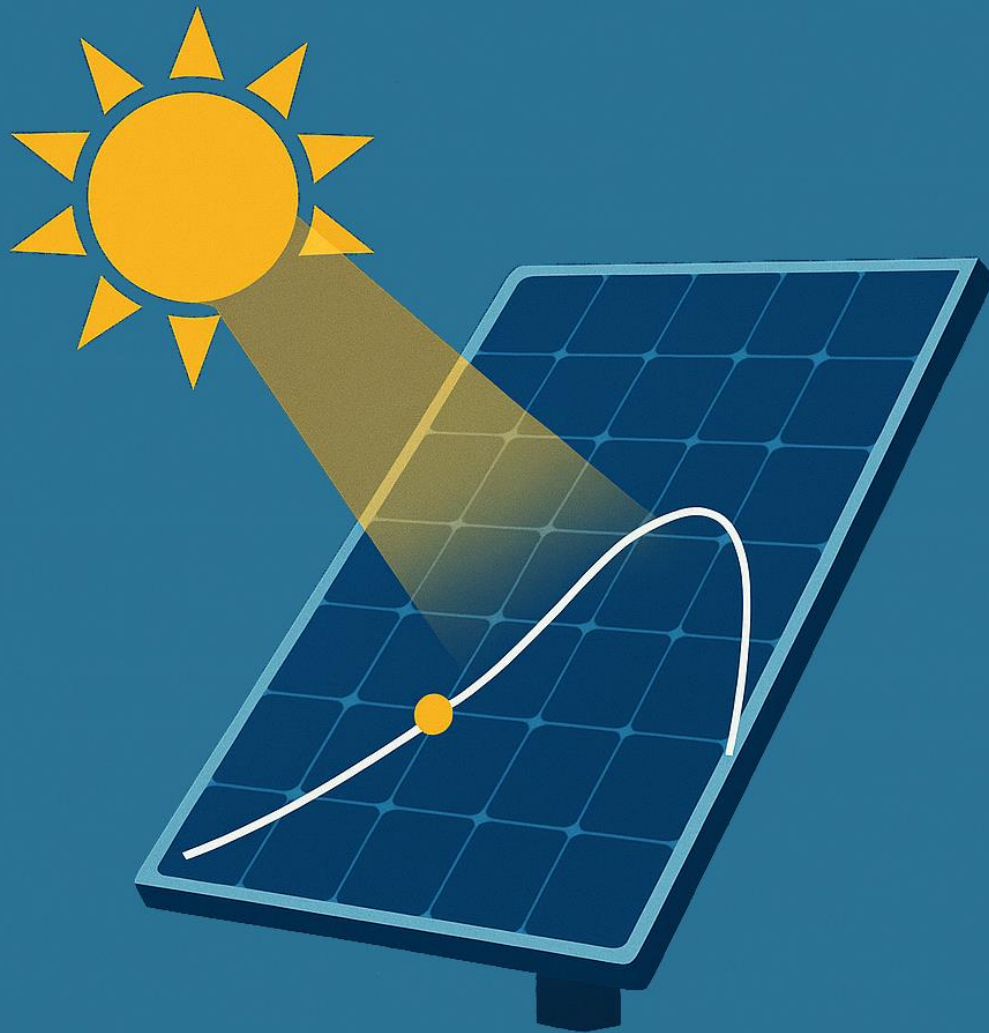


# Analisi e implementazione di algoritmi MPPT: dal modello fotovoltaico al filtro di Kalman



Leonardo Chieco

# **Analisi e implementazione e di algoritmi MPPT: dal modello fotovoltaico al filtro di Kalman**

L'efficienza di un impianto fotovoltaico dipende in modo critico dal punto di lavoro al quale viene fatto operare il pannello solare. Le celle fotovoltaiche non forniscono una potenza costante: essa varia con l'irraggiamento, la temperatura e la tensione ai capi del modulo. Per sfruttare al massimo l'energia disponibile, i moderni convertitori DC/DC adottano un sistema di controllo detto MPPT (Maximum Power Point Tracking), in grado di regolare dinamicamente la tensione e la corrente per mantenere il funzionamento nel punto di massima potenza (Maximum Power Point, MPP).

In questo articolo si analizzano i principi fisici e di controllo che sottendono il MPPT, i principali algoritmi utilizzati, e infine si presenta un approccio avanzato basato su filtro di Kalman, come proposto nella pubblicazione "A Kalman Filter Based MPPT Algorithm" (IEEE, 2011), con un esempio di implementazione in Python e simulazione del comportamento dinamico del sistema.

Buona lettura!

## **L'autore**

Leonardo Chieco è un ingegnere elettronico con oltre 20 anni di esperienza nella progettazione e sviluppo di software per il controllo dell'automazione (PC/PLC), nella progettazione di schede elettroniche per applicazioni industriali, firmware, robotica e mecatronica.

LinkedIn: <https://www.linkedin.com/in/leonardo-chieco-53550b129/>

# 1. Principio di funzionamento dei pannelli fotovoltaici

Un pannello solare fotovoltaico è un dispositivo elettronico in grado di convertire direttamente l'energia luminosa in energia elettrica utilizzando il cosiddetto effetto fotovoltaico. Questo effetto, scoperto nel XIX secolo da Alexandre-Edmond Becquerel, si manifesta in alcuni materiali semiconduttori nei quali l'assorbimento di fotoni provoca il rilascio di portatori di carica elettrica (elettroni e lacune), che possono essere separati e raccolti per generare una corrente elettrica continua.

L'elemento base di un pannello solare è la cella fotovoltaica.

Ogni cella è costituita da un sottile strato di materiale semiconduttore, generalmente silicio, opportunamente drogato per creare una giunzione p-n.

Lo strato p (positivo) contiene un eccesso di lacune (portatori positivi), ottenuto drogando il silicio con elementi trivalenti come il boro.

Lo strato n (negativo) contiene un eccesso di elettroni liberi, ottenuto drogando il silicio con elementi pentavalenti come l'arsenico.

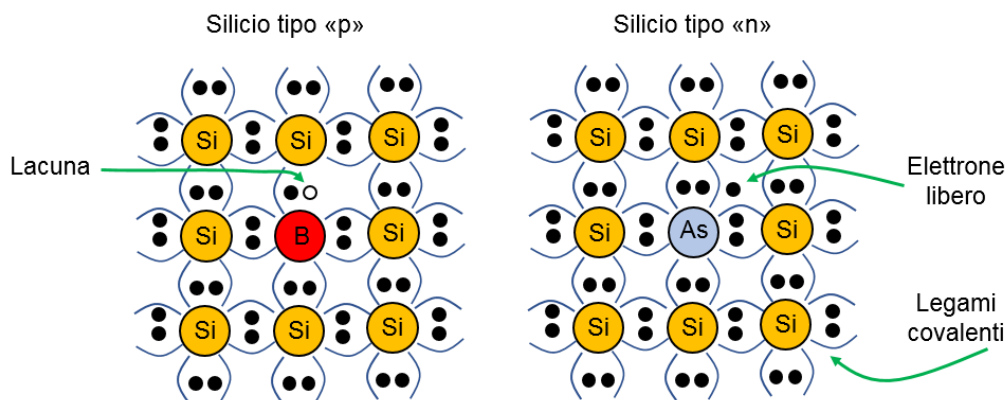
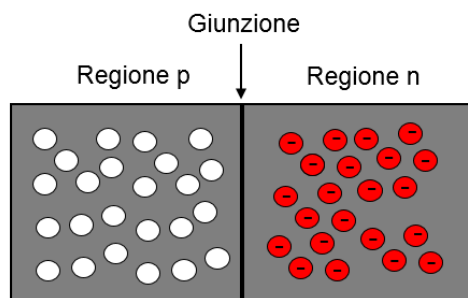
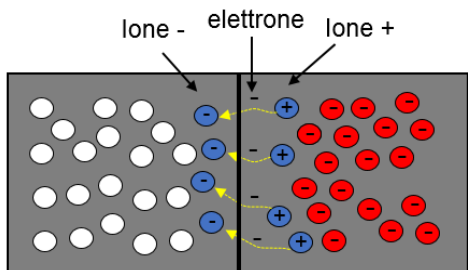


