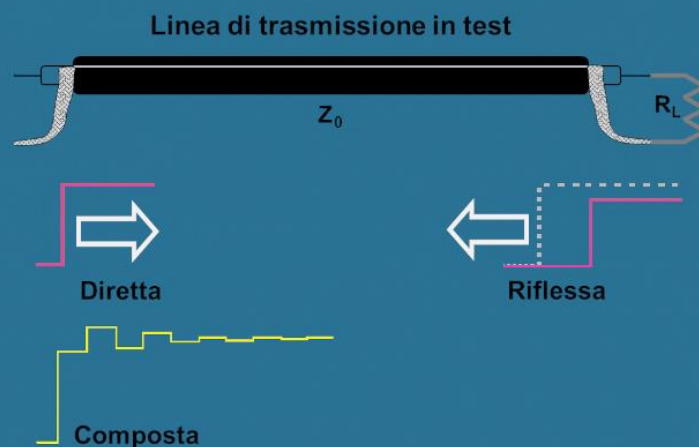
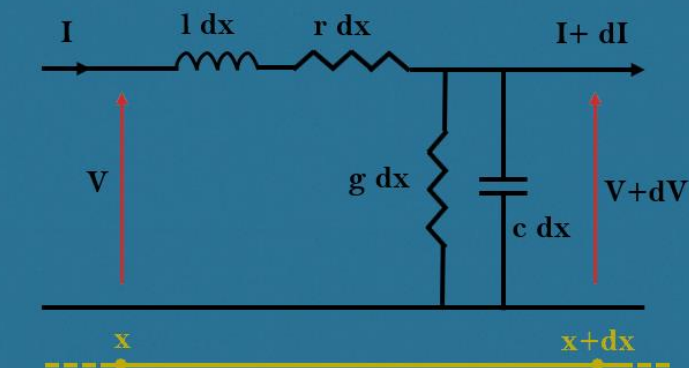


ALLA SCOPERTA DELLE RIFLESSIONI INVISIBILI

UN VIAGGIO NELLA RIFLETTOMETRIA NEL DOMINIO DEL TEMPO



Leonardo Chieco

Alla scoperta delle riflessioni invisibili: un viaggio nella Riflettometria nel Dominio del Tempo

La riflettometria nel dominio del tempo (TDR) è una delle tecniche più potenti e affascinanti per “vedere” ciò che normalmente rimane nascosto all'interno di un cavo o di una linea di trasmissione. Con un semplice impulso o gradino, è possibile rivelare discontinuità, adattamenti imperfetti e variazioni di impedenza che alterano la propagazione dei segnali.

In questo tutorial intraprenderemo un viaggio che parte dai fondamenti teorici delle linee di trasmissione e del coefficiente di riflessione, per arrivare al diagramma di rimbalzo e alle simulazioni pratiche con LTspice. Verranno analizzati esempi concreti, dal caso di carichi aperti o cortocircuitati fino a configurazioni più complesse con linee multiple, mostrando come interpretare i risultati e come utilizzarli per diagnosticare problemi reali.

L'obiettivo è guidare il lettore a comprendere in profondità la TDR, collegando teoria, simulazione e pratica sperimentale, così da poterla utilizzare come strumento di analisi e progettazione nei campi dell'elettronica, delle telecomunicazioni e della diagnostica dei sistemi.

Buona lettura!

L'autore

Leonardo Chieco è un ingegnere elettronico con oltre 20 anni di esperienza nella progettazione e sviluppo di software per il controllo dell'automazione (PC/PLC), nella progettazione di schede elettroniche per applicazioni industriali, firmware, robotica e mecatronica.

LinkedIn: <https://www.linkedin.com/in/leonardo-chieco-53550b129/>

1. Introduzione

La riflettometria nel dominio del tempo, nota con l'acronimo TDR (Time Domain Reflectometry), è una tecnica di misura nata negli anni '60 e ancora oggi largamente utilizzata in moltissimi ambiti dell'ingegneria elettrica, elettronica e delle telecomunicazioni. L'idea alla base è concettualmente semplice ma estremamente potente: si invia un fronte di tensione o corrente molto rapido lungo una linea di trasmissione e si osserva come il segnale venga riflesso dalle eventuali discontinuità che incontra. Dal tempo di ritorno del riflesso è possibile ricavare la distanza alla quale si trova l'anomalia, mentre dall'ampiezza e dalla forma dell'onda riflessa si deduce la natura della discontinuità.

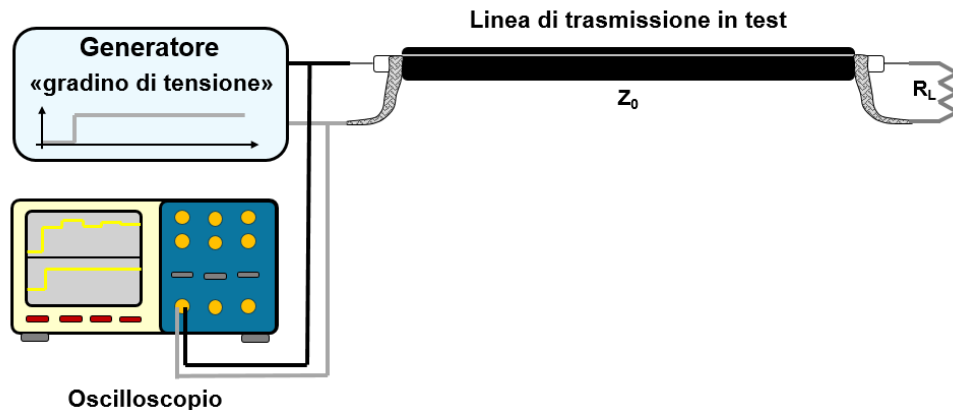


Figura 1: Principio di funzionamento della TDR

Il TDR può essere quindi paragonato a un piccolo “radar elettrico”: al posto delle onde elettromagnetiche irradiate nello spazio, si utilizza un impulso guidato lungo un cavo o una pista di circuito stampato, e invece di localizzare aeroplani o ostacoli si individuano aperture, cortocircuiti, cambi d'impedenza, connessioni difettose o giunzioni non perfettamente adattate. Questo approccio ha reso la TDR uno strumento fondamentale sia in laboratorio sia in campo, per applicazioni che spaziano dalla diagnostica dei cavi coassiali fino al controllo della qualità dei PCB ad alta velocità.

Uno dei motivi principali per cui la riflettometria nel dominio del tempo è tanto rilevante è la crescente necessità di integrità del segnale nei sistemi moderni. Le comunicazioni digitali ad alta velocità, l'elettronica RF, i bus differenziali nelle schede madri e nelle interfacce di memoria richiedono linee di trasmissione con

impedenza estremamente controllata. Un disadattamento, anche piccolo, può generare riflessioni che degradano la forma d'onda, causando errori di comunicazione, jitter e perdita di margine nel budget del segnale.

Inoltre, la TDR non è utile soltanto in fase di sviluppo e caratterizzazione, ma anche per la manutenzione e la diagnostica. Un cavo interrato che presenta un'interruzione può essere ispezionato senza doverlo scavare o sostituire integralmente: basta una misura TDR per determinare a che distanza dal punto di iniezione si trova l'anomalia. Analogamente, nel caso di un harness automobilistico, una linea elettrica in un aeroplano o un cavo coassiale in un impianto di telecomunicazioni, la TDR permette di ridurre drasticamente i tempi di troubleshooting.

C'è anche un aspetto economico e ambientale: localizzare un difetto con precisione significa riparare solo ciò che serve, evitando sostituzioni massicce e costose.

Il concetto chiave della TDR è la riflessione dovuta a disadattamento di impedenza. Una linea di trasmissione ideale, se perfettamente adattata al carico, non genera alcun riflesso: tutta la potenza viene assorbita dal carico stesso. Ma se il carico presenta un'impedenza diversa da quella caratteristica della linea, una parte del segnale torna indietro verso la sorgente. La misura di questo riflesso consente di calcolare il cosiddetto coefficiente di riflessione, che indica l'entità e la direzione del fenomeno.

L'informazione spaziale, cioè la posizione della discontinuità, è ottenuta correlando il tempo di volo del segnale riflesso con la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica nel mezzo. Poiché la velocità dipende dalla costante dielettrica del materiale isolante, la TDR può anche fornire informazioni sulle proprietà fisiche del mezzo trasmissivo. Non a caso, oltre alle applicazioni elettroniche, la tecnica è ampiamente usata in geotecnica e agricoltura per misurare l'umidità del suolo, dal momento che l'acqua modifica la costante dielettrica del terreno.

La versatilità della riflettometria nel dominio del tempo si riflette nella grande varietà di campi applicativi:

1. Telecomunicazioni e reti

- Cavi coassiali: la TDR viene usata per localizzare aperture, corti o giunzioni difettose lungo i cavi RF.
- Cavi in rame per trasmissione dati (Ethernet, telefonia): la qualità della terminazione e la presenza di diafonia o discontinuità può essere diagnosticata con facilità.

2. Elettronica digitale ad alta velocità

- PCB (Printed Circuit Boards): la caratterizzazione delle linee di trasmissione su schede multistrato richiede la verifica dell'impedenza caratteristica. La TDR permette di misurare variazioni dovute a differenze di larghezza della pista, variazioni del dielettrico o difetti di fabbricazione.
- Interfacce ad alta velocità (DDR, PCIe, USB, HDMI): qui la minima riflessione può compromettere il corretto funzionamento, perciò la TDR diventa uno strumento essenziale nel debug e nella validazione.

3. Aerospazio e automotive

Cablaggi complessi: nei sistemi avionici e automobilistici, individuare un guasto elettrico richiede tecniche non invasive e rapide. La TDR consente di localizzare i difetti senza smontare l'intero cablaggio.

4. Energia e impianti elettrici

Cavi di potenza: una misura TDR può individuare punti in cui l'isolamento è degradato, localizzando il problema prima che si trasformi in un guasto catastrofico.

5. Applicazioni scientifiche e industriali

- Geotecnica e agricoltura: sonde TDR vengono inserite nel terreno per misurare il contenuto d'acqua. La variazione della velocità di propagazione del segnale, infatti, è correlata al livello di umidità.

- Controllo di qualità: durante la produzione di cavi o PCB, la TDR è usata per garantire che l'impedenza resti nei limiti specificati lungo tutta la lunghezza del prodotto.

Tipologie di TDR

Esistono due tipologie di TDR che si differenziano per il tipo di segnale utilizzato per sollecitare la linea di trasmissione:

- Sorgente impulsiva ideale (ad esempio un generatore di Dirac o un impulso rettangolare di brevissima durata).
- Sorgente a gradino (step), che è quello normalmente assunto nella teoria della TDR.

Caratteristica	Impulso	Gradino
Forma del segnale	Breve impulso con fronti di salita e discesa rapidi	Un fronte di salita che porta la tensione da 0 a un valore costante.
Energia disponibile	Limitata: tutta concentrata in un pacchetto. Dopo il passaggio, non resta nulla.	Praticamente infinita nel tempo: la sorgente continua ad alimentare la linea.
Risposta al carico adattato	L'impulso arriva al carico, viene assorbito, e la tensione torna a zero.	Il gradino arriva al carico e rimane stabile al valore determinato dal partitore $R_S - Z_L$. La tensione al carico resta costante.
Visibilità delle riflessioni	Le riflessioni appaiono come impulsi secondari successivi al principale, di ampiezza proporzionale ai coefficienti di riflessione.	Le riflessioni si vedono come salti o gradini aggiuntivi che modificano il livello della tensione al carico nel tempo.
Interpretazione pratica	Richiede strumenti con alta sensibilità e ottimo rapporto segnale/rumore, perché i pacchetti riflessi possono avere ampiezza molto piccola.	Molto intuitivo: la tensione sale a un livello, poi eventuali riflessioni la fanno "scalettare" fino al valore finale.
Uso tipico	Tecniche particolari di caratterizzazione veloce, o quando si vuole misurare direttamente la risposta impulsiva del sistema (simile a un'analisi in frequenza).	È lo standard nella TDR classica, perché mostra chiaramente disadattamenti e lunghezze elettriche sotto forma di variazioni di livello.
Vantaggi	Grande risoluzione temporale, adatto a rivelare dettagli fini (equivalente a stimolare con una banda larghissima).	Facile da interpretare, non richiede strumenti sofisticati; riflessioni si sommano visivamente.
Svantaggi	Difficile da generare e misurare con buona ampiezza; interpretazione più complessa perché serve analizzare sequenze di impulsi.	Risoluzione temporale limitata dal fronte di salita del gradino; non fornisce direttamente la risposta in frequenza.

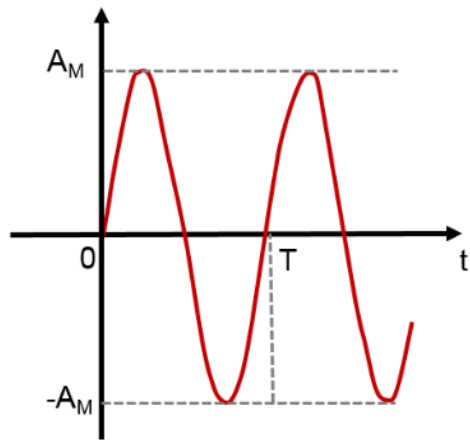
2. Richiami di Teoria delle linee di trasmissione

In questo capitolo verranno introdotti strumenti matematici fondamentali per la comprensione rigorosa della TDR, come il **regime sinusoidale**, l'uso dei **fasori**, i **numeri complessi**, le **derivate**. Si tratta di concetti di base dell'elettrotecnica e dell'analisi matematica, indispensabili per descrivere con precisione il comportamento delle onde su una linea di trasmissione. È bene sottolineare che non è strettamente necessario padroneggiare a fondo tutta la teoria: i concetti più importanti verranno sempre riassunti e spiegati anche in forma **qualitativa e intuitiva**, così da permettere a tutti di seguire il filo del discorso.

Chi desidera evitare i dettagli più matematici può tranquillamente saltare questa sezione, senza compromettere la comprensione del resto del tutorial.

Lo studio dei circuiti elettrici spesso prevede l'analisi di grandezze che variano nel tempo secondo forme arbitrarie: fronti rettangolari, segnali impulsivi, funzioni periodiche complesse. Tuttavia, esiste un caso speciale, talmente importante da meritare una teoria a sé stante, che prende il nome di **regime sinusoidale**.

Si parla di regime sinusoidale quando tutte le grandezze elettriche di un circuito (tensioni e correnti) assumono un **andamento sinusoidale** nel tempo e, cosa ancora più rilevante, hanno tutte la **stessa frequenza**. Possono differire in ampiezza e in fase, ma condividono una frequenza “ f ” comune. Questo accade, ad esempio, quando un circuito lineare viene eccitato da una sorgente sinusoidale: dopo il regime transitorio iniziale, che può anche essere complesso, resta soltanto la risposta forzata a frequenza fissa. In questo contesto le funzioni sinusoidali diventano la lingua naturale con cui descrivere il comportamento del sistema.



$$a(t) = A_M \cos (\omega t + \alpha)$$

A_M = Ampiezza massima

α = fase iniziale ($-\pi < \alpha \leq \pi$) (radianti)

ω = pulsazione (radianti/secondo) = $2 \pi f$

T = periodo (secondi) = $\frac{2 \pi}{\omega}$

f = frequenza = $\frac{1}{T}$ (Hertz)

Il vantaggio del regime sinusoidale è duplice. Da un lato, permette di ridurre l'analisi del circuito a un problema "statico" di proporzioni, perché si può lavorare con fasori invece che con funzioni tempo-dipendenti; dall'altro, rappresenta la base su cui si costruiscono strumenti di analisi più generali come la trasformata di Fourier. Per queste ragioni, in ingegneria elettrica ed elettronica, lo studio del regime sinusoidale è una tappa imprescindibile.

Il passaggio dal dominio del tempo a quello dei fasori è stato formalizzato da Steinmetz, uno dei grandi pionieri dell'elettrotecnica a cavallo tra XIX e XX secolo. La trasformata di Steinmetz non è altro che un modo per rappresentare una funzione sinusoidale come un numero complesso, nel quale l'ampiezza e la fase del segnale sono codificate rispettivamente nel modulo e nell'argomento.

