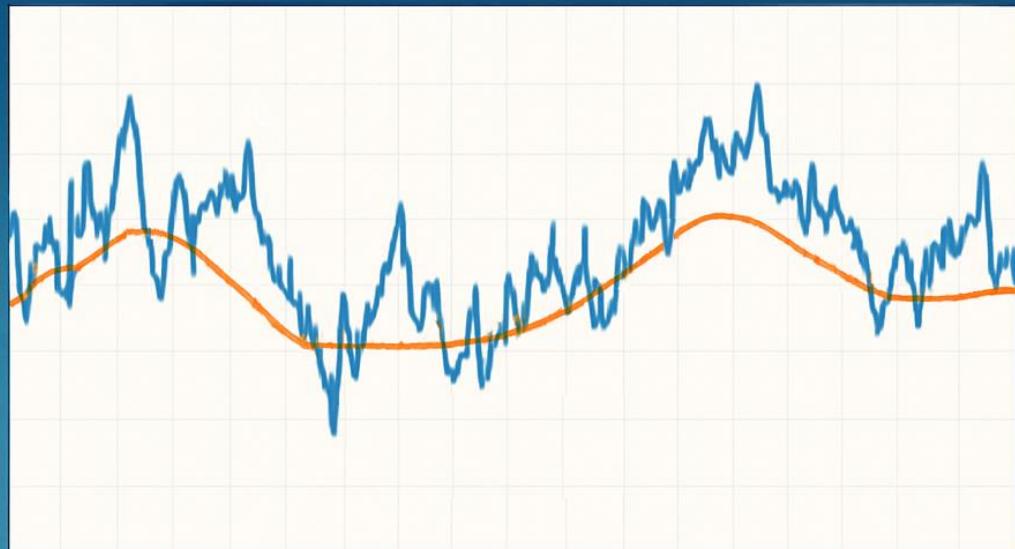




DAL RUMORE ALLA PRECISIONE

UN VIAGGIO NEL MONDO DEL FILTRO DI KALMAN



Leonardo Chieco

Dal Rumore alla Precisione

Un Viaggio nel Mondo del Filtro di Kalman

Nel mondo della tecnologia moderna, il concetto di "filtro di Kalman" occupa un ruolo centrale in numerosi ambiti applicativi che vanno dall'ingegneria aerospaziale alla robotica, dalla finanza all'intelligenza artificiale. Nonostante la sua diffusione e importanza, il filtro di Kalman viene spesso percepito come un argomento oscuro, ostico, riservato a pochi esperti in matematica o ingegneria.

Questo tutorial si propone di offrire una panoramica introduttiva e accessibile sul filtro di Kalman, mantenendo un approccio divulgativo ma rigoroso, adatto a chi possiede almeno una conoscenza di base della statistica e del calcolo matriciale.

Ho voluto raccogliere e integrare in un unico documento numerosi appunti che ho preso nel tempo, tratti sia da libri sia da risorse online, rivedendoli e adattandoli con l'obiettivo di renderli più chiari e fruibili, così da offrire una divulgazione semplice senza perdere la precisione concettuale.

Buona lettura!

L'autore

Leonardo Chieco è un ingegnere elettronico con oltre 20 anni di esperienza nella progettazione e sviluppo di software per il controllo dell'automazione (PC/PLC), nella progettazione di schede elettroniche per applicazioni industriali, firmware, robotica e meccatronica.

Email: leochieco72@gmail.com

LinkedIn: <https://www.linkedin.com/in/leonardo-chieco-53550b129/>

1. Introduzione

Il filtro di Kalman prende il nome da Rudolf Emil Kalman, un matematico e ingegnere ungherese-americano nato nel 1930 e scomparso nel 2016. Kalman ha introdotto questo filtro nel 1960 come una soluzione elegante e matematica per il problema della stima di stato nei sistemi dinamici. Il suo lavoro, inizialmente sottovalutato, divenne cruciale con l'avvento del programma spaziale della NASA. Il filtro di Kalman fu utilizzato per la prima volta in modo significativo durante lo sviluppo della missione Apollo, contribuendo al successo dell'atterraggio sulla Luna grazie alla sua capacità di fornire stime precise delle traiettorie e delle posizioni in tempo reale, anche in presenza di rumore e incertezze nei dati di misura.

Molti sistemi dinamici nel mondo reale, come ad esempio un'automobile in movimento, un drone in volo, o anche un indice di borsa, si basano su grandezze che variano nel tempo e che non possono essere osservate con precisione assoluta. I sensori che usiamo per misurare queste grandezze (come GPS, radar, o sensori inerziali) forniscono dati rumorosi, cioè affetti da errori casuali. Inoltre, la fisica del sistema stesso introduce delle incertezze dovute a fattori non modellabili perfettamente, come il vento, l'attrito o il rumore elettronico.

Il problema centrale che il filtro di Kalman affronta è quello di **stimare** nel modo più accurato possibile lo **stato reale** di un sistema dinamico (ad esempio, la posizione e la velocità di un oggetto in movimento) utilizzando **misure parziali e rumorose** e un **modello** del sistema stesso. In altri termini, si tratta di stimare nel modo più accurato possibile cosa sta davvero succedendo, sapendo che i nostri strumenti ci danno solo informazioni imperfette.

Il filtro di Kalman è alla base di una quantità sorprendente di tecnologie che utilizziamo quotidianamente o che vengono impiegate in settori avanzati:

- **Robotica**: permette a robot autonomi di stimare la propria posizione e orientamento.
- **Veicoli autonomi**: aiuta a fondere informazioni da radar, LIDAR, telecamere e sensori inerziali.
- **Finanza**: viene usato per prevedere tendenze e volatilità dei mercati.

- **Controllo di volo:** è impiegato per stimare velocità e posizione di aerei e droni.
- **Applicazioni biomedicali:** nel monitoraggio continuo di segnali fisiologici come il battito cardiaco.

Il Filtro di Kalman è un algoritmo che consente di stimare lo stato di un sistema dinamico lineare influenzato dal rumore, combinando in modo ottimale due fonti di informazione:

- il modello del sistema osservato
- le misure sperimentali, anch'esse affette da rumore e linearmente dipendenti dallo stato

Si parla di **stimatore ottimo** quando un metodo matematico, a partire da un insieme di osservazioni, fornisce la stima di una grandezza minimizzando l'errore secondo un criterio ben definito.

Il Filtro di Kalman rientra in questa categoria, poiché ottimizza qualunque funzione quadratica dell'errore di stima sfruttando tutte le informazioni disponibili.

Il filtro, dunque, partendo da un modello e da una sequenza di misure imperfette, produce predizioni e correzioni successive, avvicinandosi sempre di più al valore reale delle grandezze fisiche di interesse.

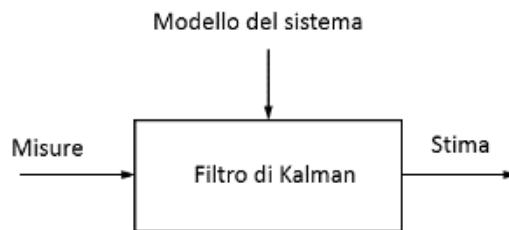


Figura 1: Funzionamento del filtro di Kalman

Queste predizioni, all'inizio grossolane, vengono nel tempo migliorate grazie all'algoritmo ricorsivo predizione-correzione che “apprende” le caratteristiche del sistema.

Senza entrare, per ora, nei dettagli matematici è importante capire che il filtro di Kalman funziona in due fasi principali:

1. **Predizione (o previsione)**: si utilizza il modello matematico del sistema per stimare quale sarà lo stato del sistema al prossimo istante di tempo, basandosi sull'informazione corrente.
2. **Aggiornamento (o correzione)**: quando arriva una nuova misura dal sensore, il filtro confronta questa misura con la predizione e corregge la stima basandosi su quanto si fida della misura rispetto alla predizione stessa.

Questo ciclo si **ripete continuamente**, fornendo una stima aggiornata dello stato del sistema ad ogni nuovo passo temporale.

Nel contesto del filtro di Kalman, la distinzione tra **predizione** e **previsione** assume un significato tecnico ben preciso e fondamentale per comprendere il funzionamento dell'algoritmo.

La **predizione** è il primo passo del ciclo ricorsivo. Si tratta di un calcolo basato esclusivamente:

- sullo stato stimato al passo precedente,
- sul modello dinamico del sistema,
- e su eventuali input di controllo (se presenti).

Dopo la predizione, il filtro riceve una nuova osservazione (es. da un sensore) e procede con la fase di **aggiornamento/correzione/previsione**. È in questo momento che la predizione viene corretta in base all'errore tra la misura reale e quella attesa ottenendo una stima ottimale dello stato.

La misura è tipicamente affetta da rumore, quindi l'algoritmo pesa l'informazione tra quanto si fida del modello (predizione) e quanto si fida del sensore (misura). Questa combinazione ponderata viene spesso chiamata “previsione”, ovvero una stima futura migliorata da dati reali.

Dunque:

- **Predizione**: basata solo sul modello, prima di vedere la nuova misura.
- **Previsione (stima aggiornata)**: dopo aver incorporato la misura, è la versione corretta della predizione.

Per quanto l'obiettivo sia mantenere un tono semplice e accessibile, alcuni concetti di base sono comunque richiesti per comprendere i principi del filtro di Kalman. Tra questi:

- **Statistica di base**: in particolare, cosa sono media, varianza e covarianza, e come interpretarle.
- **Concetto di rumore**: rumore bianco, gaussianità, errori di misura.
- **Algebra lineare elementare**: nozioni sulle matrici, moltiplicazione tra matrici, vettori.