Figura 1: Reticolo del silicio con drogaggio p ed n

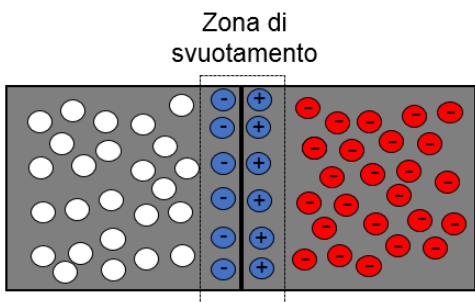
Quando si uniscono due regioni di silicio drogato diversamente, una di tipo p e una di tipo n, si crea una giunzione p-n.



All'istante del contatto, i due materiali non sono in equilibrio. Nella regione n c'è un'elevata concentrazione di elettroni liberi, mentre, nella regione p, ci sono molte lacune.



Questa differenza di concentrazione fa sì che, nel punto di contatto, gli elettroni diffondano spontaneamente dalla zona n (dove sono in eccesso) verso la zona p (dove mancano), mentre le lacune diffondono in senso opposto, dalla p verso la n. Quando un elettrone si sposta dalla regione n a quella p, si combina con una lacuna, cioè si “ricompone”, e quindi entrambi i portatori mobili scompaiono. Rimangono solo gli ioni negativi (che hanno acquistato un elettrone) e positivi (che hanno ceduto un elettrone).



Questo processo avviene in una sottile regione intorno alla giunzione, dove quindi si riduce fortemente la concentrazione di portatori mobili. La separazione di cariche fisse crea un campo elettrico interno diretto dalla regione n (positiva) verso la regione p (negativa) che genera una forza capace di respingere sia ulteriori elettroni che tentano di diffondere dalla n alla p, sia le lacune che cercano di diffondere dalla p alla n.

Man mano che la diffusione procede, la carica accumulata aumenta e quindi cresce anche il campo elettrico che si oppone alla diffusione stessa.

A questo punto si forma una barriera di potenziale  $V_b$ , che rappresenta la differenza di energia necessaria perché un elettrone possa attraversare la giunzione. Per il silicio, questa barriera è tipicamente dell'ordine di 0.6–0.7 V.

Quando la giunzione p–n è esposta alla luce solare, i fotoni con energia superiore al band gap del silicio (circa 1,12 eV) possono rompere uno dei legami covalenti

che uniscono gli atomi nel reticolo cristallino del semiconduttore. In questo modo vengono generate coppie elettrone–lacuna, che costituiscono i portatori di carica responsabili della corrente fotovoltaica.

Se la coppia si forma all'interno o vicino alla zona di svuotamento, il campo elettrico interno separa immediatamente le due cariche:

- l'elettrone viene accelerato verso la regione n,
- la lacuna verso la regione p.

Questa separazione produce una differenza di potenziale ai capi della giunzione, che può essere utilizzata per alimentare un circuito esterno.

È proprio questa azione del campo interno, generato spontaneamente nella zona di svuotamento, che rende possibile la conversione diretta della luce in elettricità.

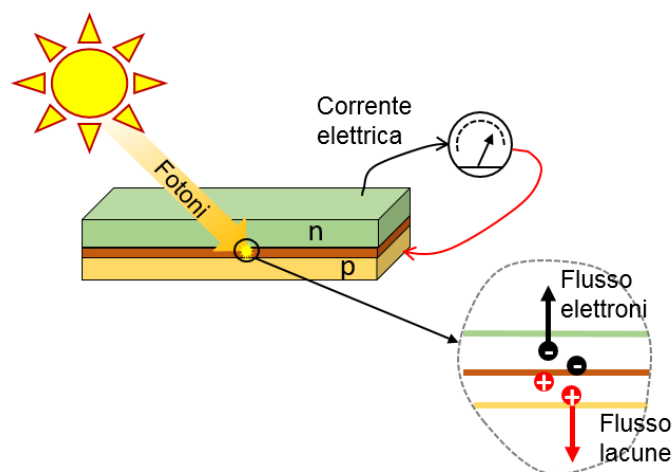


Figura 2: Funzionamento dei pannelli fotovoltaici

Il pannello fotovoltaico è assimilabile, quindi, ad un generatore ideale di corrente nel quale:

- La tensione ai capi del pannello (che d'ora in avanti chiameremo  $V$ ) si stabilisce in valori approssimativamente uguali alla nominale non appena si ha la presenza di luce solare ed è un parametro molto influenzato dalla temperatura;

- La quantità di corrente erogata (che chiamiamo  $I$ ) è invece direttamente proporzionale all'irraggiamento solare ricevuto e varia pochissimo con la temperatura;

Oltre a questi effetti noti ci sono però delle perdite che rendono il pannello fotovoltaico un generatore di corrente non ideale. In particolare, dobbiamo considerare le due resistenze (serie e parallelo) che in particolare sono così definite:

- $R_{SH}$  (*resistenza di Shunt*): questa resistenza modella tutte le perdite interne della cella fotovoltaica come, ad esempio, difetti di fabbricazione, errori di progettazione, non purezza dei materiali utilizzati.
- $R_S$  (*resistenza serie*): questa resistenza modella tutti quei fattori di perdita che la corrente incontra nel suo passaggio ovvero per esempio la resistenza di contatto silicio-conduttore, la resistenza dei contatti superiori e inferiori dell'intera cella.

Nella figura seguente è mostrato il modello semplificato di un pannello fotovoltaico.

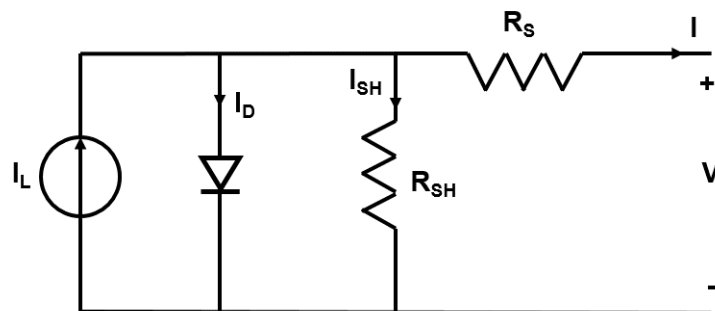


Figura 3: Modello di un pannello fotovoltaico

Ricaviamo  $I$  applicando la legge di Kirchhoff:

$$I = I_L - I_D - I_{SH} = I_L - I_S \left( e^{\frac{qV_D}{nkT}} - 1 \right) - \frac{V_D}{R_{SH}}$$

Notiamo che:

$$V_D = V_{R_{SH}} = V - R_S I$$

Quindi:

$$I = I_L - I_S \left( e^{\frac{q(V - R_S I)}{nkT}} - 1 \right) - \frac{V - R_S I}{R_{SH}}$$

dove:

- $I_L$  è la corrente generata per effetto fotovoltaico
- $I_S$  è la corrente di saturazione inversa del diodo,
- $R_S$  è la resistenza serie,
- $R_{SH}$  è la resistenza di shunt,
- $q$  è la carica dell'elettrone,
- $k$  è la costante di Boltzmann,
- $T$  è la temperatura assoluta,
- $n$  è il coefficiente di idealità (o fattore di emissione), un numero compreso tra 1 e 2 che descrive quanto il diodo reale si discosta da un diodo ideale. Per un diodo ideale, il coefficiente è sempre pari a 1.

