Sorbonne Université
M2 Informatique, Spécialité SAR
Algorithmique Répartie Avancée

Année universitaire 2020/2021

GRAPHES DYNAMIQUES

Swan DUBOIS

Contexte

- Graphe :
  - Outil mathématique
  - Modèle pour un ensemble d'acteurs (nœuds, sommets) avec des relations binaires (arcs, arêtes)
- Théorie très riche avec nombreux concepts bien définis
- Modèle général :
  - Tâches/travailleurs et possibilité d'affectations
  - Danseurs/danseuses et préférence de partenaires
  - Dépendances entre tâches
  - **Réseau** (informatique, social, professionnel...)

Contexte

- Algorithmique répartie “à la Lamport” :
  - Tout processus peut communiquer avec tout autre tout le temps
  - Modèle = graphe complet
- Algorithmique répartie avec point de vue “réseaux” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble tout le temps
  - Modèle = graphe quelconque
- Algorithmique répartie pour réseaux “modernes” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble à certains moments
  - Modèle = **???**

Besoin de modèle/théorie pour écrire un algo ?

- OUI !
- Besoin d'accord sur les définitions pour écrire/comprendre l'algorithme
- Mais surtout pour la preuve et l'analyse
- Exemple : preuve par récurrence sur distance à un initiateur
- Distance = longueur du plus court chemin
- Chemin et longueur non clairement définis en dynamique...

Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité *vs.* Dynamicité ?
  - Mobilité $\Rightarrow$ Dynamicité
  - Dynamicité $\not\Rightarrow$ Mobilité
- Churn *vs.* Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn $\Rightarrow$ Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds $\not\Rightarrow$ Churn
- Types de dynamicité ?

Dynamicité contrôlée	Dynamicité subie prévisible	Dynamicité subie imprévisible
Réseau robots	Réseau satellites	Réseau ad-hoc
Réseau capteurs/actuateurs	Réseau bus/métro	Réseau véhiculaire
		Réseau téléphones
		Réseau capteurs

Modèles

- Idée = un graphe "qui bouge avec le temps"
- Nombreux modèles issus de nombreux cadres applicatifs distincts
- Aucun modèle ne s'impose vraiment
- Théorie encore jeune et peu développée (comparée aux graphes statiques)

Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Ensemble de sommets V fixe
- Un graphe $G = (V, E)$
- Temps discret $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Graphe évolutif = une suite de sous graphe de G
  $\mathcal{G} = G_0, G_1, G_2, G_3, \ldots$ avec $\forall i \in T, G_i \subseteq G$

Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle peu compacte et pratique
- Adapté systèmes synchrones

Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Ensemble de sommets V fixe
- Un graphe $G = (V, E)$
- Temps continu $T = \mathbb{R}^+$
- GVT = étiquetage de G avec une fonction de présence $\mathcal{G} = (G, \rho)$ avec $\rho : E \times T \to \{0, 1\}$ fonction de présence des arêtes

Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle compacte mais peu intuitive
- Adapté systèmes asynchrones
- Hypothèse courante : toute apparition d'une durée inférieure à la latence est ignorée
- Facile à enrichir : fonctions de présence des nœuds, de latence de communication, ...

Adaptation/Généralisation de la théorie des graphes

- Aussi peu que possible...
- Mais quasi obligatoire
- Parfois simple : voisinage de v
  - Graphe statique : ensemble de sommets partageant une arête avec v
  - Graphe dynamique : ensemble de sommets partageant une arête avec v à un instant t
  - Tout devient fonction du temps !
- Parfois complexe et sujet à débat : connexité, ensemble couvrants, leader...

Degré maximal d'un graphe dynamique

- Graphe statique : Degré d'un nœud deg_v = nombre de voisins
- Graphe dynamique : Degré d'un nœud $deg_v(t)$ = nombre de voisins à un instant t
- Graphe statique : Degré maximal $\Delta_G = max_{v \in V}\{deg_v\}$
- Graphe dynamique : Degré maximal ?
  - Option 1 : fonction du temps $\Delta_{\mathcal{G}}(t) = max_{v \in V}\{deg_v(t)\}$
  - Option 2 : valeur unique $\Delta_{\mathcal{G}} = max_{v \in V, t \in T}\{deg_v(t)\}$
  - Les deux sont valables, tout dépend de ce dont on a besoin !

Empreinte

- Idée : “résumer” le graphe dynamique en un graphe statique
- $E_{\mathcal{G}} = (V, E)$ avec
  - V l'ensemble de sommets de $\mathcal{G}$
  - E l'ensemble des arêtes qui sont présentes au moins une fois dans $\mathcal{G}$

- Attention aux conclusions hâtives sur l'empreinte !
  - Exemple : degré maximal
  - $\Delta_{\mathcal{G}}$ n'est pas toujours $\Delta_{E_{\mathcal{G}}}$!
  - $\Delta_{\mathcal{G}} \leq \Delta_{E_{\mathcal{G}}}$

Chemin

- Dans un graphe statique G, chemin de u à v = suite d'arêtes adjacentes de G menant de u à v
- Longueur d'un chemin = nombre d'arêtes de ce chemin
- Notion centrale en théorie des graphes car permet de définir :
  - Distance de u à v = longueur du plus court chemin de u à v
  - Excentricité de v = plus grande distance entre v et un autre nœud
  - Diamètre de G = plus grande excentricité d'un nœud de G
  - Connexité = existence d'un chemin entre toute paire de nœud
  - etc.
- En algorithmique répartie, intuition d'un chemin = possibilité d'envoyer un message.

Chemin dans un graphe dynamique ?

- Idée = conserver l'intuition de possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans l'empreinte $\not\Rightarrow$ possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans G_i $\not\Rightarrow$ possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans tous les G_i $\Rightarrow$ possibilité d'envoyer un message
- Suffisant mais est-ce nécessaire ?

Trajet

- Il faut prendre en compte le temps et les latences
- Dépend d'une date de départ !
- Trajet de u à v au temps t_d = Chemin $a_1, a_2, \ldots$ de u à v dans l'empreinte **tel que** :
  - a_1 est présente à un $t_1 \geq t_d$
  - a_2 est présente à un $t_2 \geq t_1 + 1$
  - etc.
- Relation non symétrique car trajet "orienté" par le temps

Caractéristiques des trajets

- Date de départ $\neq$ Date de première émission
- Longueur du trajet = nombre d'arêtes traversées
- Durée = Date d'arrivée - Date de première émission
- Qu'est-ce qu'un bon trajet ?
- Tout dépend de l'objectif :
    - Le plus court = minimise la longueur
    - Le plus rapide = minimise la durée
    - Arrivant le plus vite = minimise la date d'arrivée