la dir. de Collège de FRANCE : FAYARD. 2017.
- [4] Steven FORTUNE. “A Sweepine Algorithm for Voronoi Diagrams”. In : *Algorithmica* 1 (1987). Sous la dir. de SPRINGER-VERLAG, p. 153-174.
- [5] Peter J. GREEN et Robin SIBSON. “Computing Dirichlet tessellations in the plane”. In : *Computer Journal* 21.2 (1978), p. 168-173.
- [6] Franck HETROY. *Un petit peu de géométrie algorithmique*. Ensimag, cours : Géométrie algorithmique. 2012.
- [7] Guillaume REUILLER. “Formes mathématiques : Les diagrammes de Voronoï”. In : *Revue du Palais de la Découverte* 359 (nov. 2008), p. 52-55.