Il comportamento elettrico di un pannello si rappresenta tramite la curva corrente-tensione ( $I$ - $V$ ) riportata nell'immagine seguente.

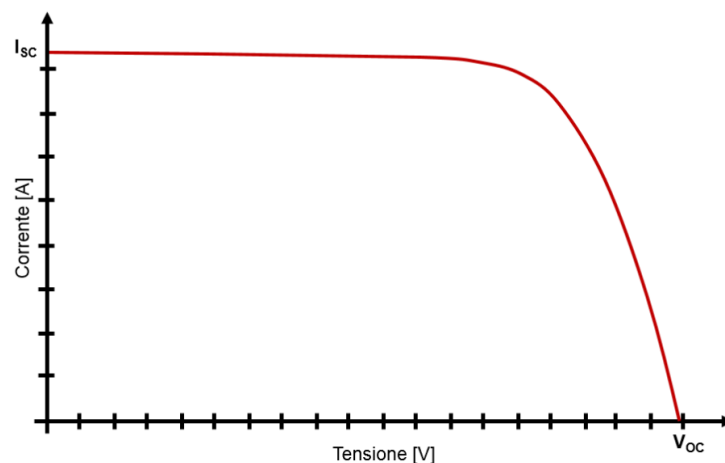


Figura 4: Caratteristica  $I(V)$  di un pannello fotovoltaico

A circuito aperto (nessun carico collegato), la corrente emessa è nulla e la tensione raggiunge il valore massimo chiamato tensione di circuito aperto  $V_{OC}$ .

A cortocircuito (carico nullo), la tensione è zero e la corrente raggiunge il valore massimo detto corrente di cortocircuito  $I_{SC}$ .

Tra questi due estremi, la corrente decresce con l'aumento della tensione, formando una curva caratteristica convessa.

La potenza elettrica erogata dal pannello è:  $P(V)=V \times I(V)$  e presenta un massimo in corrispondenza di una particolare tensione di lavoro  $V_{MPP}$  e corrente  $I_{MPP}$ .

Il punto  $(V_{MPP}, I_{MPP})$  è detto punto di massima potenza (Maximum Power Point, MPP).

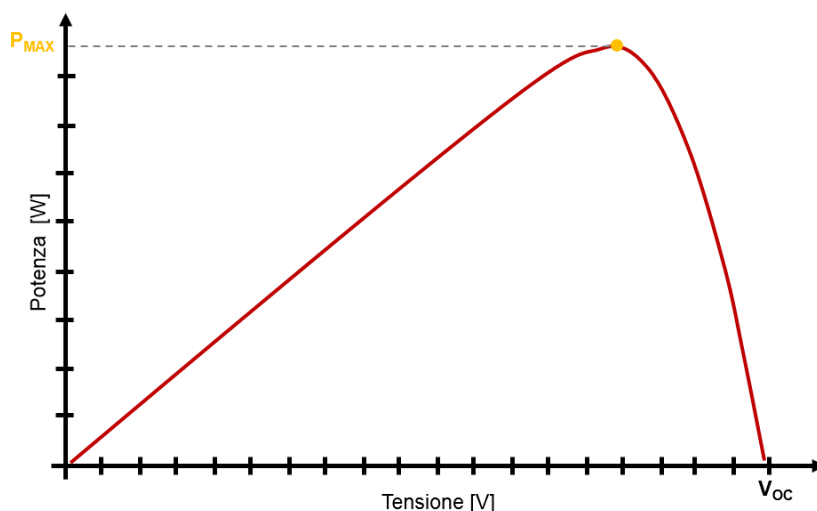


Figura 5: Caratteristica  $P(V)$  di un pannello fotovoltaico

Il pannello dovrebbe sempre lavorare in prossimità del punto MPP per massimizzare la potenza generata e l'efficienza totale del sistema.

Le condizioni ambientali influenzano significativamente la posizione del MPP:

- L'irraggiamento solare determina la corrente generabile dal modulo: all'aumentare dell'irraggiamento, la curva I-V "sale".
- La temperatura della cella influisce sulla tensione: se la temperatura cresce, la  $V_{MPP}$  e  $V_{OC}$  tendono a diminuire.

Se al pannello viene collegato un carico che non lo porta a lavorare al MPP, si otterrà meno potenza di quella disponibile. Per esempio: un pannello con  $V_{MPP} =$



30 V e  $I_{MPP} = 8$  A produce idealmente  $\sim 240$  W. Se lo colleghiamo direttamente a una batteria 12 V, senza adattamento, la corrente generata si abbasserà molto e con essa la potenza trasferita.

L'MPPT forza il modulo fotovoltaico a operare costantemente al suo punto di massima potenza (PMPP), mantenendo la sua tensione di uscita vicina a  $V_{MPP}$ . Successivamente, un circuito regolatore converte questa potenza per utilizzarla nella carica di una batteria.

Un regolatore MPPT è in sostanza un convertitore DC-DC (buck, boost o buck-boost a seconda delle tensioni) che si interpone tra l'array fotovoltaico e la batteria con il compito di:

- Far operare il modulo PV in prossimità del suo MPP (o comunque vicino) massimizzando la potenza estratta.
- Adattare tale potenza alla tensione di carica della batteria, con la giusta corrente, rispettando le fasi di caricamento appropriate.

In termini tecnici, il regolatore MPPT lavora regolando l'impedenza vista dal pannello fotovoltaico, in modo che il punto di lavoro ( $V$ ,  $I$ ) si trovi vicino al punto di massima potenza.

È fondamentale notare che non sempre è possibile sfruttare la condizione di Massima Potenza (MPP) del pannello. Il sistema MPPT può operare per estrarre la potenza massima solo se il carico (come la batteria) è in grado di assorbire tutta la potenza disponibile.

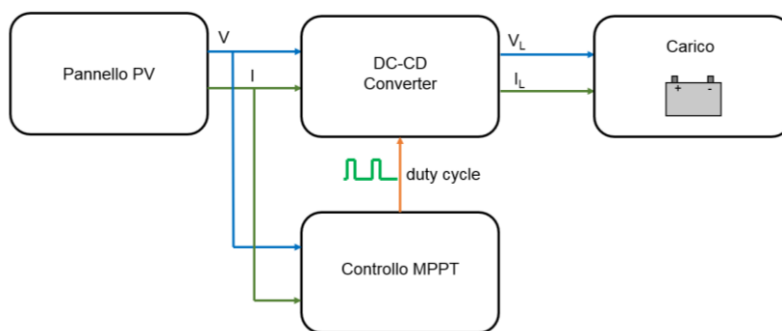


Figura 6: Schema di principio di un sistema MPPT

Nel contesto della carica di una batteria al litio, l'MPPT è pienamente operativo e utile durante la fase a Corrente Costante (CC), poiché in questa fase la batteria richiede e assorbe la massima corrente possibile, utilizzando quindi tutta la potenza che il regolatore può fornire.

