Correction TP1 LTL

Exercice 3

a

$G(Fp \wedge Fq)$ et $GFp \wedge GFq$

On explicite les propositions :

(Proposition de gauche)
soit (par application de G) $\forall j \geq 0,\ t, j \models Fp \wedge Fq$
soit (par application de $\wedge$) $\forall j \geq 0,\ t, j \models Fp \wedge t, j \models Fq$
soit (par application de F) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p) \wedge (\exists l \geq j \mid t, l \models q)$
soit (par distribution de $\forall$) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p) \wedge (\forall j \geq 0, \exists l \geq j \mid t, l \models q)$

(Proposition de droite)
soit (par application de G) $(\forall j \geq 0,\ t, j \models Fp) \wedge (\forall j' \geq 0,\ t, j' \models q)$
soit (par application de F) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p) \wedge (\forall j' \geq 0, \exists k' \geq j' \mid t, k' \models q)$

L'équivalence entre les deux propositions nous apparaît maintenant avec évidence : on peut remplacer j' par j, la variable est muette.

b

$F(Gp \wedge Gq)$ et $FGp \wedge FGq$

On explicite de même (en faisant moins d'étapes) :

(Proposition de gauche)
soit $\exists j \geq 0 \mid \forall k \geq j,\ t, k \models p \wedge \forall l \geq j,\ t, l \models q$

(Proposition de droite)
soit $\exists j \geq 0 \mid \forall k \geq j,\ t, k \models p \wedge \exists j' \geq 0 \mid \forall l \geq j',\ t, l \models q$

L'implication (gauche) $\Rightarrow$ (droite) est évidente. On vérifie l'existence du j' en le posant égal au j.

L'implication (droite) $\Rightarrow$ (gauche) est un peu plus subtile :
Si on pose $j'' = max(j, j')$, on a bien
$\exists j'' \geq 0 \mid \forall k \geq j'',\ t, k \models p$ (par la première partie de la proposition de droite)

et $\forall l \geq j'',\ t, l \models q$ (par la deuxième partie de la proposition de droite)

CQFD

c

$G(Fp \vee Fq)$ et $GFp \vee GFq$

On explicite :

(Proposition de gauche)
soit (par application du G) $\forall j \geq 0,\ t, j \models (Fp \vee Fq)$
soit (par application des F) $\forall j \geq 0, (\exists k \geq j \mid t, k \models p \vee \exists l \geq j \mid t, l \models q)$
soit (par distribution de $\forall$) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p) \vee (\forall j \geq 0, \exists k' \geq j \mid t, k' \models q)$

(Proposition de droite)
soit (par application des G) $(\forall j \geq 0,\ t, j \models Fp) \vee (\forall j' \geq 0,\ t, j' \models Fq)$
soit (par application des F) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p) \vee (\forall j' \geq 0, \exists k' \geq j' \mid t, j' \models q)$

On peut remplacer j' par j dans cette dernière expression, la variable étant muette. Les deux propositions sont bien équivalentes.

d

$F(Gp \vee Gq)$ et $FGp \vee FGq$

Pour cette question, la manière la plus simple de prouver l'équivalence est le raisonnement par contraposée.

Théorème 1 *Lemme (Raisonnement par contraposée) :*
On a en général $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
Par extension, on a aussi $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Leftrightarrow \neg A)$.

On va montrer qu'une trace qui ne satisfait pas $F(Gp \vee Gq)$ ne peut pas non plus satisfaire $FGp \vee FGq$.