Alcuni concetti statistici saranno ripresi prima di utilizzarli, ma una conoscenza di base penso sia necessaria per seguire agevolmente i concetti.

In questo tutorial eviteremo di addentrarci nella derivazione formale e nelle dimostrazioni matematiche più complesse delle equazioni del filtro di Kalman. Adotteremo, invece, un approccio pratico e orientato all'applicazione, che consenta di comprenderne intuitivamente il funzionamento e il valore operativo.

Lo scopo principale è trasmettere una comprensione concettuale e applicativa: perché funziona, cosa significa "fondere" misure e modelli, e come tutto ciò si traduce nella realtà.

Nel corso del tutorial utilizzeremo come filo conduttore un esempio pratico: un'auto che si muove in linea retta a velocità costante. Passo dopo passo, vedremo come il filtro di Kalman sia in grado di correggere le misure di posizione affette da rumore, fornendo una stima via via più accurata non solo della posizione stessa, ma anche della velocità, pur non essendo quest'ultima direttamente misurata.

Questo esempio ci aiuterà a comprendere in modo intuitivo i concetti di predizione, aggiornamento, rumore, e guadagno di Kalman.

Nei capitoli successivi approfondiremo il funzionamento del filtro, accompagnando la teoria con esempi pratici e spiegazioni passo dopo passo, fino a concludere con due semplici programmi Python che permetteranno di simulare e mettere in pratica quanto appreso.

2. Richiami di statistica

In questo capitolo prenderemo in esame alcuni concetti di base di statistica che ci saranno utili per capire meglio alcuni aspetti del filtro di Kalman.

- Una **variabile aleatoria** è una **funzione** che assegna un **valore numerico a ogni possibile esito di un esperimento casuale**. Ad esempio, se leggo una tensione, la variabile aleatoria x può assumere tutti i possibili valori attesi di tensione. Se sto lanciando un dado, x assume i valori discreti da 1 a 6.

- **Varianza e deviazione standard**

La **varianza**, indicata con σ^2 , è una misura della dispersione del set di dati rispetto alla sua media.

Indicata la **media** con la lettera μ , la varianza è definita nel seguente modo:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Come unità di misura, la varianza ha il quadrato di quella della x . Se x è una lunghezza in metri, la varianza si misura in m^2 .

La **deviazione standard**, indicata con la lettera greca σ , è la radice quadrata della varianza.

- **Distribuzione normale**

La distribuzione normale (o gaussiana) è uno dei concetti più fondamentali della statistica e della probabilità ed è una funzione matematica che descrive come si distribuiscono i dati attorno a un valore medio.

La distribuzione normale ha la forma caratteristica di una campana simmetrica: alta al centro e che si assottiglia dolcemente verso i lati. Questo significa che i valori vicini alla media sono i più probabili, mentre, valori molto lontani dalla media sono sempre più rari.

Per questo motivo viene chiamata anche curva a campana di Gauss.

Una distribuzione normale è definita da due parametri: media (μ) e deviazione standard (σ).

Per completezza, osserviamo che, dal punto di vista matematico, la distribuzione normale è descritta dalla seguente equazione:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Nell'immagine seguente è mostrato un esempio di curva gaussiana.

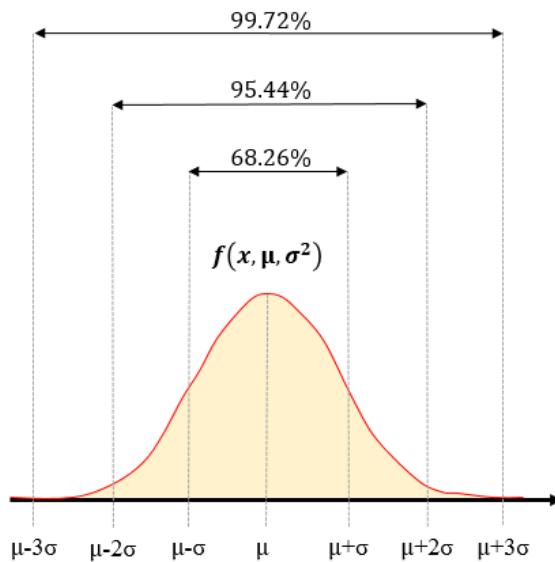


Figura 2: Curva gaussiana a campana

Questa curva esprime un concetto che ben si adatta a diversi processi reali: le probabilità più elevate di un fenomeno si concentrano intorno alla media. Le probabilità si riducono man mano che ci si allontana dal valore medio a destra o a sinistra.

In particolare, nell'intervallo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ si concentrano il 68% delle osservazioni.

Più σ è alta, più la campana si appiattisce sull'asse delle ascisse. Più σ è bassa, più la campana diventa stretta e si alza in corrispondenza della media. È importante osservare che l'area complessiva sotto la curva è sempre pari a 1 perché comprende tutte le probabilità dell'evento.

Si noti che, per qualsiasi variabile casuale X distribuita normalmente con varianza σ^2 , kX (costante * variabile aleatoria) è distribuita normalmente con varianza $k^2\sigma^2$.

- **Covarianza:** La covarianza è una misura statistica che descrive come due variabili aleatorie si muovono insieme. In altre parole, ci dice se, e quanto, due grandezze tendono a variare in modo correlato. Intuitivamente possiamo affermare che:
 - Se quando una variabile aumenta anche l'altra tende ad aumentare, allora la covarianza è positiva.
 - Se quando una variabile aumenta l'altra tende a diminuire, allora la covarianza è negativa.
 - Se non c'è una relazione lineare evidente tra le due, allora la covarianza vicina a zero.

In termini matematici, per due variabili aleatorie X e Y , la covarianza si calcola come:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (X_i - \mu_X)(Y_i - \mu_Y)$$

dove:

X_i, Y_i = valori osservati

μ_X e μ_Y = medie delle due variabili aleatorie

n = numero di osservazioni

- **La varianza della somma di due variabili correlate**

La varianza della somma di due variabili correlate, X e Y , è data dalla seguente formula:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

Dove: $\text{Cov}(X, Y)$ rappresenta la covarianza tra X e Y

- **Proprietà additiva della covarianza**

La covarianza della somma di due variabili con una terza è la somma delle covarianze:

$$\text{Cov}(X, Y+Z) = \text{Cov}(X,Y) + \text{Cov}(X,Z)$$

- **Accuratezza e precisione**

L'accuratezza misura quanto una misurazione è vicina al valore reale.

La precisione misura quanto le misurazioni sono vicine tra loro, indipendentemente dal valore vero.

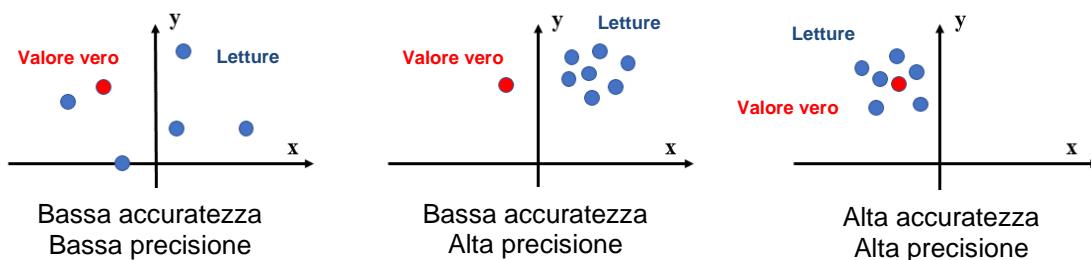


Figura 3: Differenza tra accuratezza e precisione

Una “buona” misura dovrebbe essere **precisa** e **accurata**.

Introduciamo ora alcuni concetti che ci aiuteranno a capire meglio la matematica del filtro di Kalman.

Le misure y_n che effettuiamo con sensori o strumenti sono variabili aleatorie ottenute dalla somma di x (valore vero della grandezza misurata, non noto) e di un rumore r_n . Quindi la misura può essere espressa come:

$$y_n = x + r_n$$

Assumiamo che il rumore r sia **gaussiano a media nulla** con varianza σ_r^2 . Ovviamente r sarà pure gaussiana con media x e varianza σ_r^2 .

Ricordiamo che la funzione di distribuzione di probabilità è un modello che associa una probabilità di occorrenza ad ogni valore osservabile della variabile.

Nel caso di una variabile aleatoria gaussiana, la funzione di distribuzione di probabilità assume la forma di una campana, come precedentemente visto.

Supponiamo di disporre di una sola misura di x affetta da errore. Possiamo assumere di aver beccato il valore più probabile che, per una gaussiana, è proprio il valore medio.

Se, invece, disponiamo di due misure, diciamo y_1 e y_2 , il valore più probabile si ottiene studiando la somma delle densità di probabilità di ciascuna misura, come visibile nell'immagine seguente.