Al contrario, durante la fase di Tensione Costante (CV) (o fase di mantenimento), il regolatore mantiene la tensione al valore massimo stabilito. In questa fase, man mano che la batteria si avvicina alla carica completa, la corrente di carica richiesta diminuisce drasticamente. Di conseguenza, il regolatore non può più estrarre la potenza massima dal pannello (la PMPP), poiché la batteria semplicemente non è più in grado di assorbirla.

Naturalmente è essenziale che la tensione operativa del modulo PV (o della stringa) sia sufficientemente superiore alla tensione della batteria più un certo margine per il convertitore. Se la tensione del pannello è troppo bassa rispetto alla batteria, l'MPPT non potrà “scendere” più di tanto e non potrà estrarre potenza ottimale.

Ad esempio, se la batteria è 12 V e la tensione di funzione del pannello sotto sole pieno è solo 15 V, un convertitore buck avrebbe poco margine. Meglio avere, per esempio, pannello/stringa con  $V_{mp}$  di 30-40 V.

Inoltre, la corrente massima in uscita del regolatore (verso la batteria) deve essere in linea con la potenza del pannello:  $P_{max} \approx V_{mp} \times I_{mp}$ . Il regolatore deve essere dimensionato per corrente adeguata.

Nella progettazione di un sistema a pannelli solari è importante ricordare che il loro funzionamento è fortemente influenzato da due parametri ambientali principali:

- Irraggiamento solare
  - Aumentando l'irraggiamento, aumenta quasi linearmente la corrente  $I_{sc}$ .
  - La tensione  $V_{oc}$  cresce invece in modo logaritmico e più lento.
  - La potenza massima disponibile cresce proporzionalmente alla radiazione incidente.

- Temperatura della cella
  - Aumentando la temperatura,  $V_{OC}$  diminuisce sensibilmente ( $\approx -2$  mV/°C per cella di silicio).
  - $I_{sc}$  cresce leggermente.
  - L'efficienza complessiva cala, poiché l'incremento termico riduce il bandgap del semiconduttore.

Un modulo fotovoltaico è l'insieme di più celle collegate in serie e/o in parallelo:

- Il collegamento in serie aumenta la tensione di uscita,
- Il collegamento in parallelo aumenta la corrente.

Ad esempio, un modulo tipico da 36 celle di silicio in serie può fornire circa 18–20 V a vuoto e 5–6 A alla massima potenza.

Più moduli collegati insieme formano un pannello solare (o più propriamente un array), in grado di generare potenze dell'ordine di centinaia di watt.

Di fondamentale importanza nella verifica del rendimento e della qualità di un modulo fotovoltaico è il parametro chiamato Fill Factor (FF), un numero adimensionale che misura il grado di purezza e di corretto sfruttamento del wafer di silicio che costituisce il modulo. È un numero compreso fra 0 e 1 e tanto più si avvicina all'unità tanto più la qualità del pannello è migliore e tanto più i costituenti del pannello sono di alta e quindi, in ultima analisi, tanto più basse sono le perdite e i fattori di invecchiamento ad esse connessi. Definiamo quindi:

$$FF = \frac{V_{MPP} I_{MPP}}{V_{OC} V_{SC}}$$

## Modello matematico semplificato

Abbiamo visto che la corrente in uscita da una cella fotovoltaica è modellata dalla seguente relazione:

$$I = I_L - I_S \left( e^{\frac{q(V - R_S I)}{nkT}} - 1 \right) - \frac{V - R_S I}{R_{SH}}$$

La corrente  $I$  compare a primo e secondo membro, quindi occorre risolvere questa equazione per ricavare l'espressione  $I(V)$ . La procedura è piuttosto complessa ed è fuori lo scopo di questo tutorial.

È importante osservare, però, che per molte applicazioni pratiche (simulazioni veloci, algoritmi di controllo, fitting sperimentale) è comodo usare una forma analitica semplificata che soddisfi i vincoli fisici principali:

- $I(0) = I_{SC}$  (corrente a corto circuito),
- $I(V_{OC}) = 0$  (corrente nulla a circuito aperto);
- Abbia la giusta forma qualitativa: corrente quasi costante per  $V$  piccoli, poi precipitazione verso zero attorno a  $V_{OC}$ .

La forma spesso utilizzata è:

$$I(V) = I_{SC} \left( 1 - \left( \frac{V}{V_{OC}} \right)^n \right)$$

Soddisfa esattamente i vincoli sopra e, variando  $n$ , permette di modellare la “curvatura” del grafico  $I$ – $V$ . Se  $n$  è piccolo, la curva è dolce mentre, se è grande, decresce rapidamente con un “ginocchio” più pronunciato.

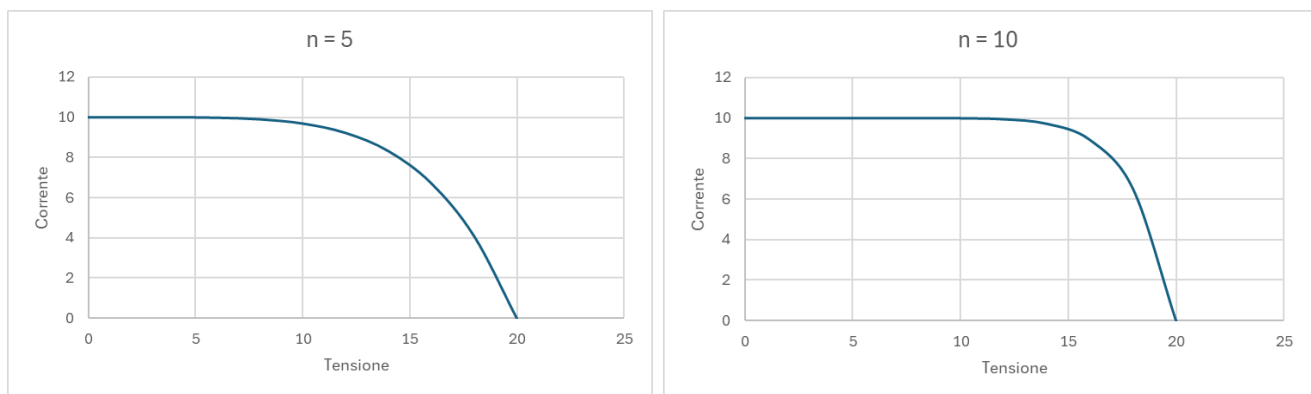


Figura 7: Andamento di  $I(V)$  ottenuto per  $n=5$  e  $n=10$

È bene sottolineare che questa relazione è un'approssimazione empirica semplificata, non una soluzione esatta.

Per fissare  $n$  si può procedere in vari modi. Il più semplice prevede il fit sui dati sperimentali, oppure si può usare il seguente approccio.

Se si impone che il modello dia il valore sperimentale di corrente al punto di massima potenza, si ha:

$$I_{MPP} = I_{SC} \left( 1 - \left( \frac{V_{MPP}}{V_{OC}} \right)^n \right)$$

da cui, isolando  $n$ ,

$$\left( \frac{V_{MPP}}{V_{OC}} \right)^n = 1 - \frac{I_{MPP}}{I_{SC}}$$

e quindi

$$n = \frac{\ln \left( 1 - \frac{I_{MPP}}{I_{SC}} \right)}{\ln \left( \frac{V_{MPP}}{V_{OC}} \right)}$$

Nota: Il valore di  $n$  è determinato per condizioni ambientali specifiche e non tiene conto delle variazioni di temperatura o irraggiamento. Pertanto, questo modello risulta valido solo per la particolare condizione operativa in cui è stato calibrato.