Se consideriamo la funzione sinusoidale $a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$, la trasformata di Steinmetz (che indicheremo con il simbolo \mathcal{S}) gli associa un numero complesso A avente per modulo A_M e argomento α .

$$\mathcal{S}\{ a(t) \} = \mathbf{A} = A_M e^{j\alpha} = A_M (\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad \text{dove } \mathbf{A} \text{ è il fasore di } a(t).$$

Nell'ultimo passaggio sono state applicate le formule di Eulero:

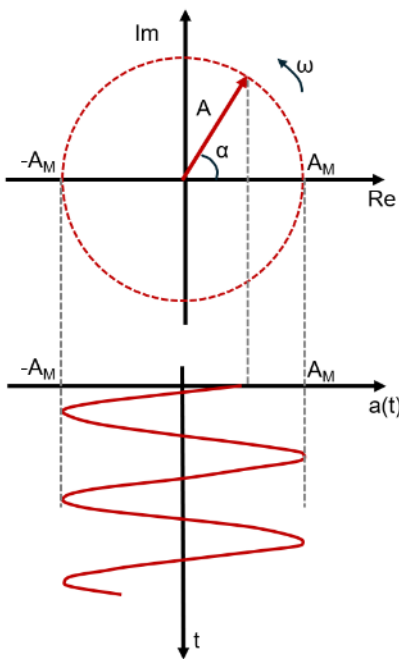
$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

Cerchiamo di dare una interpretazione geometrica a quanto trovato. Al tempo $t=0$, il fasore A forma un angolo α con le ascisse (asse reale), quindi le sue proiezioni sull'asse reale ed immaginario sono rispettivamente $A_M \cos \alpha$ e $A_M \sin \alpha$. Ora,

immaginiamo di far ruotare il fasore con velocità angolare ω . In ogni istante, le proiezioni saranno $A_M \cos(\alpha + \omega t)$ e $A_M \sin(\alpha + \omega t)$, dunque rappresentate dal numero complesso \mathbf{s} che varia nel tempo secondo la relazione:

$$s(t) = A_M (\cos(\alpha + \omega t) + j \sin(\alpha + \omega t)) = A_M e^{j\omega t + \alpha}$$

Dunque, la funzione di partenza $a(t)$ non è altro che la parte reale di questo numero complesso. Ricordiamo che α non varia, e la rotazione è solo legata a ωt .



$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{A} e^{j\omega t} = A_M e^{j\alpha} e^{j\omega t} = A_M e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$a(t) = \text{Re} [\mathbf{A} e^{j\omega t}] = A_M \cos (\omega t + \alpha)$$

Osserviamo che, utilizzando la trasformata, la **dipendenza** esplicita dal **tempo sparisce**, e resta soltanto l'informazione sulla **fase** e **sull'ampiezza**, mentre la frequenza ω è assunta come contesto comune (e sottointeso) a tutto il circuito.

$$\mathcal{S}\{ a(t) \} = A_M e^{j\alpha}$$

L'uso di questa trasformata semplifica enormemente i calcoli. Invece di dover manipolare equazioni differenziali del tempo, diventa possibile trattare un circuito come se fosse governato da leggi algebriche: la legge di Ohm, di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni restano formalmente identiche, ma le grandezze non sono più numeri reali bensì **numeri complessi**. È questa la vera forza della Trasformata di Steinmetz: **trasforma un problema dinamico in uno statico**, a patto che si accetti di lavorare nel **dominio dei fasori**.

Le proprietà di questa trasformata sono ben note e molto utili.

- **Linearità**

$$\mathcal{S} \{ k a(t) + h b(t) \} = k \mathcal{S} \{ a(t) \} + h \mathcal{S} \{ b(t) \} \quad \forall h, k \in \mathbb{R}$$

- **Derivazione**

La derivata temporale di una grandezza corrisponde, nel dominio dei fasori, a una semplice moltiplicazione per $j\omega$.

$$\mathcal{S} \left\{ \frac{d^n a(t)}{dt^n} \right\} = (j\omega)^n \mathcal{S} \{ a(t) \} \quad n: \text{ordine della derivata}$$

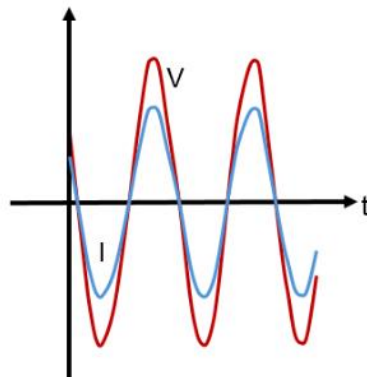
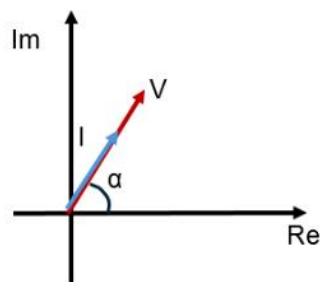
- **Integrazione**

Una integrazione nel tempo di una grandezza corrisponde, nel dominio dei fasori, ad una divisione per $j\omega$.

$$\mathcal{S} \left\{ \int a(t) dt \right\} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{S} \{ a(t) \}$$

Questo legame diretto fra operazioni differenziali e fattori algebrici rende immediato il passaggio dal comportamento fisico degli elementi circuitali alla loro rappresentazione fasoriale.

Un resistore, che in regime stazionario dissipa energia proporzionalmente alla corrente, in regime sinusoidale mantiene esattamente lo stesso comportamento: la sua impedenza è un numero reale, pari al valore della resistenza R .



$$v(t) = R i(t) = R I_M \cos(\omega t + \alpha_i)$$

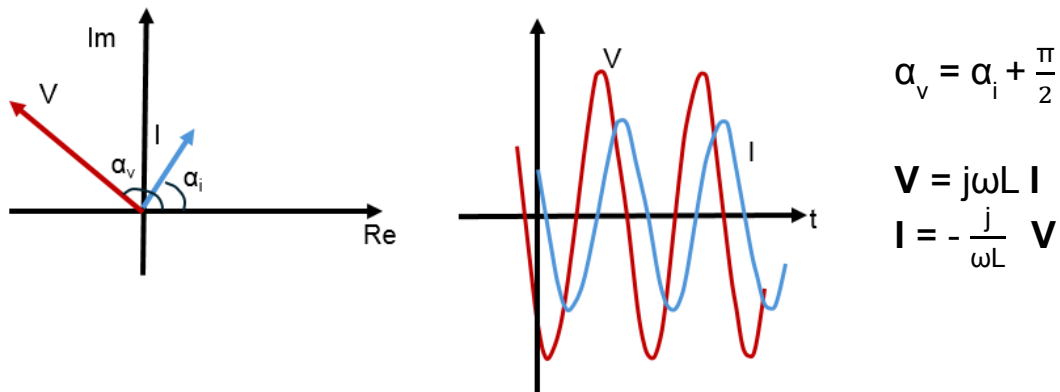
$$i(t) = G v(t) = G V_M \cos(\omega t + \alpha_v)$$

$$\alpha_v = \alpha_i = \alpha$$

$$\mathbf{V} = R \mathbf{I}$$

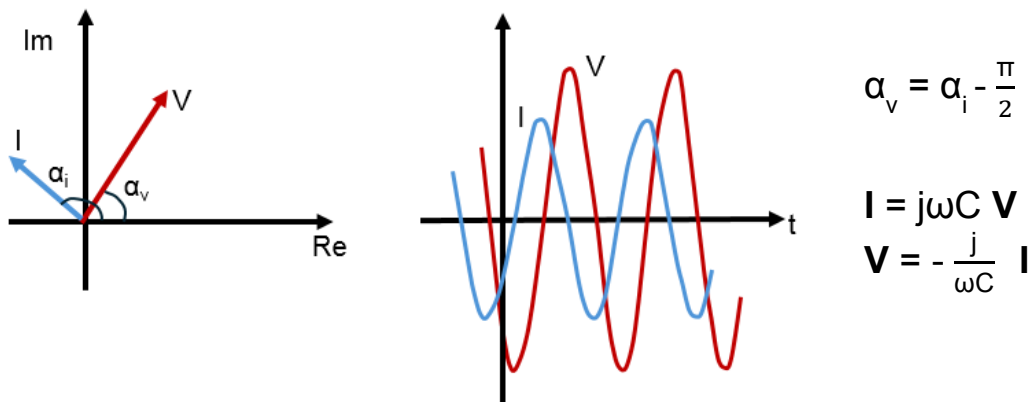
$$\mathbf{I} = G \mathbf{V}$$

Un induttore, la cui tensione è proporzionale alla derivata della corrente, diventa invece un bipolo la cui impedenza è $j\omega L$.



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -\omega L I_M \sin(\omega t + \alpha_i) = \omega L I_M \cos(\omega t + \alpha_i + \frac{\pi}{2})$$

Un condensatore, che lega la corrente alla derivata della tensione, viene descritto da un'impedenza pari a $1/j\omega C$.



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -\omega C V_M \sin(\omega t + \alpha_v) = \omega C V_M \cos(\omega t + \alpha_v + \frac{\pi}{2})$$

La tabella seguente riassume quanto visto.

Componente	Z (impedenza)	Y (ammettenza)
Resistore	R	G
Induttore	$j\omega L$	$-j/\omega L$
Capacitore	$-j/\omega C$	$j\omega C$

L'utilità di questo formalismo risiede nel fatto che, una volta accettata la rappresentazione complessa, i circuiti in regime sinusoidale si analizzano esattamente come quelli in corrente continua. Le resistenze vengono sostituite da impedenze, le leggi di Kirchhoff restano immutate, e ciò che si ottiene sono equazioni algebriche che possono essere risolte con le stesse tecniche già note: partitori, maglie, nodi. Solo alla fine, quando si vuole tornare al dominio del tempo, si ricostruisce la grandezza fisica partendo dal fasore con il coseno o il seno corrispondente.

Le linee di trasmissione

Una linea di trasmissione è un sistema fisico realizzato da almeno due conduttori paralleli, uno di andata e uno di ritorno, che serve a trasportare un segnale elettrico da un punto a un altro. A prima vista, sembrerebbe un semplice filo, non molto diverso da quelli che si usano in un circuito a bassa frequenza. E in effetti, quando le lunghezze sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda del segnale, un filo può essere trattato come una resistenza concentrata, magari con un po' di induttanza parassita. Ma appena la lunghezza del conduttore diventa confrontabile con la lunghezza d'onda del segnale, questo modello smette di funzionare: improvvisamente, il filo non è più un dettaglio trascurabile, ma diventa un dispositivo attivo del sistema che influisce sul modo in cui il segnale viaggia.

È proprio in queste condizioni che parliamo di linea di trasmissione. Non si tratta più di considerare il cavo come un semplice collegamento ohmico, ma come un mezzo capace di guidare **un'onda elettromagnetica**. Infatti, il segnale che si propaga lungo la linea non è un flusso di elettroni che corrono da un capo all'altro, bensì un'onda di campo elettrico e magnetico confinata nello spazio tra i conduttori. È un concetto che si comprende meglio pensando alle onde radio o alla luce: non viaggiano trasportando materia, ma energia elettromagnetica che si propaga nello spazio. La linea di trasmissione, con la sua geometria e il suo dielettrico, diventa quindi una sorta di "guida d'onda" che dirige e sostiene la propagazione del segnale.

Una linea di trasmissione è un sistema a **parametri distribuiti** poiché le proprietà elettriche della linea, resistenza (r), induttanza (l), capacità (c) e conduttanza (g), non possono essere concentrate in un unico punto o rappresentate da un singolo

bipolo, come avviene nei circuiti a bassa frequenza. Ogni tratto infinitesimo “ dx ” della linea contribuisce con un piccolo pezzo di resistenza (dr), induttanza (dl), capacità (dc) e conduttanza (dg), distribuiti lungo tutta la sua lunghezza. In altre parole, ogni millimetro di cavo ha la sua piccola induttanza (dovuta al campo magnetico attorno ai conduttori), la sua capacità (dovuta al campo elettrico tra conduttori e dielettrico), la sua resistenza (dovuta all’opposizione del materiale al passaggio della corrente) e la sua conduttanza (dovuta alle perdite del dielettrico).

Il modello corretto di una linea di trasmissione, quindi, non è un singolo circuito concentrato ma una successione infinita di celle elementari, ciascuna composta da questi quattro parametri. È come se la linea fosse un mosaico continuo di piccoli circuiti r-l-c-g collegati uno dietro l’altro.

Poiché la linea ha lunghezza non nota a priori, r-l-c-g sono da intendersi “per unità di lunghezza”. Ad esempio, r si misura in Ω/m .

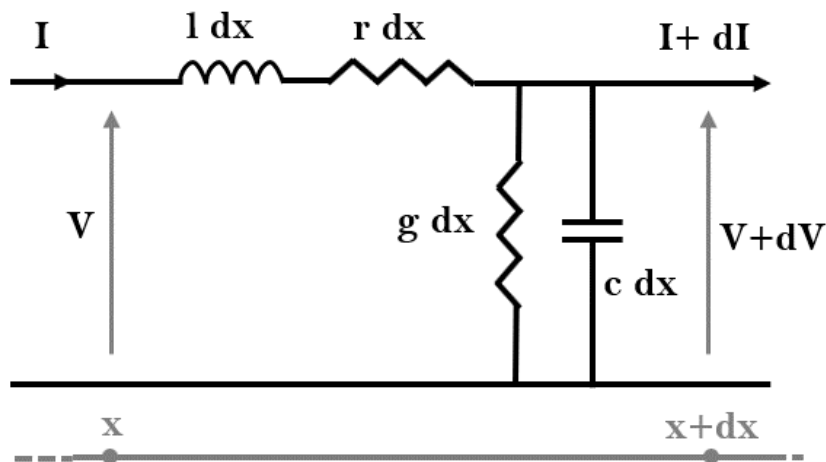


Figura 2: Modello del tratto infinitesimale “ dx ” della linea

Questa natura distribuita è la ragione per cui le linee di trasmissione diventano cruciali in alta frequenza e nelle comunicazioni. A bassa frequenza, un filo può essere approssimato come resistenza o al massimo come induttanza concentrata, perché le variazioni del segnale sono così lente che l’intero cavo “si muove all’unisono”. Ma quando la frequenza cresce, ogni punto della linea sperimenta una fase diversa dell’onda, e l’energia si propaga in modo progressivo. Solo trattandola come sistema a parametri distribuiti è possibile

prevedere riflessioni, attenuazioni e sfasamenti, che sono esattamente i fenomeni che la TDR ci aiuta a misurare.



Figura 3: Esempio di linea di trasmissione - cavo coassiale

Consideriamo, dunque, un generico tratto di linea di trasmissione di lunghezza infinitesima dx compreso tra due sezioni trasversali collocate alle distanze x e $x+dx$. Supponiamo che a $x=0$ sia connesso un generatore sinusoidale di pulsazione ω . Questo tratto infinitesimo di linea può essere schematizzato, come mostrato nella figura precedente, dove r , l , c e g , rappresentano resistenza, induttanza, capacità e conduttanza per unità di lunghezza. Siano $V(x)$ e $I(x)$ rispettivamente i fasori rispettivamente della differenza di potenziale tra i due conduttori della linea e della corrente nella linea, entrambi calcolati alla distanza x . Alla distanza $x+dx$, queste grandezze varranno rispettivamente $V(x)+dV(x)$ e $I(x)+dI(x)$.

La $dV(x)$ è generata dalla corrente $I(x)$ che scorre nella serie $r dx + j \omega l dx$, quindi:

$$V(x) - [V(x) + dV(x)] = dV(x) = (r dx + j \omega l dx) I(x)$$

La $dI(x)$ è dovuta alla corrente che scorre nell'ammettenza $(g dx + j \omega c dx)$:

$$I(x) - [I(x) - dI(x)] = dI(x) = (g dx + j \omega c dx) V(x)$$

Dividiamo le equazioni precedenti per dx ed otteniamo:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -(r + j \omega l) I(x)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -(g + j \omega c) V(x)$$

Queste relazioni sono dette **equazioni dei telegrafisti**. Derivando la prima rispetto a x e sostituendo alla derivata di $I(x)$ il valore dato dalla seconda, si trova:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \gamma^2 V(x)$$

Il coefficiente

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)}$$

è detto **costante di propagazione**.

Poiché la costante di propagazione γ è una quantità complessa, può essere espressa nella forma: $\gamma = a + j b$ dove **a** è detta **costante di attenuazione** e **b** **costante di fase**.

La soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \gamma^2 V(x)$$

è data da:

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

dove V_1 e V_2 sono costanti complesse, da determinare in base alle condizioni al contorno.

Osserviamo che $V_1 e^{-\gamma x}$ e $V_2 e^{\gamma x}$ sono due **onde** che viaggiano rispettivamente verso $x+$ (in direzione del carico) e $x-$ (in direzione della sorgente).

