GESTIÓN DE DOCUMENTOS
Universidad Tecnológica de Pereira
No. Radic: 03 10802 Serie Dtal: 2262-0301
Remite: LEONARDO CALDERON JARAMILLO
Destino: MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA
Fecha: 26/09/2022 08:24:12

22 de septiembre de 2022

Comité Curricular de la maestría en Enseñanza de la Matemática
Universidad Tecnológica de Pereira - UTP

Asunto: solicitud de asignación de jurados evaluadores

Por medio de la presente me permito solicitar la asignación de jurados de evaluadores para mi tesis de Maestría: **Desarrollo de una aplicación gráfica interactiva como ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana**.

De antemano agradezco la atención brindada.

Cordialmente

Leonardo C.

Leonardo Calderón Jaramillo
14.838.996

REMIGIO DELGADO

Vo.Bo.
M.Sc. Remigio Delgado Escobar

Desarrollo de una aplicación gráfica interactiva como ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana

LEONARDO CALDERÓN JARAMILLO

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Santiago de Cali

2022

Desarrollo de una aplicación gráfica interactiva como ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana

LEONARDO CALDERÓN JARAMILLO

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Director

M.Sc. Remigio Delgado Escobar

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Santiago de Cali

2022

Dedicatoria

A mi esposa Katerine Serna y mi hijo Isaac.

A mi padre Efraín, mi madre Beatriz y mi hermana Ana María.

Resumen

Con el presente proyecto muestran los resultados del diseño de una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, para lo cual se desarrolló una secuencia didáctica y una aplicación gráfica para dispositivos móviles. Está diseñada para que el profesor oriente su uso dentro y fuera del aula de clase durante el desarrollo de la asignatura. Así se presentan los conceptos desde el punto y línea hasta polígonos y superficies, usando un enfoque constructivista, donde la relación del usuario (estudiante) con gráficos interactivos permite desarrollar conceptos geométricos, previamente o en paralelo al estudio formal de estos.

La secuencia didáctica de conceptos y el diseño de los gráficos interactivos son propios del autor, buscando una mayor apropiación de los conceptos que tradicionalmente son presentados de forma estática y contemplativa versus un nuevo enfoque dinámico e interactivo.

A diferencia de otras alternativas actuales que se exploraron, algunas de las cuales solo brindan un listado de fórmulas o calculadoras de propiedades de objetos geométricos, otras solo muestran los conceptos con texto e imágenes estáticas u otras son tan abiertas e interactivas que se requiere de conocimientos previos del tema para poder usarse, la aplicación desarrollada permite interactuar con objetos geométricos de forma ordenada, muestra las diferentes características de cada objeto geométrico al cambiar sus propiedades y acompaña cada concepto con una fundamentación teórica de lo experimentado en cada caso.

Palabras clave: Geometría, aplicación móvil, ayuda didáctica, enfoque constructivista.

Abstract

This project shows the results of the design of a didactic aid with the pedagogical use of ICT for learning Euclidean Geometry, for which a didactic sequence and a graphic application for mobile devices were developed. It is designed for the teacher to guide its use inside and outside the classroom during the development of the subject. Thus, concepts are presented from point and line to polygons and surfaces, using a constructivist approach, where the relationship of the user (student) with interactive graphics allows the development of geometric concepts, previously or in parallel to their formal study.

The didactic sequence of concepts and the design of the interactive graphics are the author's own, seeking a greater appropriation of the concepts that are traditionally presented in a static and contemplative way versus a new dynamic and interactive approach.

Unlike other current alternatives that were explored, some of which only provide a list of formulas or calculators of properties of geometric objects, others only show the concepts with text and static images or others are so open and interactive that knowledge is required prior to the subject to be used, the developed application allows interaction with geometric objects in an orderly manner, shows the different characteristics of each geometric object when its properties change, and accompanies each concept with a theoretical foundation of what is experienced in each case.

Keywords: Geometry, mobile application, teaching aid, constructivist approach.

Tabla de Contenidos

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

Se desarrolló con este trabajo una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, basada en un modelo activo de enseñanza-aprendizaje y teniendo en cuenta que cada estudiante puede tener un estilo diferente de aprendizaje (Kolb, 1984), pero utilizando un enfoque moderno basado en la interacción a través del modelamiento (Abassian, Bostic, Bush, & Safi, 2019) y la experiencia (Duru, 2010), con el fin de mejorar el aprendizaje de los conceptos geométricos. Esto se hizo a través del diseño y desarrollo de una aplicación gráfica interactiva y una secuencia didáctica que pueden ser usadas por los profesores para la enseñanza de la Geometría tanto en el aula como por fuera de esta.

Objetivos

Objetivo general

Mejorar el aprendizaje de la Geometría Euclidiana mediante una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC.

Objetivos específicos

- Diseñar una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.
- Crear una secuencia didáctica para una aplicación de interacción gráfica con base en un modelo activo de enseñanza-aprendizaje.
- Desarrollar una aplicación gráfica para la interacción con objetos geométricos.

Antecedentes

Generales en Matemáticas

La Matemática es un constructo social que nace en la mente humana que se usa, se comunica y se enseña en múltiples formas, bien sea de forma abstracta por medio del lenguaje verbal o escrito, de forma simbólica o por medios gráficos, todos igualmente válidos y que han sido usados desde la antigüedad. Sin embargo, estos medios no pueden considerarse efectivos de forma individual, es decir, tratar de describir la curva de una función con palabras, nunca va a ser tan efectivo como hacer una gráfica que la represente. Por otra parte, tratar de resolver una ecuación diferencial con su representación se convierte en una aproximación y deberán usarse medios escritos y simbólicos para tratar de hallar su solución exacta. Es así como proponemos que estos tres tipos de lenguajes, escrito, simbólico y gráfico son complementarios e indispensables para el estudio de esta ciencia.

Se puede afirmar desde la experiencia, que generar un proceso de enseñanza-aprendizaje es más efectivo cuando se combinan estos tres lenguajes de una forma armoniosa para transmitir el concepto matemático abstracto de una mente a otra y que el estudiante pueda apropiarse de dicho concepto para su uso. Ahora bien, ¿Por qué decimos que el lenguaje gráfico es también indispensable? ¿Por qué es la visualización de los conceptos matemáticos también un aspecto fundamental de su enseñanza?

El ser humano es un ser visual por naturaleza porque nuestro sentido predominante en términos generales es la visión, ya que esta nos permite tener una mayor cantidad de información de nuestro entorno que cualquiera de los demás sentidos que poseemos. De esta forma se convierte en la entrada principal de acceso a nuestro cerebro y funciona de una forma muy especializada pudiendo procesar nuestro cerebro una gran cantidad de información con solo abrir los ojos durante un segundo, cosa que no ocurre con los demás sentidos. Es así como la visión es nuestro sentido más desarrollado y desafortunadamente no es el que más aprovechamos a la hora de enseñar. Este es el caso de un docente, por ejemplo, al tratar de explicar con palabras y un dibujo estático en un tablero un concepto como una figura tridimensional con sus caras, vistas, vértices y aristas donde para poder hacer alguna transformación de la figura necesitaría volver a dibujarla, lo cual toma un tiempo importante y por ello se puede preferir explicar con palabras un concepto que es principalmente visual.

Es en este punto donde la visualización de conceptos matemáticos toma un papel fundamental para poder realizar tareas como la expuesta de una forma más efectiva e interactiva, que permita al estudiante ver muchos más puntos de vista que los mencionados por el docente, donde se pueda comprobar si el concepto que tenemos es correcto o no. La visualización mediada especialmente por tecnologías de la información permite al docente mostrar sus ideas, pero lo más importante es que le permite al estudiante interactuar para que el aprendizaje sea una actividad de transmisión de información bidireccional, en donde el software utilizado brinde una retroalimentación de las ideas que el estudiante desea comprobar si son las deseadas.

Ahora, si nos detenemos a pensar un poco en el proceso de visualización como tal, este ha existido desde que realizamos los primeros dibujos en papiros como en los

Elementos de Euclides, ha evolucionado en la impresión de libros con gráficas y se ha perfeccionado con el uso de ilustraciones realizadas por computador, pero ha alcanzado su máxima expresión hasta el momento con el desarrollo de software que permite no solo la visualización sino también la interacción de la persona con un entorno gráfico en 2D, 3D simulado en 2D (pantallas) o 3D simulado en profundidad como la realidad aumentada o realidad virtual (AR/VR).

Y es precisamente esta característica de interacción la que ha arrinconado en las últimas dos décadas a muchos docentes que tal vez no nos hemos apropiado oportunamente de estas tecnologías desaprovechando sus beneficios. Y decimos arrinconado porque hoy en día un estudiante puede tener acceso en su teléfono celular a un sin fin de herramientas multimediales e interactivas que le hace ver la obsolescencia de tratar de explicar conceptos visuales en tablero. Pero es este fenómeno el que nos debe impulsar a realizar un cambio en nuestros paradigmas actuales, a usar y fomentar el uso de herramientas digitales como un paso importante para el desarrollo de la visualización de conceptos matemáticos por parte de nuestros estudiantes.

Específicos en Geometría

Desde la antigüedad han existido dos tendencias para la enseñanza de la Geometría: la línea abstracta basada en Platón y Euclides y la línea pragmática representada por el trabajo de Herón de Alejandría, alentando tensiones a lo largo de la historia por diferentes manuscritos que han usado una u otra obra y generaron diferentes formas de enseñanza durante las edades antigua y media (Barbin & Menghini, 2014).