## 2. Algoritmi di MPPT

Negli anni sono stati sviluppati diversi algoritmi che oggi vengono normalmente implementati nei regolatori MPPT con lo scopo di trovare e inseguire il punto MPP. Tra i più diffusi vale la pena ricordare:

- Perturb and Observe (P&O)
- Incremental Conductance (IncCond)

### Metodo Perturb and Observe (P&O)

Il metodo P&O è il più diffuso per la sua semplicità: si applica una piccola perturbazione alla tensione del pannello e si misura la variazione di potenza ottenuta.

Se  $\frac{dP}{dV} > 0 \rightarrow$  ci si muove verso il MPP  $\rightarrow$  si aumenta  $V$

Se  $\frac{dP}{dV} < 0 \rightarrow$  ci si allontana da MPP  $\rightarrow$  si diminuisce  $V$

È un metodo semplice ma sensibile al rumore e causa piccole oscillazioni attorno al punto ottimale.

### Metodo Incremental Conductance (IncCond)

Sappiamo che nel punto MPP la derivata di  $P$  rispetto a  $V$  si annulla e che  $\frac{d(V \cdot I(V))}{dV} = f(x) + \frac{d f(x)}{dx}$ . Quindi:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d(V \cdot I(V))}{dV} = I + V \frac{dI}{dV} = 0 \rightarrow \frac{dI}{dV} = -\frac{I}{V}$$

Questa semplice equazione è il cuore del metodo Incremental Conductance che, in definitiva, confronta la conduttanza istantanea  $\frac{I}{V}$  con la conduttanza incrementale  $\frac{\Delta I}{\Delta V}$ , che è una misura discreta di  $\frac{dI}{dV}$ .

Il criterio decisionale diventa:

$$\frac{\Delta I}{\Delta V} = - \frac{I}{V} \Rightarrow \text{siamo al MPP}$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta V} > - \frac{I}{V} \Rightarrow \text{siamo a sinistra del MPP}$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta V} < - \frac{I}{V} \Rightarrow \text{siamo a destra del MPP}$$

Questo permette al controllore DC-DC di sapere in che direzione muoversi, senza dover “oscillare” attorno al punto ottimo come nel P&O.

Notiamo che l’ottimizzazione non è fissa: il MPP cambia con le condizioni ambientali (temperatura, irraggiamento). Inoltre, c’è un trade-off tra velocità di tracking e stabilità. Se l’algoritmo “muove” troppo aggressivamente, si rischia di innescare oscillazioni; invece, se troppo lento, si perde potenza durante i cambiamenti.

In presenza di stringhe di pannelli parzialmente ombreggiate, possono comparire più “picchi” locali di potenza: l’algoritmo deve evitare di “restare bloccato” in un massimo locale anziché in quello globale.

Metodi evoluti come Fuzzy Logic, Neural Networks e Kalman Filter sono stati proposti per migliorare la risposta dinamica e la stabilità in condizioni di forte rumore o variazioni rapide di irraggiamento.

### 3. Algoritmo MPPT con Filtro di Kalman

Il tracciamento del punto di massima potenza (MPPT) è un elemento fondamentale nei sistemi fotovoltaici moderni. Mentre gli algoritmi tradizionali introducono oscillazioni attorno al punto operativo ottimale e risultano talvolta lenti o instabili in presenza di variazioni del clima, negli ultimi anni si sta affermando una nuova famiglia di strategie: gli MPPT basati su filtri di stato, come il filtro di Kalman.

Il paper “A Kalman Filter Based MPPT Algorithm” (IEEE, 2011) propone proprio questa idea: usare la potenza misurata e la tensione del pannello per ricostruire lo stato interno del sistema, in particolare la pendenza della curva P–V e la tensione  $V_{MPP}$ .

L’idea fondamentale alla base dell’approccio è che il punto di massima potenza (MPP) di un pannello fotovoltaico non è direttamente osservabile: non esiste un sensore che possa dirci in ogni istante “il MPP si trova esattamente a X volt”. Tuttavia, quando il punto di lavoro si avvicina o si allontana dal MPP, questo cambiamento produce effetti misurabili, in particolare variazioni nella potenza erogata al variare della tensione.

Il metodo proposto sfrutta quindi una considerazione centrale: pur non potendo misurare il MPP in modo diretto, possiamo misurare la sua influenza sul sistema, cioè come cambia la potenza in risposta a piccole perturbazioni della tensione.

Da qui nasce l’idea di modellare il MPP come uno stato nascosto (hidden state), un valore reale ma non direttamente accessibile, che evolve nel tempo a causa di fenomeni fisici come irraggiamento variabile, temperatura, mismatch o degrado.

L’algoritmo che si vuole implementare è basato sull’osservazione che la derivata della potenza rispetto alla tensione  $\frac{dP}{dV} = 0$  al punto di massima potenza (MPP) e che cambia di segno passando da destra a sinistra e viceversa.



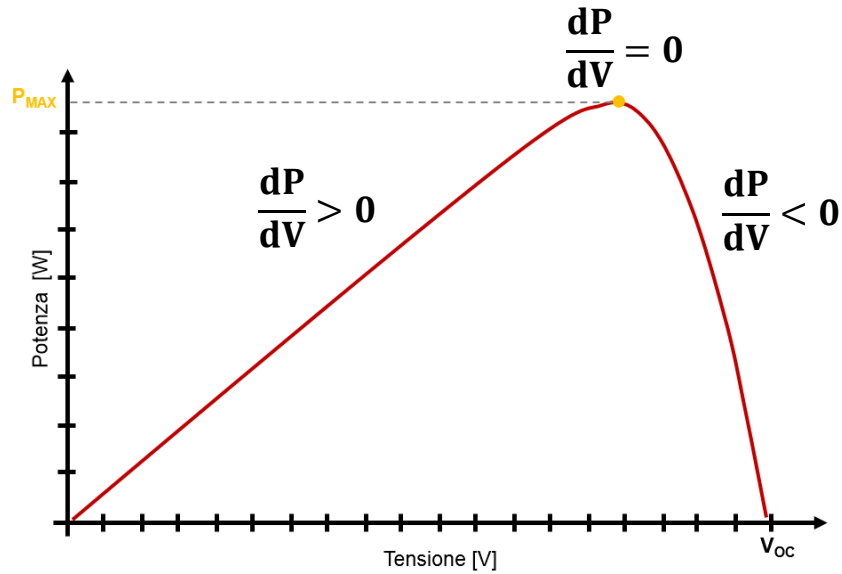


Figura 8: Cambiamento del segno della derivata  $dP/dV$

Quindi, se possiamo stimare in modo affidabile  $\frac{dP}{dV}$  anche in presenza di rumore, è possibile spostare la tensione del pannello verso il punto in cui la derivata si annulla.

Il filtro di Kalman serve proprio a stimare e filtrare questa derivata, evitando oscillazioni e migliorando la robustezza rispetto ai metodi tradizionali (come P&O).

Cerchiamo di identificare il modello del sistema.

Si considera che la potenza erogata dal pannello sia una funzione del tempo e della tensione:

$$P_k = f(V_k) + v_k$$

Dove  $v_k$  rappresenta l'errore gaussiano di misura.