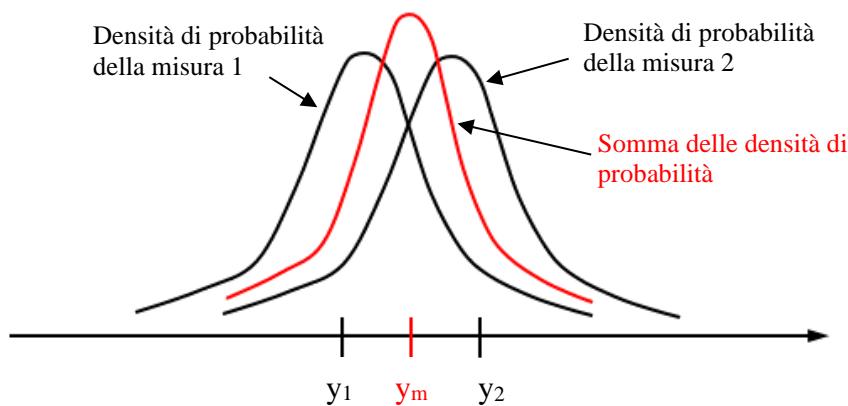


Figura 4: Densità di probabilità risultante dopo due misure

La densità di probabilità risultante (curva rossa) assume il valore massimo a metà tra y_1 e y_2 .

Per definizione, con una sola misura l'errore dipende da σ_r^2 ;

Combinando N misure di varianza σ_v^2 , la varianza della stima si riduce a $\frac{\sigma_r^2}{N}$, quindi all'aumentare delle misure disponibili la stima migliora.

A livello intuitivo, se facciamo la media dei più valori letti consecutivamente, il rumore (ovvero la varianza) sarà sempre più ininfluente.

Matematicamente:

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_i\right) = \frac{1}{N^2} Var(X_i) = \frac{1}{N^2} N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

Cosa accade se le misure hanno accuratezze diverse? Anche in questo caso conviene fare la media?

Ovviamente no!

Si dimostra che in questo caso vale il **criterio di massima verosimiglianza** secondo il quale la migliore stima risulta essere:

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} z_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} z_2$$

Ovvero si dà più peso alla misura più accurata, cioè quella con σ più bassa.

3. Introduzione al filtro di Kalman

Supponiamo di voler seguire in ogni stante il moto di un autoveicolo che si muove a velocità costante in linea retta.



Figura 5: Esempio introduttivo

Per effettuare le misure abbiamo a disposizione uno strumento che fornisce solo indicazioni sulla posizione del veicolo.

Al tempo $t = 0$, si inizia ad osservare il moto dalla posizione iniziale $x_0 = 0$ con una velocità costante di **60 km/h** (valore strategico per semplificare i calcoli).

Decidiamo di registrare **posizione** e **velocità** dell'auto a intervalli regolari, ad esempio **ogni minuto**.

In un mondo perfetto la velocità resterebbe fissa a **60 km/h** e la posizione all'istante t sarebbe descritta dal modello fisico:

$$\begin{cases} x_t = 1 * x_{t-1} + 1 * \Delta t * v_{t-1} & \text{Posizione (t)} = \text{Posizione(t-1)} + \text{Velocità (t-1)} \times \Delta t \\ v_t = 0 * x_{t-1} + 1 * v_{t-1} & \text{Velocità (t)} = \text{Velocità(t-1)} \end{cases}$$

Per comodità, queste relazioni si scrivono spesso in **forma matriciale**.

$$\begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix}$$

In forma più compatta

$$x_t = A x_{t-1}$$

Stiamo indicando con x_t in grassetto il **vettore di stato**. In esso sono contenute tutte le “informazioni” che caratterizzano lo stato del sistema istante per istante. In questo caso abbiamo posizione e velocità.

Ma il mondo, comunque, non è perfetto.

Possiamo identificare almeno due aspetti che possono complicare le nostre ipotesi.

- i. Le misure di posizione sono rumorose e questo rumore potrebbe anche variare (dipendere) con la velocità. Facciamo una ipotesi: il rumore è gaussiano a media nulla e varianza R . Questa R non è un numero ma una matrice.

$$R = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xv} \\ R_{vx} & R_{vv} \end{bmatrix}$$

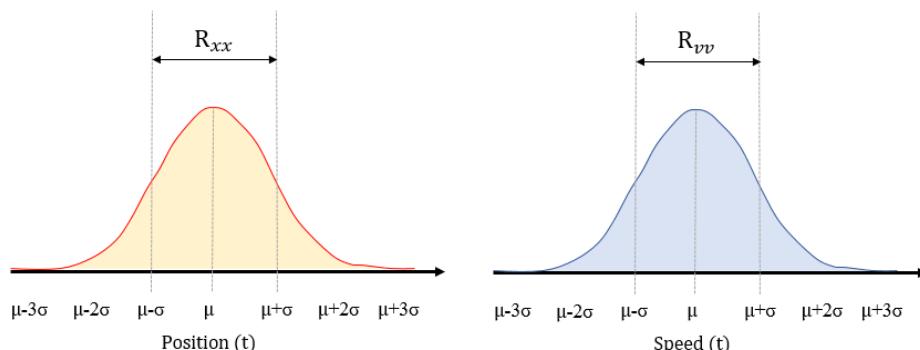


Figura 6: Rumore gaussiano sulle misure

L'elemento diagonale $R_{11} = R_{xx}$ indica l'incertezza sulla posizione.

L'elemento diagonale $R_{22} = R_{vv}$ indica l'incertezza sulla velocità.

Gli elementi fuori diagonale indicano **correlazioni** tra l'errore sulla posizione e l'errore sulla velocità.

- ii. Il processo non è accuratamente modellato, ad esempio, non si è tenuto conto delle **condizioni della strada** non ideali (buche, traffico, vento, ecc.). Questo significa che il modello "ideale" del movimento dell'auto subisce **perturbazioni**.

Anche queste si modellano come rumore gaussiano a media nulla e con una **matrice di covarianza Q** nota. Anche per Q valgono le considerazioni fatte per la matrice R. In particolare, $Q_{[1,1]}$ è la covarianza del rumore gaussiano sul processo di movimento, e $Q_{[2,2]}$ è la covarianza del rumore gaussiano sul processo di velocità.

Nell'ipotesi di ignorare le imperfezioni del mondo reale (per ora), possiamo stimare dove si trova la macchina e qual è la sua velocità **dopo un minuto**.

La velocità sarebbe sempre 60 km/h e la posizione sarebbe **1 km** dal punto di partenza ($60 \text{ km/h} = 1 \text{ km/minuto}$).

Abbiamo detto di avere a disposizione uno strumento che, ogni minuto, fornisce la posizione dell'auto (ma non la velocità). Supponiamo di leggere una distanza di **0.9 km** dal punto di partenza.

Quindi, da un lato abbiamo la misura rumorosa dello strumento (0.9 km) e dall'altro il modello matematico (1.0 km). A quale dato credere? Abbiamo due stime, ma non sappiamo qual è quella più vicina alla realtà.

Si possono combinare le due stime per ottenere una posizione più accurata di entrambe?

Ed è qui che entra in gioco il **filtro di Kalman**.

Ricordiamo che il filtro di Kalman è un algoritmo che combina **osservazioni passate** (anche rumorose) e **misure correnti** (anche rumorose) per **stimare** lo stato di un sistema (ad esempio posizione e velocità dell'auto).

Allora, mettiamo insieme le informazioni che abbiamo raccolto fino ad ora. Da un lato abbiamo l'equazione di aggiornamento dello stato del sistema vista prima. Dall'altro possiamo dire che le misure y_t sono legate linearmente allo stato e sono anch'esse affette da rumore gaussiano a media nulla e matrice di covarianza Q . Le due equazioni, dunque, sono:

$$x_t = A x_{t-1} + w_{t-1} \quad w \sim N(0, Q)$$

$$y_t = H x_t + v_t \quad v \sim N(0, R)$$

Possiamo esplicitare le equazioni relativamente al caso in esame:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xv} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{xx} \\ R_{xv} \end{bmatrix}$$

Dove Q_{xx} è la varianza della posizione predetta, mentre Q_{xv} è la covarianza posizione–velocità. Stesso discorso per R .

Notiamo che $H = [1 \ 0]$ perché misuriamo solo la posizione, mentre sulla velocità non abbiamo alcuna informazione.

Ricordiamo che w (**rumore di processo**) rappresenta l'incertezza o la **variabilità imprevista nel comportamento reale del sistema**. Anche se il modello matematico descrive il sistema come, ad esempio, un moto rettilineo uniforme, nella realtà potrebbero esserci perturbazioni come vento, attrito variabile o qualsiasi altra influenza esterna non modellata.

Il rumore v (**rumore di misura**) rappresenta l'errore o **l'imprecisione negli strumenti di misura**. Ogni sensore (come un GPS, un encoder, un radar...) ha una certa incertezza, dovuta a limiti tecnologici, ambientali o elettronici.

L'algoritmo del filtro di Kalman, come già descritto, prevede due passi distinti:

- **Predizione:** In questa fase si prendono le stime precedenti dello stato del sistema, le si fa passare attraverso la versione idealizzata del sistema dinamico (la matrice A) e si ottiene la previsione per lo stato al passo temporale successivo. In questa fase non sono state ancora incorporate le informazioni provenienti dagli strumenti di misura.
- **Aggiornamento:** Ora dobbiamo incorporare le nuove informazioni provenienti dagli strumenti di misura per aggiornare e migliorare la previsione. In questa fase combiniamo la previsione dello stato del sistema e della sua covarianza con le nuove misure (rumorose) effettuate. Il risultato sarà la stima finale dello stato.

Il primo passo, quindi, è calcolare il termine di residuo o innovazione, cioè la differenza tra quanto previsto e quanto misurato. Più questo termine è grande, meno ci fidiamo della previsione.