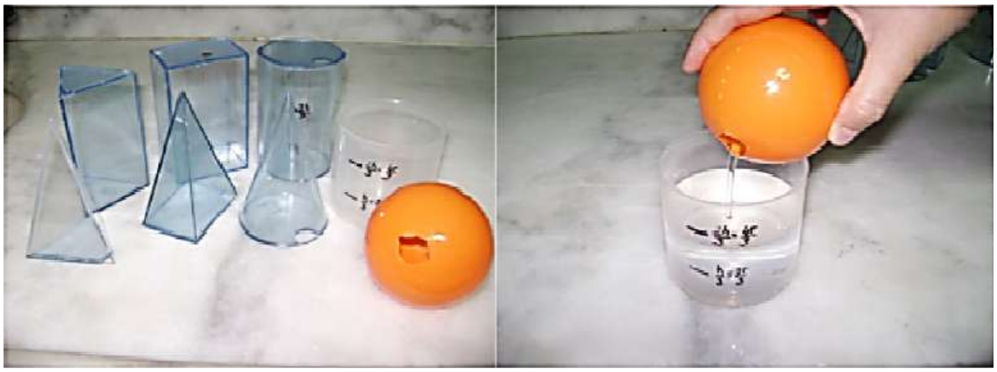
Desde este punto se empezaron a generar diferentes opciones para la enseñanza de la Geometría.

Por otro lado, la enseñanza tradicional de las Matemáticas no ha generado los resultados esperados a lo largo de las últimas décadas obteniéndose a cambio un proceso de memorización por parte de los estudiantes y la metodología basada en lecturas promueve una actitud pasiva, desinterés y fallas en el proceso (Duru, 2010). Para contrarrestar esta situación se han desarrollado múltiples estrategias para la enseñanza de la Matemática incluyendo metodologías activas (Mulyono, 2011), enfoques basados en modelamientos (Conner & Zbiek, 2006), enfoques basados en competencias tanto de los estudiantes como del profesor (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017), enfoques histórico-culturales (Rowlands, 2010), reformas curriculares (Aydin, Halat, & Jakubowski, 2008), medios tecnológicos como herramientas didácticas (Bortolossi, 2015), uso de juegos de computador y ayudas de inteligencia artificial (Su, 2017) y enfoques pragmáticos (Menghini, 2015) entre otros, mostrando en todos los casos mejores resultados que el enfoque tradicional conductivista, los cuales serán tenidos en cuenta para el desarrollo de esta investigación.

En la Figura 1 se muestra el ejemplo de una de las múltiples prácticas que se espera desarrollar en el laboratorio piloto.

Figura 1.

Materiales usados para una actividad de calcular el volumen de una esfera (Duru, 2010)

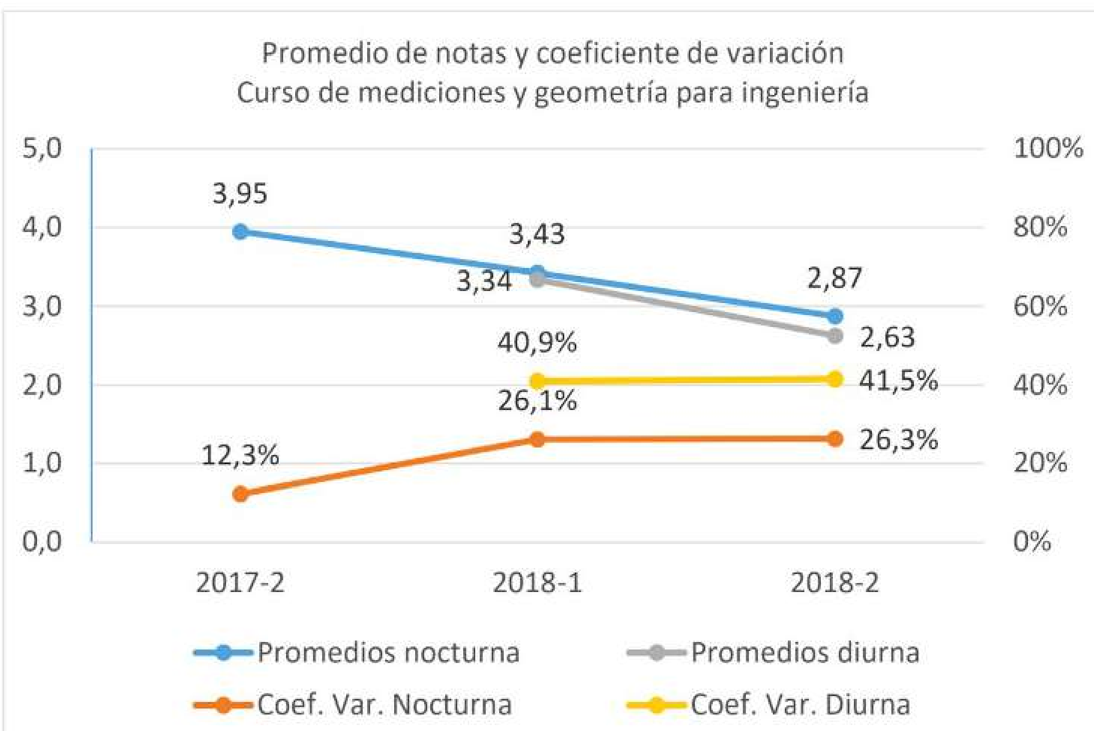


Planteamiento y Justificación del Problema

Este planteamiento se hace con base en las referencias documentales descritas en los antecedentes y en la situación vivida personalmente en la UNIAJC durante los años 2017 y 2018, la cual se muestra gráficamente en la figura 1 que, sin pretender ser un estudio estadístico, sugiere una tendencia negativa del rendimiento académico de los estudiantes del curso de mediciones y Geometría de los programas de Ingeniería Industrial tanto de la jornada diurna como de la jornada nocturna.

Figura 2.

Gráfica notas de cursos de Mediciones y Geometría UNIAJC



Se puede notar adicionalmente un coeficiente de variación muy alto (41%) en la jornada diurna y un incremento (de 12% a 26%) en la jornada nocturna, lo cual es indicativo de una posible tendencia a la heterogeneidad de los grupos donde se pueden encontrar unos pocos estudiantes muy brillantes en su quehacer, un grupo muy disperso en el medio y unos estudiantes con resultados muy deficientes.

Esta tendencia se continúa evidenciando incluso hasta los primeros meses del año 2020 cuando inició la pandemia mundial que marcó un hito en nuestra historia reciente y es de esperarse además que la transición forzada a la virtualidad, que se vivió por casi dos años, la haya agudizado aún mucho más.

Con este entorno de fondo y teniendo en cuenta que desde ese momento mi carrera como docente ha estado suspendida, se cambió el enfoque del proyecto de investigación. Este inicialmente pretendía crear un laboratorio físico de Geometría aplicada a la ingeniería e iba a tener un impacto localizado en algunos cursos de la UNIAJC, y pasó a ser un proyecto virtual con un potencial impacto a nivel regional e incluso nacional.

Teniendo en cuenta lo anterior y procurando generar un aporte significativo a la comunidad académica, especialmente con relación a la Geometría y cursos afines o similares, se plantea el siguiente problema de investigación: ¿Cómo mejorar el aprendizaje de la Geometría Euclidiana a partir del uso pedagógico de las TIC?

Metodología

Para cumplir con los objetivos del presente trabajo se emplearon los siguientes métodos experimentales:

Investigación exploratoria: para conocer el estado actual de aplicaciones para la enseñanza de la Geometría Euclidiana, con el fin de revisar las condiciones existentes sobre las cuales no se tiene información determinante y los aspectos fundamentales de la problemática planteada. Con los resultados se espera también abrir nuevas líneas de investigación en La enseñanza de la Matemática.

Investigación aplicada: para buscar la aplicación de los conocimientos adquiridos en la enseñanza de la Geometría, con énfasis en los resultados prácticos, útiles tanto al docente como al estudiante en el contexto actual.

Revisión bibliográfica: para luego diseñar una ayuda didáctica con base en experiencias exitosas y la experiencia del investigador con el curso de Geometría aplicada teniendo como base al entorno académico y sociocultural de la UNIAJC.

Aprendizaje basado en proyectos: se crea una secuencia didáctica que permita tanto al docente como a los estudiantes aprovechar los beneficios de la aplicación gráfica, donde cada sección y cada página será un proyecto en sí mismo.

Modelo incremental: se utiliza esta metodología de desarrollo de software donde se realizarán diferentes versiones cada vez con mayores características y contenidos hasta lograr un mínimo deseado. Igualmente se utilizan buenas prácticas como: control de versiones, código abierto y modelo vista-controlador entre otros.

