Exercícios de Lógica Proposicional

Prof. Leonardo Cisneiros

31 de julho de 2010

1 Fila

1.1 Tabelas-verdade

Negação

ϕ	$\neg\phi$
V	F
F	V

Implicação

ϕ	$\rightarrow$	ψ
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Disjunção inclusiva

ϕ	$\vee$	ψ
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Conjunção

ϕ	$\wedge$	ψ
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

Equivalência

ϕ	$\leftrightarrow$	ψ
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

1.2 Regras de Inferência

1.2.1 Regras Básicas

As regras mais básicas relativas a um operador são as que dizem o que garante a afirmação de uma frase com aquele operador como operador principal (regras de introdução) e as que dizem o que pode ser inferido de uma frase com aquele operador como operador principal (regras de eliminação).

Introdução da Implicação

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow I$$

Modus Ponens *ou* Eliminação da Implicação

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \phi}{\psi} \to E$$

Introdução da Conjunção

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I$$

Eliminação da Conjunção

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E$$

Introdução da Disjunção

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee I$$

Introdução da Negação[1]

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\phi} \neg I$$

Introdução da Equivalência

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \psi \to \phi}{\phi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I$$

Eliminação da Equivalência[2]

$$\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\phi \to \psi} \leftrightarrow E$$

1.2.2 Regras Auxiliares

Modus Tollens

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi} MT$$

Silogismo Disjuntivo

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \neg\phi}{\psi} SD$$

Silogismo Hipotético

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \psi \to \sigma}{\phi \to \sigma} SH$$

Substituição de Equivalentes[3]

$$\frac{\phi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\psi} Eq$$

1.2.3 Equivalências

As equivalências da lista seguinte podem ser usadas como axiomas a fim de simplificar as provas. Para simplificar bastante mesmo, eu aceitarei a inferência imediata entre fórmulas equivalentes quando for assinalada a regra utilizada. Ver exemplo 2.2.1 abaixo.

De Morgan (DM) $\neg\phi \wedge \psi \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$

De Morgan (DM) $\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)$

Comutação (Com) $(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \phi)$

Comutação (Com) $(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \phi)$

Associação (Assoc) $(\phi \vee (\psi \vee \sigma)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \vee \sigma)$

Associação (Assoc) $(\phi \vee (\psi \wedge \sigma)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee \sigma)$

Distribuição (Dist) $(\phi \wedge (\psi \vee \sigma)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma))$

Distribuição (Dist) $(\phi \vee (\psi \wedge \sigma)) \leftrightarrow$

[1] O símbolo $\bot$ representa uma contradição, um absurdo. A regra diz que se de uma hipótese você é capaz de derivar uma contradição, então você pode concluir a negação dessa hipótese. Essa contradição pode ser uma contradição absoluta, mas também uma contradição com uma premissa dada. Um exemplo de uso dessa regra é a justificação da regra do *modus tollens* – $\{\phi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\phi$ – a partir da introdução da negação e da introdução da implicação:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \qquad [\phi]^1}{\psi} \qquad \neg\psi}{\bot}}{\neg\phi}$$

[2] Você pode derivar qualquer uma das implicações. Aqui só aparece uma delas, por causa do espaço

[3] Só um atalho para a inferência completa que seria:

$$\frac{\dfrac{\phi \leftrightarrow \psi}{\phi \to \psi} \leftrightarrow E \qquad \phi}{\psi} \to E$$

$((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma))$

Dupla Negação (DN) $\phi \leftrightarrow \neg\neg\phi$

Transposição (Transp) $(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$

Impl. Material (IM) $(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$

Tautologia (Taut) $\phi \leftrightarrow (\phi \vee \phi)$

Tautologia (Taut) $\phi \leftrightarrow (\phi \wedge \phi)$

2 Exercícios

2.1 Tabelas Verdade

Exercício 2.1.1. *Faça a tabela verdade dos seguintes conectivos:*

i. *Disjunção Exclusiva*

ii. *Nem ϕ, nem ψ*

Exercício 2.1.2. *Com a negação e qualquer conectivo binário é possível definir os demais conectivos. Por exemplo, a implicação $\phi \rightarrow \psi$ pode ser definida em termos da conjunção como $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$, pois ela significa que o antecedente não pode ocorrer sem o consequente. A tabela verdade das duas fórmulas é exatamente a mesma. Sendo assim, reescreva as seguintes fórmulas usando somente os conectivos indicados mais a negação.*

i. $\phi \rightarrow \psi$*, disjunção*

ii. $\neg(\phi \vee \neg\neg\psi)$*, implicação*

iii. $\phi \rightarrow \psi$*, implicação*

iv. $\phi \leftrightarrow \neg\psi$*, disjunção*

Exercício 2.1.3. *Faça a tabela verdade das seguintes fórmulas e determine se elas são tautologias, contradições ou frases contingentes*