On explicite dans un premier temps :
(Proposition de gauche)
soit (par application de F) $\exists j \geq 0 \mid t, j \models (Gp \vee Gq)$
soit (par application de $\vee$) $\exists j \geq 0 \mid t, j \models Gp \vee t, j \models Gq$
soit (par application des G) $\exists j \geq 0 \mid \forall k \geq j,\ t, k \models p \vee \forall k' \geq j,\ t, k' \models q$

(Proposition de droite)
soit (par application des F et de $\vee$) $(\exists j \geq 0 \mid t, j \models Gp) \vee (\exists j' \geq 0 \mid t, j' \models Gq)$
soit (par application des G) $(\exists j \geq 0 \mid \forall k \geq j,\ t, k \models p) \vee (\exists j' \geq 0 \mid \forall k' \geq j',\ t, k' \models q)$

On nie maintenant les deux propositions :

$\neg$(Proposition de gauche)
soit (négation de la logique de premier ordre) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \not\models p) \wedge (\exists k' \geq j \mid t, k' \not\models q)$
soit (distribution de $\forall$) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \not\models p) \wedge (\forall j \geq 0, \exists k' \geq j \mid t, k' \not\models q)$

$\neg$(Proposition de droite)
soit (négation de la logique de premier ordre) $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \not\models p) \wedge (\forall j' \geq 0, \exists k' \geq j',\ t, k' \not\models q)$

On peut librement remplacer j' par j dans la dernière expression (variable muette).

On a donc bien l'équivalence entre les négations.
Par contraposée, on a aussi l'équivalence entre les propositions elles-même.

e

$GF(p \wedge q)$ et $GFp \wedge GFq$

On explicite (sans faire les étapes, on commence à avoir l'habitude) :

(Proposition de gauche)
soit $\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p \wedge t, k \models q$

(Proposition de droite)
soit $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p) \wedge (\forall j' \geq 0, \exists k' \geq j' \mid t, k' \models p)$

La proposition de gauche implique celle de droite : s'il existe un k tel que t, k satisfasse p et q, alors il existe k' tel que t, k' satisfasse p (k) et il existe k'' tel que t, k'' satisfasse q (k aussi).

Par contre, la réciproque n'est pas vraie. Il peut exister un k' tel que t, k' satisfasse p et un k'' tel que t, k'' satisfasse q, sans qu'il n'existe jamais un k tel que t, k satisfasse p et q en même temps. En effet, on n'a pas $k' = k''$ en général.

Il suffit de trouver une trace tel que $k' \neq k''$ systématiquement pour trouver un contre-exemple.

Par exemple, $(\{p\}\{q\})^\omega$

On a donc $GF(p \wedge q) \Rightarrow GFp \wedge GFq$, mais $GFp \wedge GFq \not\Rightarrow GF(p \wedge q)$

f

$GF(p \vee q)$ et $GFp \vee GFq$

On explicite :

(Proposition de gauche)
soit $\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p \vee t, k \models q$

(Proposition de droite)
soit $(\forall j \geq 0, \exists k \geq j \mid t, k \models p) \vee (\forall j' \geq 0, \exists k' \geq j' \mid t, k' \models p)$

Une manière plus facile de montrer l'équivalence est le raisonnement par contraposée :

$\neg$(Proposition de gauche)
soit $\exists j \geq 0 \mid \forall k \geq j,\ t, k \not\models p \wedge t, k \not\models q$

$\neg$(Proposition de droite)
soit $(\exists j' \geq 0 \mid \forall k' \geq j',\ t, k' \not\models p) \wedge (\exists j'' \geq 0 \mid \forall k'' \geq j'',\ t, k'' \not\models q)$

On a $\neg$(Proposition de gauche) $\Rightarrow$ $\neg$(Proposition de droite) :
En effet, s'il existe un j tel que pour tous les moments suivant j on a p et q non satisfaits, alors il existe un j' tel que pour tous les moments suivant j' on a p non satisfait (en effet, on a j), et il existe un j'' tel que pour tous les moments suivant j'' on a q non satisfait (en effet, on a j).

On a aussi $\neg$(Proposition de droite) $\Rightarrow$ $\neg$(Proposition de gauche)
En effet, s'il existe un j' tel que pour tous les moments suivant j' on a p non satisfait, et un j'' tel que pour tous les moments suivant j'' on a q non satisfait, alors on a bien un j ($max(j', j'')$) tel que pour tous les moments suivant j on a p et q non satisfaits.

On a donc $\neg$(Proposition de droite) $\Leftrightarrow$ $\neg$(Proposition de gauche).