1. Ayuda didáctica

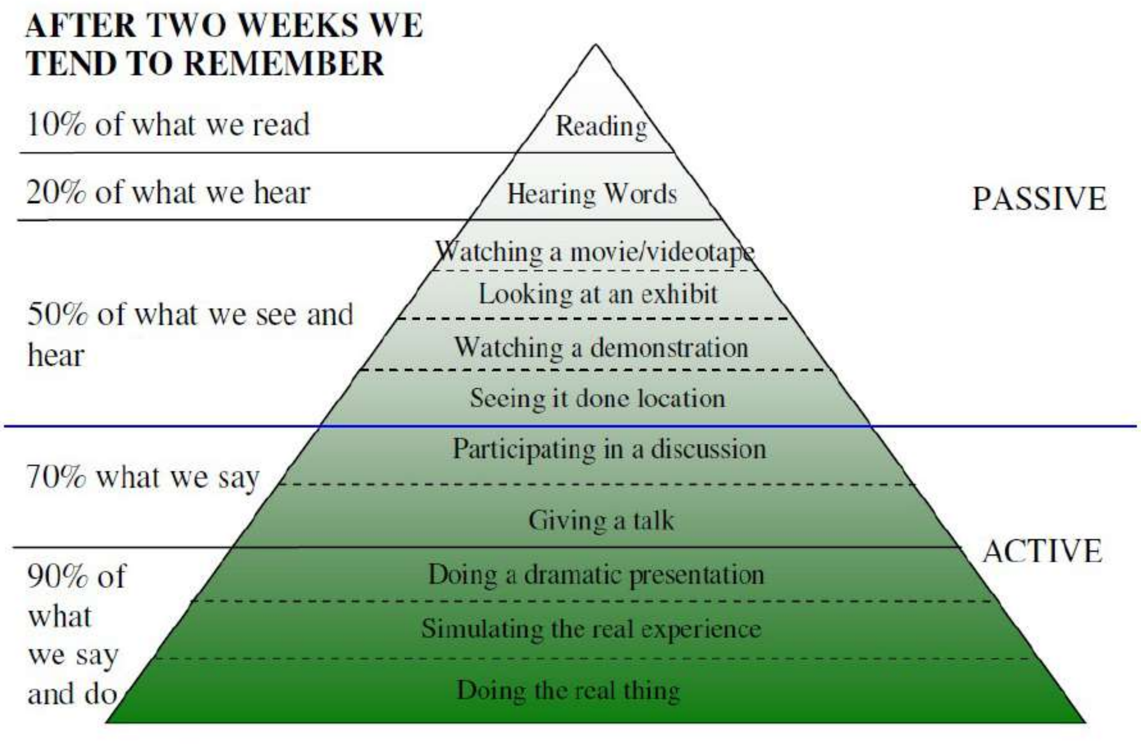
Fundamentos

Partiendo de la base de que cada estudiante puede tener un estilo de aprendizaje (Kolb, 1984) el cual no necesariamente puede estar alineado con la didáctica generada en el espacio de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, se desea primero revisar como estos estilos de aprendizaje que han sido validados en estudios recientes (Assudani, Burns, Chinta, & Manolis, 2013) o han sido actualizados con un enfoque moderno (Ertekb & Gogusa, 2016) pueden ser aplicables o no al objeto de estudio, o si por el contrario puede ser más viable utilizar enfoques que dan recomendaciones para abandonar la caracterización de los estudiantes por su estilos de aprendizaje (Kirschner, 2017) y que van más allá brindando un acercamiento que busca enfocarse en las diferencias individuales de aprendizaje (An & Carr, 2017).

Con base en lo anterior, se desarrolló una investigación para diseño de una ayuda didáctica con base en el modelo activo de enseñanza-aprendizaje de la Geometría basado en el trabajo de Duru (2010) quien realizó un estudio comparativo para una clase con estudiantes de bachillerato usando el método de enseñanza activa experimental y el método de enseñanza tradicional enfocado en el profesor. Adicionalmente se tuvo como base fundamental, el cono del aprendizaje de Dale (1969) mostrado en la Figura 3, donde entendemos como una metodología activa aquella en la cual empieza a haber participación en discusiones y hacer exposiciones hasta construir representaciones, simulaciones o situaciones reales.

Figura 3.

Cono de aprendizaje (Dale, 1969). Tomado de Duru (2010).



Se utilizó como marco general un enfoque moderno basado en la resolución de problemas por medio de la interacción de los estudiantes con la realidad a través del modelamiento matemático desde dos perspectivas, una realística y otra educativa (Abassian, Bostic, Bush, & Safi, 2019). Aunque las dos perspectivas son muy similares, difieren un poco en su modelo central y su objetivo final. La perspectiva realística basada en (Blum, 2011) que se muestra en la Figura 4, busca desarrollar habilidades de modelamiento matemático y entendimiento de escenarios del mundo real, mientras que la perspectiva educativa basada en (Conner & Zbiek, 2006) de la Figura 5, busca desarrollar habilidades de modelamiento matemático de escenarios reales y entendimiento de la Matemática al mismo tiempo.

Figura 4.

Modelado desde la perspectiva realística. Tomado de Blum (2011)

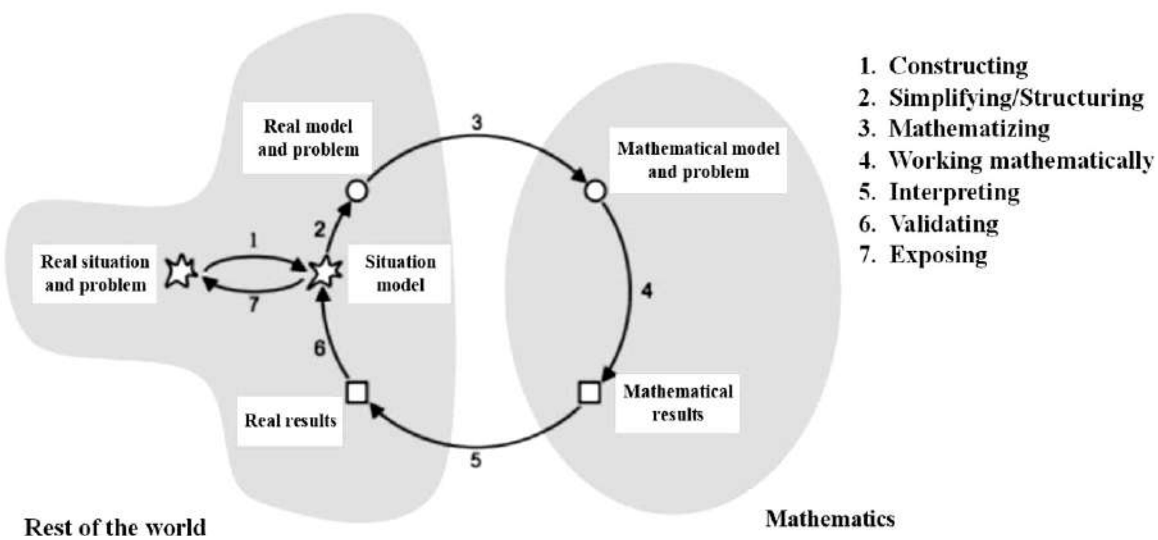
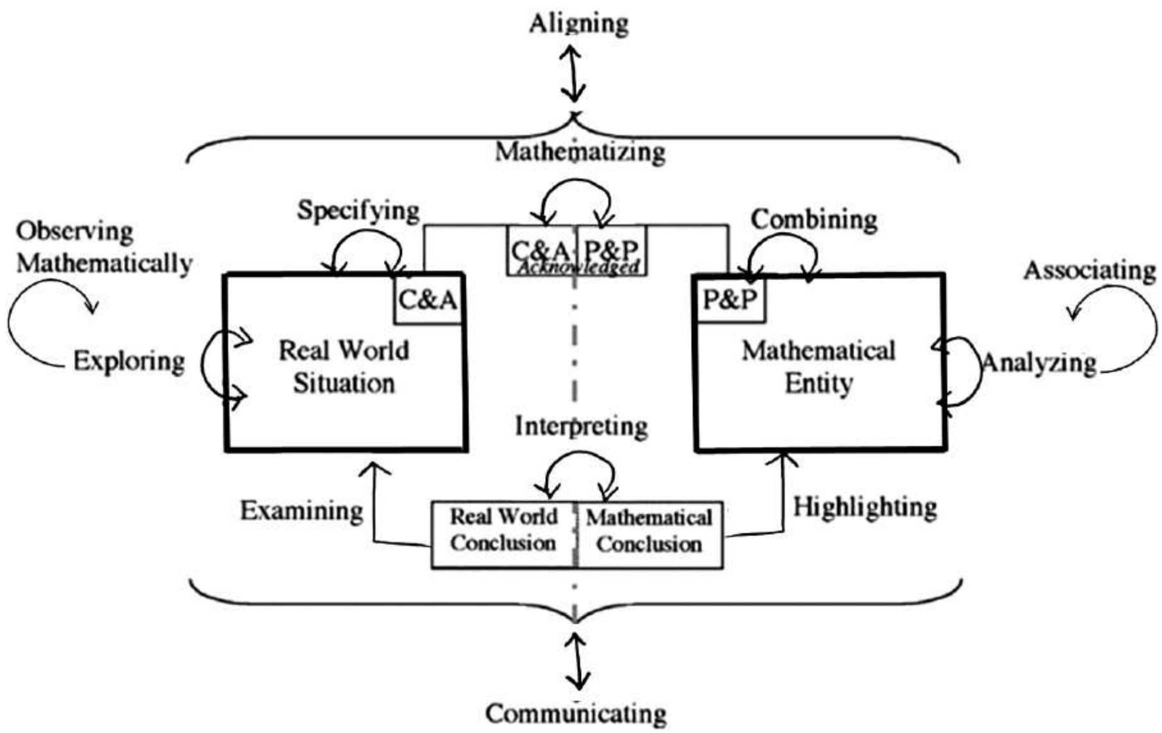


Figura 5.