Exemplo 2.1.1. *Exemplo com 3 proposições, para mostrar que a fórmula $(\phi \vee (\psi \vee \sigma)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \vee \sigma)$ é uma tautologia:*

$(\phi$	$\vee$	$(\psi$	$\vee$	$\sigma))$	$\leftrightarrow$	$((\phi$	$\vee$	$\psi)$	$\vee$	$\sigma)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F

i. $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

ii. $(\phi \rightarrow \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi$

iii. $\neg(\phi \rightarrow \neg\phi)$

iv. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \sigma)$

v. $(\phi \vee \psi) \rightarrow \neg(\phi \wedge \psi)$

vi. $((\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \phi$

vii. $((\phi \vee \psi) \wedge \psi) \rightarrow \neg\phi$

viii. $((\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$

ix. $\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)$

x. $((\phi \wedge \psi) \vee \sigma) \leftrightarrow (\sigma \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$

xi. $((\phi \wedge \psi) \rightarrow \sigma) \leftrightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$

xii. $((\phi \rightarrow \sigma) \wedge (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \sigma)$

Um método mais rápido para testar se uma determinada fórmula é uma tautologia ou não é fazer a tabela-verdade de trás pra frente tentando determinar se há uma combinação de valores que torna a fórmula falsa, quer dizer, ao invés de atribuir os valores das partes e ir calculando o valor do todo, como na maneira comum de fazer as tabelas-verdade, atribuímos o valor F para a fórmula toda e tentamos determinar que valores as partes teriam. Se for possível determinar o valor de todas as partes, a fórmula é falsificável, isto é, existe uma combinação de valores que a torna falsa e, portanto, ela não é uma tautologia. Se, durante o processo, acontece de atribuirmos os valores V e F para uma mesma fórmula, incorremos em contradição e se nos contradizemos ao tentar falsificar uma fórmula isso significa que a fórmula é uma verdade lógica.

Exemplo 2.1.2. *Testando uma fórmula contingente:* $(\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \wedge \phi)$

Primeiro Passo *Atribuímos F à fórmula toda. Como o operador principal é uma implicação e só há um caso em que a implicação é falsa, sabemos que o antecedente é V e o consequente, F.*

Segundo Passo *Procuramos determinar se há valores de ϕ e ψ tais que $\phi \vee \psi$ seja verdadeira e $\psi \wedge \phi$ seja falsa. A primeira fórmula é verdadeira em três casos: $\langle V, V\rangle$, $\langle V, F\rangle$, $\langle F, V\rangle$.*[4] *A segunda fórmula é falsa em três casos: $\langle V, F\rangle$, $\langle F, V\rangle$, $\langle F, F\rangle$*

Terceiro Passo *Há duas combinações de valores – $\langle V, F\rangle$, $\langle F, V\rangle$ – que tornam a primeira fórmula verdadeira e a segunda, falsa, tornando o todo falso. Portanto a frase é falsificável e, portanto,* não *é uma tautologia*

Exemplo 2.1.3. *Testando uma fórmula tautológica:* $(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)$

Como acima. Para a fórmula toda ser falsa $(\phi \wedge \psi)$ deve ser verdadeira e $(\psi \vee \phi)$, falsa. Há só um caso em que $(\phi \wedge \psi)$ é verdadeira: quando ϕ e ψ são verdadeiras. E também só há um caso em que $(\psi \vee \phi)$ é falsa: quando ambas os disjuntos são falsos. Ora, nota-se aí claramente que para a frase inteira ser falsa seria preciso que tanto ϕ quanto ψ fossem verdadeiras e falsas ao mesmo tempo, o que não é possível. Logo, não é possível a frase inteira ser falsa, donde se segue que ela é uma tautologia.