Applichiamo una piccola perturbazione alla tensione:

$$\Delta V_k = V_k - V_{k-1}$$

e osserviamo la corrispondente variazione di potenza:

$$\Delta P_k = P_k - P_{k-1}$$

Da queste, possiamo stimare una derivata approssimata:

$$\frac{dP}{dV} \approx \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}$$

Tuttavia, tale stima è rumorosa e instabile.

Il filtro di Kalman viene applicato per fornire una stima ottima di questa derivata e anche della tensione  $V_{MPP}$ .

Definiamo, quindi, lo stato come:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{dP}{dV} \\ V_{MPP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Gradiente stimato della potenza} \\ \text{Tensione di massima potenza stimata} \end{bmatrix}$$

Si assume che il sistema segua una dinamica lenta e quasi stazionaria, cioè che i parametri non cambino bruscamente tra un campione e l'altro.

Questo permette di utilizzare un modello di transizione molto semplice:

$$x_{k+1} = A x_k + w_k$$

Dove

- $w_k$  è il rumore di processo, modellato come rumore gaussiano con covarianza  $Q$
- $A$  è la matrice di transizione di stato

Nell'ipotesi che il sistema evolve lentamente nel tempo, cioè, tra due istanti successivi di campionamento non ci aspettiamo variazioni significative di stato, possiamo affermare che:

$$x_k \approx x_{k+1}$$

quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stiamo dunque dicendo che:

$$x_{k+1} = A x_k + w_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dP}{dV} \\ V_{MPP} \end{bmatrix} + w_k \rightarrow \begin{cases} \frac{dP}{dV}_{k+1} = \frac{dP}{dV}_k + w_{1,k} \\ V_{MPP,k+1} = V_{MPP,k} + w_{2,k} \end{cases}$$

Questa ipotesi è del tutto ragionevole poiché la curva I–V del pannello non cambia rapidamente, a meno che l'irraggiamento non vari bruscamente, quindi anche il punto di massima potenza e il gradiente non cambiano di molto da un passo all'altro.

Osserviamo che, se tutti gli elementi di A fossero diversi da zero:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Avremmo:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dV}_{k+1} = a_{11} \frac{dP}{dV}_k + a_{12} V_{MPP,k} + w_{1,k} \\ V_{MPP,k+1} = a_{21} \frac{dP}{dV}_k + a_{22} V_{MPP,k} + w_{2,k} \end{cases}$$

Ma non c'è nessuna relazione fisica diretta nota tra il gradiente  $\frac{dP}{dV}$  e il valore di  $V_{MPP}$ : il primo è una quantità derivativa locale, il secondo è un punto di equilibrio globale della curva P(V).

Quindi, l'introduzione di coefficienti  $a_{12}$  e  $a_{21}$  (cioè dipendenze incrociate) introdurrebbe un legame non realistico e rischierebbe di destabilizzare la stima. Dunque,  $a_{21} = a_{12} = 0$ .

L'equazione di osservazione (cioè, ciò che realmente misuriamo) è:

$$y_k = H x_k + v_k$$

Dove  $v_k$  è il rumore della misura di potenza modellato come rumore gaussiano con covarianza  $R$ , e

$$H = [1 \quad 0]$$

poiché l'unica misura diretta (ricavata dai dati di potenza e tensione) è la derivata approssimata  $\frac{dP}{dV}$ .

Ipotizziamo una matrice di covarianza iniziale pari a:

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_{\frac{dP}{dV}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{V_{MPP}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Varianza gradiente:  $\sigma_{\frac{dP}{dV}}^2 = 1 \text{ (W/V)}^2$  = incertezza sul gradiente
- Varianza tensione:  $\sigma_{V_{MPP}}^2 = 1 \text{ V}^2$  = incertezza sulla tensione

Gli elementi  $a_{12}$  e  $a_{21}$  sono nulli perché non c'è dipendenza tra  $\frac{dP}{dV}$  e  $V_{MPP}$ .

Ricordiamo che valori iniziali di  $P$  altri comunicano al filtro di "imparare velocemente" e non fare affidamento sul valore iniziale dello stato.

Come già descritto in un altro mio tutorial, il filtro di Kalman si compone di due fasi:

1- Predizione:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A \hat{x}_{k-1|k-1}$$

$$P_{k|k-1} = A P_{k-1|k-1} A^T + Q$$

2- Aggiornamento:

$$K_k = P_{k|k-1} H^T (H P_{k|k-1} H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - H \hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H) P_{k|k-1}$$

Dove

- $\hat{x}_{k|k}$  è lo stato stimato al tempo k
- $P_{k|k}$  è la matrice di covarianza dell'errore
- $K_k$  è il guadagno di Kalman
- Q e R rappresentano rispettivamente la covarianza del rumore di processo e di misura.

Una volta stimata la derivata  $\frac{\widehat{dP}}{dV}$  e  $\widehat{V}_{MPP}$ , la logica di controllo aggiorna la tensione di lavoro del pannello:

- se il gradiente è positivo, siamo prima del MPP, quindi aumentiamo la tensione;
- se è negativo, siamo dopo il MPP, quindi diminuiamo la tensione;
- se è zero, siamo nell'MPP.

La particolarità di questo approccio è che non si usa solo la derivata, ma anche la stima diretta del MPP, che rende il controllo molto più stabile e poco oscillante.

Dunque, dopo aver ottenuto la stima aggiornata del gradiente  $\frac{\widehat{dP}}{dV}$  l'algoritmo MPPT aggiorna la tensione di lavoro del pannello secondo una regola adattativa:

$$V_{k+1} = V_k + \alpha \frac{\widehat{dP}}{dV}$$

dove  $\alpha$  è un piccolo fattore di passo che determina la velocità di convergenza (analogo al "passo di perturbazione" nel P&O).

Quando la derivata stimata si avvicina a zero, la tensione converge al valore ottimale  $V_{MPP}$ .

Facciamo un esempio per comprendere meglio l'algoritmo.

### Parametrizzazione iniziale

Partiamo con una tensione operativa  $V_{oper,0} = 10V$ , quindi lo stato iniziale è

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Supponiamo:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = [1 \quad 0]$$

L'aggiornamento della stima di  $V_{MPP}$  (che indichiamo con  $\widehat{V_{MPP,k}}$ ) avviene con un fattore 0.05:

$$\widehat{V_{MPP,k+1}} = \widehat{V_{MPP,k}} + 0.05 \frac{\widehat{dP}}{dV}$$

Questa nuova tensione deve essere tramutata in un duty cycle per il convertitore DC-DC il quale ha una certa inezia. L'aggiornamento della tensione operativa  $V_{oper}$ , dunque, tiene conto di questo e varia secondo la legge:

$$V_{oper,k+1} = V_{oper,k} + Step (\widehat{V_{MPP,k+1}} - V_{oper,k})$$

Il parametro *Step* lo poniamo pari a 0.5.

Supponiamo, inoltre, di utilizzare il modello semplificato per  $I(V)$  con  $I_{SC}=8$  A  $V_{OC}=38$  V,  $n=9$ .

$$I(V) = I_{SC} \left( 1 - \left( \frac{V}{V_{OC}} \right)^n \right) = 8 \left( 1 - \left( \frac{V}{38} \right)^9 \right)$$

### Iterazione 1

Calcoliamo  $I(V_{oper}) = 7.9999518$  A, quindi  $P(V_{oper}) = P(10V) = 79.99952$  W.

Per simulare la misura di  $\frac{dP}{dV}$  calcoliamo:

$$I(V_{oper} + 0.02) = 7.9999504 \text{ A e } P(V_{oper} + 0.02) = 80.15950 \text{ W}$$

Quindi  $\Delta P = P(10.02) - P(10) \approx 0.159985$  W,  $\Delta V = 0.02$  V

La misura della potenza vale:  $z = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{0.159985}{0.02} = 7.99925$  W/V.