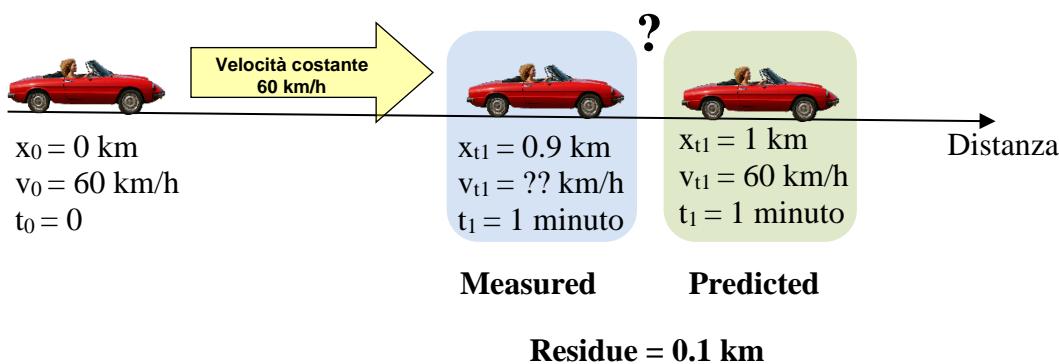


Figura 7: Concetto di "residuo"

Nel nostro caso il residuo è di $1.0 - 0.9 = 0.1$ km; Dobbiamo decidere di quanto correggere la previsione basandoci su:

- quanto ci fidiamo della previsione
- quanto ci fidiamo degli strumenti di misura

Introduciamo ora un altro aspetto importante: la **matrice di covarianza dell'errore di stima dello stato**, indicata con **P**.

Se lo stato ha “n” componenti, P è una matrice nxn che contiene:

- Sulla diagonale: le varianze di ciascun errore di stato, ovvero la misura di quanto siamo incerti su ogni variabile.

- Fuori diagonale: le covarianze tra errori di stato, ovvero la misura di quanto gli errori di due variabili sono correlati.

P indica “quanto fidarsi” della stima: se le varianze sono piccole, allora siamo sicuri; se sono grandi, c’è molta incertezza. In altri termini, se P è grande vuol dire che siamo molto incerti sulla stima e quindi daremo più peso alle nuove misurazioni; Se P è piccolo, allora la stima è considerata affidabile e il filtro si fida più del modello previsto.

Per il moto rettilineo uniforme con stato $\begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix}$, P è una matrice 2×2 :

$$P = \begin{bmatrix} Var(posizione) & Cov(Pos, Vel) \\ Cov(Vel, Pos) & Var(Velocità) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix}$$

L’elemento in alto a sinistra, $Var(posizione)$, ci dice quanto siamo sicuri della posizione stimata.

L’elemento in basso a destra, $Var(Velocità)$, ci dice quanto siamo sicuri della velocità stimata.

Gli elementi fuori diagonale (covarianze) dicono quanto gli errori di posizione e velocità sono correlati.

Attenzione a non confondere P con Q . Nella tabella seguente sono riportate le differenze.

	Varianza di stato P	Rumore di processo Q
Cosa rappresenta	L'incertezza attuale sulla stima.	L'incertezza aggiuntiva per ogni passo , dovuta a imperfezioni del modello.
Chi la calcola	Il filtro di Kalman la aggiorna ad ogni passo (predizione e correzione).	La scegli tu in base alla conoscenza fisica del sistema.
Come cambia nel tempo	Può crescere o ridursi (aumenta in predizione, diminuisce con misure precise).	Costante o definita a priori (parametro fisso o funzione di Δt).

Prima di proseguire, definiamo:

x = posizione vera, v = velocità vera.

\hat{x}^- , \hat{v}^- = stime predette (prima di usare la misura).

\hat{x}^+ , \hat{v}^+ = stime corrette (dopo la misura).

y = misura della posizione: $y = x + w$ con w rumore di misura, a media nulla e varianza R .

$e_x^- = x - \hat{x}^-$, $e_v^- = v - \hat{v}^-$:= errori predetti;

$$\text{Var}(e_x^-) = p_{11}, \text{Var}(e_v^-) = p_{22}, \text{Cov}(e_x^-, e_v^-) = p_{12} \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Nella tabella seguente è riportata una descrizione dettagliata di ogni simbolo.

Simbolo	Nome	Quando è calcolato	Significato
$\begin{bmatrix} x^- \\ v^- \end{bmatrix}$	Stato predetto (a priori)	Dopo il passo di predict , prima di usare la nuova misura	Posizione e velocità previste dal modello, prima della misura
$\begin{bmatrix} x^+ \\ v^+ \end{bmatrix}$	stato aggiornato (a posteriori)	Dopo il passo di update (correzione con la misura)	Posizione e velocità corrette con la misura
e_x^-	Errore di posizione predetto	Dopo predict	Differenza posizione stimata - reale prima della correzione
e_x^+	Errore di posizione aggiornato	Dopo update	Differenza posizione stimata - reale dopo la correzione
e_v^-	Errore di velocità predetto	Dopo predict	Differenza velocità stimata - reale prima della correzione
e_v^+	Errore di posizione aggiornato	Dopo update	Differenza posizione stimata - reale dopo la correzione
$P^- = \begin{bmatrix} p_{11}^- & p_{12}^- \\ p_{21}^- & p_{22}^- \end{bmatrix}$	Matrice covarianza predetta	Dopo predict	Varianze e covarianze degli errori stimati prima della misura
$P^+ = \begin{bmatrix} p_{11}^+ & p_{12}^+ \\ p_{21}^+ & p_{22}^+ \end{bmatrix}$	Matrice covarianza aggiornata	Dopo update	Varianze e covarianze degli errori stimati dopo la misura

Abbiamo visto che, nel nostro esempio, abbiamo una discrepanza tra misura e previsione della posizione. Dobbiamo introdurre un fattore

moltiplicativo K_x capace di correggere la previsione “pesando” l’errore rilevato, ovvero $(y - \hat{x}^-)$.

L’aggiornamento di stato, ovvero della stima di posizione, abbiamo visto ad inizio tutorial, può essere scritto come:

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + K_x(y - \hat{x}^-)$$

Nota: stiamo omettendo l’indice di iterazione per comodità di lettura. Quello che analizziamo è la fotografia al passo k-esimo.

L’errore di posizione è:

$$e_x^+ = x - \hat{x}^+ = x - \hat{x}^- - K_x(y - \hat{x}^-) = e_x^- - K_x(x + w - \hat{x}^-)$$

$$e_x^+ = e_x^- - K_x(x + w - \hat{x}^-) = e_x^- - K_x(e_x^- + w) = (1 - K_x)e_x^- - K_xw$$

Passiamo alle varianze:

$$Var(e_x^+) = Var((1 - K_x)e_x^- - K_xw) = (1 - K_x)^2 Var(e_x^-) + K_x^2 var(w)$$

$$Var(e_x^+) = (1 - K_x)^2 p_{11} + K_x^2 R$$

Calcoliamo la derivata rispetto a K_x e poniamola uguale a zero per individuare il punto di minimo:

$$\frac{d Var(e_x^+)}{d K_x} = 2(1 - K_x)p_{11} + 2K_xR = 0$$

$$(1 - K_x)p_{11} + K_xR = 0$$

$$K_x = \frac{p_{11}}{p_{11} + R}$$

Il rapporto che abbiamo ottenuto è chiamato guadagno di Kalman (**Kalman gain**).

Se K_x vale 0, significa che $p_{11} = 0$ e quindi abbiamo completa fiducia nella previsione o nel modello ideale (“la mia auto è sicuramente nel rettangolo verde di Figura 7”).

Se vale 1, significa che $R = 0$ e quindi ci fidiamo completamente della misura dello strumento (“la mia auto è sicuramente nel rettangolo blu di Figura 7”).

In pratica, questo valore è compreso tra 0 e 1.

La correzione di posizione, dunque, si ottiene prendendo la previsione e aggiungendo il termine $K_x \times$ (termine di sorpresa).

Più il guadagno K_x è grande, maggiore sarà la correzione. Questa differenza si chiama innovation o “surprise term”.

Quanto detto vale per la posizione. Cosa succede per la velocità?

In realtà la velocità non viene in alcun modo misurata (ricordiamo che il nostro strumento fornisce solo la posizione) ma il filtro di Kalman riesce comunque a fornire una stima basandosi sui dati a disposizione.

Questo è un importante risultato!

Immaginate a quante misure non sono fisicamente possibili, ma il filtro di Kalman riuscirebbe a stimarle partendo da altre misure di più facile e economica implementazione.

Per la velocità possiamo utilizzare l’ultima relazione ottenuta per la posizione, e considerare che la correzione alla stima di velocità (che si ritiene costante) può essere fatta a partire dalla variazione di posizione δ_x (misurabile) nell’unità di tempo moltiplicata per un “peso”, ovvero per il Kalman gain della velocità.