Exercício 2.1.4. *Pratique esse método com as fórmulas do exercício 2.1.3*

Exercício 2.1.5. *Use esse método para testar se as fórmulas abaixo são uma tautologia ou não:*

[4] Esses símbolos são pares ordenados dos valores das fórmulas. No caso, o primeiro item é o valor de ϕ e o segundo o valor de ψ.

i. $(\phi \land (\psi \to \phi)) \to \psi$

ii. $(\phi \lor \psi) \to (\sigma \to \sigma)$

iii. $(\phi \land (\psi \lor \neg\phi)$

Exercício 2.1.6. *Seguindo a lógica do método acima, qual seria o método para mostrar que uma determinada fórmula é uma contradição?*

2.2 Demonstração

O símbolo $\vdash$ representa a relação de implicação entre premissas e conclusão ou, em outras palavras, que a conclusão, no lado direito do símbolo, pode ser demonstrada a partir das premissas, no lado esquerdo do símbolo, mediante a aplicação sucessiva das regras de inferência expostas acima. Assim, por exemplo, a expressão $\{p, q\} \vdash p \land q$ expressa a idéia de que a fórmula $p \land q$ é derivável do conjunto de premissas $\{p, q\}$ da mesma forma que a expressão $\{p \to q, p\} \vdash q$ diz que as premissas $\{p \to q, p\}$ permitem inferir a fórmula q, o que é feito por meio da aplicação da regra do *modus ponens*. Quando o símbolo é usado sem nenhum conjunto de premissas do lado esquerdo, isso significa que a fórmula é derivável de um conjunto vazio de premissas, ou seja, que ela é demonstrável mesmo sem assumir como dada nenhuma outra frase e, portanto, é uma verdade lógica. Por exemplo, $\vdash p \to p \lor q$. É interessante notar que para deduzir essa fórmula é preciso assumir p como hipótese, para então aplicar a regra da introdução da disjunção e, em seguida, a regra da introdução da implicação e "descartar" a hipótese:

$$\dfrac{\dfrac{[p]^1}{p \lor q}\,{\scriptstyle I\lor}}{p \to p \lor q}\,{\scriptstyle I\to\text{, descarte 1}}$$

Quando as hipóteses são descartadas (incorporadas a uma implicação), elas não constam no conjunto de premissas; quando não são descartadas, têm que constar.

Exemplo 2.2.1. *Provar que $\{(\phi \lor \neg\psi) \lor \sigma, \neg\phi \lor (\psi \land \neg\phi)\} \vdash \psi \to \sigma$. Aplicando a regra da distribuição à segunda premissa, obtemos $(\neg\phi \lor \psi) \land (\neg\phi \lor \neg\phi)$. Se temos uma conjunção, podemos inferir uma parte dela: $\neg\phi \lor \neg\phi$. Ora, isso é equivalente a $\neg\phi$ somente. Aplicando a regra da associação à primeira premissa obtemos $\phi \lor (\neg\psi \lor \sigma)$. Aplicando a regra do silogismo disjuntivo a essa conclusão e à conclusão anterior – $\neg\phi$ – obtemos $\neg\psi \lor \sigma$. E usando a equivalência da Implicação Material, obtemos $\psi \to \sigma$, que é o que queríamos demonstrar.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \lor (\psi \land \neg\phi)}{(\neg\phi \lor \psi) \land (\neg\phi \lor \neg\phi)}\,{\scriptstyle Dist}}{\neg\phi \lor \neg\phi}\,{\scriptstyle \land E}}{\neg\phi}\,{\scriptstyle Taut} \qquad \dfrac{(\phi \lor \neg\psi) \lor \sigma}{\phi \lor (\neg\psi \lor \sigma)}\,{\scriptstyle Assoc}}{\neg\psi \lor \sigma}\,{\scriptstyle SD}}{\psi \to \sigma}\,{\scriptstyle IM}$$