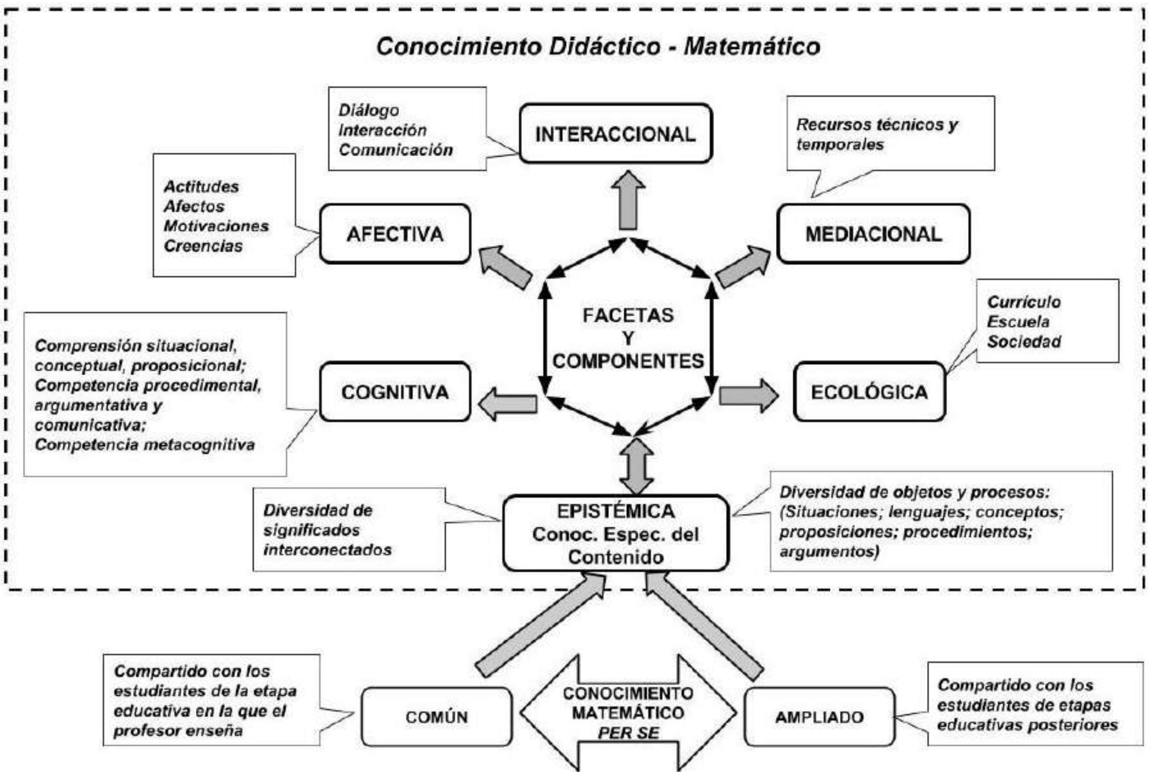
Modelado de la perspectiva educativa. Tomado de Conner & Zbiek (2006).



Estas perspectivas se adaptaron para diseñar una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC de un curso de Geometría Euclidiana, teniendo en cuenta que el conocimiento matemático por sí solo no es suficiente para organizar, implementar y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los factores influyentes son complejos, y se debe tener un conocimiento más profundo de la Matemática y su enseñanza, más allá del que adquieren los estudiantes. En la Figura 6 se presenta el modelo de conocimiento didáctico-matemático, que se superpone al conocimiento matemático (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017).

Figura 6.

Facetas y componentes del conocimiento del profesor. Tomado de Godino, Giacomone, Batanero, & Font (2017)

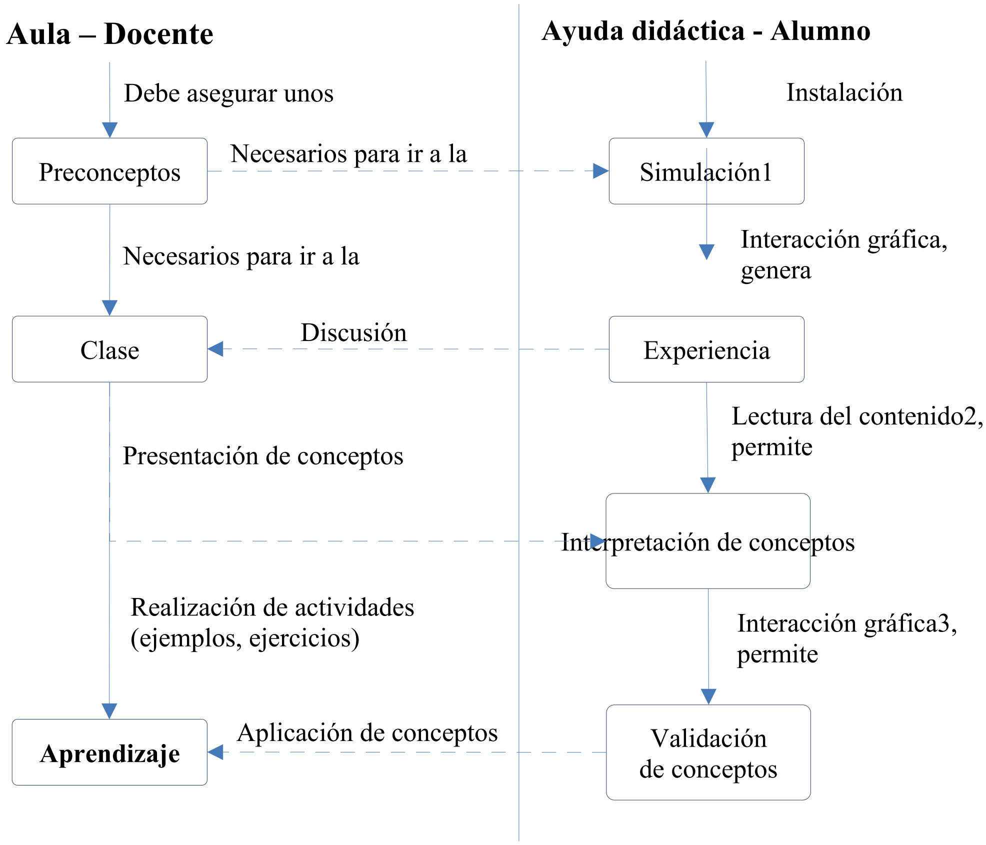


Diseño

Para el diseño de la ayuda didáctica se ubica esta primero en el cono del aprendizaje de la Figura 3, en la simulación de experiencias reales, siendo por lo tanto parte de una metodología activa. Luego se ubican los diferentes espacios o estados propuestos en la Figura 7 con recuadros y actividades u observaciones en texto sobre las flechas de flujo.

Figura 7.

Diseño de una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC.



Nota 1: simulación interactiva de modelos de objetos geométricos.

Nota 2: el contenido asociado a cada objeto geométrico y sus propiedades puede contener conceptos teóricos, gráficos explicativos, tablas informativas y actividades de consulta.

Nota 3: una nueva interacción con la simulación a través de la observación y la exploración matemática guiada o autónoma.

Iniciando con el Docente quién debe asegurar unos *preconceptos* de clase, se puede iniciar el trabajo en paralelo con la aplicación (ayuda didáctica) partiendo de un proceso de *simulación* donde se interactúa con gráficos de objetos geométricos, lo cual genera una primera *experiencia* en el Alumno.

Se podrá propiciar una *discusión* durante la misma *clase* o en la clase siguiente, generando un entorno constructivo donde cada Alumno pueden debatir sobre lo observado, para luego realizar una lectura de los contenidos de la aplicación que apoyarán los conceptos presentados por el Docente. Se obtendrá una *interpretación de conceptos* y en una segunda interacción gráfica con la aplicación, se podrá realizar una *validación* de estos, es decir, el estudiante podrá confrontar lo estudiado con los datos de la simulación gráfica.

En la etapa final, los conceptos validados podrán ser aplicados en clase con la realización de actividades para permitir un *aprendizaje* del Estudiante.

Para apoyar el diseño de esta ayuda didáctica, se creó una secuencia didáctica basada en el Aprendizaje Basado en Proyectos y se desarrolló una aplicación gráfica para la interacción con objetos geométricos.

2. Secuencia didáctica

Alcance

Como núcleo central en el desarrollo de la aplicación de interacción gráfica se tiene una secuencia didáctica creada para seguir un enfoque inductivo, constructivista, donde cada objeto matemático estudiado es la base para la construcción de los siguientes objetos presentados. De esta forma la secuencia puede diferir en su orden respecto por ejemplo del orden de las definiciones y postulados de Euclides o de textos modernos de Geometría (Recalde Caicedo, 2018).

La secuencia didáctica fue creada con base en diseño discutido en el capítulo anterior, donde se describe un espacio para la simulación e interacción gráfica y otro espacio para lectura del contenido asociado al objeto geométrico presentado con sus propiedades.

Por otro lado, hay ciertos aspectos de se deben mencionar, los cuales no son parte del alcance del presente trabajo:

- No se pretende realizar un proceso demostrativo de los conceptos y no sustituye el estudio formal del contenido de un curso que implique los conceptos básicos de la Geometría Euclidiana.
- No se presenta una rigurosidad matemática en la descripción de los objetos matemáticos, la cual hace parte de la responsabilidad del profesor y no se pretende sustituirlo en su función.

- No contiene todos los objetos geométricos de estudio, ni se presenta como una lista exhaustiva de temas; solo se trabajan aquellos que el autor considera importantes, incluyendo el orden, para construir unas bases conceptuales sólidas que permitan al estudiante poder abordar otros objetos o conceptos geométricos.
- Por lo tanto, el orden de presentación de los conceptos sigue el orden que el autor consideró adecuado desde un punto de vista constructivista, inductivo, a partir de la experiencia con la interacción virtual de objetos geométricos. Y de este modo se recomienda seguir el orden propuesto para tener una mayor coherencia entre capítulos y secciones.
- En el contenido se presentan definiciones, postulados y nociones comunes del libro I de los Elementos de Euclides (de allí el nombre de la aplicación, Virtual Euclides) pero no se pretende hacer una presentación completa y detallada al respecto, sino utilizar estos como referente conceptual para ahondar en la experiencia de interacción.
- Se utilizará la palabra Geometría para referirse a la Geometría Euclidiana en el plano, es decir, a la Geometría que cumple con los cinco postulados de Euclides en dos dimensiones.

Secuencia

A continuación, los resultados, donde las numeraciones principales corresponden a los capítulos trabajados, las numeraciones secundarias a las secciones de cada capítulo y las numeraciones terciarias a las páginas de cada sección que corresponden en la práctica a una página en la pantalla. Cuando se mencione alguna definición (e.g. definición 1) o Postulado (e.g. Postulado 1), entiéndanse las definiciones y Postulados del Libro I de Euclides (Recalde Caicedo, 2018).

