

# TD 1 : LTL

## Exercice 1

Exprimez chacune des phrases ci-dessous en une formule LTL (les propositions atomiques existantes pour chaque cas sont données entre parenthèses). À chaque fois, donnez une trace satisfaisant la formule que vous avez écrite, et une trace la violant.

- (a) La propriété  $p$  arrive un jour ( $AP = \{p\}$ )
- (b) La propriété  $p$  est toujours vraie ( $AP = \{p\}$ )
- (c) La propriété  $p$  est vraie à l'instant 1 ( $AP = \{p\}$ )
- (d) La propriété  $p$  est stable (si elle arrive, elle demeure) ( $AP = \{p\}$ )
- (e) Toute requête sera un jour satisfaite ( $AP = \{\text{request}, \text{grant}\}$ ).
- (f) Toute requête sera un jour satisfaite et aucune requête supplémentaire n'arrive avant la satisfaction de cette requête ( $AP = \{\text{request}, \text{grant}\}$ )
- (g) À chaque fois que de l'argent a été retiré, le bon code pin a été fourni auparavant ( $AP : \{\text{cash\_withdraw}, \text{pin\_ok}\}$ ).
- (h) Deux processus ne sont jamais en section critique en même temps ( $AP = \{\text{crit1}, \text{crit2}\}$ ).
- (i) À chaque fois qu'un processus demande l'accès à la section critique, il l'obtiendra un jour dans le futur ( $AP = \{\text{ask\_crit}, \text{acc\_crit}\}$ ).
- (j) Une fois que le feu est vert, il ne peut pas devenir rouge immédiatement après ( $AP = \{\text{red}, \text{green}\}$ ).
- (k) À chaque fois que le feu est rouge, il deviendra vert un jour dans le futur ( $AP = \{\text{red}, \text{green}\}$ ).
- (l) Lorsque le feu est vert, il deviendra rouge après avoir été orange ( $AP = \{\text{red}, \text{green}, \text{orange}\}$ ).
- (m) Lorsque le feu est vert, il ne deviendra rouge qu'après avoir été orange ( $AP = \{\text{red}, \text{green}, \text{orange}\}$ ).

## Exercice 2

On considère le préfixe de trace suivant :

$$\emptyset, \{p\}, \{p, q\}, \{q\}, \{p\}, \emptyset, \{p, q\}$$

Déterminez, pour chaque position de ce préfixe de trace, si les formules suivantes sont vérifiées ou non :

- (a)  $p \wedge q$
- (b)  $F(p \wedge q)$
- (c)  $p \cup q$
- (d)  $F p \wedge F q$
- (e)  $G(p \vee q)$

## Exercice 3

Les équivalences suivantes sont-elles vraies? Si oui, démontrez-le, sinon donnez une trace contre-exemple.

- (a)  $G(F p \wedge F q)$  et  $GF p \wedge GF q$
- (b)  $F(G p \wedge G q)$  et  $FG p \wedge FG q$
- (c)  $G(F p \vee F q)$  et  $GF p \vee GF q$ .
- (d)  $F(G p \vee G q)$  et  $FG p \vee FG q$ .

- (e)  $\text{GF}(p \wedge q)$  et  $\text{GF } p \wedge \text{GF } q$
- (f)  $\text{GF}(p \vee q)$  et  $\text{GF } p \vee \text{GF } q$
- (g)  $\text{FG}(p \wedge q)$  et  $\text{FG } p \wedge \text{FG } q$
- (h)  $\text{FG}(p \vee q)$  et  $\text{FG } p \vee \text{FG } q$

#### Exercice 4

On considère le préfixe de trace suivant :

$$\{q\}\{q\}\{p\}\{p\}\{r\}\{q, r\}q\{p\}\{p\}\{r\}$$

- (a) Déterminer quelles sont les formules qui sont vraies sur le préfixe de trace ci-dessus :
  1.  $\text{G } p \vee \text{G } \neg p$
  2.  $\text{F } p \wedge \text{F } \neg p$
  3.  $\text{F}(p \wedge \text{X } q)$
  4.  $\text{F } p \wedge \text{X } q$
  5.  $(\text{G}(p \rightarrow q)) \rightarrow \text{G } r$
- (b) Pour chacune des traces ci dessus, proposez deux traces modèles de cette formule.

#### Exercice 5

On introduit un nouvel opérateur,  $\text{B}$ , pour *Before*, défini ainsi :  $t, i \models \varphi \text{B} \psi$  ssi pour tout  $j \geq i$  tel que  $t, j \models \psi$ , il existe  $i \leq k < j$  tel que  $t, k \models \varphi$ .

- (a) Donnez une trace (ou un préfixe de trace) qui satisfait  $p \text{B} q$ .
- (b) Donnez une trace  $t$  (ou un préfixe de trace) tel qu'il existe  $i \geq 0$  tel que  $t, i \models q$  mais qui ne satisfait pas  $p \text{B} q$ .
- (c) Exprimez une formule équivalente à  $\varphi \text{B} \psi$ , en n'utilisant que des opérateurs LTL définis en cours. Prouvez que les deux formules sont bien équivalentes.

#### Exercice 6

- (\*) Prouvez la loi d'expansion  $\varphi_1 \text{R } \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge (\varphi_1 \vee \text{X}(\varphi_1 \text{R } \varphi_2))$