Exercício 2.2.1. *Usando as regras de inferência e as equivalências, demonstre as seguintes implicações. Lembre-se: quando o conjunto de premissas for vazio, todas as hipóteses devem ser descartadas, isto é, transformadas em antecedentes de uma* *implicação. Quando o conjunto de premissas não for vazio, as mesmas podem ser usadas sem descarte*

i. $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

ii. $\{p \to \neg q, q \vee r\} \vdash p \to r$

iii. $\{\neg\phi \vee \psi, \phi\} \vdash \psi$

iv. $\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$

v. $\vdash (\phi \wedge \psi) \to \neg(\phi \to \neg\psi)$

vi. $\neg(\phi \wedge \neg\psi), \phi \vdash \psi$

vii. $\{a \to b, b \to c, c \to a, a \to \neg a\} \vdash \neg a \wedge \neg c$

viii. $\{(\epsilon \vee \gamma) \to (\delta \wedge (\beta \wedge \lambda)), \gamma\} \vdash \delta \wedge \beta$

Formalize os seguintes argumentos, isto é, construa uma prova formal deles

Exemplo: Ou o gerente não notou a mudança, ou ele a aprova. Ora, ele notou a mudança muito bem. Portanto, ele deve aprová-la.

Primeira premissa: *Ou o gerente não notou a mudança, ou ele a aprova.*– $\neg\phi \vee \psi$

Segunda premissa: *Ele notou a mudança* – ϕ

Conclusão: *Ele a aprova* – ψ

Prova:[5]

$$\dfrac{\dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\,{\scriptstyle \phi \leftrightarrow \neg\neg\phi} \qquad \neg\phi \vee \psi}{\psi}\,{\scriptstyle \text{Sil.Disj.}}$$

i. O oxigênio do tubo ou combinou-se com o filamento para formar óxido ou evaporou-se completamente. O oxigênio do tubo não pode ter-se evaporado completamente. Portanto, o oxigênio do tubo combinou-se com o filamento.

ii. Se um estadista compreende que suas opiniões anteriores eram erradas e não altera sua política, torna-se culpado de enganar seu povo; se altera a política, expõe-se a que o acusem de vira-casaca. Obviamente, das duas uma: ou ela muda de política, ou não muda. Portanto, resulta que ou ele é culpado de enganar seu povo ou expõe-se à acusação de vira-casaca.

iii. Se a cidadania romana tivesse sido uma garantia das liberdades civis, os cidadãos romanos teriam gozado de liberdade religiosa. Se os cidadãos romanos tivessem gozado de liberdade religiosa, então, os primeiros cristãos não teriam sido perseguidos. Mas os primeiros cristão foram perseguidos. Portanto, a cidadania romana não pode ter sido uma garantia de direitos civis.

iv. Se a vítima tinha dinheiro nos bolsos, então o motivo do crime não foi roubo. Mas o motivo tem que ter sido roubo ou vingança. Portanto, o motivo do crime deve ter sido vingança.

[5]Se parecer estranho a alguém a aplicação do silogismo disjuntivo note-se que $\neg\neg\phi$ é a negação de $\neg\phi$ e, portanto, no fundo a forma do silogismo disjuntivo $\{\neg\phi \vee \psi, \neg\neg\phi\} \vdash \psi$ é a mesma do silogismo $\{\phi \vee \psi, \neg\phi\} \vdash \psi$

v. Se Jones receber a mensagem, ele virá, desde que esteja interessado. Embora não tenha vindo, ainda está interessado. Portanto, não recebeu a mensagem.

Exercício 2.2.2. *Os seguintes argumentos estão incompletos, no sentido de que sua validade depende de premissas implícitas. Formalize os argumentos e indique que premissas são essas*[6]*:*

i. Se o caixa tivesse apertado o botão de alarme, o cofre forte teria se fechado e a polícia teria sido avisada imediatamente. Se a polícia tivesse sido avisada logo, teria pego os assaltantes. Por isso, o caixa não deve ter apertado o alarme.

ii. Obviamente só há duas alternativas: ou o criminoso é estranho à família e veio de fora da residência ou ele já estava dentro da casa e, portanto, alguém de confiança da família está envolvido. Mas a porta não foi arrombada, donde se segue que se o assaltante veio de fora então contou com a ajuda de alguém de dentro da casa. Portanto, de um jeito ou de outro, alguém de confiança da casa está envolvido.

iii. Se eu pagar ao alfaiate, ficarei sem dinheiro, mas preciso de dinheiro para levar minha noiva ao baile e se ela não for ao baile vai ficar muito chateada comigo. Mas, sem o terno não posso ir ao baile. Portanto, de um jeito ou de outro minha noiva irá ficar chateada comigo!

iv. Deus não existe, porque a existência do Mal é incompatível com a existência de um ser onisciente, onipotente e bondoso.