Par contraposée, on a donc (Proposition de droite) $\Leftrightarrow$ (Proposition de gauche).

g

$FG(p \wedge q)$ et $FGp \wedge FGq$

Cette équivalence est vraie pour la même raison que (f) était vraie (à une négation près sur les propositions atomiques, c'est le dual de (f)).

On explicite :

(Proposition de gauche)
soit $\exists j \geq 0 \mid \forall k \geq j,\ t, k \models p \wedge t, k \models q$

(Proposition de droite)
soit $(\exists j' \geq 0 \mid \forall k' \geq j',\ t, k' \models p) \wedge (\exists j'' \geq 0 \mid \forall k'' \geq j'',\ t, k'' \models q)$

On a (Proposition de gauche) $\Rightarrow$ (Proposition de droite) :
En effet, s'il existe un j tel que pour tous les moments suivant j on a p et q satisfaits, alors il existe un j' tel que pour tous les moments suivant j' on a p satisfait (en effet, on a j), et il existe un j'' tel que pour tous les moments suivant j'' on a q satisfait (en effet, on a j).

On a aussi (Proposition de droite) $\Rightarrow$ (Proposition de gauche)
En effet, s'il existe un j' tel que pour tous les moments suivant j' on a p satisfait, et un j'' tel que pour tous les moments suivant j'' on a q satisfait, alors on a bien un j ($max(j', j'')$) tel que pour tous les moments suivant j on a p et q satisfaits.

On a donc (Proposition de droite) $\Leftrightarrow$ (Proposition de gauche).

h

$FG(p \vee q)$ et $FGp \vee FGq$

Cette équivalence est fausse pour la même raison que (e) était fausse (à une négation près sur les propositions atomiques, c'est le dual de (e)).

D'ailleurs, le même contre-exemple fonctionne :

$(\{p\}\{q\})^\omega$

On a donc $FGp \vee FGq \Rightarrow FG(p \vee q)$, mais $FG(p \vee q) \not\Rightarrow FGp \vee FGq$.

Exercice 4

a et b

(1) est faux : on n'a pas p vrai tout le temps à partir de 0. En effet $t, 0 \not\models p$. Et on n'a pas non plus $\neg p$ tout le temps à partir de 0 : en effet $t, 2 \not\models \neg p$.

Les traces $(\{p\})^\omega$ et $(\{q\})^\omega$ satisfont (1).

(2) est vrai : on a bien un moment où p devient vrai ($t, 2 \models p$) et un moment où $\neg p$ devient vrai ($t, 0 \models p$)

On aurait aussi pu voir que (2) $\equiv \neg$(1), et en déduire la satisfaction de (2) par le préfixe de trace donné.

La trace donnée satisfait (2), ainsi que $(\{p\}\{q\})^\omega$.

(3) est faux : il n'est aucun moment où p est vrai et q est vrai au moment suivant.

Les traces $(\{p\}\{q\})^\omega$ et $(\{p\}\{q\}\emptyset)^\omega$ satisfont (3).

(4) est vrai : on a bien un moment où p devient vrai ($t, 2 \models p$) et on a bien $t, 1 \models q$.

La trace donnée satisfait (4), ainsi que $(\{p\}\{q\})^\omega$.

(5) Ici on rappelle que démontrer une conséquence (en logique, "conséquence" désigne la flèche, à ne pas confondre avec "conséquent", qui désigne la proposition à droite de la

flèche) consiste à démontrer :
$\neg$ (condition) $\vee$ (conséquent)

Soit la condition est fausse, alors la conséquence est immédiatement vraie.
Soit la condition est vraie, alors la conséquence est vraie sssi le conséquent l'est aussi.

Ici la condition est fausse : on n'a pas $p \Rightarrow q$ pour tous les moments après 0. En particulier, on a $t, 2 \models p$ et $t, 2 \not\models q$.

Donc la conséquence est vraie.

La trace donnée satisfait (5), ainsi que $(\{p\}\{q\})^\omega$.