Definito K_v come guadagno di Kalman sulla velocità, l’aggiornamento del filtro (componente velocità) è:

$$\hat{v}^+ = \hat{v}^- + K_v (y - \hat{x}^-)$$

L’errore di velocità dopo l’aggiornamento è:

$$e_v^+ = v - \hat{v}^+ = v - \hat{v}^- - K_v (y - \hat{x}^-) = e_v^- - K_v (y - \hat{x}^-)$$

Considerato che:

$$(y - \hat{x}^-) = ((x + w) - \hat{x}^-) = (e_x^- + w)$$

Abbiamo che:

$$e_v^+ = e_v^- - K_v (y - \hat{x}^-) = e_v^- - K_v (e_x^- + w)$$

Passando alle varianze di primo e secondo membro:

$$Var(e_v^+) = Var(e_v^- - K_v (e_x^- + w))$$

$$Var(e_v^+) = Var(e_v^-) + K_v^2 Var(e_x^- + w) - 2K_v Cov(e_v^-, e_x^- + w)$$

$$Var(e_v^+) = p_{2,2} + K_v^2(p_{1,1} + R) - 2K_v p_{1,2} \quad (1)$$

Nota:

$$Cov(e_v^-, e_x^- + w) = Cov(e_v^-, e_x^-) + Cov(e_v^-, w) = p_{1,2} + 0 = p_{1,2}$$

$$Cov(e_v^-, w) = 0 \text{ perché } e_v^- \text{ e } w \text{ non sono correlate.}$$

Bene, ora non resta che calcolare la derivata della (1) rispetto a K_v e porla uguale a zero per individuare il punto di minimo.

$$\frac{d Var(e_v^+)}{d K_v} = 2 K_v (p_{1,1} + R) - 2 p_{1,2} = 0$$

$$K_v = \frac{p_{1,2}}{p_{1,1} + R}$$

Il guadagno sulla velocità è la covarianza posizione–velocità predetta $p_{1,2}$ divisa per la varianza effettiva della quantità che stiamo misurando ($p_{1,1} =$ incertezza predetta della posizione, più $R =$ rumore di misura). Se posizione e velocità sono fortemente correlate ($p_{1,2}$ grande) la misura di posizione aggiorna molto la velocità; se la misura è molto rumorosa (R grande) l'aggiornamento è più piccolo.

Quindi, possiamo affermare che:

- K_x indica quanto mi fido della misura di posizione rispetto alla mia previsione di posizione.
- K_v indica quanto un errore nella posizione predetta implica un errore nella velocità.

Torniamo alla relazione di $Var(e_x^+)$:

$$Var(e_x^+) = (1 - K_x)^2 p_{11} + K_x^2 R$$

Che diventa:

$$p_{1,1}^+ = (1 - K_x)^2 p_{11} + K_x^2 R$$

Osserviamo che:

$$1 - K_x = 1 - \frac{P_{11}}{R+P_{11}} = \frac{R+P_{11} - P_{11}}{R+P_{11}} = \frac{R}{R+P_{11}}$$

Quindi riprendiamo l'equazione precedente:

$$p_{1,1}^+ = (1 - K_x)^2 p_{11} + K_x^2 R$$

Che diventa:

$$p_{11}^+ = \left(\frac{R}{R + P_{11}} \right)^2 p_{11} + \left(\frac{P_{11}}{R + P_{11}} \right)^2 R$$

$$p_{1,1}^+ = \frac{R^2}{(R + P_{11})^2} p_{11} + \frac{P_{1,1}^2}{(R + P_{11})^2} R$$

$$p_{1,1}^+ = \frac{R P_{1,1}}{(R + P_{11})^2} \left(\frac{R}{(R + P_{11})} + \frac{P_{1,1}}{(R + P_{11})} \right)$$

$$p_{11}^+ = P_{11} (1 - K_x) ((1 - K_x) + K_x)$$

$$p_{11}^+ = P_{11} (1 - K_x)$$

Abbiamo ottenuto l'**equazione di aggiornamento della covarianza**.

Importante: Dall'equazione è chiaro che l'incertezza della stima diminuisce costantemente a ogni iterazione del filtro, poiché $(1 - K_x) \leq 1$

Se l'incertezza di misura è elevata, il guadagno di Kalman risulta ridotto e la stima impiega più tempo a convergere. Al contrario, quando l'incertezza di misura è bassa, il guadagno di Kalman aumenta, consentendo alla stima di raggiungere rapidamente un'incertezza prossima a zero.

Spetta quindi a noi decidere quante misurazioni effettuare. Se stiamo misurando una tensione e siamo interessati a una precisione di 10 mV, (σ), dovremmo effettuare misurazioni fino a quando la varianza della stima dello stato (σ^2) non è inferiore a 100 mV².

Calcoliamo ora i singoli elementi della matrice di covarianza P.
Iniziamo col ricordare la relazione tra gli errori:

$$e_x^- = e_x^+ + e_v^+ \Delta t + w_p$$

Dove w_p è l'effetto del rumore di processo sulla posizione (con varianza q_{pp}).

La predizione dell'errore di velocità vale:

$$e_v^- = e_v^+ + w_v$$

Dove w_v è l'effetto del rumore di processo sulla velocità (con varianza q_{vv}).

Assumiamo che i **rumori di processo** w siano **indipendenti** dagli errori a posteriori e_x^+, e_v^+ (tipica ipotesi di modellazione).

1. P_{11}

$$p_{11}^- = \text{Var}(e_x^-) = \text{Var}(e_x^+ + e_v^+ \Delta t + w_x)$$

$$\begin{aligned} p_{11}^- &= \text{Var}(e_x^+) + \text{Var}(e_v^+ \Delta t) + \text{Var}(w_x) + 2 \text{Cov}(e_x^+, e_v^+ \Delta t) \\ &\quad + 2 \text{Cov}(e_x^+, w_x) + 2 \text{Cov}(w_x, e_v^+ \Delta t) \end{aligned}$$

$$p_{11}^- = p_{11}^+ + \Delta t^2 p_{22}^+ + q_{xx} + 2 \Delta t p_{12}^+ + 0 + 0$$

$$p_{11}^- = p_{11}^+ + \Delta t^2 p_{22}^+ + 2 \Delta t p_{12}^+ + q_{xx}$$

2. P_{12}

$$p_{12}^- = \text{Cov}(e_x^-, e_v^-) = \text{Cov}(e_x^+ + e_v^+ \Delta t + w_x, e_v^+ + w_v)$$

$$\begin{aligned} p_{12}^- &= \text{Cov}(e_x^+, e_v^+) + \Delta t \text{Var}(e_v^+) + \text{Cov}(w_x, e_v^+) + \text{Cov}(e_x^+, w_v) \\ &\quad + \Delta t \text{Cov}(e_v^+, w_v) + \text{Cov}(w_x, w_v) \end{aligned}$$

I termini misti con w_x , w_v si riducono ai termini di covarianza del rumore stesso q_{xv} . Quindi:

$$p_{12}^- = p_{12}^+ + \Delta t p_{22}^+ + 0 + 0 + \Delta t 0 + q_{xv}$$

$$p_{12}^- = p_{12}^+ + \Delta t p_{22}^+ + q_{xv}$$

3. P_{22}

$$p_{22}^- = \text{Var}(e_v^-) = \text{Var}(e_v^+ + w_v)$$

$$p_{22}^- = \text{Var}(e_v^+) + \text{Var}(w_v) + 2 \text{Cov}(e_v^+, w_v)$$

$$p_{22}^- = p_{22}^+ + q_{vv}$$

4. P_{21}

Nel filtro di Kalman P_{21} è proprio la **covarianza** tra posizione e velocità, quindi di solito è uguale a P_{21} (simmetria della matrice di covarianza).

Raggruppiamo ora tutte le relazioni che abbiamo ottenuto in una tabella.

Ricordiamo le definizioni di base:

x = posizione vera, v = velocità vera.

\hat{x}^- , \hat{v}^- = stime predette (prima di usare la misura).

\hat{x}^+ , \hat{v}^+ = stime corrette (dopo la misura).

y = misura della posizione: $y = x + w$ con w rumore di misura, a media nulla e varianza R .

$e_x^- = x - \hat{x}^-$, $e_v^- = v - \hat{v}^-$:= errori predetti;

$$\text{Var}(e_x^-) = p_{11}, \quad \text{Var}(e_v^-) = p_{22}, \quad \text{Cov}(e_x^-, e_v^-) = p_{12} \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Equazione		Nome
Predizione	$\hat{p}^- = \hat{p}_{k-1}^+ + \hat{v}_{k-1}^+ \Delta t$	Predizione posizione
	$\hat{v}^- = \hat{v}_{k-1}^+$	Predizione velocità (costante)
	$p_{11} = p_{11}^+ + 2 \Delta t p_{12}^+ + \Delta t^2 p_{22}^+ + q_{pp}$	Varianza posizione predetta (*)
	$p_{12} = p_{12}^+ + \Delta t p_{22}^+ + q_{pv}$	Covarianza posizione–velocità predetta (*)
	$p_{22} = p_{22}^+ + q_{vv}$	Varianza velocità predetta (*)
Correzione	$K_1 = \frac{P_{1,1}}{(R + P_{1,1})}$	Calcolo del guadagno di Kalman $K_1 = K_p, K_2 = K_v$
	$K_2 = \frac{P_{1,2}}{(R + P_{1,1})}$	
	$\tilde{y} = y - \hat{p}^-$	Innovazione (errore di misura)
	$\hat{p}^+ = \hat{p}^- + K_1 \tilde{y}$	Correzione posizione
	$v^+ = \hat{v}^- + K_2 \tilde{y}$	Correzione velocità
	$p_{11}^+ = (1 - K_1) p_{11}$	Varianza posizione aggiornata
	$p_{12}^+ = (1 - K_1) p_{12}$	Covarianza aggiornata
	$p_{22}^+ = p_{22} - K_2 p_{12}$	Varianza velocità aggiornata

(*) I valori p_{ab}^+ nella fase di predizione si riferiscono a quelli ottenuti al passo\iterazione precedente, ovvero (k-1). Per comodità di lettura sono stati omessi gli indici di iterazione.