2.3 Validade Semântica

Nós vimos acima a aplicação de uma noção de demonstração que não recorre às noções de verdade ou falsidade: uma fórmula é derivável de outra(s) segundo essa concepção se ela pode ser obtida dessa(s) outra(s) a partir da aplicação das regras de inferência. Mas também temos uma noção semântica de consequência lógica, a que aprendemos no começo do curso: uma fórmula se segue de um conjunto de premissas se não pode ser falsa quando estas são verdadeiras. Assim, temos um método simples para testar a validade de um argumento é testar se é possível ocorrer de as premissas serem verdadeiras e a conclusão, falsa. Em termos da lógica proposicional isso significa: o argumento será *inválido* se existir uma atribuição de valores-verdade às frases atômicas que torne as premissas verdadeiras e a conclusão, falsa. E, inversamente, será *válido* se não for possível atribuir um valor-verdade para cada frase atômica sem entrar em contradição. Quer dizer, quando pegamos um argumento válido e tentamos encontrar valores de verdade que tornam as premissas verdadeiras e a conclusão falsa acabamos tendo que atribuir valores-verdade contrários a uma mesma frase. A técnica é parecida com a utilizada para testar se uma frase é uma tautologia ou não (ver exemplos 2.1.2 e 2.1.3), só que agora fazemos com várias frases e seus componentes.

Exemplo 2.3.1. *Mostrar que o argumento* $\{A \to B, C \to D, A \vee D\} \vdash B \vee C$ *é inválido.*

[6] Você pode forçar um pouco a sinonímia entre as frases a fim de tornar os argumentos mais simples, mas também não exagere

Se o argumento é inválido é possível encontrar valores de A, B, C e D tais que as três premissas – $A \to B, C \to D, A \vee D$ – sejam verdadeiras e a conclusão – $B \vee C$ – falsa. Raciocinemos. Se a conclusão $B \vee C$ for falsa, tanto B quanto C são falsas, pois esse é o único caso em que a disjunção é falsa. Se B é falsa, $A \to B$ só pode ser verdadeira se A for falsa. E se C é falsa, então $C \to D$ será verdadeira, não importando o valor-verdade de D. Por fim, se A é falsa, então, para que $A \vee D$ seja verdadeira, é preciso que D seja verdadeira. Com isso definimos valores para cada frase atômica tais que as premissas se tornam verdadeiras e a conclusão, falsa, mostrando, assim, que o argumento é inválido. Colocando o exemplo numa tabela:

A	B	C	D	$A \to B$	$C \to D$	$A \vee D$	$B \vee C$
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*

Exemplo 2.3.2. *Mostrar que o argumento $\{(\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta), \neg\gamma\} \vdash \neg\alpha$ é válido.*

Se o argumento é válido, não conseguiremos evitar a contradição ao tentarmos determinar valores de α, β, γ e δ tais que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão, falsa. Raciocinemos. Se a conclusão $\neg\alpha$ é falsa, então α é verdadeira. Se α é verdadeira, então $\alpha \vee \beta$ é verdadeira e se é assim, a premissa $(\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)$ só pode ser toda verdadeira se $\gamma \wedge \delta$ também for, porque esse é o único caso em que uma implicação com antecedente verdadeiro é verdadeira. Se $\gamma \wedge \delta$ é verdadeira, então cada parte da conjunção é verdadeira. Assim γ é verdadeira. Porém, se a segunda premissa – $\neg\gamma$ – também é verdadeira, γ teria que ser falsa! Assim, para que as duas premissas fossem verdadeiras e a conclusão, falsa, seria preciso que γ fosse ao mesm tempo verdadeira e falsa, o que não pode ocorrer. Portanto, não é possível afirmar as premissas (atribuir valor V a elas) e negar a conclusão (atribuir valor F a ela) sem cair em contradição. Logo, o argumento é válido. Fazendo a tabela:

α	β	γ	δ	$\alpha \vee \beta$	$\gamma \wedge \delta$	$(\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)$	$\neg\gamma$	$\neg\alpha$
V	*V/F*	**X**	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*

Marque com um X a contradição que você encontrar. Basta encontrar uma contradição para que se mostre a impossibilidade de afirmar as premissas e negar a conclusão.