1. Puntos y líneas

- 1.0. Introducción
- 1.1. Concepto de punto
  - 1.1.0. Concepto intuitivo de punto – ejemplo 1: concepto y definición 1
  - 1.1.1. Concepto intuitivo de punto – ejemplo 2
  - 1.1.2. Representaciones
- 1.2. Concepto de línea
  - 1.2.0. Concepto intuitivo de línea: concepto y definiciones 2 y 3
  - 1.2.1. Concepto intuitivo de rectitud: definición 4 y Postulado 1
  - 1.2.2. Segmentos, semirrectas y rectas: postulado 2
- 1.3. Dos líneas rectas: concepto, línea poligonal (2 líneas rectas)
  - 1.3.0. Tipos de intersecciones
  - 1.3.1. Concepto de ángulo: definiciones 8, 9, 10, 11, 12 y 23 Postulado 4
  - 1.3.2. Concepto de distancia Euclidiana: teorema de Pitágoras
- 1.4. Tres líneas rectas: concepto, línea poligonal (3 líneas rectas)
  - 1.4.0. Intersecciones y ángulos formados: postulado 5
  - 1.4.1. Paralelas y perpendiculares: paralelas, perpendiculares y definición 23
  - 1.4.2. Concepto de polígono: línea poligonal cerrada y definiciones 13 y 14

2. Polígonos

2.1. Introducción

2.0.0. Definiciones: definición 19

2.0.1. Clasificación según el contorno

2.0.2. Clasificación según número de lados

2.0.3. Relaciones

2.1. De tres lados

2.1.0. Definiciones: según sus lados y según sus ángulos internos y definiciones 20 y 21

2.1.1. Líneas de importantes

2.1.2. Mediatrices y circuncentro

2.1.3. Bisectrices e incentro

2.1.4. Medianas y baricentro

2.1.5. Alturas y ortocentro

2.1.6. Recta de Euler

2.2. Relaciones del triángulo

2.2.0. Relación de lados

2.2.1. Ángulos internos: suma de ángulos internos, relaciones entre lados

2.2.2. Ley de los senos: relación entre lados y ángulos internos

2.2.3. Ley de los cosenos: teorema de Pitágoras generalizado

2.3. De cuatro lados

2.3.0. Conceptos: lados y ángulos internos y definición 22

2.3.1. Cuadrángulos: trapezoide, trapecio, paralelogramo

2.3.2. Paralelogramos: romboide, rombo, rectángulo, cuadrado

2.3.3. Ángulos internos: suma de ángulos internos

2.4. Superficies

2.4.0. Perímetros: de polígonos como el triangulo y cuadrángulos

2.4.1. Concepto de área: superficie de un polígono

2.4.2. Área de un paralelogramo

2.4.3. Área de un triángulo: con base en el área de un paralelogramo

2.5. Otros polígonos

2.5.0. Irregulares

2.5.1. Regulares: de 5, 6 y 8 lados, circunferencias inscritas y circunscritas

2.5.2. Ángulos internos: al aumentar número de lados

2.5.3. Infinitos lados: cálculo de pi por aproximación

3. Líneas curvas

3.0. Introducción

3.0.0. Concepto de curva abierta

3.0.1. Concepto de curva cerrada

3.1. Circunferencia y círculo

3.1.0. Concepto de circunferencia: ¿es un polígono regular de infinitos lados?. Definiciones 15 a 18 Postulado 3

3.1.1. Centro, radio, diámetro, secantes, tangentes

3.1.2. Concepto de círculo

3.1.3. Perímetro y área: concepto de pi

3.1.4. Relaciones con base en el radio

3.2. Cerradas – casos especiales:

3.2.0. Elipse: curva cerrada con dos centros

3.2.1. Perímetro y área

3.2.2. Óvalo: dos semicircunferencias y dos líneas rectas paralelas.

3.2.3. Perímetro y área

3.3. Abiertas – casos especiales:

3.3.0. Parábola (polinomio de grado 2) y raíz cuadrada

3.3.1. Polinomios de grado superior

3.3.2. Hipérbola: ver en general las cónicas

3.3.3. Exponenciales y logaritmos

3.3.4. Funciones trigonométricas: sen, cos, tan

Cada una de las anteriores secciones y páginas de los ***capítulos 1 y 2***, fueron implementadas en la aplicación gráfica utilizando el siguiente esquema visual con base en diseño discutido en el capítulo anterior. En la mitad superior se presenta un espacio para la simulación e interacción gráfica y en la mitad inferior otro espacio para lectura del contenido asociado al objeto geométrico presentado con sus propiedades como se ve en la Figura 8.

Figura 8.

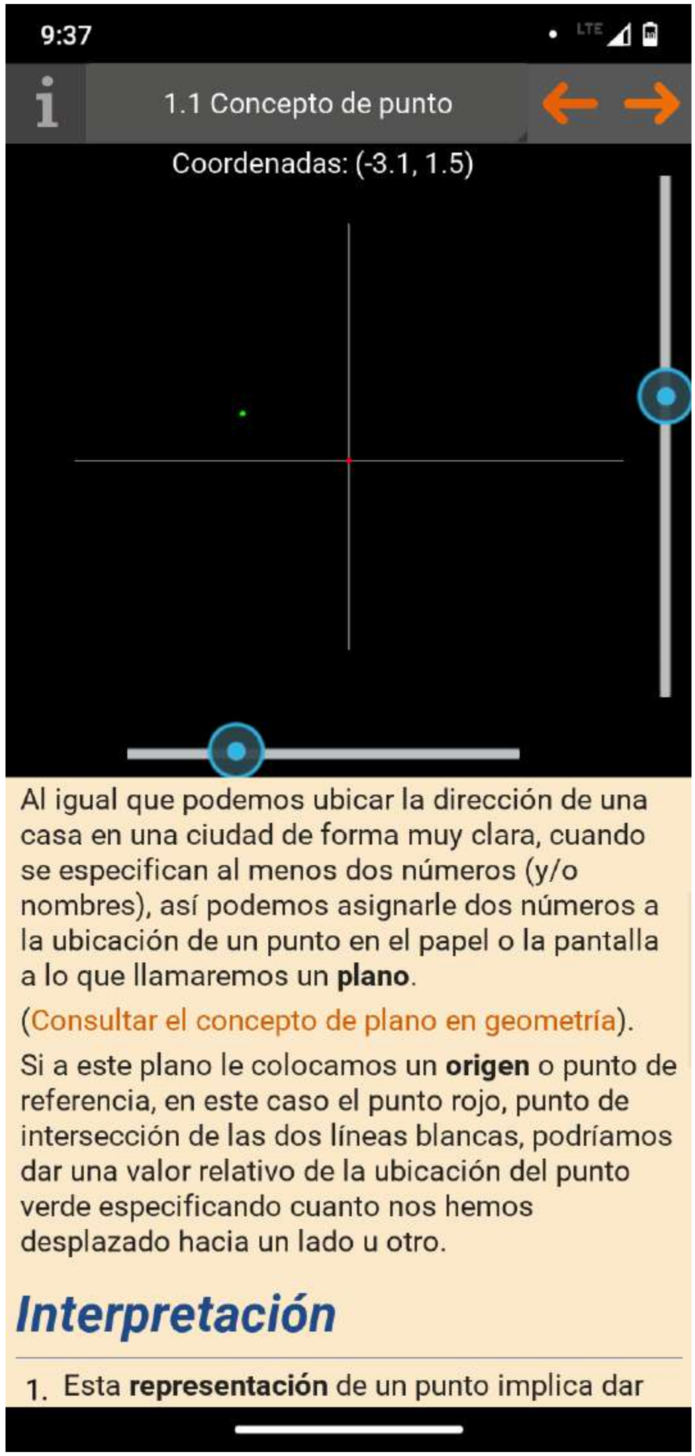
Esquema para el diseño de la aplicación gráfica.

Espacio de gráficas interactivas: presentando objetos geométricos y algunas de sus propiedades
Espacio de contenido: donde se explicarán las propiedades de los objetos geométricos y algunos conceptos claves.

Cada sección representada por una pantalla implementando el esquema anterior para un concepto determinado, se ve en forma general como en la Figura 9.

Figura 9.

Ejemplo de una página de aplicación gráfica con el uso pedagógico de las TIC.



3. Aplicación gráfica

El laboratorio inicialmente concebido durante el anteproyecto era físico, presencial, con materiales que podían manipularse en un aula de clase; sin embargo, debido a los grandes cambios ocurridos en los últimos dos años a nivel mundial y la gran relevancia que han tomado las alternativas no presenciales en la enseñanza, se concibe la construcción del piloto del laboratorio interactivo de Geometría usando las tecnologías de la información.

Para esto se evaluaron múltiples opciones de implementación entre las cuales estaban: aplicaciones web, aplicaciones para computador, diferentes tecnologías como realidad aumentada, realidad virtual y varias plataformas o lenguajes de programación.

Tipo de aplicación

La primera decisión por tomar fue el tipo de aplicación, es decir, si sería un software de aplicación gráfica, de realidad virtual o de realidad aumentada, seleccionando la primera opción por las siguientes consideraciones:

- La realidad virtual se descartó inicialmente por el relativo alto costo de los dispositivos necesarios, lo cual reduciría considerablemente el alcance de la población objetivo.
- La realidad aumentada puede tener un costo similar a una aplicación gráfica para dispositivos móviles, es decir, solo se requeriría por ejemplo un teléfono móvil en ambos casos. Sin embargo, la realidad aumentada implica la necesidad de tener

ciertos objetos, accesorios, dibujos o impresión de códigos QR para que el usuario pueda interactuar con esta realidad a través de su teléfono móvil. Esto finalmente suma un grado más de dificultad al proceso, el cual se espera sea lo más sencillo posible de tal forma que abarque la mayor cantidad de población. Sin embargo, se recomienda explorar esta alternativa en futuras investigaciones usando la misma ayuda didáctica pero implementada en esta tecnología

- La aplicación gráfica, presenta el menor costo de implementación y permite ser lo suficientemente genérica para ser usada de forma masiva en muchos tipos de dispositivos como computadores, tabletas digitales y teléfonos móviles.