### Predizione

$$\hat{x}_- = A x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$P_- = A P_0 A^T + Q = \begin{bmatrix} 1.001 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix}$$

### Aggiornamento

L'innovazione vale:

$$y = z - H \hat{x}_- = 7.99925 - 0 = 7.99925$$

$$S = H P_- H^T + R = 1.001 + 0.05 = 1.051$$

Il guadagno di Kalman vale:

$$K = P_- H^T S^{-1} = \begin{bmatrix} 1.001 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{1.051} \approx \begin{bmatrix} 0.95242 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stato aggiornato:

$$\widehat{x}_+ = \widehat{x}_- + Ky \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.95242 \\ 0 \end{bmatrix} 7.99925 = \begin{bmatrix} 7.6187 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Quindi la nuova stima del gradiente è  $\frac{\widehat{dP}}{dV} \approx 7.6187 \text{ W/V}$

La stima della tensione  $V_{MPP}$  rimane inalterata poiché misuriamo solo la potenza.

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} P_+ &= (I - KH)P_- = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.95242 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1.001 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix} = \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.95242 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1.001 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.04758 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.001 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0476 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che  $P_+[0,0]$  è sceso notevolmente, segno che siamo più confidenti.

Aggiornamento empirico della stima  $\widehat{V_{MPP}}$ :

$$\widehat{V_{MPP}} = 10 + 0.05 * 7.6187 \approx 10.38093 \text{ V}$$

Comando al convertitore (aggiornamento tensione operativa)

$$V_{oper,nuova} = 10 + 0.5 (10.38.93 - 10) \approx 10.19047\text{V}$$

Risultato dopo la prima iterazione:

- $\frac{\widehat{dP}}{dV} \approx 7.6187 \text{ W/V}$
- $\widehat{V_{MPP}} \approx 10.38093 \text{ V}$
- $V_{oper} \approx 10.19047\text{V}$



## Iterazione 2

Misuriamo la potenza a  $V = 10.19047V$  e  $V = 10.21047V$  ( $V+0.02$ ) come fatto precedentemente utilizzando il modello semplificato.

$$P(10.19047 V) \approx 81.5231 W$$

$$P(10.21047 V) \approx 81.6831 W.$$

Quindi la misura del gradiente è ancora circa:

$$z = \frac{P(10.21047) - P(10.19047)}{0.02} \approx 7.9995 W/V$$

## Predizione

Lo stato a priori vale:

$$\hat{x}_- = A \hat{x}_+ = \hat{x}_+ = \begin{bmatrix} 7.6187 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La covarianza a priori vale:

$$\begin{aligned} P_- &= A P_+^1 A^T + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0476 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.0476 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.0476 & 0 \\ 0 & 1.001 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0486 & 0 \\ 0 & 1.002 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Aggiornamento

L'innovazione vale:

$$y = z - H \hat{x}_- = 7.9995 - [1 \ 0] \begin{bmatrix} 7.6187 \\ 10.38093 \end{bmatrix} \approx 0.3808$$

$$S = H P_- H^T + R = P[0,0]_- + R \approx 0.0486 + 0.05 = 0.0986$$

Il guadagno di Kalman vale:

$$K = P_- H^T S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0486 & 0 \\ 0 & 1.002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{S} = \begin{bmatrix} 0.0486 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{S} = \begin{bmatrix} 0.493 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stato aggiornato:

$$\begin{aligned} \hat{x}_+ &= \hat{x}_- + Ky = \begin{bmatrix} 7.6187 \\ 10.38093 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.493 \\ 0 \end{bmatrix} 0.3808 = \begin{bmatrix} 7.6187 \\ 10.38093 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1876 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7.8063 \\ 10.38093 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:  $\frac{d\hat{P}}{dV} = 7.8066 \text{ W/V}$

La stima della tensione  $V_{MPP}$  vale 10.38093: Kalman non la modifica direttamente perché H osserva solo la prima componente.

Aggiorniamo la matrice di covarianza:

$$\begin{aligned} P_+ &= (I - KH)P_- = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4929 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.04863 & 0 \\ 0 & 1.002 \end{bmatrix} = \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4929 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.04863 & 0 \\ 0 & 1.002 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.5071 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.04863 & 0 \\ 0 & 1.002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02466 & 0 \\ 0 & 1.002 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La covarianza aggiornata (componente [0,0]) si è ridotta ulteriormente:

$$P_+[0,0] \approx 0.0246.$$

Aggiornamento empirico della stima  $\widehat{V_{MPP}}$ :

$$\widehat{V_{MPP}} = 10.38093 + 0.05 \cdot 7.8066 \approx 10.38093 + 0.39033 \approx 10.77126 \text{ V.}$$

Comando al convertitore (aggiornamento tensione operativa)

$$V_{oper,nuova} = 10.19047 + 0.5 \cdot (10.77126 - 10.19047) = 10.19047 + 0.5 \cdot 0.58079 \\ \approx 10.19047 + 0.29040 \approx 10.48086 \text{ V.}$$

Risultato dopo la prima iterazione:

- $\frac{\widehat{dP}}{dV} \approx 7.8066 \text{ W/V}$
- $\widehat{V}_{MPP} \approx 10.7713 \text{ V}$
- $V_{oper} \approx 10.4809 \text{ V}$

Allo stesso modo possono essere derivate le altre iterazioni.

In allegato trovate un programma Python che implementa questo algoritmo.

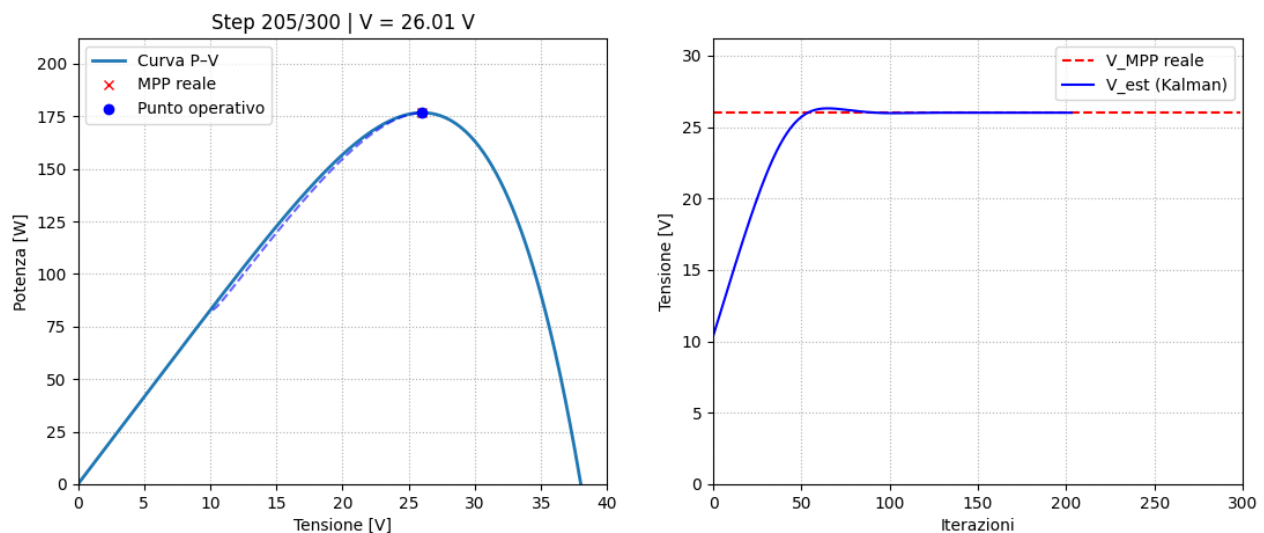


Figura 9: Funzionamento dell'algoritmo di tracking MPPT con Kalman

## 4. Conclusioni

In questo tutorial abbiamo attraversato l'intero percorso che porta dalla comprensione del comportamento elettrico di un pannello fotovoltaico alla realizzazione di un algoritmo avanzato di inseguimento del punto di massima potenza (MPPT). Il cuore del lavoro non è solo l'analisi dei metodi tradizionali, come Perturb & Observe o Incremental Conductance, ma soprattutto l'introduzione di un approccio più moderno: l'utilizzo di un filtro di Kalman per stimare dinamicamente il gradiente della potenza e la posizione del punto di massima potenza.