Exercício 2.3.1. *Pratique o método acima provando a validade dos argumentos do exercício 2.2.1.*

Exercício 2.3.2. *Usando o método acima, demonstre a validade ou invalidade dos argumentos abaixo:*

i. $\{\phi \vee \neg\psi, \neg(\neg\sigma \wedge \tau), \neg(\neg\phi \wedge \neg\tau)\} \vdash \neg\psi \to \sigma$

ii. $\{M \to (N \vee O), N \to (P \vee Q), Q \to R, \neg(R \vee P)\} \vdash \neg M$

iii. $\{y \to z,\ z \to (y \to (r \vee s)),\ r \leftrightarrow s,\ \neg(r \wedge s)\} \vdash \neg y$

iv. $\{(D \wedge E) \to F,\ (D \to F) \to G\} \vdash E \to G$

v. $\{\neg(e \wedge f),\ (\neg e \wedge \neg f) \to (g \wedge h),\ h \to g\} \vdash g$

Exercício 2.3.3. *O objetivo do curso de lógica é chegar gradualmente na análise de argumentos reais, que são muito mais enganosos do que os exemplos mais domesticados dos exercícios acima. Os casos abaixo envolvem várias cascas de banana. Responda às perguntas e justifique suas respostas usando as técnicas da lógica. No caso de argumentos inválidos, mostre um contraexemplo, um argumento da mesma forma, que siga o mesmo raciocínio, mas que tenha premissas verdadeiras e conclusão, falsa.*

i. Se a pena de morte detivesse assassinatos, ela seria justificada. Mas dado que ela não detém tais crimes, então se segue que ela não é justificada?

ii. Suponha que é verdadeiro que se Zezinho estudar filosofia hoje à noite, ele vai reprovar o teste de matemática amanhã e se ele, ao contrário, estudar matemática, ele irá reprovar em seu teste de filosofia. Suponha também que ele não pode estudar para os dois testes. Disso se segue que Zezinho irá reprovar em pelo menos um dos testes amanhã?

iii. Minha colher está seca e minha colher estaria molhada se eu tivesse mexido meu café. E eu não teria mexido meu café a menos que eu tivesse posto açúcar nele. Então, eu não devo ter colocado açúcar no café, certo?

iv. Maria diz que não vai pra cama com João a menos que ele se casem. João concorda em se casar, mas, na lua de mel, Maria ainda se recusa a ir para a cama com ele. Será que ela quebrou sua promessa?

v. Como sabemos, esferas projetam sombras curvas e a Terra projeta uma sombra curva sobre a Lua durante os eclipses lunares. Isto prova que a Terra é esférica?

vi. O presidente da IBM certamente é um homem influente. No entanto, ele não conseguiu matricular sua filha na Universidade Whatsamatta. Portanto, é falso, como muita gente vem dizendo, que só pessoas com influência conseguem uma vaga na Whatsamatta para os seus filhos. Certo?

vii. Uma amiga sua diz "As notícias de hoje em dia só me deixam deprimida e é ruim ficar assim, portanto é ruim ficar assistindo notícias". O argumento dela é válido?

viii. Você ouve uma pessoa dizendo o seguinte: "Fulana é uma hipócrita: ela sempre diz que o aprendizado é mais importante que a nota, mas ontem passou o dia todo fazendo um exercício para nota extra que ela já sabia fazer e que não ia acrescentar em nada ao que ela já sabia!". A pessoa tem razão no seu juízo sobre Fulana?

ix. Alceu diz: "Os únicos que falam a verdade aqui somos eu e Catulo". Safo diz "Catulo é um mentiroso". Catulo replica: "Safo diz a verdade. Ou então é Alceu quem mente". Assumindo que quem mente, mente sempre e quem diz a verdade, diz a verdade sempre, que está mentindo e quem está falando a verdade?

x. Anaximandro diz "Não se deve confiar em Heráclito". Parmênides diz: "Anaximandro e Heráclito nunca mentem". Heráclito diz: "Parmênides disse a verdade". Quem mente e quem diz a verdade?

xi. No Senado Romano o seguinte debate acontece. Marco Antônio diz "Ou foi Cassius ou foi Brutus (ou ambos)". Cassius responde: "Não fui eu. Marco Antônio está mentindo". Brutus diz: "Também não fui eu". Só um dos três está falando a verdade. Então quem foi o culpado? E quem está falando a verdade?