Riprendiamo l'equazione della derivata della tensione $V(x)$ e calcoliamo $I(x)$.

$$\frac{dV(x)}{dx} = -(r + j\omega l) I(x) \rightarrow I(x) = -\frac{1}{r + j\omega l} \frac{dV(x)}{dx}$$

Ora, imponiamo che $V(x)$ sia soluzione dell'equazione differenziale:

$$\begin{aligned}
I(x) &= -\frac{1}{r+j\omega l} \frac{dV(x)}{dx} = -\frac{1}{r+j\omega l} (-\gamma V_1 e^{-\gamma x} + \gamma V_2 e^{\gamma x}) \\
&= \frac{\gamma}{r+j\omega l} (V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}) \\
&= \frac{\sqrt{(r+j\omega l)(g+j\omega c)}}{r+j\omega l} (V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}) \\
&= \sqrt{\frac{1}{\frac{r+j\omega l}{g+j\omega c}}} (V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}) = \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma x}
\end{aligned}$$

dove si è posto:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{r+j\omega l}{g+j\omega c}}$$

questa quantità ha le dimensioni di un'impedenza e prende il nome di **impedenza caratteristica** della linea.

Nella pratica è utile caratterizzare la linea a partire dal carico, pertanto, effettuiamo un cambiamento di riferimento. Poniamo $d = (L - x)$ e riscriviamo le relazioni precedenti:

$$\begin{aligned}
V(x) &= V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} \rightarrow V(d) = V_1 e^{-\gamma(L-d)} + V_2 e^{\gamma(L-d)} \\
&= V_1 e^{-\gamma L} e^{\gamma d} + V_2 e^{\gamma L} e^{-\gamma d} \\
I(x) &= \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma x} \rightarrow I(d) = \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma(L-d)} - \frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma(L-d)} \\
&= \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma L} e^{\gamma d} - \frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma L} e^{-\gamma d}
\end{aligned}$$

Posto $d=0$ (avvero siamo sul carico, $x = L$), abbiamo:

$$\begin{aligned}
V(0) &= V_1 e^{-\gamma L} + V_2 e^{\gamma L} \\
I(0) &= \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma L} - \frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma L}
\end{aligned}$$

Da queste relazioni si deduce che il termine $V_1 e^{-\gamma L}$ rappresenta la tensione presente sul carico dovuta alla sola onda **diretta**, mentre, il termine $V_2 e^{\gamma L}$ rappresenta la tensione presente sul carico dovuta alla sola onda **riflessa**;

Stesso discorso per le correnti: Il termine $\frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma \ell}$ rappresenta la corrente attraverso il carico dovuta alla sola onda **diretta** e il termine $-\frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma \ell}$ rappresenta la corrente attraverso il carico dovuta alla sola onda **riflessa**;

Poniamo:

$$V_{dL} = V_1 e^{-\gamma L}$$

$$V_{rL} = V_2 e^{\gamma L}$$

$$I_{dL} = \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma L} = \frac{V_{dL}}{Z_0}$$

$$I_{rL} = -\frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma L} = -\frac{V_{rL}}{Z_0}$$

Le relazioni di tensioni e correnti possono essere riscritte come:

$$V(d) = V_1 e^{-\gamma L} e^{\gamma d} + V_2 e^{\gamma L} e^{-\gamma d} = V_{dL} e^{\gamma d} + V_{rL} e^{-\gamma d}$$

$$I(x) = \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma L} e^{\gamma d} - \frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma L} e^{-\gamma d} = I_{dL} e^{\gamma d} + I_{rL} e^{-\gamma d}$$

Si definisce **coefficiente di riflessione** di tensione sul carico il rapporto:

$$\Gamma_L = \frac{V_{rL}}{V_{dL}} = -\frac{I_{rL}}{I_{dL}}$$

Riscriviamo le relazioni in funzione di Γ_L :

$$V(d) = V_{dL} e^{\gamma d} + V_{rL} e^{-\gamma d} = V_{dL} \left(e^{\gamma d} + \frac{V_{rL}}{V_{dL}} e^{-\gamma d} \right) = V_{dL} \left(e^{\gamma d} + \Gamma_L e^{-\gamma d} \right)$$

$$I(d) = I_{dL} e^{\gamma d} + I_{rL} e^{-\gamma d} = I_{dL} \left(e^{\gamma d} + \frac{I_{rL}}{I_{dL}} e^{-\gamma d} \right) = I_{dL} (e^{\gamma d} - \Gamma_L e^{-\gamma d}) =$$

$$= \frac{V_{dL}}{Z_0} (e^{\gamma d} - \Gamma_L e^{-\gamma d})$$

Per $d = 0$ (sul carico), abbiamo

$$V(0) = V_{dL} (e^{\gamma 0} + \Gamma_L e^{-\gamma 0}) = V_{dL} (1 + \Gamma_L)$$

$$I(0) = \frac{V_{dL}}{Z_0} (1 - \Gamma_L)$$

Quindi:

$$\frac{V(0)}{I(0)} = Z_L = \frac{V_{dL} (1 + \Gamma_L)}{\frac{V_{dL}}{Z_0} (1 - \Gamma_L)} = Z_0 \frac{(1 + \Gamma_L)}{(1 - \Gamma_L)}$$

Da cui ricaviamo

$$\Gamma_L = \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)}$$

Osserviamo che:

- $|\Gamma_L|$ rappresenta il rapporto di ampiezza tra onda riflessa e onda diretta (o incidente);
- $\angle \Gamma_L$ (la fase) indica lo sfasamento che la riflessione introduce. Per carichi complessi Γ_L è un numero complesso quindi l'onda riflessa può cambiare fase rispetto all'incidente.
- Casi notevoli:
 - Se $Z_L \rightarrow \infty$ allora $\Gamma_L = 1$, cioè $V_{dL} = V_{rL}$ e $I_{dL} = -I_{rL}$
 - Se $Z_L \rightarrow 0$, allora $\Gamma_L = -1$, cioè $V_{dL} = -V_{rL}$ e $I_{dL} = I_{rL}$
 - Se $Z_L = Z_0$, allora $\Gamma_L = 0$ e non si hanno onde riflesse e il carico assorbe tutta l'onda incidente.
 - Se Z_L è puramente reattiva ($Z_L = jX$, $X \in \mathbb{R}$) allora $|\Gamma_L|=1$, cioè tutta l'onda viene riflessa ma con uno sfasamento che dipende da X .

Quando Z_L e Z_0 sono numeri complessi (caso dei carichi reattivi o linee lossy), Γ_L è complesso:

$$\Gamma_L = \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)} = \frac{(R_{Load} - R_0) + j(X_{Load} - X_0)}{(R_{Load} + R_0) + j(X_{Load} + X_0)}$$

$$|\Gamma_L| = \frac{|Z_L - Z_0|}{|Z_L + Z_0|} \quad \arg(\Gamma_L) = \arg(Z_L - Z_0) - \arg(Z_L + Z_0)$$

Il **modulo** indica quanta potenza viene riflessa; la **fase** determina l'inversione o lo sfasamento relativo.

Uno standard usato in RF è il **Voltage Standing Wave Ratio (VSWR)**, o **Rapporto Onde Stazionare (ROS)** definito come:

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

VSWR = 1 corrisponde a impedenza perfettamente adattata ($|\Gamma_L| = 0$),
VSWR $\rightarrow \infty$ si ottiene per $|\Gamma_L| \rightarrow 1$ (Z_L aperta o corto, oppure Z_L puramente reattiva).

Abbiamo visto che, in generale, sulla linea di trasmissione viaggiano due onde, una diretta ed una riflessa. Ma, a quale velocità si propagano?

La velocità di propagazione delle onde in una linea di trasmissione è uno degli aspetti più importanti da capire quando si studiano fenomeni come la riflettometria nel dominio del tempo (TDR).

Le onde elettromagnetiche che viaggiano lungo una linea di trasmissione non si propagano alla velocità della luce nel vuoto $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/secondo, ma più lentamente, in base alle caratteristiche del dielettrico che riempie lo spazio fra i conduttori.

Matematicamente, la velocità di propagazione si esprime così:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Dove:

c : velocità della luce nel vuoto ($3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

ϵ_r : è la **costante dielettrica relativa** del materiale che riempie la linea.

Ad esempio, nei comuni cavi coassiali con dielettrico in polietilene solido la costante dielettrica relativa ϵ_r vale circa 2.25, dunque, la velocità di propagazione

è pari a $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2.25}} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Il rapporto $\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$ è detto **fattore di velocità, FV**. Un valore comune di FV è 0.66 (es. RG-58), corrispondente ad una ϵ_r di 2.3.

Stimare a quale velocità si propagano le onde in una linea non è solo una curiosità fisica, ma un dato fondamentale per:

- calcolare il ritardo di propagazione di un segnale (tempo che impiega a percorrere un tratto di linea),
- stimare la distanza di un difetto con la TDR: infatti la misura del tempo di andata e ritorno dell'impulso, moltiplicata per la velocità di propagazione, dà direttamente la posizione della discontinuità.

3. Studio della TDR: Diagramma di riflessione

Nel capitolo precedente abbiamo visto come si comporta una linea di trasmissione dal punto di vista elettronico e matematico. Cerchiamo ora di darci una spiegazione intuitiva dei risultati ottenuti.

Immaginiamo di avere una corda tesa. Se diamo un colpo ad un'estremità, vedremo un'onda che corre lungo la corda fino ad arrivare all'altra estremità. Se l'estremità è libera, l'onda "rimbalza" e torna indietro; se invece è fissata a un muro, rimbalza ma invertita. Questo è un modo molto semplice per capire cosa succede anche nei cavi elettrici: essi si comportano come delle "corde per i segnali elettrici".

Una linea di trasmissione non è altro che un cavo elettrico (per esempio un coassiale o una coppia intrecciata) in cui un segnale non si diffonde istantaneamente, ma viaggia con una certa velocità, che dipende dal materiale isolante e dalla geometria del cavo. Proprio come l'onda sulla corda, anche il segnale elettrico ha bisogno di tempo per percorrere il suo cammino.

Quando il segnale viaggia, possiamo considerarlo come un'onda diretta che parte dal generatore e corre verso il carico (cioè verso l'apparecchio collegato al cavo). Ma se il carico non è perfettamente "adattato" al cavo, una parte dell'energia non riesce a entrare e viene rimandata indietro: nasce così un'onda riflessa.

Se il carico è esattamente uguale all'impedenza caratteristica della linea, tutta l'onda diretta viene assorbita: nessuna riflessione.

Se invece il carico è troppo grande (circuito aperto) o troppo piccolo (corto circuito), l'onda torna indietro in forma di riflesso totale.

Nei casi intermedi (per esempio un carico resistivo diverso dal valore ideale), solo una parte dell'onda viene assorbita e il resto viene riflesso.

Ecco quindi perché in una linea di trasmissione reale esistono sempre due onde:

- la diretta, che porta il segnale dal generatore al carico;
- la riflessa, che ritorna indietro quando c'è un disadattamento.

La sovrapposizione di queste onde può creare fenomeni visibili, come variazioni di tensione lungo il cavo o addirittura onde stazionarie, proprio come sulla corda tesa che vibra in più punti.

Una linea di trasmissione è un sistema distribuito, non un singolo “componente”: la resistenza, l'induttanza, la capacità e la conduttanza sono distribuite lungo tutta la lunghezza.

Vediamo quali sono le grandezze che identificano il comportamento di una linea di trasmissione e sono fondamentali per comprendere l'analisi TDR:

- L'impedenza caratteristica Z_0 , che, per una linea a **basse perdite**, si può esprimere come $Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$ dove “ l ” e “ c ” sono rispettivamente l'induttanza e la capacità per unità di lunghezza. La Z_0 rappresenta una sorta di “impedenza naturale” della linea, determinata esclusivamente dalla sua geometria e dal dielettrico che la riempie. Non dipende dalla lunghezza del cavo: un coassiale da 50 Ω resta tale sia che misuri un metro, sia che ne misuri cento. La TDR si basa proprio sul confronto tra l'impedenza caratteristica della linea e quella che incontra lungo il percorso: ogni volta che c'è una differenza, nasce una riflessione che può essere misurata.
- Il segnale non percorre istantaneamente la linea ma impiega un tempo finito TD (propagation delay) che dipende dalla lunghezza della linea e dalla velocità di propagazione nel mezzo isolante

La velocità di propagazione è pari a $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$ dove “ c ” è la velocità della luce e ϵ_r è la costante dielettrica relativa della linea. Un segnale, quindi, si muove ad una velocità che è una frazione della velocità della luce, compresa fra il 60% e l'80%. Questo dato è cruciale nella TDR, perché consente di

trasformare un tempo di andata e ritorno del segnale riflesso in una distanza reale lungo il cavo.

- Il **fattore di velocità** $FV = \frac{v}{c}$, ovvero, il rapporto fra la velocità di propagazione nella linea e quella della luce nel vuoto. Viene sempre indicato nei datasheet dei cavi, ed è indispensabile quando con la TDR si calcola la posizione esatta di un difetto.
- il **coefficiente di riflessione** $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ dove Z_L è l'impedenza del carico e Z_0 è l'impedenza caratteristica della linea. Il coefficiente di riflessione Γ_L è un numero adimensionale che quantifica il rapporto fra l'onda riflessa e l'onda incidente in corrispondenza di una discontinuità.
- La **risoluzione spaziale**, ovvero la capacità di **distinguere** due discontinuità o due difetti presenti lungo una linea di trasmissione. È la minima distanza che deve separare due eventi affinché possano essere osservati come distinti nel dominio del tempo.

In termini matematici $\Delta z = \frac{v \Delta T}{2}$ dove:

v : velocità di propagazione nel mezzo

ΔT : la **risoluzione temporale effettiva**, ovvero la durata dell'impulso o il tempo di salita (*rise time*) del gradino.

$\frac{1}{2}$: fattore che tiene conto del fatto che il segnale fa “andata e ritorno” per generare la riflessione.

Ad esempio, se l'impulso di test dura $\Delta T = 0.2\text{ns}$ e $v = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, allora

$\Delta z = \frac{v \Delta T}{2} = \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 0.2 \cdot 10^{-9}}{2} = 2 \text{ cm}$ quindi riesco a rilevare difetti distanti più di 2 cm. Lo stesso risultato si ha con un gradino dove il tempo di salita è di 0.2ns.

Diagramma di Riflessione

Il diagramma di riflessione o di rimbalzo (bounce diagram), è uno strumento grafico molto utile per capire in modo intuitivo come si propagano e si riflettono i segnali lungo una linea di trasmissione. È particolarmente prezioso nello studio della TDR, perché consente di prevedere la forma d'onda che si osserverà al generatore o al carico.

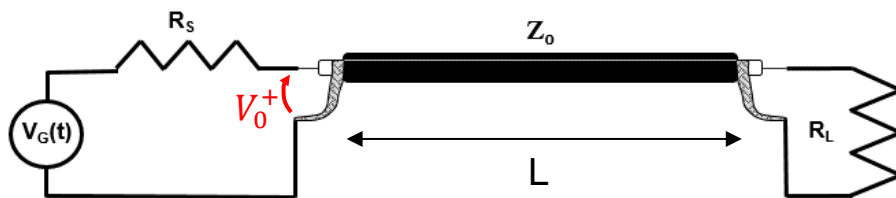
Vediamo passo per passo come si costruisce e cosa rappresenta.

Quando un segnale (ad esempio un impulso di tensione) entra in una linea di trasmissione, esso viaggia con una certa velocità fino al carico. Se il carico è perfettamente adattato, il segnale si ferma lì: non ci sono riflessioni. Se invece il carico non è uguale all'impedenza caratteristica della linea, una parte del segnale torna indietro, sotto forma di onda riflessa.

Questa onda riflessa torna verso la sorgente e, se anche la sorgente non è adattata, viene a sua volta parzialmente riflessa di nuovo, e così via. Si crea così un "ping-pong" di onde avanti e indietro, che nel tempo vanno a sommare i loro effetti ai capi della linea.

Il diagramma di riflessione è il modo per rappresentare graficamente nel piano tempo-spazio tutti questi viaggi e riflessioni.

Analizziamo il seguente circuito.



Partiamo calcolando il segnale che al tempo $t=0$ viene iniettato nella linea, ovvero, applicando le legge di Ohm:

$$V_0^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + R_s}$$

Questo segnale, dopo un **tempo di propagazione** $T = \frac{L}{v_p}$, raggiungerà il carico. Ricordiamo che v_p è la velocità dell'onda nel mezzo di trasmissione (cavo coassiale) ed L è la lunghezza del conduttore.