Questo metodo si basa su un principio semplice ma potente: anche se il MPP non è direttamente misurabile, possiamo osservare indirettamente l'effetto che piccole variazioni della tensione producono sulla potenza istantanea. Trattare il gradiente

$\frac{dP}{dV}$  e la tensione ottimale  $V_{MPP}$  come stati nascosti da stimare consente al filtro di adattarsi in presenza di rumore, fluttuazioni di irraggiamento, increspature sulla misura e dinamiche lente del sistema. Il Kalman MPPT non si limita a reagire a variazioni locali della potenza, ma costruisce una stima coerente, filtrata e predittiva dell'andamento del MPP nel tempo.

Il codice Python presentato, insieme agli esempi numerici, ha mostrato passo per passo come implementare questo approccio in modo trasparente. Si è visto come il filtro aggiorna iterativamente le proprie stime in funzione delle misure, come la covarianza si riduca mano a mano che il sistema acquista fiducia sui parametri, e come la tensione operativa venga regolata verso il MPP con un comportamento fluido e privo di oscillazioni eccessive.

In conclusione, l'uso del filtro di Kalman per l'MPPT rappresenta un passo significativo verso sistemi di controllo più intelligenti e affidabili, soprattutto in contesti reali dove le condizioni ambientali sono tutt'altro che ideali. Con una corretta implementazione, questo metodo permette di estrarre sistematicamente dal pannello la massima potenza disponibile, rendendolo una scelta promettente per applicazioni avanzate nel fotovoltaico moderno.

## 5. Allegato 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
from IPython.display import HTML

# =====
# MODELLO PV
# =====
def pv_model(V, Isc=8, Voc=38.0, n=9):
    V = np.atleast_1d(V).astype(float)
    V = np.clip(V, 0, Voc)
    I = Isc * (1 - (V / Voc) ** n)
    I[I < 0] = 0
    P = V * I
    return I, P

# =====
# KALMAN FILTER MPPT
# =====
class KalmanMPPT:
    def __init__(self):
        self.x = np.zeros((2, 1))
        self.P = np.eye(2)
        self.A = np.eye(2)
        self.H = np.array([[1.0, 0.0]])
        self.Q = np.eye(2) * 1e-3
        self.R = np.array([[5e-2]])

    def predict(self):
        self.x = self.A @ self.x
        self.P = self.A @ self.P @ self.A.T + self.Q

    def update(self, z):
        z = np.array([[z]], dtype=float)
        y = z - self.H @ self.x
        S = self.H @ self.P @ self.H.T + self.R
        K = self.P @ self.H.T @ np.linalg.inv(S)
        self.x = self.x + K @ y
        self.P = (np.eye(2) - K @ self.H) @ self.P
```

```

# =====
# SIMULAZIONE
# =====
def simulate(Isc=8.3, Voc=38.0, n=4.5):
    Vplot = np.linspace(0, Voc, 600)
    _, Pplot = pv_model(Vplot, Isc, Voc, n)
    idx_mpp = np.argmax(Pplot)
    Vtrue_mpp, Ptrue_mpp = Vplot[idx_mpp], Pplot[idx_mpp]

    Voper = 10
    kf = KalmanMPPT()
    kf.x[1, 0] = Voper

    Kstep = 0.5 #velocità di reazione del sistema MPPT nel modificare la tensione operativa Voper

    Vhist, Phist, Vest_hist = [], [], []

    for _ in range(300):

        P = pv_model(Voper, Isc, Voc, n)
        _, Pp = pv_model(Voper + 0.02, Isc, Voc, n)

        dPdV = (Pp - P) / (0.02) + np.random.normal(0, 0.05)

        kf.predict()
        kf.update(float(dPdV))

        dP_est = float(kf.x[0, 0])
        Vmp_est = float(kf.x[1, 0])

        # aggiorna la tensione di lavoro  $V(k+1)=V(k) + \alpha dP\_est$ 
        kf.x[1, 0] = kf.x[1, 0] + 0.05 * dP_est
        Voper = Voper + Kstep * (kf.x[1, 0] - Voper)
        Voper = float(np.clip(Voper, 0, Voc))

        Vhist.append(Voper)
        Phist.append(float(P[0]))
        Vest_hist.append(float(kf.x[1, 0]))

    return Vplot, Pplot, Vhist, Phist, Vest_hist, Vtrue_mpp, Ptrue_mpp

```

```

# =====
# ANIMAZIONE (Curva P-V) + FIGURA 9 (V_est vs V_mpp)
# =====
Vplot, Pplot, Vhist, Phist, Vest_hist, Vtrue_mpp, Ptrue_mpp = simulate()

# --- Figura 1: P-V con punto operativo ---
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(13, 5))
ax1.plot(Vplot, Pplot, label="Curva P-V", lw=2)
ax1.plot([Vtrue_mpp], [Ptrue_mpp], "rx", label="MPP reale")
pt, = ax1.plot([], [], "bo", label="Punto operativo")
trace, = ax1.plot([], [], "b--", alpha=0.6)
ax1.set_xlim(0, 40)
ax1.set_ylim(0, np.max(Pplot) * 1.2)
ax1.set_xlabel("Tensione [V]")
ax1.set_ylabel("Potenza [W]")
ax1.legend()
ax1.grid(True, ls=':')

# --- Figura 2: V_est vs V_mpp (simile alla figura 9 del paper) ---
ax2.plot([Vtrue_mpp]*len(Vhist), 'r--', label="V MPP reale")
line_vest, = ax2.plot([], [], 'b', label="V_est (Kalman)")
ax2.set_xlim(0, len(Vhist))
ax2.set_ylim(0, 1.2*Vtrue_mpp)
ax2.set_xlabel("Iterazioni")
ax2.set_ylabel("Tensione [V]")
ax2.legend()
ax2.grid(True, ls=':')

def init():
    pt.set_data([], [])
    trace.set_data([], [])
    line_vest.set_data([], [])
    return pt, trace, line_vest

def update(i):
    v, p = Vhist[i], Phist[i]
    pt.set_data([v], [p])
    trace.set_data(Vhist[:i], Phist[:i])
    line_vest.set_data(np.arange(i), Vest_hist[:i])
    ax1.set_title(f"Step {i+1}/{len(Vhist)} | V = {v:.2f} V")
    return pt, trace, line_vest

ani = animation.FuncAnimation(fig, update, init_func=init,
                              frames=len(Vhist), interval=80, blit=True)

HTML(ani.to_jshtml())

```