Tipo de plataforma

La segunda decisión importante fue el tipo de plataforma para la cual se desarrollaría la aplicación y las tres opciones principales a evaluar fueron: web, móvil o computador. La selección tuvo en cuenta lo siguiente:

- Una aplicación web implica que el usuario debe tener un dispositivo para acceso a internet con una conexión permanente. Esto aumenta el costo del proceso y reduce las posibilidades de uso en situaciones donde no se tenga una conexión o esta no sea suficiente y estable para todos los estudiantes.
- Una aplicación para computador o también llamada aplicación de escritorio se traduce en tener un computador disponible por cada estudiante (o pareja de estudiantes). Eso no es posible en muchos casos, donde el estudiante puede no

tener esta herramienta disponible en su casa o en el salón de clase (Portafolio, 2021).

- Por otro lado, una aplicación móvil, es decir, aquella que puede ser instalada y usada en dispositivos como tabletas digitales o teléfonos móviles y la cual no requiera el uso de internet podría ser accesible, al menos en teoría, a toda la población en Colombia donde existen 1.28 celulares por cada colombiano (128% de incidencia) respecto al 69% de cobertura del servicio de internet (Gaviria, 2022)

Tipo de interacción

Una vez fueron tomadas estas dos importantes decisiones, en resumen, realizar una aplicación gráfica para dispositivos móviles sin usar conexión a internet, el siguiente punto importante era definir el tipo de interacción que tendría el estudiante entre las siguientes opciones: imágenes estáticas, animaciones, imágenes interactivas o espacios para graficación libre. La opción seleccionada fue tener imágenes interactivas, es decir, gráficos que pudieran ser manipulados por el estudiante para ver diferentes comportamientos de los objetos presentados y que de esta forma el usuario pueda ver diferentes resultados según la manipulación que realice. Un ejemplo de la cuarta opción es el software Geogebra, el cual presenta un espacio de trabajo libre pero que también puede ser previamente configurado para realizar un proceso similar al de tener imágenes interactivas.

Aunque a primera vista esta opción (Geogebra) podría haber sido la mejor opción, se descartó porque en principio está diseñada más para la graficación y cálculo matemático, que para presentar conceptos abstractos de estudio como los objetos geométricos puros que, en esencia, son libres de dimensiones. Al tener múltiples herramientas, configuraciones y opciones, el objetivo central de estudio de objetos geométricos se dispersa hacia el aprendizaje del uso de un software específico y por ello se prefirió la construcción de una aplicación propia, desarrollada específicamente para implementar la ayuda didáctica diseñada

Se recomienda explorar, para un futuro trabajo de investigación, la implementación el diseño concebido y la secuencia didáctica en el software Geogebra con base en los resultados del presente proyecto, o como una segunda ayuda didáctica con un enfoque más libre y enfocado a la resolución de problemas numéricos.

Tipo de tecnología

A continuación, siguió una fase de exploración de tecnologías que permitieran realizar la aplicación móvil teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Plataforma o lenguaje de programación con una rápida curva de aprendizaje.
- De código abierto, es decir, que sea de acceso libre para su uso, copia y modificación.
- Capacidad y rendimiento suficiente para poder crear gráficos bidimensionales interactivos con pantalla táctil en teléfonos móviles.

La siguiente es una lista no exhaustiva de tecnologías y/o lenguajes explorados (Inmune, 2021) (InnovaAge, 2022) (Sakovich, 2022):

- Java
- Python
- Swift
- Javascript
- Kotlin
- React native
- Ionic
- PhoneGap
- Xamarin
- Sencha
- Flutter.

Sin entrar en detalles técnicos que no son relevantes para los objetivos del presente trabajo, se escogió el lenguaje de programación Python y posteriormente una librería específica (Kivi) para el desarrollo de aplicaciones gráficas en plataformas móviles con sistema de pantalla táctil. En la Tabla 1 se listan otras opciones que fueron evaluadas para este lenguaje las cuales pueden ser de interés (Gui Programming, 2022) (Farooq, 2018) (Python on Android, 2022) (Adabala, 2020).

Tabla 1.

Listado de librerías gráficas para Python

Nombre	Página web
Turtle	https://docs.python.org/3/library/turtle.html
BeeWare	https://beeware.org/
Kivy	https://kivy.org/
QPython	https://www.qpython.com/
Termux	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.termux
Matplotlib	https://matplotlib.org/
Blender	https://www.blender.org/
Panda3D	https://www.panda3d.org/
Bokeh	https://bokeh.org/
OpenCV	https://opencv.org/
Sandbox	www.sandbox.game

Una decisión adicional que se tomó después de explorar las opciones anteriormente mencionadas tenía que ver con el tipo de sistema operativo de teléfonos móviles. La librería seleccionada permite la generación de instaladores tanto para Android como para IOS de Apple, los dos sistemas operativos dominantes en el momento, sin embargo, los siguientes factores influyeron para decidir crear instaladores solo para Android:

- El autor no cuenta con acceso a un teléfono móvil con sistema operativo IOS, lo cual dificultaría el proceso de pruebas de la aplicación.
- Crear el instalador para IOS implicaría subir dicho instalador a la tienda de aplicaciones de Apple (App Store) y es un proceso más complejo y costoso que para subir los instaladores a la tienda de aplicaciones de Android (Google Play) a donde finalmente se subió el instalador.
- El 89% de los usuarios colombianos ingresan a Internet a través de un sistema operativo Android y el 10% Apple ((StatCounter, 2022; Medina, 2022)

Diferenciadores

Finalmente se tomó la decisión de diferenciarse de otras aplicaciones móviles de Geometría, que por un lado solo brindan un listado de fórmulas y/o calculadoras de objetos geométricos o solo muestran los conceptos con texto e imágenes estáticas. Incluso una combinación de estos dos tipos de aplicación no permite un aprendizaje desde la construcción del conocimiento sino solo una apropiación de ideas no siempre conexas. De esta forma la aplicación permite al estudiante:

- Interactuar con objetos geométricos de forma natural en un teléfono móvil y explorar los resultados de diferentes parámetros.
- Tener algunos conceptos teóricos de soporte que refuerzan la interacción previa y permiten realizar una nueva exploración de parámetros, si algunas características no fueron descubiertas la primera vez.
- Tener un aprendizaje constructivista.

Al crear esta aplicación como código abierto, usando tecnologías de fácil aprendizaje por un entusiasta de la programación, la ingeniería o las ciencias exactas, se deja una plataforma para futuros desarrollos que permitan ampliar su alcance con respecto a la Geometría, o incluso explorar otras áreas del conocimiento usando el mismo principio de aprendizaje constructivista con un método inductivo, donde el estudiante va soportando el nuevo conocimiento desde los objetos más simples hasta llegar a objetos más complejos.

Propuestas para el uso de la aplicación

Se proponen diferentes niveles de uso de la aplicación y posibles enfoques de futuros trabajos de investigación:

- **Inicial:** interacción directa con la aplicación. Esto incluye el uso de las gráficas interactivas de manera conjunta con la lectura de los contenidos y en paralelo a una *asignatura de Geometría, Matemáticas fundamental o similares*.
- **Intermedio opción 1:** en adición al nivel inicial, se propone la descripción matemática detallada o demostración de los conceptos expuestos en cada página, lo cual supone un nivel de madurez teórica un poco mayor. Es una opción para estudiantes de ciencias básicas, ingeniería electrónica, mecánica o afines.
- **Intermedio opción 2:** análisis e interpretación del código fuente de los conceptos. Se propone en este nivel hacer uso de preconceptos de programación que puedan tener estudiantes de ingenierías de sistemas o mecatrónica para analizar el código

fuente de una o algunas de las páginas de la aplicación y de esta forma entender el concepto Matemática en paralelo con un tema afín a la profesión.

- **Avanzado 1:** modificación del código fuente de los conceptos. Similar a la anterior, pero yendo un poco más allá, realizando modificaciones al código para ver los resultados gráficos al compilar la aplicación e interactuar con la nueva versión. Se propone como alternativa de proyectos de semestre de una o varias asignaturas (proyectos integradores) donde un grupo de estudiantes tenga la oportunidad de profundizar en conceptos de varias áreas del conocimiento.
- **Avanzado 2:** hacer un *fork* del código (DesarrolloWeb, 2021) o un aporte a la aplicación haciendo un *pull request* (DesarrolloWeb, 2015) para generar una nueva aplicación. Se plantean dos variantes las cuales podrían ser trabajos a nivel de especialización o maestría.:
    - Ampliación de las páginas y/o contenidos para generar una nueva versión.
    - Usar la estructura de la aplicación para crear una nueva temática.

Para una fácil distribución de la aplicación se creó una cuenta en Google Play (tienda de aplicaciones para dispositivos Android) y así poder descargar el instalador fácilmente en cualquier teléfono móvil. Se puede acceder a la aplicación Google Play y buscar “Virtual Euclides" para encontrar la aplicación o ir directamente a (Calderon, Virtual Euclides, 2022). Por último, el código fuente del proyecto queda disponible en la plataforma GitHub en (Calderon, leocjj/msc_thesis, 2022).