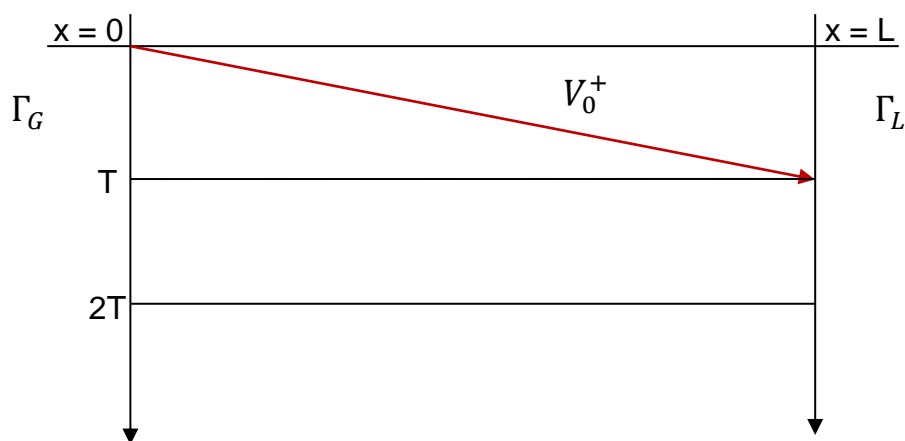
Il diagramma di riflessione è tipicamente rappresentato in un piano a due assi:

- Asse orizzontale: rappresenta lo spazio. In alto a sinistra la posizione della sorgente e a destra il carico. La linea orizzontale che li collega rappresenta la linea di trasmissione.
- Asse verticale: rappresenta il tempo. Si segna lo zero quando il generatore invia il primo fronte.

Su questo piano, le onde dirette vengono disegnate come linee diagonali inclinate dal generatore al carico con pendenza proporzionale alla velocità di propagazione; le onde riflesse vengono disegnate come linee diagonali inclinate dal carico verso il generatore.

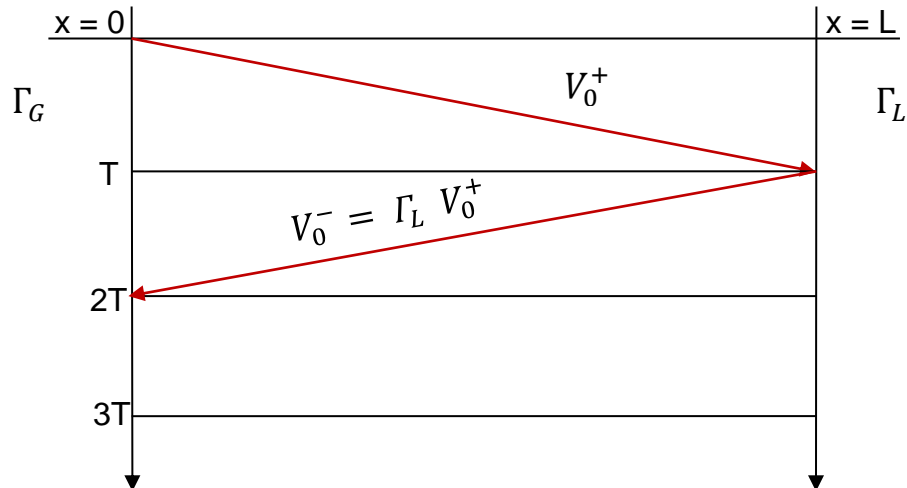
Ogni riflessione è accompagnata da un cambio di segno e/o di ampiezza dell'onda a seconda del coefficiente di riflessione Γ nel punto di discontinuità (carico o generatore).

Nel caso in esame possiamo subito rappresentare l'onda diretta V_0^+ che va dal generatore ($x=0$) al carico ($x=L$).

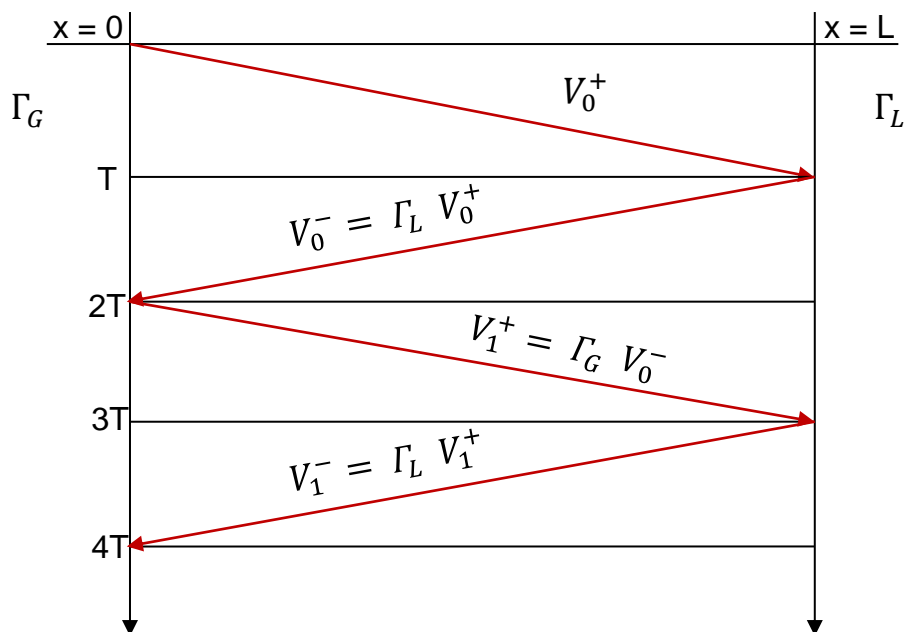


A destra e a sinistra del grafico è opportuno riportare i coefficienti di riflessione rispettivamente del carico Γ_L e del generatore Γ_G .

Non appena l'onda raggiunge il carico, viene riflessa (se non c'è adattamento perfetto) producendo un'onda riflessa $V_0^- = \Gamma_L V_0^+$.



Quando V_0^- raggiunge il generatore viene in parte riflessa generando $V_1^+ = \Gamma_G V_0^-$. Questa onda si dirige verso il carico e il meccanismo si ripete in modo iterativo creando un diagramma a “ping pong”.



In generale, l'algoritmo prevede di applicare in modo iterativo le relazioni:

$$V_n^- = \Gamma_L V_n^+ \\ V_{n+1}^- = \Gamma_G V_n^- = \Gamma_G \Gamma_L V_n^+$$

In pratica, il segnale che iniettiamo nella linea di trasmissione (cavo coassiale) rimbalza tra generatore e carico opportunamente modulato da Γ_L e Γ_G .

Considerando il valore costante del gradino di pilotaggio e i vari “rimbalzi” successivi $V_{n+1}^- = V_n^+ \Gamma_G \Gamma_L$, la tensione al punto x della linea in condizioni di regime, ovvero ad un tempo infinito, può essere scritta come:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_{0,x}^+ (1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_G + \Gamma_L^2 \Gamma_G + \Gamma_L^2 \Gamma_G^2 + \dots) \\ &= V_0^+ (1 + \Gamma_L \Gamma_G + (\Gamma_L \Gamma_G)^2 + \dots) \\ &\quad + V_0^+ \Gamma_L ((1 + \Gamma_L \Gamma_G + (\Gamma_L \Gamma_G)^2 + \dots)) \end{aligned}$$

Dato che $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, possiamo scrivere che:

$$V(x) = V_{0,x}^+ \left(\frac{1}{1 - \Gamma_L \Gamma_G} + \frac{\Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_G} \right) = V_{0,x}^+ \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_G} \right)$$

Questa è la tensione che si instaura sulla linea in condizioni stazionarie (per $t \rightarrow \infty$).

Osserviamo la figura seguente: è rappresentato il diagramma di rimbalzo per una singola linea di trasmissione con coefficiente di riflessione del carico Γ_L e coefficiente di riflessione del generatore Γ_G . La tensione in un punto della linea di trasmissione al tempo t è la somma di tutte le riflessioni avvenute fino all'istante specificato. Quindi, se vogliamo tracciare la tensione in un punto della linea in funzione del tempo, tracciamo una linea verticale sul diagramma di rimbalzo nella posizione indicata. Il segnale (o impulso) riflesso passa per quel punto ogni volta che la linea verticale attraversa la linea che rappresenta il fronte di salita dell'impulso riflesso. In un dato istante, la tensione sulla linea di trasmissione è la somma di tutte le ampiezze di riflessione al di sotto dell'istante corrente.

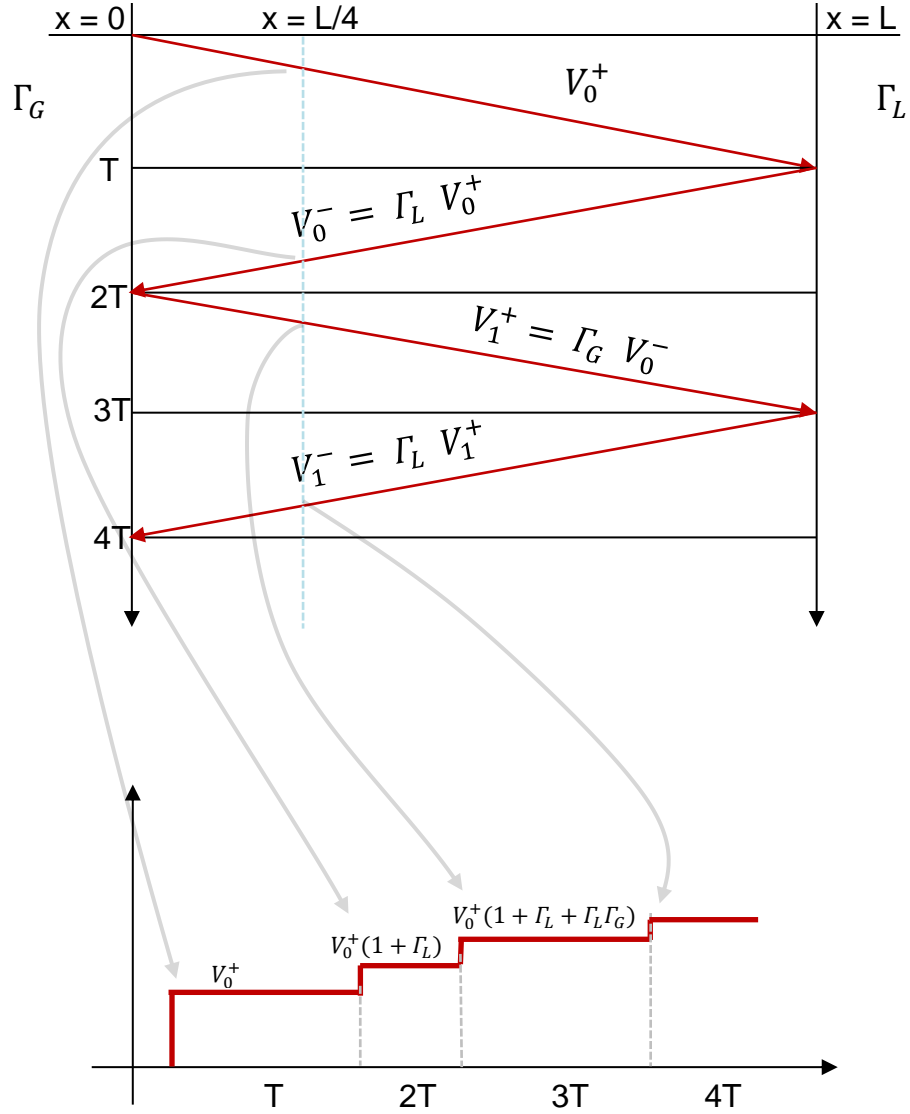


Figura 4: Tensione in funzione del tempo nella posizione $z = L/4$ ottenuta dal diagramma di rimbalzo.

Se ci mettiamo sul carico abbiamo che $V_{0,L}^+ = V_0^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + R_s}$, quindi:

$$V_{L,\infty} = V_0^+ \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_G} \right) = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + R_s} \left(\frac{1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}{1 - \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \cdot \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}} \right) = V_G \frac{R_L}{R_L + R_s}$$

Abbiamo omesso i calcoli matematici, ma è importante osservare che la tensione sul carico, una volta esaurito il transitorio, è pari a

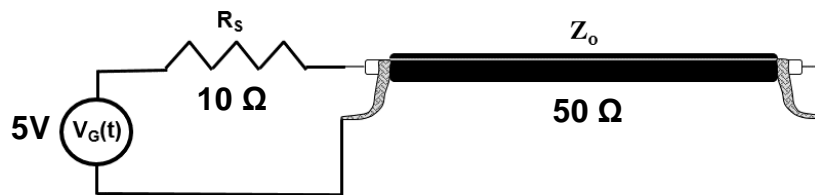
$$V_{L,\infty} = V_G \frac{R_L}{R_L + R_s}$$

Cioè **non** dipende dalla linea di trasmissione (Z_0)

Ora possiamo esaminare alcuni casi limite che ci aiuteranno a capire meglio la tecnica TDR.

Primo caso: linea aperta, senza carico.

Iniziamo ad esaminare il caso in cui non è collegato alcun carico alla linea di trasmissione.



Iniziamo a calcolare il tempo di propagazione T . Supponiamo di avere un cavo coassiale lungo 20 centimetri con $\epsilon_r = 2.25$.

Sappiamo che $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2.25}} = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, quindi $T = \frac{l}{v} = \frac{0.2}{2 \cdot 10^8} = 1 ns$

La tensione V_0^+ viene calcolata utilizzando la formula del partitore (legge di Ohm):

$$V_0^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + R_s} = 5 \frac{50}{50 + 10} = 4.16 V$$

Calcoliamo i coefficienti di riflessione alla sorgente (Generator) ed al carico (Load).

$$\Gamma_G = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} = \frac{10 - 50}{10 + 50} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\frac{Z_L}{Z_L} - \frac{Z_0}{Z_L}}{\frac{Z_L}{Z_L} + \frac{Z_0}{Z_L}} = \frac{1 - \frac{Z_0}{Z_L}}{1 + \frac{Z_0}{Z_L}} = \frac{1 - \frac{Z_0}{\infty}}{1 + \frac{Z_0}{\infty}} = 1$$

Come abbiamo già detto, in una linea di trasmissione, la tensione in un certo punto è sempre la **somma di due onde**:

- l'**onda incidente** V^+ che viaggia dalla sorgente al carico,
- l'**onda riflessa** V^- , che viaggia dal carico alla sorgente.

Quindi, in qualunque punto della linea, e in particolare al carico, vale:

$$V_{Carico}(t) = V^+(t) + V^-(t)$$

Quando un fronte arriva al carico, una parte dell'onda viene assorbita e una parte riflessa secondo il coefficiente di riflessione Γ_L .

La regola generale è:

$$V^- = \Gamma_L \cdot V^+$$

Nel caso in esame:

$$V^- = \Gamma_L \cdot V^+ = 1 \cdot V^+ = V^+$$

cioè, ogni volta che un'onda arriva al carico, esso genera un'onda riflessa identica all'incidente.

Subito dopo l'arrivo di V^+ sul carico, la tensione risultante è la somma di:

$$V_{Carico} = V^+ + V^- = V^+ + \Gamma_L \cdot V^+ = V^+ + V^+ = 2 \cdot V^+$$

In pratica, ogni arrivo su carico produce un incremento pari a $2 \cdot V^+$ poiché all'onda incidente si somma la sua riflessione immediata.

Iniziamo a compilare il diagramma delle riflessioni.

Prima iterazione: $n=0$ (partenza $t=0$ e arrivo a $t = T$)

Iniettiamo l'impulso: $V_0^+ = 4.16V$. Questa tensione arriva al carico (circuito aperto) e rimbalza totalmente. La somma di onda incidente e riflessa genera una tensione sul carico pari a $2 \cdot V_0^+ = 8.33V$. Mentre, l'onda riflessa che si dirige verso il generatore ha tensione $V_0^- = 4.16V$.

Seconda iterazione: $n=1$ (arrivo a $t = 3T$)

La sorgente vede arrivare V_0^- e la riflette secondo $V_1^+ = \Gamma_G V_0^- = -\frac{2}{3} \cdot 4.16V = -2.77V$. Questa tensione si somma all'onda che è arrivata dal carico; quindi, sulla sorgente abbiamo una tensione $V_1^+ + V_0^- = -2.77 + 4.16 = 1.39V$

L'onda V_1^+ (pari a $-2.77V$) arriva al carico e viene totalmente riflessa, quindi $V_1^- = -2.77V$.

Sul carico abbiamo una tensione risultante pari a $2 \cdot V_1^+ = -5.54V$.

Terza iterazione: $n=2$ (arrivo a $t = 5T$)

L'onda V_1^- arriva alla sorgente.

Viene riflessa generando $V_2^+ = \Gamma_G V_1^- = -\frac{2}{3} \cdot -2.77V = 1.84V$.

Sulla sorgente abbiamo una tensione totale pari a $V_1^- + V_2^+ = -2.77 + 1.84 = -0.92V$.