Queste equazioni, e la loro applicazione iterativa, rappresentano il filtro di Kalman.

Nel caso di sistemi più complessi, i calcoli diventano più pesanti e si preferisce ricorrere ad una formulazione matriciale (che vale anche per il caso appena visto) riportata nella tabella seguente.

In realtà, all'equazione di transizione di stato manca ancora un termine che vedremo più avanti.

	X_0, P_0	Initial estimation
	$\mathbf{x} = A \mathbf{x} + w \quad w \sim N(0, Q)$ $y = H \mathbf{x} + v \quad v \sim N(0, R)$	Equazioni di base
Predict	$\mathbf{x} = A \mathbf{x}$	Prediction: state
	$P = APA^T + Q$	Prediction: covariance
Update	$y = z - H \mathbf{x}$	Innovation
	$K = PH^T(HPH^T - R)^{-1}$	Kalman gain
	$\mathbf{x} = \mathbf{x} + K y$	Update: state
	$P = (I - KH) P$	Update: covariance

4. Considerazioni sui rumori di misura e di processo

La varianza del rumore della misura R dipende dal tipo di sensore che si sta utilizzando e non varia con le iterazioni.

Di seguito riporto, come esempio, alcuni esempi approssimativi in base al tipo di sensore.

Tipo di sensore	Valore approssimativo di σ	Varianza stimata $R = \sigma^2$
Temperatura (NTC, Pt100)	0.01–0.05 °C	$1 \times 10^{-4} - 2,5 \times 10^{-3} \text{ °C}^2$
Accelerometro MEMS	decine di μg	$\sim (10 \mu\text{g})^2 = 1 \times 10^{-10} \text{ g}^2$
Radar / Lidar	0.025 m	$6,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Umidità relativa	0.3 %RH	$9 \times 10^{-2} \text{ \%}^2$
Pressione atmosferica	0.18 Pa	$3,24 \times 10^{-2} \text{ Pa}^2$
Encoder ottico (1024 imp/giro)	1 impulso ($\approx 0,35^\circ$)	0,1225 $^\circ$ ²

Il rumore di processo Q rappresenta l'incertezza del modello matematico utilizzato. In generale, più il sistema è soggetto a disturbi esterni non modellati, più Q deve essere grande. La forma tipica di Q per un moto rettilineo uniforme (noto in letteratura) è:

$$Q = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

Dove σ_a^2 rappresenta la varianza dell'accelerazione non modellata (vento, attrito, salite, discese, ...)

Come ordine di grandezza si può assumere che:

- Sistema lento e stabile: $\sigma_a \approx 0.01 \text{ m/s}^2$
- Sistema con variazioni moderate: $\sigma_a \approx 0.1 \text{ m/s}^2$
- Sistema molto dinamico: $\sigma_a \geq 1 \text{ m/s}^2$

Come regola empirica, possiamo iniziare stimando R dai datasheet dei sensori e impostando per Q valori iniziali intermedi osservando che:

- se Q è troppo piccolo, il filtro reagisce lentamente ai cambiamenti veri
- se Q è troppo alto, il filtro diventa rumoroso.

5. Esempio numerico

Cerchiamo ora di mettere in pratica quanto imparato ricapitolando quanto visto in questo tutorial in merito all'applicazione del filtro di Kalman al moto rettilineo uniforme di un veicolo.

Procediamo come abbiamo già imparato e identifichiamo la metodologia.

Definiamo il vettore di stato:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

Dove x è la posizione e v è la velocità. La fisica ci dice che il modello dinamico del processo è:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{dv}{dt} = 0$ perché il moto è a velocità costante.

Discretizzando con passo Δt :

$$\boldsymbol{x}_t = A \boldsymbol{x}_{t-1} + w$$

Nota: stiamo indicando con \boldsymbol{x}_t (in grassetto) il vettore di stato, non la posizione.

La matrice A vale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w \sim N(0, Q)$$

Ricordiamo che w rappresenta il rumore di processo.

Misuriamo la sola posizione all'istante k . La misura, come al solito, sarà affetta da rumore:

$$y_k = H \boldsymbol{x}_k + v, \quad H = [1 \ 0], \quad v \sim N(0, R)$$

Le relazioni di Kalman, dunque, sono:

Predizione:

$$\mathbf{x}_k^- = A \mathbf{x}_{k-1}^+$$

$$P_k^- = A P_{k-1}^+ A^T + Q$$

Correzione:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_k^+ = \mathbf{x}_k^- + K_k (y_k - H \mathbf{x}_k^-)$$

$$P_k^+ = (I - K_k H) P_k^-$$

Ora abbiamo la metodologia per iniziare a fare dei calcoli.
Iniziamo a definire le ipotesi di partenza.

Definiamo lo stato iniziale:

$$\mathbf{x}_0^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di covarianza iniziale

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Varianza posizione iniziale: $\sigma_x^2 = 1.0 \text{ km}^2$
- Varianza velocità iniziale: $\sigma_v^2 = 4.0 \text{ (km/min)}^2$

Rumore di processo (Q):

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

- $Q_x = Q_{11} = 0.01 \text{ km}^2$
- $Q_v = Q_{22} = 0.01 \text{ (km/min)}^2$

Varianza del rumore di misura: $R = 0.25 \text{ km}^2$ (standard deviation: 0.5 km)

Impostiamo $\Delta t = 1$ minuto.

Prima iterazione

Predizione

Primo passo

$$\mathbf{x}_1^- = A \mathbf{x}_0^+ = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Secondo passo

$$\begin{aligned} P_1^- &= A P_0^+ A^T + Q = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + Q = \\ &\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + Q = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + Q = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.01 & 4 \\ 4 & 4.01 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Misura

Supponiamo di misurare la posizione $y_1 = 1.1$ km (con rumore).

Correzione

Terzo passo

$$\begin{aligned} K_1 &= P_1^- H^T (H P_1^- H^T + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 5.01 & 4 \\ 4 & 4.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left([1 \ 0] \begin{bmatrix} 5.01 & 4 \\ 4 & 4.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 5.01 \\ 4 \end{bmatrix} (5.01 + 0.25)^{-1} = \begin{bmatrix} 5.01 \\ 4 \end{bmatrix} \frac{1}{5.26} = \begin{bmatrix} 0.9529 \\ 0.7601 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quarto passo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^+ &= \mathbf{x}_1^- + K_1 (y_1 - H \mathbf{x}_1^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9529 \\ 0.7601 \end{bmatrix} (1.1 - [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0.9529 \\ 0.7601 \end{bmatrix} 1.1 \\ &= \begin{bmatrix} 1.0482 \\ 0.8361 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quinto passo

$$\begin{aligned}
 P_1^+ &= (I - K_1 H) P_1^- = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9529 \\ 0.7601 \end{bmatrix} [1 \ 0] \right) \begin{bmatrix} 5.01 & 4 \\ 4 & 4.01 \end{bmatrix} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9529 & 0 \\ 0.7601 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 5.01 & 4 \\ 4 & 4.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.9529 & 0 \\ -0.7601 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.01 & 4 \\ 4 & 4.01 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.253 & 0.191 \\ 0.191 & 0.95 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ricapitolando:

Iterazione 1	
Quantità	Valore
Stato predetto	$x_1^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Covarianza predetta	$P_1^- = \begin{bmatrix} 5.01 & 4 \\ 4 & 4.01 \end{bmatrix}$
Guadagno Kalman	$K_1 = \begin{bmatrix} 0.9529 \\ 0.7601 \end{bmatrix}$
Misura	$y_1 = 1.1 m$
Stato aggiornato	$x_1^+ = \begin{bmatrix} 1.0482 \\ 0.8361 \end{bmatrix}$
Covarianza aggiornata	$P_1^+ = \begin{bmatrix} 0.253 & 0.191 \\ 0.191 & 0.95 \end{bmatrix}$
Input per l'iterazione successiva	

Seconda iterazione

Predizione

Primo passo

$$x_2^- = A x_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0482 \\ 0.8361 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0482 \\ 0.8361 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8843 \\ 0.8361 \end{bmatrix}$$

Secondo passo

$$\begin{aligned}
 P_2^- &= A P_1^+ A^T + Q = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.253 & 0.191 \\ 0.191 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + Q \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.253 & 0.191 \\ 0.191 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + Q = \begin{bmatrix} 1.597 & 1.161 \\ 1.161 & 0.980 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Misura

Supponiamo di misurare la posizione $y_1 = 2.2 \text{ km}$ (con rumore).