6. Conclusiones

El autor considera que los resultados del presente proyecto de investigación van más allá de los objetivos inicialmente planteados, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se diseñó una ayuda didáctica que finalmente, con algunos ajustes, puede ser un nuevo modelo para la enseñanza de la Geometría con el uso pedagógico de las TIC, lo cual según la revisión bibliográfica realizada no existía hasta el momento de iniciar la investigación.
- Se creó una secuencia didáctica organizada desde un punto de vista inductivo, con base en las definiciones y Postulados de Euclides, siguiendo un modelo constructivista y con un enfoque para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos más fundamentales de la Geometría de una forma estructurada, dejando de lado el enfoque tradicional de exponer conceptos, ejemplos y ejercicios.
- Se desarrolló una aplicación gráfica que permite la interacción con objetos geométricos, la lectura de contenidos relacionados que soportan la interacción y la cual es de fácil uso, creada en un lenguaje de programación y librerías modernas, de código abierto, es decir, que cualquier persona puede ver el código fuente y modificarlo y con una licencia abierta para su uso
- Se generaron varias propuestas de uso de la aplicación con el fin de motivar a los estudiantes de diferentes carreras y niveles de escolaridad para que usen la

aplicación con varios enfoques, permitiendo la apropiación de los conceptos geométricos desde varias áreas del conocimiento.

- Se subió la aplicación a Google Play pudiendo de esta forma ser instalada fácilmente en cualquier teléfono móvil e incluso en tabletas digitales y de una forma segura a nivel de Latinoamérica. Además, garantiza la fácil difusión de nuevas versiones que el autor podrá subir en el futuro, es compatible con una gama muy amplia de versiones de Android y es de un tamaño reducido lo cual permite que muchas personas, así tengan un teléfono móvil no muy reciente, puedan descargarla e instalarla sin inconvenientes.
- Se deja un punto de partida para crear una nueva línea de investigación enfocada en el desarrollo de aplicaciones para dispositivos móviles para la enseñanza de la Matemática, como se puede ver a continuación en las recomendaciones.

Otro punto importante para considerar sobre la aplicación desarrollada es que permite una interacción constructiva por parte del estudiante, es decir, este puede usar, manipular o modificar las condiciones, objetos o características base del concepto visualizado de tal forma que sea libre de interactuar, sesgar o llevar a la solución estándar o establecida. Esto implica un espacio virtual relativamente abierto, entendiendo que cada programa tiene sus limitaciones propias, donde el estudiante puede explorar, rectificar y poder encontrar y validar una o varias opciones adecuadas para solucionar un problema o llegar a un objetivo deseado.

Esta interacción no guiada de la visualización Matemática en primera instancia brinda una libertad de pensamiento que genera en el estudiante mayor curiosidad y esto lleva a tener una conexión emocional con el proceso, muy diferente a un sistema tradicional de transmisión y recepción de información donde esta no existe o se limita a un temor por la mediación de una evaluación. En una segunda interacción como se propone en la figura 6, el estudiante podrá interactuar de nuevo con los objetos geométricos desde una perspectiva mucho más amplia, buscando lograr los objetivos de aprendizaje por cuenta propia que se describen en los conceptos de cada página.

Después de este análisis se puede decir que el desarrollo matemático de una persona se puede ver incrementado sustancialmente al hacer uso de la visualización matemática con procesos mediados por tecnologías digitales; y, además, esto ya no es una opción, sino que pasa a convertirse en una obligación el hecho de que como docentes debemos apropiarnos de estas tecnologías y usarlas para brindar a nuestros estudiantes mejores procesos de aprendizaje.

7. Recomendaciones

Explorar la realidad aumentada como campo de investigación para generar otro tipo de experiencias al estudiante y usarla en futuras investigaciones utilizando la misma ayuda didáctica pero implementada en esa tecnología.

Ejecutar las propuestas de uso de la aplicación explicadas previamente, de tal forma que el proyecto permita brindar variadas experiencias a distintos niveles educativos y diferentes carreras profesionales.

Se recomienda explorar para un futuro trabajo de investigación la implementación del diseño concebido y la secuencia didáctica en el software Geogebra, con base en los resultados del presente proyecto o como una segunda ayuda didáctica con un enfoque más libre y orientado a la resolución de problemas numéricos.

8. Referencias

Assudani, R., Burns, D. J., Chinta, R., & Manolis, C. (2013). Assessing experiential learning styles: A methodological reconstruction and validation of the Kolb Learning Style Inventory. *Learning and Individual Differences, 23*, 44-52. doi:10.1016/j.lindif.2012.10.009

Abassian, A., Bostic, J., Bush, S., & Safi, F. (2019). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*. doi:10.1080/19477503.2019.1595360

Adabala, P. (26 de Agosto de 2020). *Create and run Python apps on your Android phone*. Obtenido de Opensource: https://opensource.com/article/20/8/python-android-mobile

An, D., & Carr, M. (2017). Learning styles theory fails to explain learning and achievement: Recommendations for alternative approaches. *Personality and Individual Differences, 116*, 410-416. doi:10.1016/j.paid.2017.04.050

Aydin, N., Halat, E., & Jakubowski, E. (2008). Reform-Based Curriculum and Motivation in Geometry. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 4*(3), 285-292. doi:10.12973/ejmste/75351

Barbin, E., & Menghini, M. (2014). History of Teaching Geometry. In S. G. Karp A., *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 473-492). New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-1-4614

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? some answers from empirical research. En W. Blum, R. B. Ferri, G. Kaiser, & G. Stillman (Edits.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA14* (Vol. 1, págs. 15-30). Springer Science & Business Media. doi:10.1007/978-94-007-0910-2_3

Bortolossi, H. (2015). Developing Free Computer-Based Learning Objects for High School Mathematics: Examples, Issues and Directions. En S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (págs. 27-49). Seoul, South Korea: Springer International Publishing Switzerland. doi:DOI 10.1007/978-3-319-17187-6_3

Calderon, L. (2022). *leocjj/msc_thesis.* Obtenido de GitHub: https://github.com/leocjj/msc_thesis

Calderon, L. (2022). *Virtual Euclides.* Obtenido de Google Play: https://play.google.com/store/apps/details?id=co.edu.utp.virtualeuclides

Conner, A., & Zbiek, R. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 63*(1), 89-112. doi:10.1007/s10649-005-9002-4

Dale, E. (1969). *Audio-visual methods in teaching* (3 ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

DesarrolloWeb. (9 de Noviembre de 2015). *Pull Request con Git*. Obtenido de DesarrolloWeb: https://desarrolloweb.com/articulos/pull-request-git.html

DesarrolloWeb. (10 de Septiembre de 2021). *Fork en Git*. Obtenido de DesarrolloWeb: https://desarrolloweb.com/articulos/fork-git

Duru, A. (2010). The experimental teaching in some of topics geometry. *Educational Research and Reviews, 5*(10), 584-592. Obtenido de https://academicjournals.org/journal/ERR/article-abstract/43C57274193

Ertekb, G., & Gogusa, A. (2016). Learning and Personal Attributes of University Students in Predicting and Classifying the Learning Styles: Kolb's Nine-region Versus Four-region Learning Styles. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 217*, 779-789. doi:10.1016/j.sbspro.2016.02.145

Farooq, U. (14 de Junio de 2018). *Tools to run Python on Android*. Obtenido de Medium: https://medium.com/@umerfarooq_26378/tools-to-run-python-on-android-9060663972b4

Gaviria, N. (16 de Julio de 2022). *Teléfonos superan el total de población, cada colombiano tiene al menos un celular*. Obtenido de Editorial La República: https://www.larepublica.co/economia/los-celulares-superan-el-total-de-la-poblacion-por-cada-colombiano-hay-1-2-moviles-3403559

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113. doi:10.1590/1980-4415v31n57a05

Gui Programming. (5 de Agosto de 2022). *The Python Wiki*. Obtenido de Python Software Foundation: https://wiki.python.org/moin/GuiProgramming

Inmune. (14 de Octubre de 2021). *Lenguajes de programación para móvil*. Obtenido de Immune Technology Institute: https://immune.institute/lenguajes-de-programacion-para-movil/

InnovaAge. (2022). Obtenido de https://www.innovaportal.com/innovaportal/v/696/1/innova.front/apps-hibridas-vs-nativas-vs-generadas-que-decision-tomar

Kirschner, P. (2017). Stop propagating the learning styles myth. *Computers & Education, 106*, 166-171. doi:10.1016/j.compedu.2016.12.006

Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: experience as the source of learning and development.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Medina, R. (21 de Junio de 2022). *Estadísticas de la situación digital de Colombia en el 2021-2022*. Obtenido de Branch Group: https://branch.com.co/marketing-digital/estadisticas-de-la-situacion-digital-de-colombia-en-el-2021-2022/

Menghini, M. (2015). From Practical Geometry to the Laboratory Method: The Search for an Alternative to Euclid in the History of Teaching Geometry. En S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (págs. 561-587). Seoul, South Korea: Springer International Publishing Switzerland. doi:DOI 10.1007/978-3-319-17187-6_32

Mulyono, B. (2011). Traditional Teaching About Angles Compared To An Active Learning Approach That Focuses On Students Skills In Seeing, Measuring And Reasoning, Including The Use Of Dynamic Geometry Software: Differences In Achievement. *International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education* (págs. 37-46). Yogyakarta: Department of Mathematics Education, Yogyakarta State. Obtenido de http://eprints.unsri.ac.id/4913/

Portafolio. (14 de Septiembre de 2021). *En 2020, 60.7% de los hogares no tenían un computador*. Obtenido de EL TIEMPO Casa Editorial: https://www.portafolio.co/economia/en-2020-60-7-de-los-hogares-no-tenian-un-computador-556258

Python on Android. (30 de Agosto de 2022). *The Python Wiki*. Obtenido de Python Software Foundation: https://wiki.python.org/moin/Android

Recalde Caicedo, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas.* Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Rowlands, S. (2010). A Pilot Study of a Cultural-Historical Approach to Teaching Geometry. *Science & Education, 19*, 55-73. doi:10.1007/s11191-008-9181-3