L'onda V_2^+ arriva al carico, viene totalmente rimbalzata ovvero $V_2^- = 1.84V$.

La tensione sul carico vale $2 \cdot V_2^+ = 2 \cdot 1.84 = 3.704V$.

Quarta iterazione: $n=3$ (arrivo a $t = 7T$)

V_2^- arriva alla sorgente e viene riflessa generando $V_3^+ = \Gamma_G V_2^- = -\frac{2}{3} \cdot 1.84 = -1.234V$.

Sulla sorgente ho una tensione pari a $V_2^- + V_3^+ = 1.84 + (-1.234) = 0.606V$
 L'onda V_3^+ arriva al carico, viene totalmente rimbalzata: $V_3^- = -1.234V$. La tensione sul carico vale $2 \cdot V_3^+ = 2 \cdot -1.234 = -2.467V$.

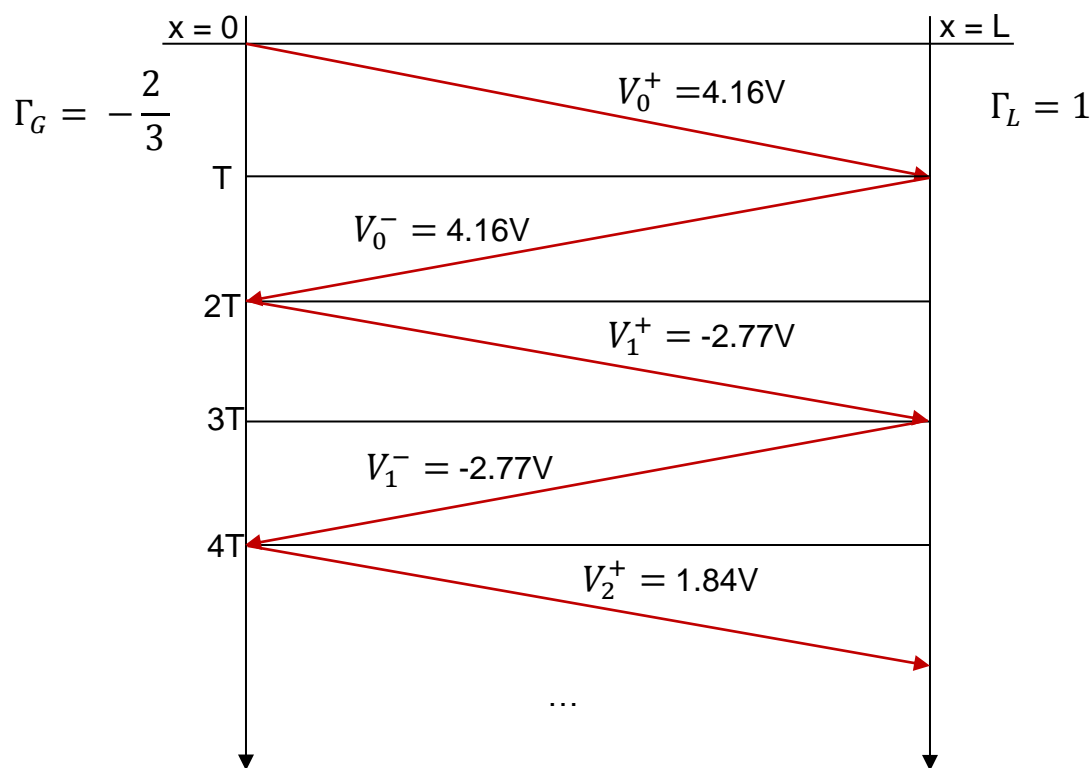


Figura 5: Costruzione del diagramma di rimbalzo

Vediamo ora la simulazione con LTSpice se conferma quanto ottenuto per via analitica.

Anzitutto replichiamo il circuito da simulare, inserendo un generatore di tensione a gradino (5V con tempo di salita 1ns), la resistenza R_s da 10 ohm ed una linea di trasmissione, ovvero l'oggetto T-Line (transmission line) nativo di LTSpice. Questo oggetto va parametrizzato indicando l'impedenza Z_0 (50 ohm) ed il ritardo di propagazione TD.

Notiamo che, fissato un punto di osservazione, la distanza tra due impulsi successivi è pari a $2TD$ (andata+ritorno).

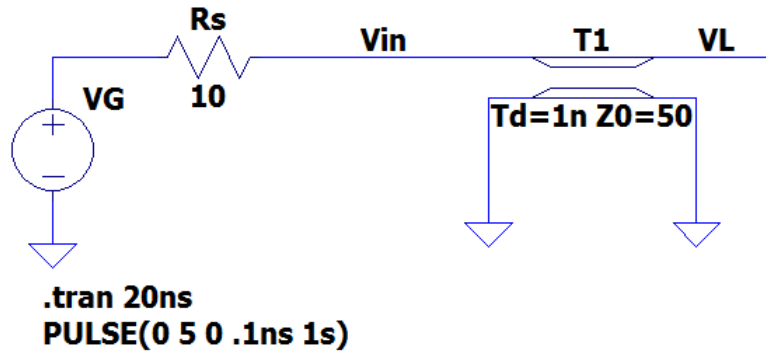


Figura 6: Circuito per simulazione "1"

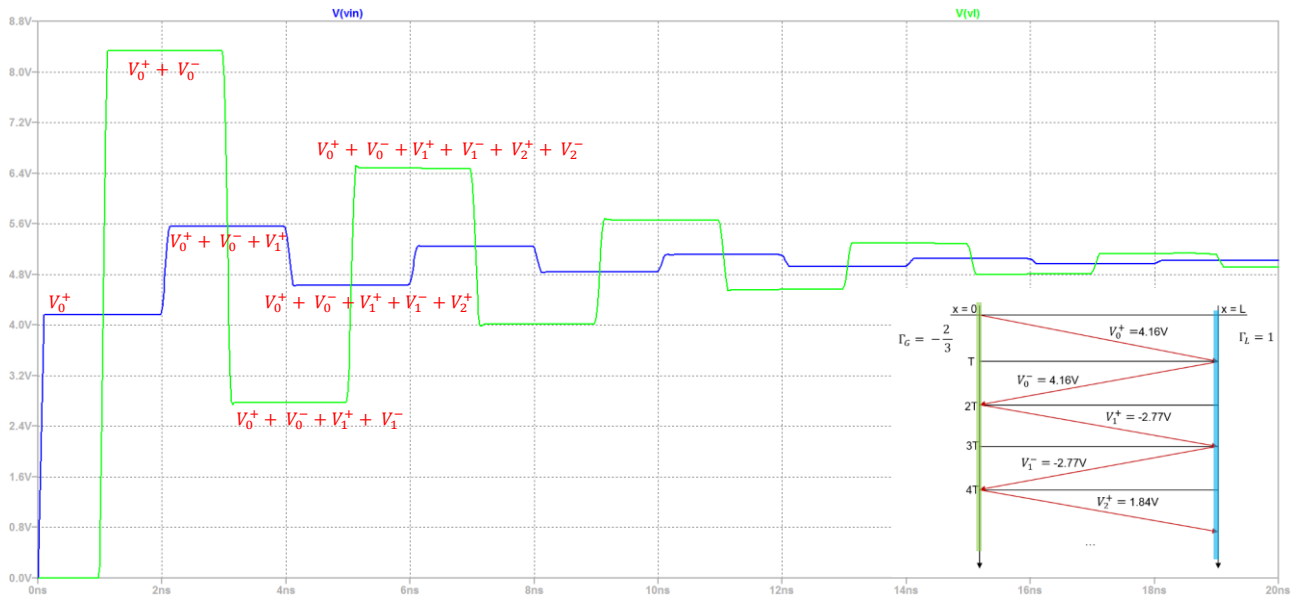


Figura 7: Risultati della simulazione "1"

I risultati della simulazione sono coerenti con quanto ottenuto precedentemente.

A scopo di esempio, riporto un confronto tra la risposta al gradino (V_{IN} e V_L) e all'impulso (V_{IN2} , V_{L2}). Il contenuto informativo è lo stesso, ovviamente.

Notiamo che nella risposta all'impulso il valore al tempo infinito delle tensioni è zero (perché il segnale di eccitazione dura 1 ns), mentre nella risposta al gradino

si assesta intorno a $V_{\infty} = V_0^+ \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_G} \right) = 4.16 \left(\frac{1 + 1}{1 + \frac{2}{3}} \right) = 4.16 \left(\frac{2}{\frac{5}{3}} \right) = 4.99V$

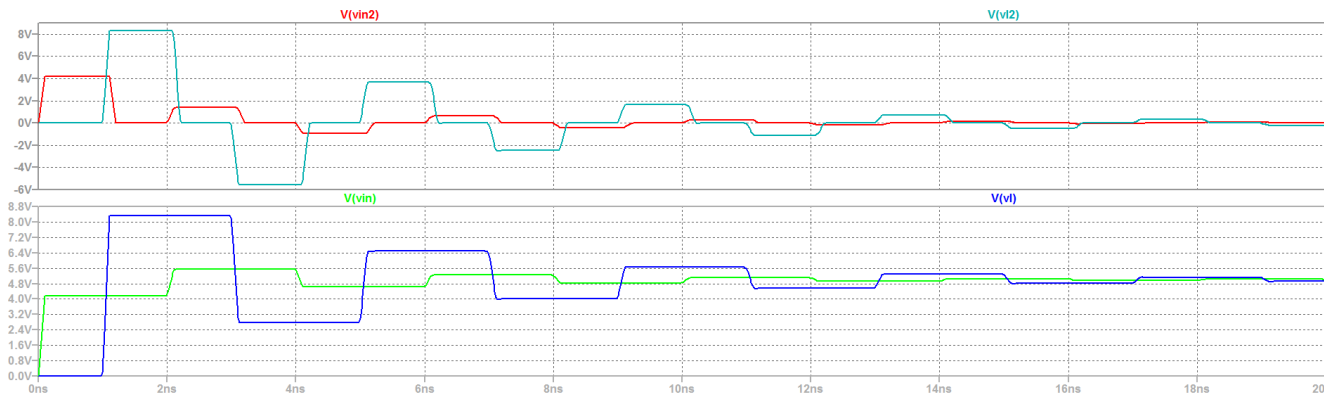
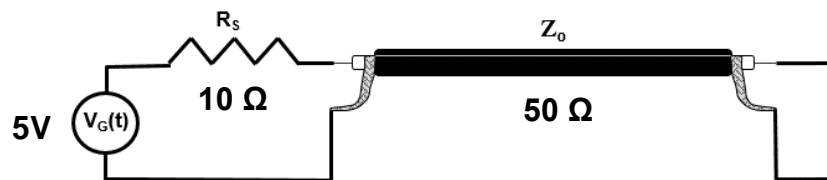


Figura 8: Risposta al gradino e all'impulso del circuito "1"

Secondo caso: Carico in cortocircuito

Un secondo caso interessante è quando il carico è un cortocircuito.



Procediamo come nel caso precedente.

$$V_0^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + R_S} = 5 \frac{50}{50 + 10} = 4.16 \text{ V}$$

Calcoliamo i coefficienti di riflessione alla sorgente (Generator) ed al carico (Load).

$$\Gamma_G = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} = \frac{10 - 50}{10 + 50} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$$

Iniziamo a compilare il diagramma delle riflessioni.

Prima iterazione: $n=0$ (partenza $t=0$ e arrivo a $t = T$)

$V_0^+ = 4.16V$. Questa tensione arriva al carico (corto) e rimbalza totalmente cambiata di segno.

$V_0^- = -4.16V$. La somma di onda incidente e riflessa genera, ovviamente, una tensione nulla sul carico perché è un corto circuito.

La corrente che circola sul carico vale $I_{Load,0} = \frac{V_0^+ - V_0^-}{Z_0} = \frac{2 V_0^+}{Z_0} = \frac{8.32}{50} = 0.166 A$

Seconda iterazione: $n=1$ (arrivo a $t = 3T$)

La sorgente vede arrivare V_0^- e la riflette secondo $V_1^+ = \Gamma_G V_0^- = -\frac{2}{3} \cdot (-4.16V) = 2.77V$. Questa tensione si somma all'onda che arriva dal carico; quindi, sulla sorgente abbiamo una tensione $V_1^+ + V_0^- = 2.77 - 4.16 = -1.39 V$

L'onda V_1^+ (pari a $2.77V$) arriva al carico e viene totalmente riflessa e cambiata di segno, quindi $V_1^- = -2.77V$.

Sul carico abbiamo una tensione risultante nulla ed una corrente

$$I_{Load,1} = \frac{V_1^+ - V_1^-}{Z_0} = \frac{2.77 + 2.77}{Z_0} = \frac{5.54}{50} = 0.11 A$$

Terza iterazione: $n=2$ (arrivo a $t = 5T$)

L'onda V_1^- ($-2.77V$) arriva alla sorgente.

Viene riflessa generando $V_2^+ = \Gamma_G V_1^- = -\frac{2}{3} \cdot (-2.77V) = 1.84V$.

Sulla sorgente abbiamo una tensione totale pari a $V_1^- + V_2^+ = -2.77 + 1.84 = -0.92V$.

L'onda V_2^+ arriva al carico, viene totalmente rimbalzata ovvero $V_2^- = -1.84V$.

La tensione sul carico vale zero e la corrente:

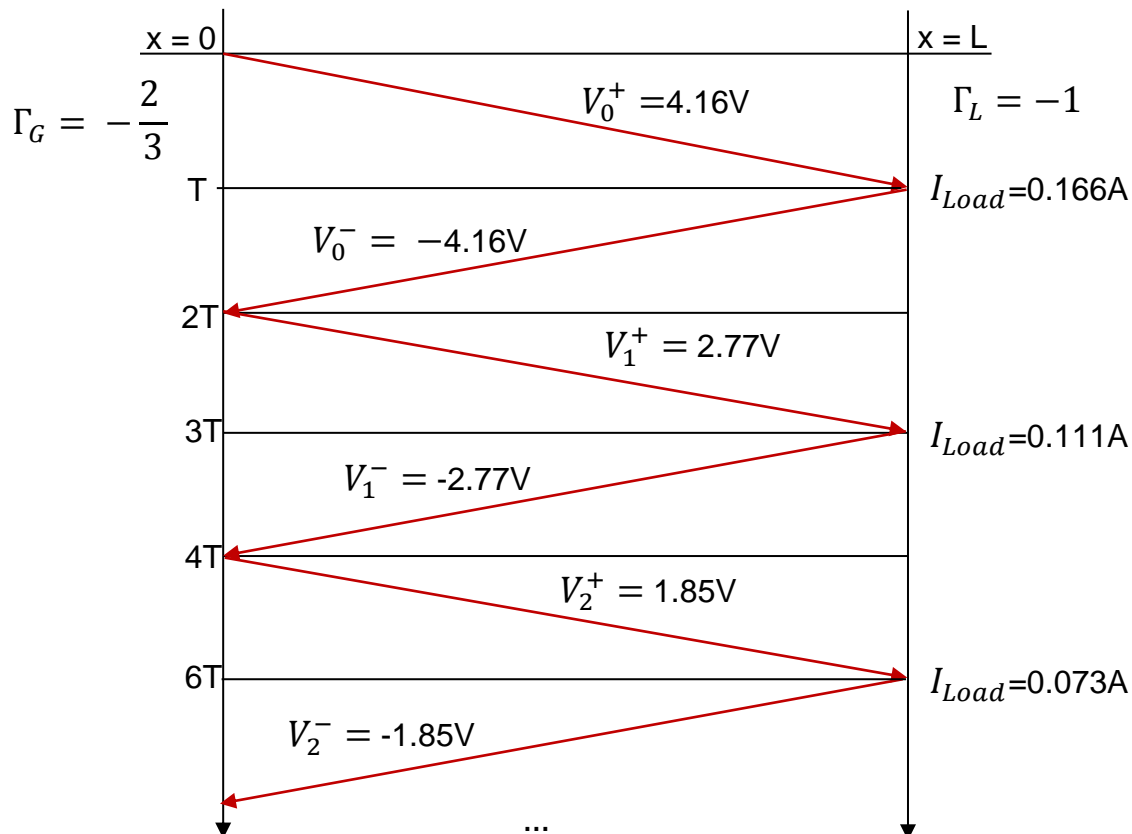
$$I_{Load,2} = \frac{V_2^+ - V_2^-}{Z_0} = \frac{1.84 - (-1.84)}{50} = \frac{5.54}{50} = 0.073 \text{ A}$$

Quarta iterazione: n=3 (arrivo a $t = 7T$)

V_2^- arriva alla sorgente e viene riflessa generando $V_3^+ = \Gamma_G V_2^- = -\frac{2}{3} \cdot (-1.84) = 1.234 \text{ V}$.