Correzione

Terzo passo

$$K_2 = P_2^- H^T (H P_2^- H^T + R)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.597 & 1.161 \\ 1.161 & 0.980 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.597 & 1.161 \\ 1.161 & 0.980 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.597 \\ 1.161 \end{bmatrix} \frac{1}{1.847} = \begin{bmatrix} 0.8651 \\ 0.6288 \end{bmatrix}$$

Quarto passo

$$\mathbf{x}_2^+ = \mathbf{x}_2^- + K_2 (y_2 - H \mathbf{x}_2^-) = \begin{bmatrix} 1.8843 \\ 0.8361 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8651 \\ 0.6288 \end{bmatrix} (2.2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8651 \\ 0.6288 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2.1573 \\ 1.0346 \end{bmatrix}$$

Quinto passo

$$P_2^+ = (I - K_2 H) P_2^- = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8651 \\ 0.6288 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1.597 & 1.161 \\ 1.161 & 0.980 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.215 & 0.156 \\ 0.156 & 0.250 \end{bmatrix}$$

Ricapitolando:

Iterazione 2	
Quantità	Valore
Stato predetto	$\mathbf{x}_2^- = \begin{bmatrix} 1.8843 \\ 0.8361 \end{bmatrix}$
Covarianza predetta	$P_2^- = \begin{bmatrix} 1.597 & 1.161 \\ 1.161 & 0.980 \end{bmatrix}$
Guadagno Kalman	$K_2 = \begin{bmatrix} 0.8651 \\ 0.6288 \end{bmatrix}$
Misura	$y_2 = 2.2 \text{ m}$
Stato aggiornato	$\mathbf{x}_2^+ = \begin{bmatrix} 2.1573 \\ 1.0346 \end{bmatrix}$
Covarianza aggiornata	$P_2^+ = \begin{bmatrix} 0.215 & 0.156 \\ 0.156 & 0.250 \end{bmatrix}$
Input per l'iterazione successiva	

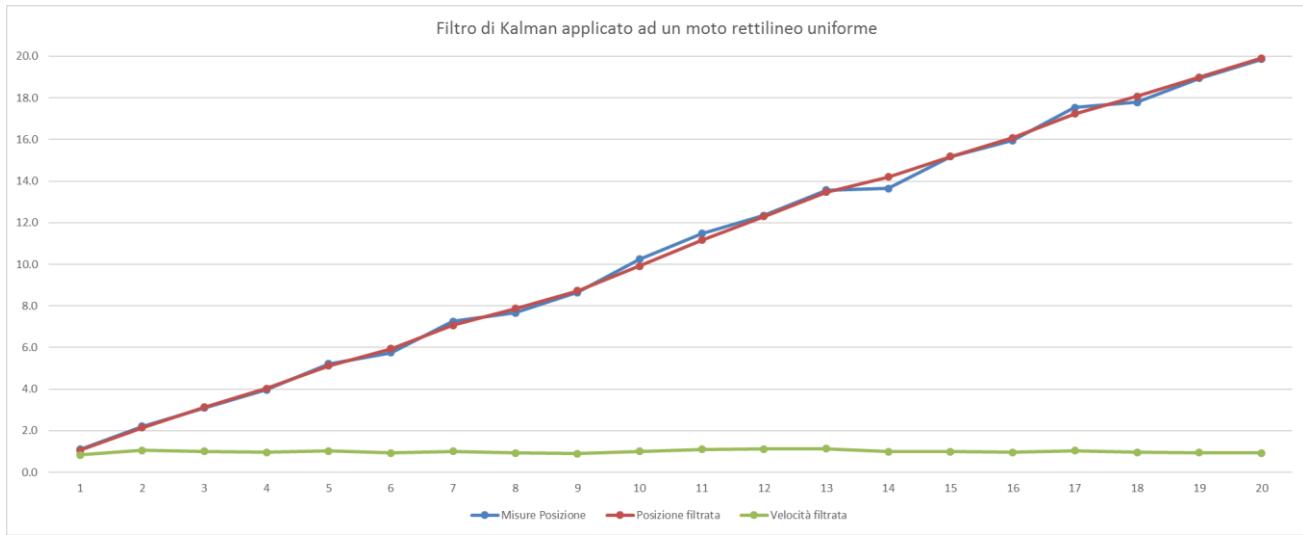


Figura 8: Grafico con segnale di posizione filtrato

Nella figura precedente è mostrato un grafico di una simulazione di moto rettilineo uniforme. La linea rossa è il segnale filtrato, mentre la blu rappresenta le misure fornite dal sensore. In verde la stima della velocità ($1 \text{ km/min} = 60 \text{ km/h}$).

Alla fine del tutorial troverai un codice sorgente in Python che permette di simulare questa specifica applicazione del filtro di Kalman.

6. Filtro di Kalman per sistemi complessi

Nei sistemi complessi, lo stato può variare non solo per effetto della sua evoluzione naturale, ma anche a causa di azioni esterne. Finora non abbiamo considerato questo contributo.

Per includere queste informazioni nel modello, si introduce la matrice di controllo B , che descrive come un'azione esterna, rappresentata da un input di controllo u , influisca sullo stato stimato del sistema nel filtro di Kalman.

Dobbiamo quindi modificare l'equazione di evoluzione dello stato come di seguito riportato:

$$\mathbf{x}_t = A \mathbf{x}_{t-1} + B \mathbf{u} + w$$

Dove:

- A rappresenta la dinamica naturale del sistema, cioè come lo stato evolve "da solo" in assenza di comandi.
- $B \mathbf{u}$ è la parte dovuta a ciò che facciamo noi al sistema: un motore che spinge, un attuatore che muove un braccio robotico, un controllo di volo che cambia la rotta.
- \mathbf{x}_t è lo stato del sistema al tempo t .

La matrice B serve, ad esempio, a:

- **Scalare correttamente l'input:** un'accelerazione in m/s^2 deve diventare un incremento di velocità in m/s , o di posizione in metri, tenendo conto del tempo trascorso.
- **Distribuire l'effetto:** un singolo comando può influenzare più variabili di stato (es. un'accelerazione influenza sia velocità sia posizione).
- **Integrare il tempo Δt :** molti modelli includono fattori come Δt o $\frac{\Delta t^2}{2}$ per rispettare le leggi fisiche.

Consideriamo ora il caso di un oggetto che cade sotto gravità. Possiamo modellare l'accelerazione di gravità "g" come un input di controllo costante: la matrice B traduce quell'accelerazione in variazioni di velocità e posizione ad ogni passo. Così, anche senza sensori, il filtro "saprebbe" che la velocità aumenta linearmente e la posizione cresce quadraticamente con il tempo.

Senza B , quel contributo esterno semplicemente non esisterebbe nel modello, e il filtro attribuirebbe erroneamente quei cambiamenti a rumore o a errori di misura.

Esaminiamo in dettaglio questo esempio.



Figura 9: Esempio più complesso

Procediamo come abbiamo già imparato. Definiamo il vettore di stato:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}$$

Dove h è l'altezza (verticale) e v è la velocità di caduta. La fisica ci dice che il modello dinamico del processo è:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

Con g abbiamo indicato l'accelerazione dovuta alla forza di gravità, cioè 9.81 m/s^2 . Discretizzando con passo Δt :

$$\boldsymbol{x}_t = A \boldsymbol{x}_{t-1} + B \boldsymbol{u} + w$$

Nota: stiamo indicando con \boldsymbol{x}_t il vettore di stato, non una posizione.

Le matrici A , B , u valgono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix}, \quad u = g$$

Ricordiamo che w rappresenta il rumore di processo.

Il termine con la matrice B lo abbiamo introdotto ora perché ci serviva formalizzare le cause che provocano il cambio di stato.

Misuriamo la sola altezza all'istante k . La misura, come al solito, sarà affetta da rumore:

$$y_k = H x_k + v, \quad H = [1 \ 0]$$

Fissiamo ora il passo di campionamento $\Delta t = 0.1\text{s}$. Il rumore di processo w , con covarianza Q , influisce solo sull'accelerazione g con una piccola incertezza, diciamo $\sigma_a^2 = 0.1 (\text{m/s}^2)^2$. Il rumore della misura di altezza vale $\sigma_y^2 = 0.5 \text{ m}^2$.

Le relazioni di Kalman, dunque, sono:

Predizione:

$$x_k^- = A x_{k-1}^+ + B u$$

$$P_k^- = A P_{k-1}^+ A^T + Q$$

Correzione:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1}$$

$$x_k^+ = x_k^- + K_k (y_k - H x_k^-)$$

$$P_k^+ = (I - K_k H) P_k^-$$

Matrici Q e R :

$$Q = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} \frac{0.1^4}{4} & \frac{0.1^3}{2} \\ \frac{0.1^3}{2} & 0.1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \cdot 10^{-6} & 5 \cdot 10^{-5} \\ 5 \cdot 10^{-5} & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$R = \sigma_y^2 = 0.5$$

Adesso abbiamo tutti gli elementi per partire con le iterazioni previste dal filtro di Kalman.

Definiamo lo stato iniziale:

$$\mathbf{x}_0^+ = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Predizione

Primo passo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^- &= A \mathbf{x}_0^+ + B u = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} 9.81 = \begin{bmatrix} 10 + 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} 9.81 \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.04905 \\ 0.981 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.04905 \\ 0.981 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Secondo passo

$$\begin{aligned} P_1^- &= A P_0^+ A^T + Q = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} + Q = \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} + Q = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} + Q = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \cdot 10^{-6} & 5 \cdot 10^{-5} \\ 5 \cdot 10^{-5} & 0.001 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 1.0100025 & 0.10005 \\ 0.10005 & 1.001 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Misura

Supponiamo di misurare l'altezza $y_1 = 10.2$ m (con rumore).