Sulla sorgente ho una tensione pari a $V_2^- + V_3^+ = 1.84 + (1.234) = 3.07 \text{ V}$. L'onda V_3^+ arriva al carico, viene totalmente rimbalzata e cambiata di segno: $V_3^- = -1.234 \text{ V}$. La tensione sul carico vale zero e la corrente

$$I_{Load,3} = \frac{V_3^+ - V_3^-}{Z_0} = \frac{1.234 - (-1.234)}{50} = \frac{2.468}{50} = 0.049 \text{ A}$$



Riportiamo il circuito in LTSpice. Il corto circuito sul carico lo simuliamo con una resistenza di valore 0.0001 ohm .

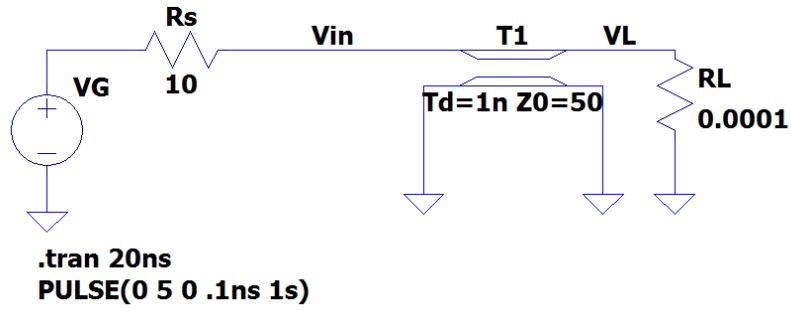


Figura 9: Circuito per simulazione “2”

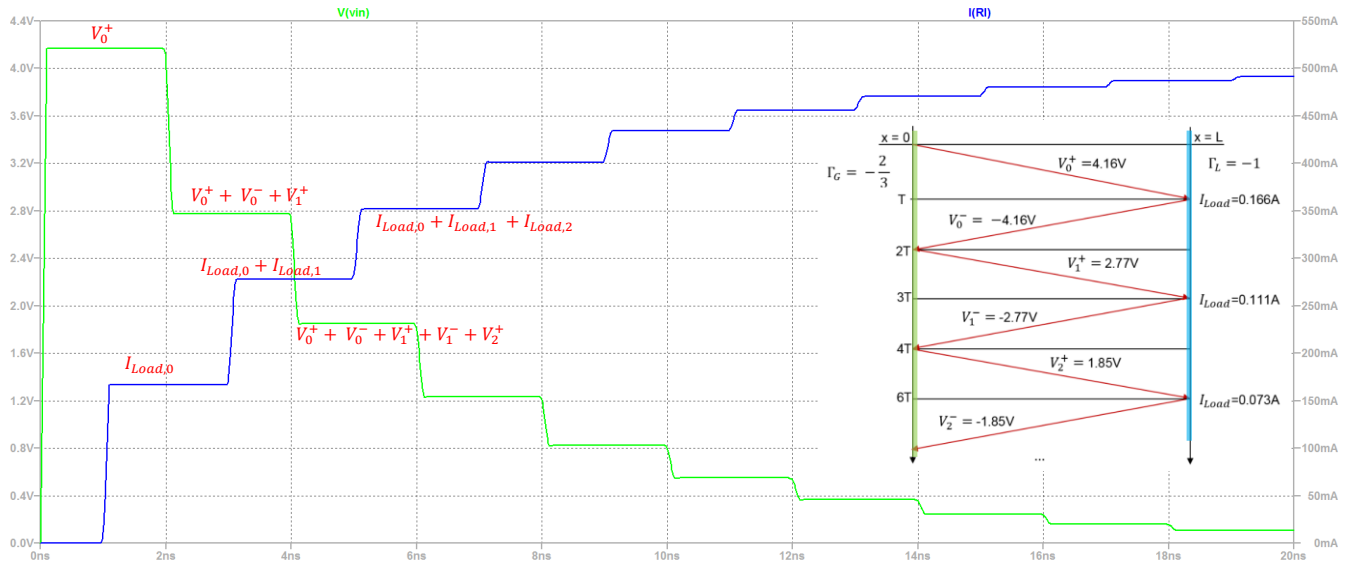


Figura 10: Risultati della simulazione “2”

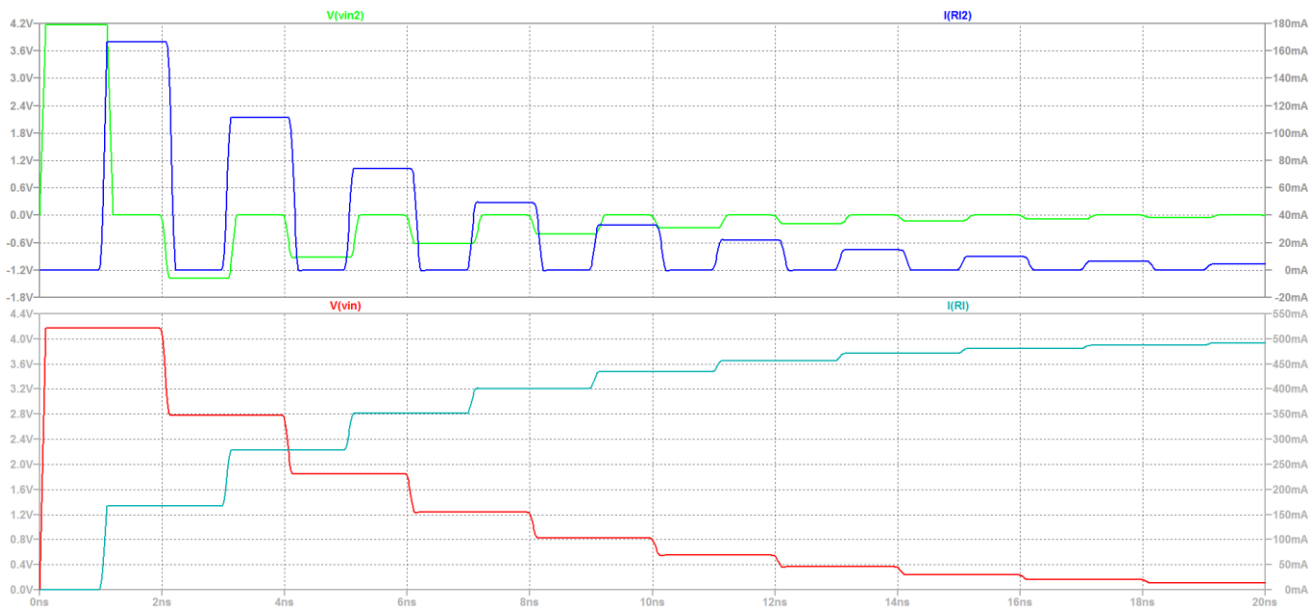
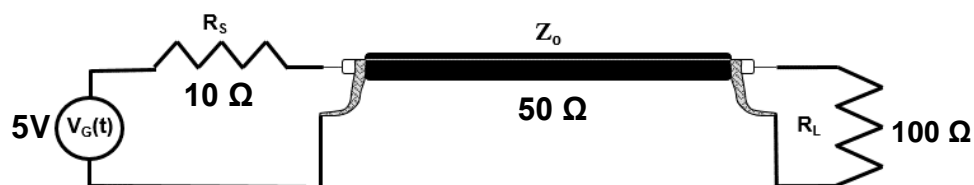


Figura 11: Risposta al gradino e all'impulso del circuito "2"

Terzo caso: Carico=100Ω

Questo è un caso tipico in cui la linea di trasmissione è collegata ad un carico non adattato. Nello specifico, supponiamo di avere una linea con impedenza 50 Ω collegata ad un carico da 100 Ω.



Procediamo come nei casi precedenti.

$$V_0^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + R_S} = 5 \frac{50}{50 + 10} = 4.16 \text{ V}$$

Calcoliamo i coefficienti di riflessione alla sorgente (Generator) ed al carico (Load).

$$\Gamma_G = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} = \frac{10 - 50}{10 + 50} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}$$

Ricordiamo le relazioni fondamentali:

$$\begin{aligned} V_n^- &= \Gamma_L V_n^+ \\ V_{n+1}^- &= \Gamma_G V_n^- = \Gamma_G \Gamma_L V_n^+ \end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\Gamma_G \Gamma_L = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9} = -0.222$$

La sequenza di V_n^+ decresce in ampiezza con un fattore $-\frac{2}{9}$ con segni alternati.

La tensione sul carico (quando arriva il pacchetto n-esimo) è:

$$V_{Load,n} = V_n^+ + V_n^- = V_n^+ + \Gamma_L V_n^+ = (1 + \Gamma_L) V_n^+$$

$$\text{Con } (1 + \Gamma_L) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

La corrente nel carico vale:

$$I_{Load,n} = \frac{V_n^+ - V_n^-}{Z_0} = \frac{(1 - \Gamma_L) V_n^+}{Z_0}$$

$$\text{Con } (1 - \Gamma_L) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Iterazione 0 (arrivo a $t = T$)

- $V_0^+ = 4.1667 \text{ V}$
- $V_0^- = \Gamma_L V_0^+ = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 4.1667 \text{ V} = 1.3889 \text{ V}$

- $V_{Load,0} = (1 + \Gamma_L) V_0^+ = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot 6.1667 \text{ V} = 5.5556 \text{ V}$
- $I_{Load,0} = \frac{(1 - \Gamma_L) V_0^+}{Z_0} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 4.1667}{50} = 0.05556 \text{ A}$

Iterazione 1 (arrivo a $t = 3T$)

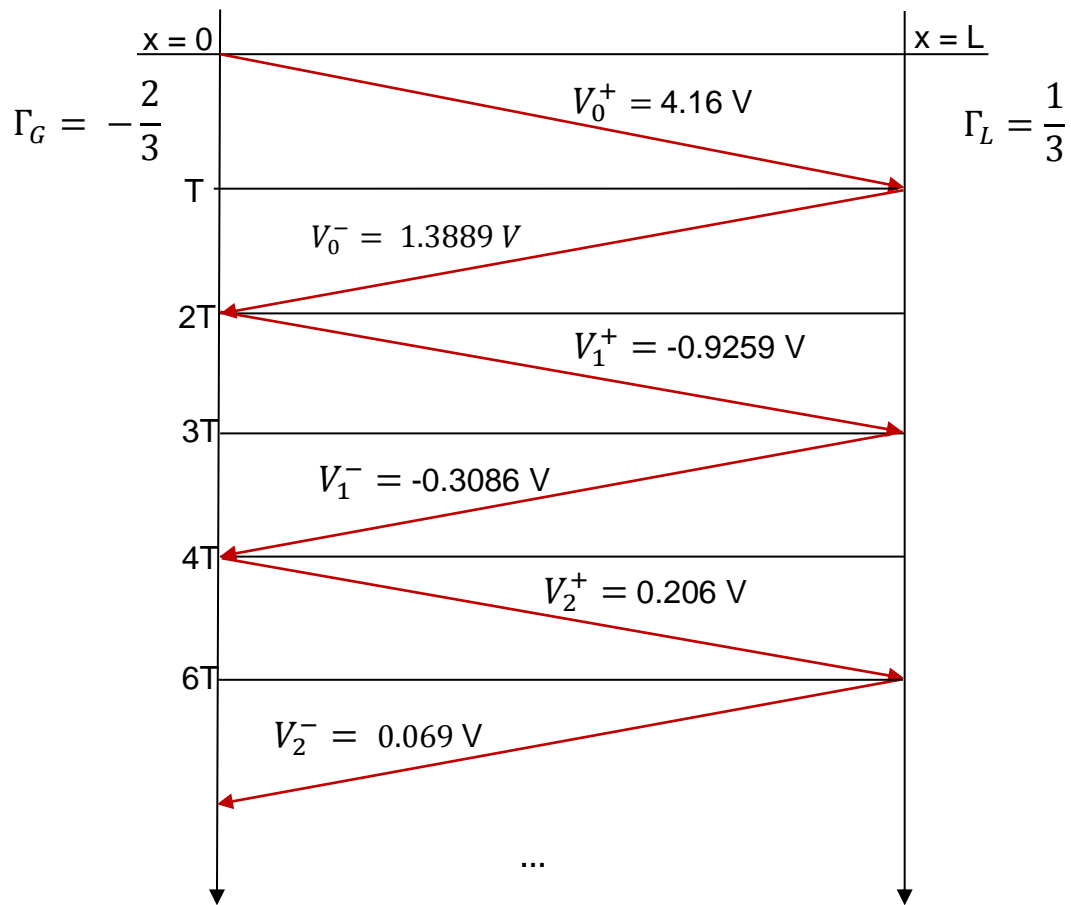
- $V_1^+ = \Gamma_G V_0^- = -\frac{2}{3} \cdot 1.3889 = -0.9259 \text{ V}$
- $V_1^- = \Gamma_L V_1^+ = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot (-0.9259) = -0.3086 \text{ V}$
- $V_{Load,1} = (1 + \Gamma_L) V_1^+ = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot (-0.9259) = -1.2346 \text{ V}$
- $I_{Load,1} = \frac{(1 - \Gamma_L) V_1^+}{Z_0} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (-0.9259)}{50} = 0.01235 \text{ A}$

Iterazione 2 (arrivo a $t = 5T$)

- $V_2^+ = \Gamma_G V_1^- = -\frac{2}{3} \cdot (-0.3086) = 0.206 \text{ V}$
- $V_2^- = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 0.206 = 0.069 \text{ V}$
- $V_{Load,2} = (1 + \Gamma_L) V_2^+ = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot 0.206 = 0.274 \text{ V}$
- $I_{Load,2} = \frac{(1 - \Gamma_L) V_2^+}{Z_0} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (0.206)}{50} = 0.00274 \text{ A}$

Iterazione 3 (arrivo a $t = 7T$)

- $V_3^+ = \Gamma_G V_2^- = -\frac{2}{3} \cdot 0.069 = -0.046 \text{ V}$
- $V_3^- = \Gamma_L V_3^+ = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot (-0.046) = -0.015 \text{ V}$
- $V_{Load,3} = (1 + \Gamma_L) V_3^+ = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot (-0.046) = -0.061 \text{ V}$
- $I_{Load,3} = \frac{(1 - \Gamma_L) V_3^+}{Z_0} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (-0.046)}{50} = -0.00061 \text{ A}$



Simuliamo il circuito.

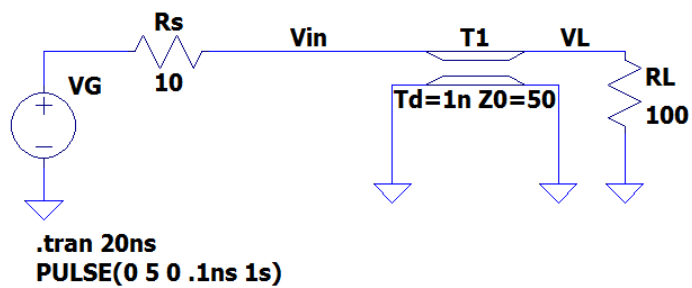


Figura 12: Circuito per simulazione "3"

Nella figura seguente è riportato l'andamento delle tensioni di generatore e carico. Per meglio comprendere l'andamento di questi segnali, sono state evidenziate le corrispondenze con il diagramma dei rimbalzi.

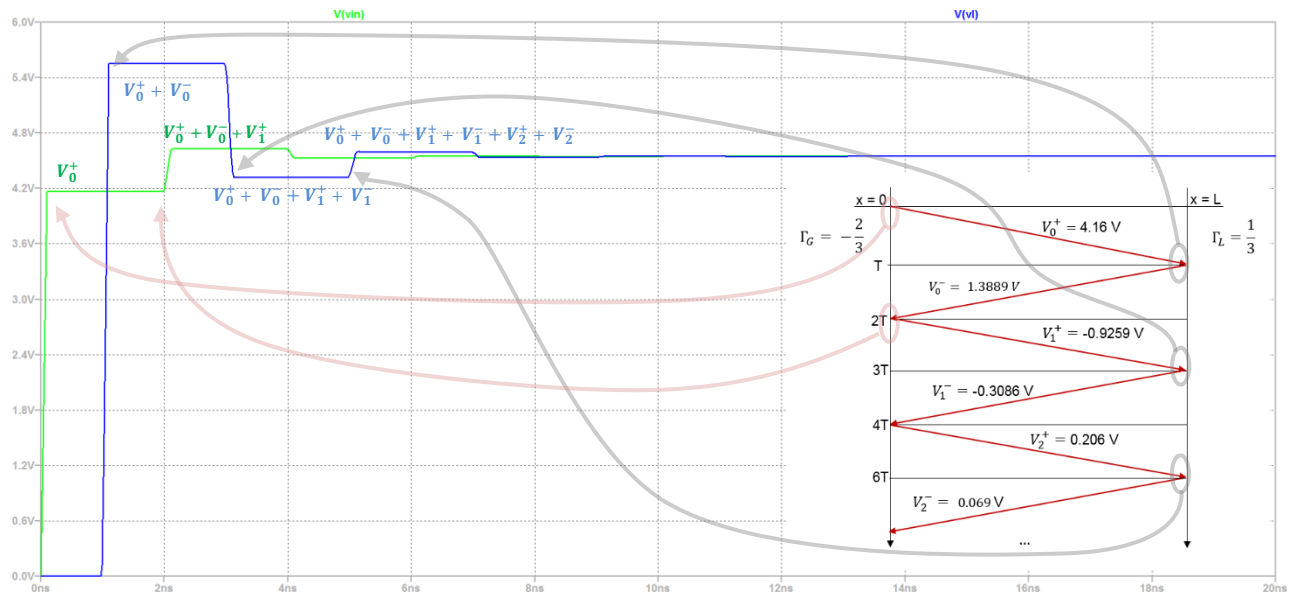
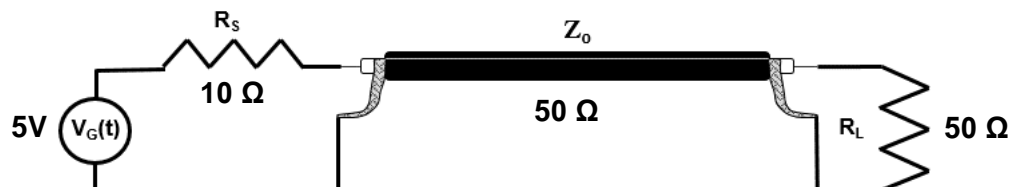


Figura 13: Risultato della simulazione del circuito "3"

Quarto caso: Carico=50Ω (adattamento di impedenza)

In questo esempio il carico è perfettamente adattato alla linea di trasmissione.



Se il carico ha valore pari all'impedenza caratteristica, non c'è alcuna riflessione e si verifica un adattamento perfetto.

Procediamo come nei casi precedenti.

$$V_0^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + R_s} = 5 \frac{50}{50 + 10} = 4.16 \text{ V}$$

Calcoliamo i coefficienti di riflessione alla sorgente (Generator) ed al carico (Load).

$$\Gamma_G = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} = \frac{10 - 50}{10 + 50} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0$$

Ricordiamo le relazioni fondamentali:

$$V_n^- = \Gamma_L V_n^+ \\ V_{n+1}^- = \Gamma_G V_n^- = \Gamma_G \Gamma_L V_n^+$$

Calcoliamo:

$$\Gamma_G \Gamma_L = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0 = 0$$

La sequenza di V_n^- e V_{n+1}^+ è tutta nulla per $n \geq 0$; Solo V_0^+ è diversa da zero.

La tensione al carico (quando arriva il pacchetto n-esimo) è:

$$V_{Load,n} = V_n^+ + V_n^- = (1 + \Gamma_L) V_n^+ = (1 + 0) V_n^+ = V_n^+$$

La corrente nel carico vale:

$$I_{Load,n} = \frac{V_n^+ - V_n^-}{Z_0} = \frac{(1 - \Gamma_L) V_n^+}{Z_0} = \frac{(1 - 0) V_n^+}{Z_0} = \frac{V_n^+}{Z_0}$$

Iterazione 0 (arrivo a $t = T$)

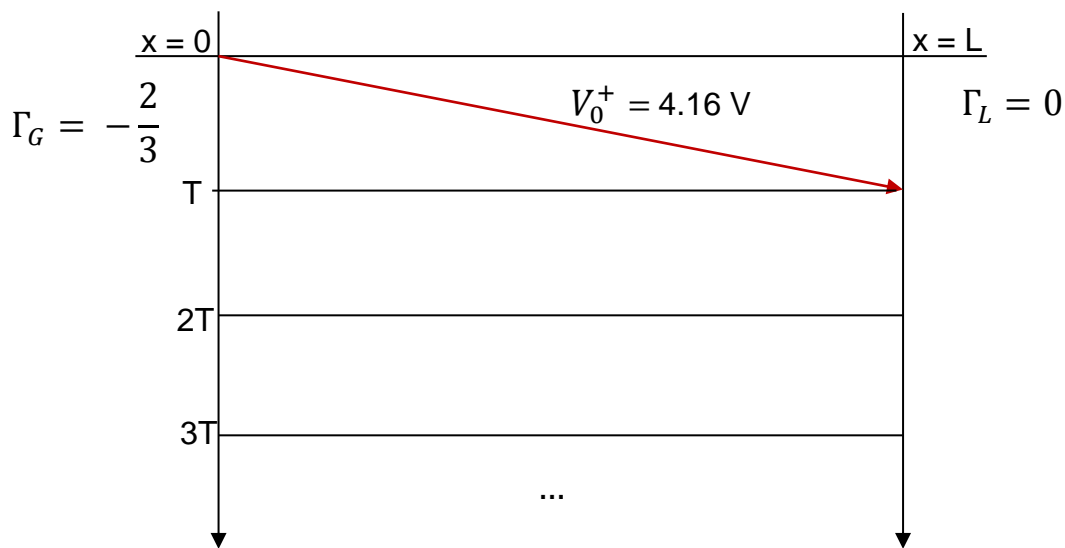
- $V_0^+ = 4.1667 \text{ V}$
- $V_0^- = V_0^+ \cdot \Gamma_L = 0 \text{ V}$ (ricordiamo che $\Gamma_L = 0$)

- $V_{Load,0} = (1 + \Gamma_L) V_0^+ = V_0^+ = 4.1667 \text{ V}$
- $I_{Load,0} = \frac{(1 - \Gamma_L) V_0^+}{Z_0} = \frac{1 \cdot 4.1667}{50} = 0,0833 \text{ A}$

Iterazione $i = 1, 2, 3 \dots$ (arrivo a $t = (2n+1)T$)

- $V_i^+ = V_i^+ \cdot \Gamma_G = 0 \cdot \Gamma_G = 0 \text{ V}$
- $V_i^- = V_i^+ \cdot \Gamma_L = 0 \cdot \Gamma_L = 0 \text{ V}$

Dopo la prima iterazione, non ci sono riflessioni perché il carico, perfettamente adattato alla linea di trasmissione, assorbe tutta l'onda V_0^+ , quindi, dopo il tempo T sul carico abbiamo la V_0^+ che rimane costante.



Simuliamo il circuito.

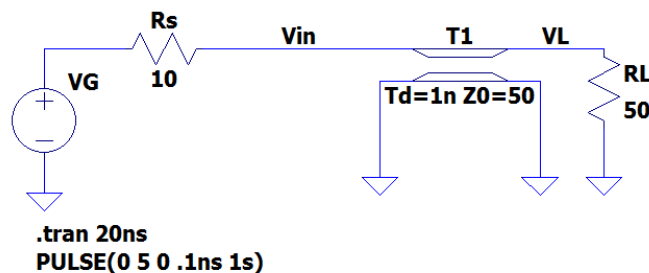


Figura 14: Circuito per simulazione “4”

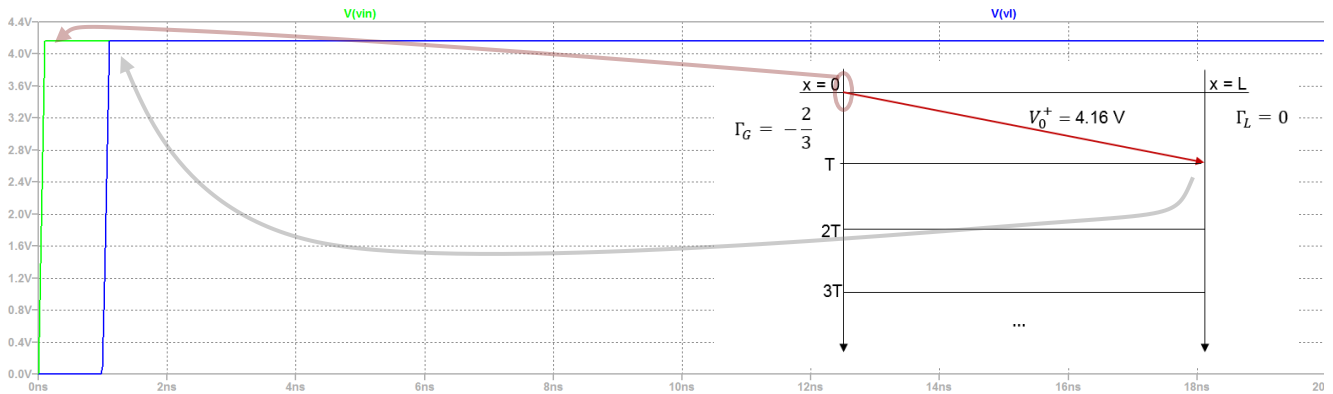


Figura 15: Risultato della simulazione del circuito "4"

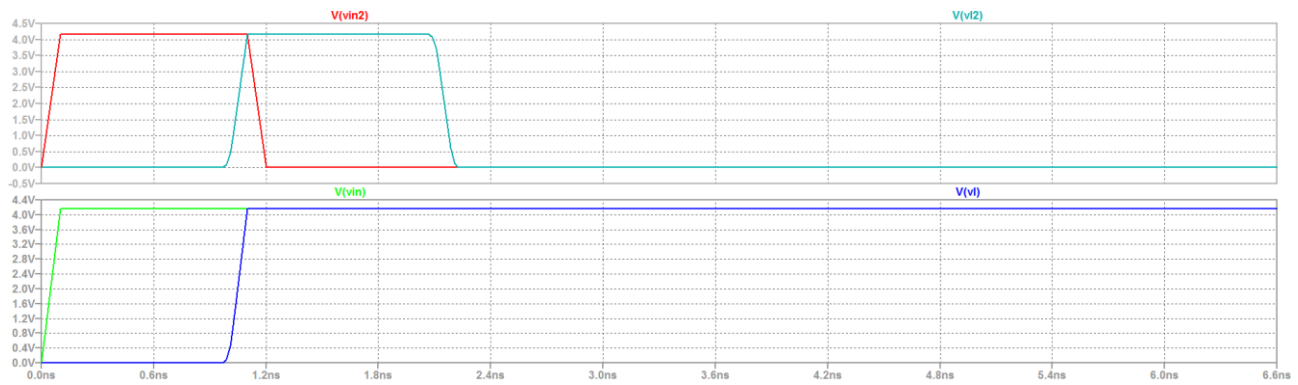
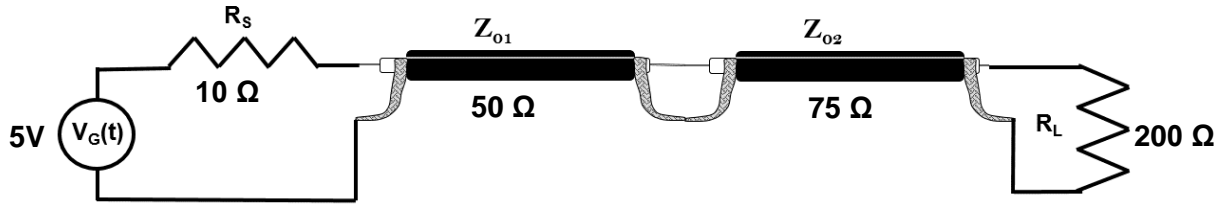


Figura 16: Risposta del circuito "4" al gradino (sotto) e all'impulso (sopra)

Quinto caso: sistema complesso

Esaminiamo ora un circuito un po' più complesso, caratterizzato dalla presenza di due linee di trasmissione in serie con impedenze diverse. Il carico non è adattato. Ci aspettiamo molte "discontinuità" a causa del passaggio del segnale attraverso diverse impedenze.



La metodologia da utilizzare per lo studio del sistema non cambia.

Anzitutto definiamo:

- Coefficiente di riflessione generatore $\Gamma_G = \frac{R_S - Z_1}{R_S + Z_1} = -\frac{2}{3} = -0.667$
- Coefficiente di riflessione giunzione (1-2) $\Gamma_{1 \rightarrow 2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{25}{125} = 0.2$
- Coefficiente di riflessione giunzione (2-1) $\Gamma_{2 \rightarrow 1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -0.2$
- Coefficiente di trasmissione $T_{1 \rightarrow 2} = 1 - \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{150}{125} = 1.2$
- Coefficiente di trasmissione $T_{2 \rightarrow 1} = 1 - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 Z_1}{Z_2 + Z_1} = 0.8$
- Coefficiente di riflessione carico $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_2}{Z_L + Z_2} = \frac{125}{275} = 0.45$

Osserviamo che $T_{1 \rightarrow 2} > 1$. Come mai viene trasmessa una tensione maggiore di quella incidente? Il tutto è coerente con la conservazione dell'energia, basta tenere conto delle impedenze!

Vediamo ora di fare qualche analisi sui tempi di propagazione.

Abbiamo già visto che la velocità di propagazione $v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = FV \cdot c$, dove $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ e FV (fattore di velocità) dipende dalla linea di trasmissione (cavo).

Supponiamo di avere 2 cavi coassiali con $VF = 0.66$ ad esempio RG174 (50 Ω) e RG-59 (75 Ω); il primo lungo 30 cm ed il secondo 90 cm. Calcoliamo i tempi di propagazione dell'onda nei due cavi.

$$TD = \frac{L}{c \cdot VF} \rightarrow TD_1 = \frac{0.3 m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 0.66} \simeq 1.5 ns, \quad TD_2 = \frac{0.9 m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 0.66} \simeq 4.5 ns$$

Iniziamo a calcolare il diagramma delle riflessioni tenendo conto che:

$$TD_1 = 1.5 \text{ ns} \text{ e } TD_2 = 4.5 \text{ ns}$$

La prima onda vale sempre

$$V_{1,0}^+ = V_G \frac{Z_1}{R_S + Z_1} = 5 \frac{50}{10 + 50} = 4.1667 \text{ V}$$

Questa onda parte a $t=0$ e raggiunge la giunzione ($50\Omega \rightarrow 75\Omega$) a $t=TD_1=1,5 \text{ ns}$.

Iterazione 0: $t = 1.5 \text{ ns}$

Onda incidente su giunzione $V_{1,0}^+ = 4.167 \text{ V}$

- Riflessione verso sinistra

$$V_{1,0}^- = \Gamma_{1 \rightarrow 2} V_{1,0}^+ = 0.2 \cdot 4.167 = 0.833 \text{ V}$$

Questa onda torna alla sorgente a $1.5+1.5 = 3 \text{ ns}$

- Trasmissione nella linea 2 verso il carico

$$V_{2,0}^+ = T_{1 \rightarrow 2} V_{1,0}^+ = 1.2 \cdot 4.167 = 5.0 \text{ V}$$

Questa onda raggiunge il carico dopo ulteriori $TD_2 = 4,5 \text{ ns}$ cioè a:
 $1,5 + 4,5 = 6,0 \text{ ns}$.

Iterazione 1: $t = 3.0 \text{ ns}$

- Al generatore arriva la riflessione $V_{1,0}^-$ che viene riflessa con $\Gamma_G = -\frac{2}{3}$.

$$V_{1,1}^+ = \Gamma_G V_{1,0}^- = -\frac{2}{3} \cdot 0.833 = -0.556 \text{ V}$$

Questa nuova onda diretta parte a $t=3,0 \text{ ns}$ e arriva alla giunzione a $t=4,5 \text{ ns}$.

Iterazione 2: $t = 4.5 \text{ ns}$

Alla giunzione arriva $V_{1,1}^+$.

- Riflessione (di segno negativo) sulla linea 1:

$$V_{1,1}^- = \Gamma_{1 \rightarrow 2} V_{1,1}^+ = 0.2 \cdot (-0.556) = -0.111 \text{ V}$$

Tornerà alla sorgente e arriverà a $4,5+1,5=6,0 \text{ ns}$.

- Trasmissione verso il carico nella linea 2:
 $V_{2,1}^+ = T_{1 \rightarrow 2} V_{1,1}^+ = 1.2 \cdot (-0.556) = -0.667V$
 che arriva al carico a $4,5+4,5=9,0$ ns.

Iterazione 3: $t = 6.0$ ns

Arrivo della prima onda al *carico* ed arrivo di $V_{1,1}^-$ alla sorgente.