Correzione

Terzo passo

$$\begin{aligned} K_1 &= P_1^- H^T (H P_1^- H^T + R)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1.0100025 & 0.10005 \\ 0.10005 & 1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0100025 & 0.10005 \\ 0.10005 & 1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1.0100025 \\ 0.10005 \end{bmatrix} (1.0100025 + 0.5)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0100025 \\ 0.10005 \end{bmatrix} \frac{1}{1.5100025} = \begin{bmatrix} 0.669 \\ 0.0663 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quarto passo

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{x}_1^+ &= \boldsymbol{x}_1^- + K_1 (y_1 - H \boldsymbol{x}_1^-) = \begin{bmatrix} 10.04905 \\ 0.981 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.669 \\ 0.0663 \end{bmatrix} (10.2 - [1 \ 0] \begin{bmatrix} 10.04905 \\ 0.981 \end{bmatrix}) \\
 &= \begin{bmatrix} 10.04905 \\ 0.981 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.669 \\ 0.0663 \end{bmatrix} (10.2 - 10.04905) \\
 &= \begin{bmatrix} 10.04905 \\ 0.981 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.669 \\ 0.0663 \end{bmatrix} 0.15095 = \begin{bmatrix} 10.04905 + 0.101 \\ 0.981 + 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.150 \\ 0.991 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Quinto passo

$$\begin{aligned}
 P_1^+ &= (I - K_1 H) P_1^- = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.669 \\ 0.0663 \end{bmatrix} [1 \ 0] \right) \begin{bmatrix} 1.0100025 & 0.10005 \\ 0.10005 & 1.001 \end{bmatrix} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.669 & 0 \\ 0.0633 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1.0100025 & 0.10005 \\ 0.10005 & 1.001 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - 0.669 & 0 \\ -0.0633 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0100025 & 0.10005 \\ 0.10005 & 1.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.334 & 0.0331 \\ -0.067 & 0.994 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ricapitolando:

Iterazione 1	
Quantità	Valore
Stato predetto	$\boldsymbol{x}_1^- = \begin{bmatrix} 10.04905 \\ 0.981 \end{bmatrix}$
Covarianza predetta	$P_1^- = \begin{bmatrix} 1.0100025 & 0.10005 \\ 0.10005 & 1.001 \end{bmatrix}$
Guadagno Kalman	$K_1 = \begin{bmatrix} 0.669 \\ 0.0663 \end{bmatrix}$
Misura	$y_1 = 10.2 m$
Stato aggiornato	$\boldsymbol{x}_1^+ = \begin{bmatrix} 10.150 \\ 0.991 \end{bmatrix}$
Covarianza aggiornata	$P_1^+ = \begin{bmatrix} 0.334 & 0.0331 \\ -0.067 & 0.994 \end{bmatrix}$
Input per l'iterazione successiva	

Ora siamo pronti per la prossima iterazione. I calcoli si lasciano al lettore come esercizio.

7. Conclusioni

Il percorso che abbiamo seguito, partendo da un semplice moto rettilineo uniforme con sola misura della posizione, ci ha permesso di capire come il filtro di Kalman possa trasformare dati rumorosi in stime affidabili. Abbiamo visto che la sua forza non risiede solo nel “ripulire” le misure, ma soprattutto nel fondere in modo ottimale due fonti di conoscenza: il modello di stato (previsione) e le osservazioni sperimentali (correzione).

Un punto centrale è l’importanza di modellare correttamente le incertezze, sia quelle della misura (v) sia quelle del processo (w). Nel caso del moto rettilineo uniforme, pur non avendo una misura diretta della velocità, il filtro è stato in grado di stimarla con crescente precisione sfruttando la relazione tra posizione e velocità.

Questo concetto è stato esteso anche ad un altro scenario, ovvero la caduta di un oggetto sotto l’effetto della forza di gravità. Qui il filtro di Kalman può stimare con precisione sia la velocità di caduta, sia l’accelerazione gravitazionale, pur partendo da misure di posizione affette da rumore.

Se questi esempi ti hanno aiutato a comprendere la logica del filtro di Kalman, il passo successivo è affrontare scenari più complessi: stimare la traiettoria di un drone soggetto al vento, seguire un satellite in orbita o integrare sensori GPS e IMU in un veicolo. Ogni nuovo contesto richiederà una scelta accurata del modello, delle matrici Q e R, e delle strategie per gestire stati non osservabili direttamente. Più aumentano le complessità, più diventa evidente come il filtro di Kalman non sia solo un algoritmo, ma un vero e proprio metodo di fusione intelligente delle informazioni in presenza di incertezza.

Programma Python per moto rettilineo uniforme

```
import numpy as np

# -----
# Parametri del problema
# -----
# passo temporale (minuti)
dt = 1

# Matrici del modello
# Matrice di transizione di stato A (moto rettilineo uniforme)
A = np.array([[1, dt],
              [0, 1]])

# osserviamo solo la posizione
H = np.array([[1, 0]])

# rumore di processo
Q = np.array([[0.01, 0],
              [0, 0.01]])

# rumore di misura
R = np.array([[0.25]])

# Stato iniziale stimato (posizione, velocità)
x_plus = np.array([[0.0],
                   [0.0]])

# Covarianza iniziale stimata
P_plus = np.array([[1, 0],
                   [0, 4]])

# Misure simulate
misure = [1.1, 2.2, 3.1, 4.0, 5.2, 5.9, 6.8, 7.9, 8.7, 10.4]

# -----
# Stampa intestazione tabella
# -----
print(f"{'k':^3} | {'z':^6} | {'x-pos':^8} | {'x-vel':^8} | "
      f"{'x+pos':^8} | {'x+vel':^8} | "
      f"{'Kx':^8} | {'Kv':^8} | "
      f"{'p11+':^8} | {'p12+':^8} | {'p21+':^8} | {'p22+':^8}")
print("-"*123)
```

```

for k, y in enumerate(misure, start=1):

    # -----
    # ----- PREDICT -----
    # -----


    # Predizione stimata
    x_minus = A @ x_plus
    P_minus = A @ P_plus @ A.T + Q

    # -----
    # ----- UPDATE -----
    # -----


    # innovazione
    t = y - (H @ x_minus)
    S = H @ P_minus @ H.T + R

    # guadagno di Kalman
    K = P_minus @ H.T @ np.linalg.inv(S)

    x_plus = x_minus + K @ t
    P_plus = (np.eye(2) - K @ H) @ P_minus

    # Guadagni separati
    Kx = K[0,0]
    Kv = K[1,0]

    # -----
    # ----- LOG -----
    # -----


    print(f"\n{k:<^3} | {z:6.2f} | {x_minus[0,0]:8.3f} | {x_minus[1,0]:8.3f} | {x_plus[0,0]:8.3f} | {x_plus[1,0]:8.3f} | "
          f"\n{Kx:8.4f} | {Kv:8.4f} | "
          f"\n{P_plus[0,0]:8.4f} | {P_plus[0,1]:8.4f} | {P_plus[1,0]:8.4f} | {P_plus[1,1]:8.4f}\n")

```

Programma Python per moto accelerato

```
import numpy as np

# -----
#   Parametri del problema
# -----
dt = 0.1 # passo temporale (s)
g = 9.81 # accelerazione di gravità (m/s²)

# Matrici del modello
# dinamica posizione-velocità
A = np.array([[1, dt],
              [0, 1]])

# Matrice di controllo
B = np.array([[0.005],
              [0.1]])

# osserviamo solo la posizione
H = np.array([[1, 0]])

# rumore di processo
Q = np.array([[2.5e-6, 5e-5],
              [5e-5, 0.001]])

# rumore di misura
R = np.array([[0.5]])

# Stato iniziale stimato (posizione, velocità)
x_plus = np.array([[10.0],
                   [0.0]])

# Covarianza iniziale stimata
P_plus = np.array([[1, 0],
                   [0, 1]])

# Misure simulate
misure = [10.2, 10.45, 10.80]

# -----
#   Stampa intestazione tabella
# -----
print(f"{'k':^3} | {'z':^6} | {'x-pos':^8} | {'x-vel':^8} | "
      {'x+pos':^8} | {'x+vel':^8} | ")
```

```

f"{'Kx':^8} | {'Kv':^8} | "
f"{'p11+':^8} | {'p12+':^8} | {'p21+':^8} | {'p22+':^8}"")
print("-"*123)

for k, y in enumerate(misure, start=1):

    # -----
    # ----- PREDICT -----
    # -----


    # Predizione stimata
    x_minus = A @ x_plus + B * g
    P_minus = A @ P_plus @ A.T + Q

    # -----
    # ----- UPDATE -----
    # -----


    # innovazione
    t = y - (H @ x_minus)

    S = H @ P_minus @ H.T + R
    # guadagno di Kalman
    K = P_minus @ H.T @ np.linalg.inv(S)

    x_plus = x_minus + K @ t
    P_plus = (np.eye(2) - K @ H) @ P_minus

    # Guadagni separati
    Kx = K[0,0]
    Kv = K[1,0]

    # -----
    # ----- LOG -----
    # -----


    print(f"{{k:^3}} | {{z:6.2f}} | {{x_minus[0,0]:8.3f}} | "
{x_minus[1,0]:8.3f} | {{x_plus[0,0]:8.3f}} | {{x_plus[1,0]:8.3f}} | "
f"{{Kx:8.4f}} | {{Kv:8.4f}} | "
f"{{P_plus[0,0]:8.4f}} | {{P_plus[0,1]:8.4f}} | "
{P_plus[1,0]:8.4f} | {{P_plus[1,1]:8.4f}}")

```