- Al carico arriva $V_{2,0}^+ = 5.0V$
 Ricordiamo che $\Gamma_L = 0.45$
 L'onda riflessa dal carico vale $V_{2,0}^- = \Gamma_L V_{2,0}^+ = 0.45 \cdot 5 = 2.27V$
 Il salto istantaneo di tensione al carico (somma incidente + riflessa) vale:
 $\Delta V_{LOAD}(6ns) = (1 + \Gamma_L) V_{2,0}^+ = 1.45 \cdot 5 = 7.27V$
 Osserviamo che si tratta di un overshoot rispetto a V_G ed è possibile perché la trasmissione al giunto ha amplificato la tensione.
- Il riflesso $V_{2,0}^-$ torna verso la giunzione e la raggiunge a $6.0 + 4.5 = 10.5$ ns.
- Alla sorgente, nello stesso istante ($t=6ns$) arriva la riflessione
 $V_{1,1}^- = -0.11V$. Il generatore la riflette ancora secondo Γ_G generando:
 $V_{1,2}^+ = \Gamma_G V_{1,1}^- = -\frac{2}{3} \cdot 0.11 = 0.007V$
 Questa nuova onda arriva alla giunzione a $6,0+1,5=7,5$ ns.

Iterazione 4: $t = 7.5$ ns

La giunzione riceve $V_{1,2}^+$

- Riflessione a sinistra $V_{1,2}^- = 0.2 \cdot 0.07 = 0.015V$ che tornerà al generatore arrivando a 9.0 ns.
- Trasmissione verso il carico $V_{2,2}^+ = 1.2 \cdot 0.07 = 0.089V$ che arriverà al carico a $7.5 + 4.5 = 12.0$ ns.

Iterazione 5: $t = 9.0$ ns

Arrivo al carico di $V_{2,1}^+$

- Il salto di tensione al carico vale: $\Delta V_{LOAD}(9ns) = (1 + \Gamma_L) V_{2,1}^+ = 0.97V$

Il valore istantaneo al carico, quindi, passa da 7.27V a $7.27 - 0.97 = 6.3V$

- Il generatore riceve $V_{1,2}^-$ e la riflette creando

$$V_{1,3}^+ = \Gamma_G V_{1,2}^- = -\frac{2}{3} 0.015 = 0.0099V$$

Iterazione 6: $t = 10.5 \text{ ns}$

- La giunzione riceve il riflesso $V_{2,0}^-$ ritornato dal carico (nello stesso istante, arriva al nodo anche una piccola onda da sinistra).

Qui bisogna usare la sovrapposizione: alla giunzione sono presenti due onde incidenti contemporanee:

- da destra $a_2 = V_{2,0}^- = 2.27V$
- da sinistra $a_1 = V_{1,3}^+ = 0.0099V$

Quindi definiamo:

- $b_1 = \Gamma_{1 \rightarrow 2} a_1 + T_{2 \rightarrow 1} a_2 = 1.81V$ (va verso la sorgente e arriverà a $10.5 + 1.5 = 12.0 \text{ ns}$)
- $b_2 = T_{1 \rightarrow 2} a_1 + \Gamma_{2 \rightarrow 1} a_2 = -0.466V$ (va verso il carico e arriverà a $10.5 + 4.5 = 15.0 \text{ ns}$)

Queste sono le prime iterazioni, riportate per illustrare il funzionamento del circuito. Ogni volta che un'onda raggiunge uno dei tre punti (sorgente / giunzione / carico) si genera un contributo trasmesso ed uno riflesso; i contributi si sommano linearmente nel tempo al nodo che stiamo osservando.

Il processo si ripete fino ad annullare tutte le riflessioni.

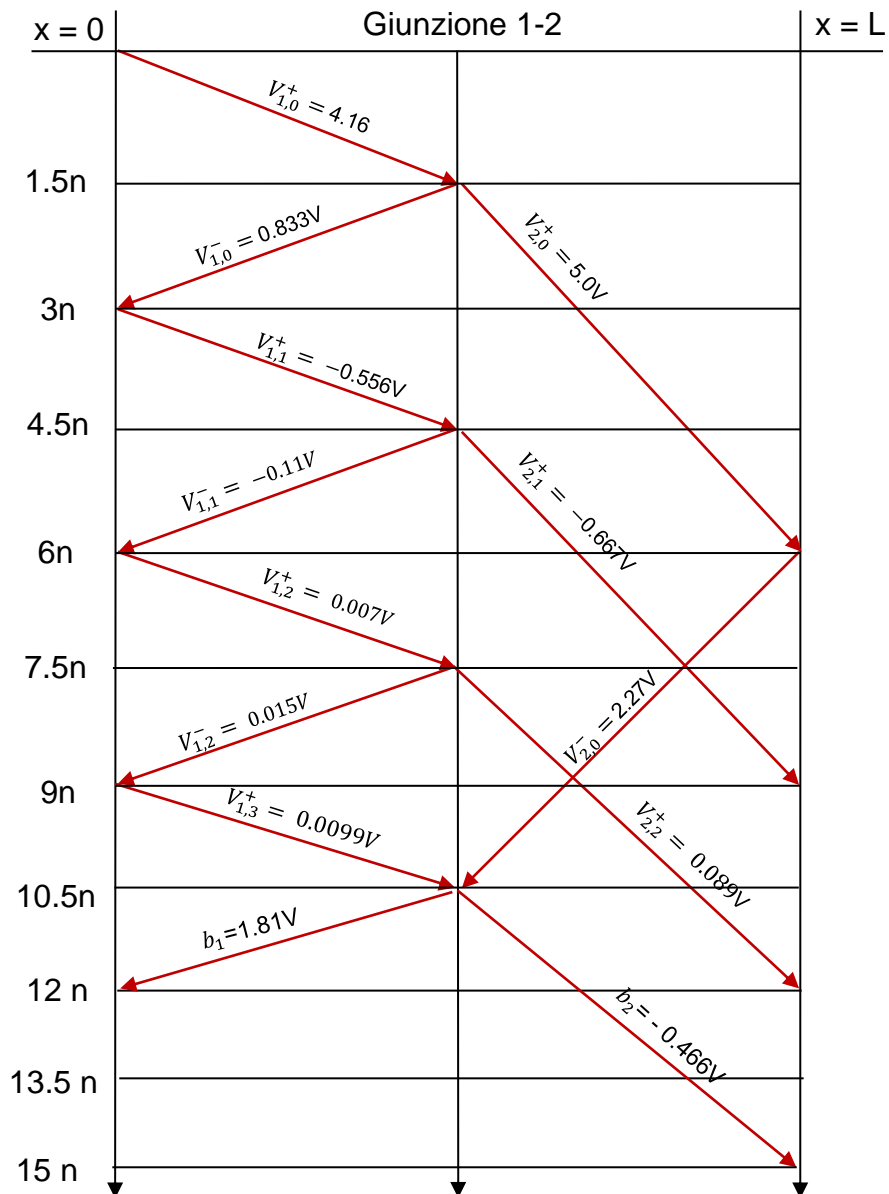
Dove converge il sistema?

Dopo un tempo sufficientemente lungo (molti rimbalzi), la linea si comporta come un collegamento DC al carico Z_L : lo stato stazionario DC è semplice partitore tra R_S e Z_L :

$$V_{Load, \infty} = V_G \frac{Z_L}{R_S + Z_L} = 5 \frac{200}{10 + 200} = 4.76V$$

$$I_{Load,\infty} = \frac{V_G}{R_S + Z_L} = 0.024A$$

Nel grafico seguente sono state riportate le iterazioni calcolate.



Possiamo ora simulare il circuito.

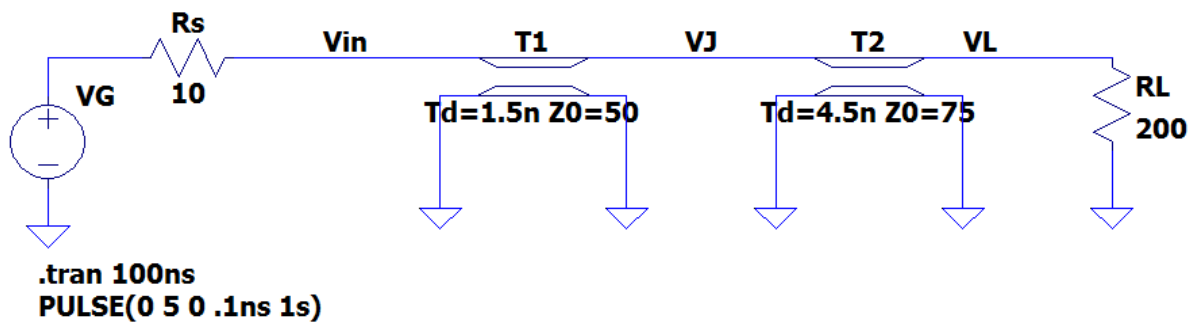


Figura 17: Circuito per la simulazione del circuito "5"

Nella figura seguente è riportato il grafico temporale della tensione al carico. Sono stati evidenziati gli eventi riportati nel grafico dei rimbalzi in modo da “spiegare” i diversi livelli di tensione.

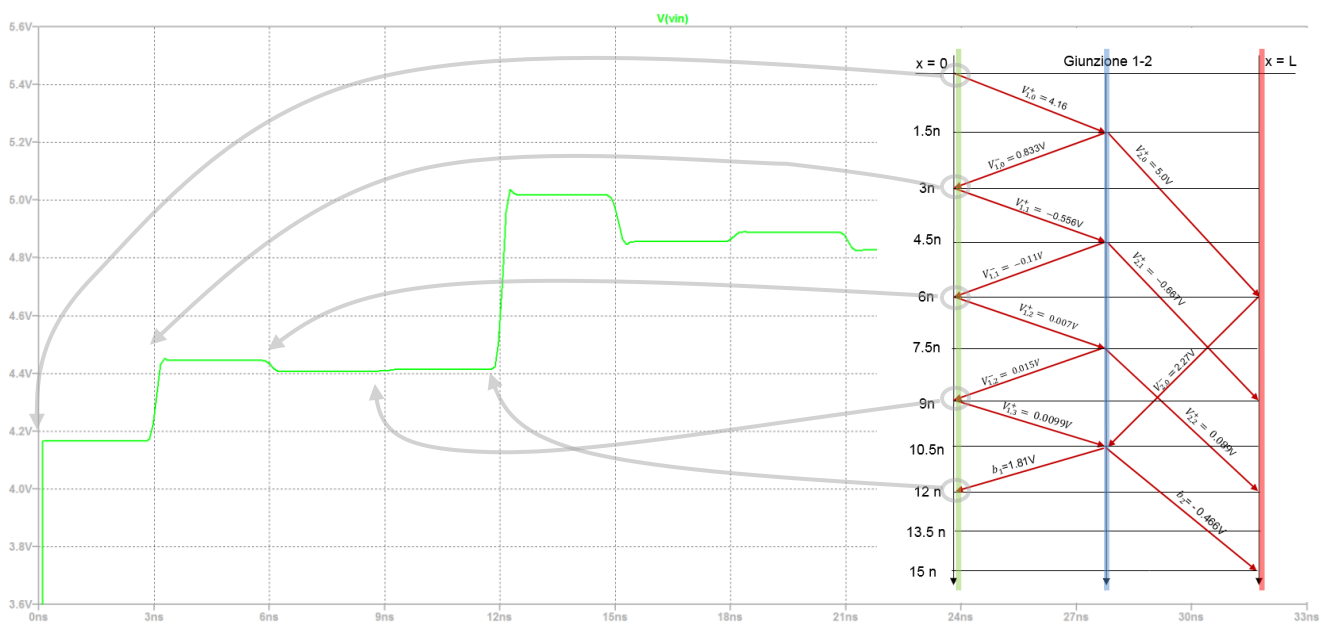


Figura 18: Risultati della simulazione del circuito "5" – Tensione sul generatore

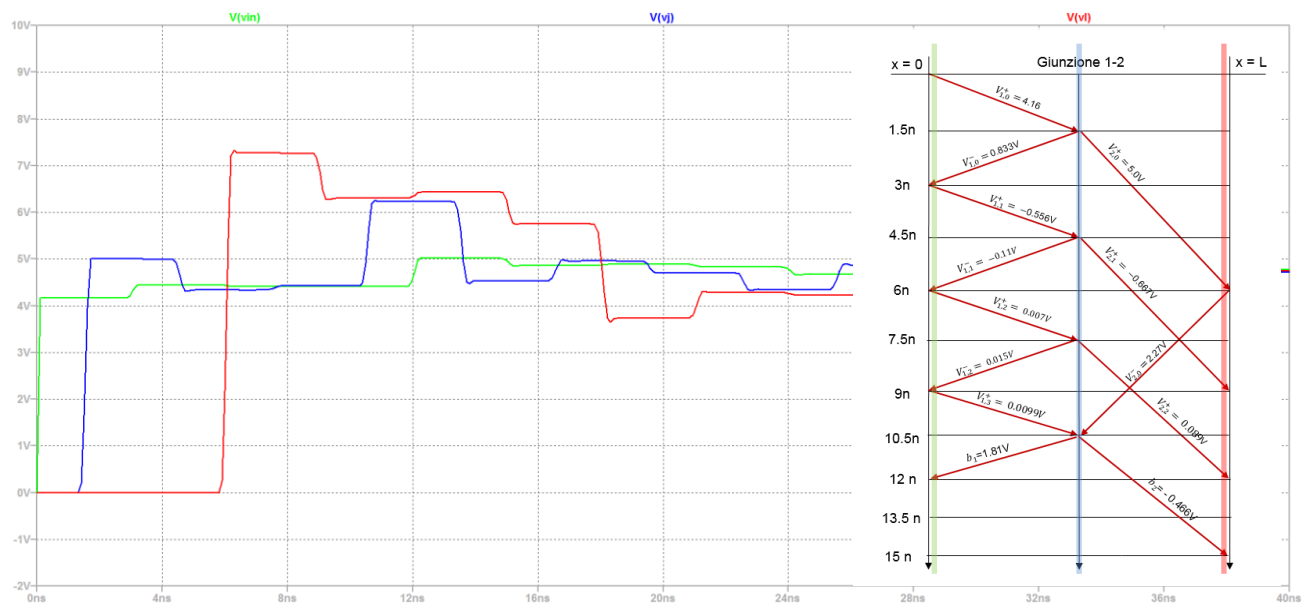


Figura 19: Risultati della simulazione del circuito "5", con tensioni su sorgente, giunzione e carico

4. Conclusioni

La riflettometria nel dominio del tempo, che nel corso di questo tutorial abbiamo analizzato da un punto di vista teorico, pratico e applicativo, rappresenta una delle tecniche più potenti e al tempo stesso più affascinanti per lo studio delle linee di trasmissione.

Ogni volta che un segnale elettrico viaggia lungo un percorso non ideale, che si tratti di un cavo coassiale, di una pista su circuito stampato o di una coppia intrecciata, esso è inevitabilmente soggetto a riflessioni, attenuazioni, disadattamenti e dispersioni. In condizioni perfette, un segnale inviato dal generatore al carico non dovrebbe mai “tornare indietro”: tutta la potenza dovrebbe essere assorbita dal carico, senza alcuna riflessione verso la sorgente. Ma il mondo reale è lontano dalla perfezione. I carichi non sono sempre adattati, le linee possono presentare discontinuità, connessioni imperfette, derivazioni spurie, variazioni di impedenza dovute alla tecnologia di produzione.

Ecco allora che la riflettometria diventa uno strumento grazie al quale il tecnico può studiare la linea e osservare cosa accade al suo interno, senza doverla fisicamente smontare. Mandando un impulso o un gradino noto e analizzando le riflessioni che ritornano, si riesce a ricostruire una mappa spaziale delle discontinuità, quasi come se si avesse un radar in miniatura che esplora l'interno del cavo o della pista.

Durante il nostro percorso abbiamo visto come la TDR si fondi su concetti teorici fondamentali dell'elettrotecnica: la teoria delle linee di trasmissione a parametri distribuiti, la definizione di impedenza caratteristica, il coefficiente di riflessione, la distinzione tra lunghezza geometrica ed elettrica, la risoluzione spaziale. Tutto questo costituisce il “linguaggio” con cui possiamo descrivere i fenomeni che osserviamo.

La teoria, tuttavia, rimane sterile se non viene messa alla prova con modelli e simulazioni. È per questo che abbiamo introdotto lo strumento del diagramma di rimbalzo, che consente di visualizzare in modo intuitivo come le onde si propagano lungo la linea, con continue riflessioni e trasmissioni. Questo metodo,

per quanto semplificato, fornisce una comprensione immediata di ciò che altrimenti rimarrebbe confinato in equazioni complesse.

Successivamente, con l'uso di LTspice, abbiamo visto come i modelli matematici possano essere resi concreti, dando vita a simulazioni che riproducono fedelmente l'andamento temporale delle tensioni e delle correnti.