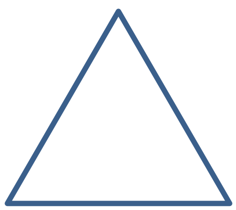
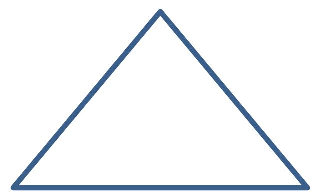
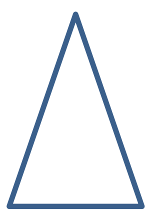
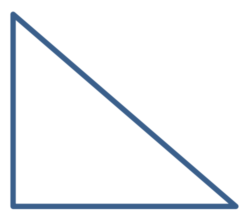
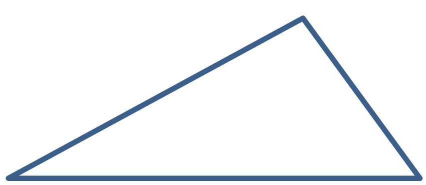
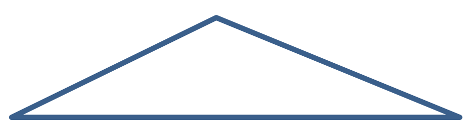
Sakovich, N. (2022). *Cross-Platform Mobile Development: Five Best Frameworks*. Obtenido de SaM Solutions: https://www.sam-solutions.com/blog/cross-platform-mobile-development/

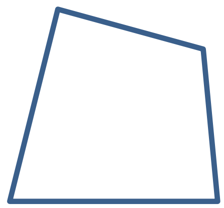
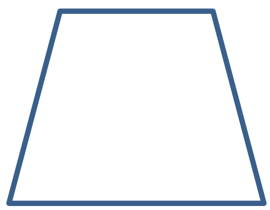
StatCounter. (2022). *Mobile Operating System Market Share Colombia - Jan - Dec 2021*. Obtenido de StatCounter: https://gs.statcounter.com/os-market-share/mobile/colombia/2021

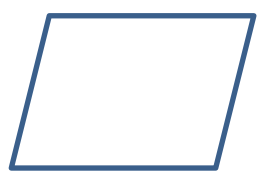
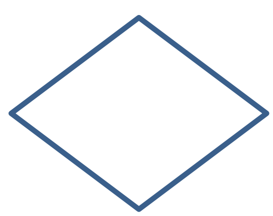
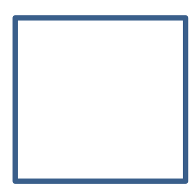
Su, C.-H. (2017). Designing and Developing a Novel Hybrid Adaptive Learning Path Recommendation System (ALPRS) for Gamification Mathematics Geometry Course. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 2275-2298. doi:10.12973/eurasia.2017.01225a

9. Anexos

Algunas imágenes de ayuda creadas para los contenidos de la aplicación

Según sus lados	Según sus ángulos
Equilátero: 3 lados iguales 	**Acutángulo:** 3 ángulos agudos (< 90°) 
Isósceles: 2 lados iguales 	**Rectángulo:** 1 ángulo recto (90°) 
Escaleno: 0 lados iguales 	**Obtusángulo:** 1 ángulo obtuso (> 90°) 

Lados paralelos	
Ninguno	Trapezoide 
2 lados paralelos	Trapecio 
2 a 2	Paralelogramos

Ángulos / **Lados**	**Iguales 2 a 2**	**4 iguales (4 rectos)**
Iguales 2 a 2	Romboide 	Rectángulo 
4 iguales	Rombo 	Cuadrado 

Ángulo Función	0°	30°	45°	60°	90°
Seno $\frac{catet\ o_{opuesto}}{hipotenusa}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
Coseno $\frac{catet\ o_{adyacente}}{hipotenusa}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
Tangente $\frac{catet\ o_{opuesto}}{catet\ o_{adyacente}}$ $¿\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Capturas de pantalla de la aplicación

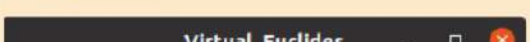
A continuación, se muestran algunas capturas de pantalla de la aplicación desarrollada:

Ayuda

1- Para ver los capítulos: desplazar o arrastrar (presionar, dejar presionado y luego mover) hacia los lados, el menú desplegable en la parter superior central.

2- Para ver las secciones de cada capítulo: presionar en el nombre del capítulo, luego presionar en la sección deseada para abrirla.

3- Para ver las páginas de cada sección: presionar las flechas de la esquina superior derecha para desplazarce entre las páginas. (1) para avanzar a la siguiente página. (2) para volver a la página anterior



Estructura general del contenido

Ejemplo:

CAP.1 - PUNTOS Y RECTAS

Cada capítulo (menú superior) tiene varias secciones asociadas las cuales se despliegan al seleccionarlo.

1.0 Introducción

Sección de capítulo. Presenta un tema particular, el cual puede desarrollarse en una o más páginas

1.0.1 Introducción - página 1

Página de sección, se puede navegar a través de las páginas usando las flechas en la parte inferior derecha.

Solución de problemas

Cómo reiniciar una gráfica

Cambiar de página (avanzar o retroceder) y volver a la pagina deseada.

No carga una sección

Abrir una sección de otro capítulo y volver a la sección deseada.

No puedo instalar la aplicación

Es posible que el dispositivo tenga una versión de Android no compatible con la app.

No puedo instalar una actualización

7:53

1 - PUNTOS Y LINEAS

Solución de problemas

Cómo reiniciar una gráfica

Cambiar de página (avanzar o retroceder) y volver a la pagina deseada.

No carga una sección

Abrir una sección de otro capítulo y volver a la sección deseada.

No puedo instalar la aplicación

Es posible que el dispositivo tenga una versión de Android no compatible con la app.

No puedo instalar una actualización

Desinstalar e instalar nuevamente la aplicación.

La aplicación no aparece en la Google Play Store

Es posible que el dispositivo tenga una versión de Android no compatible con la app.

Créditos

Autor: Leonardo Calderón Jaramillo

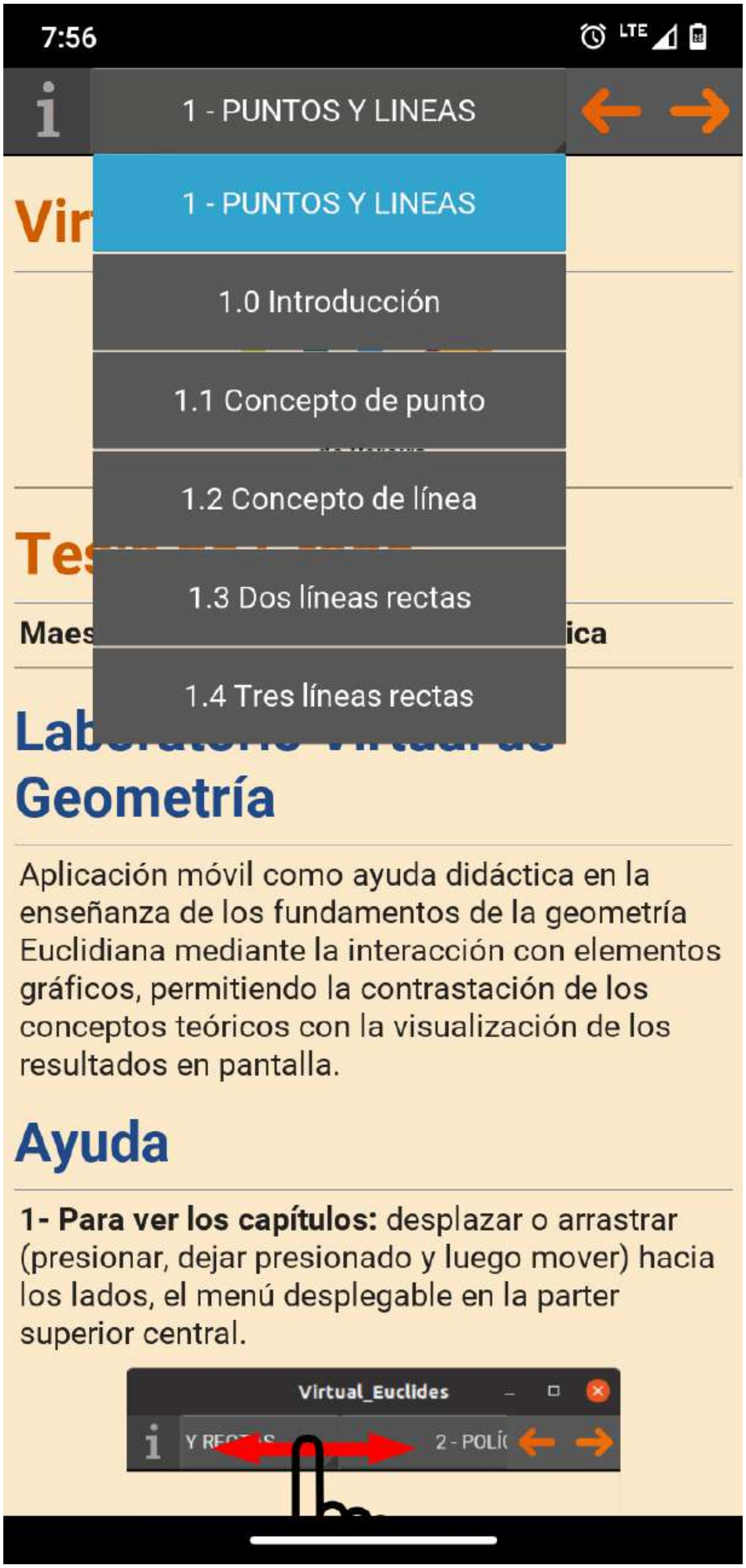
Email: leonardocj@gmail.com

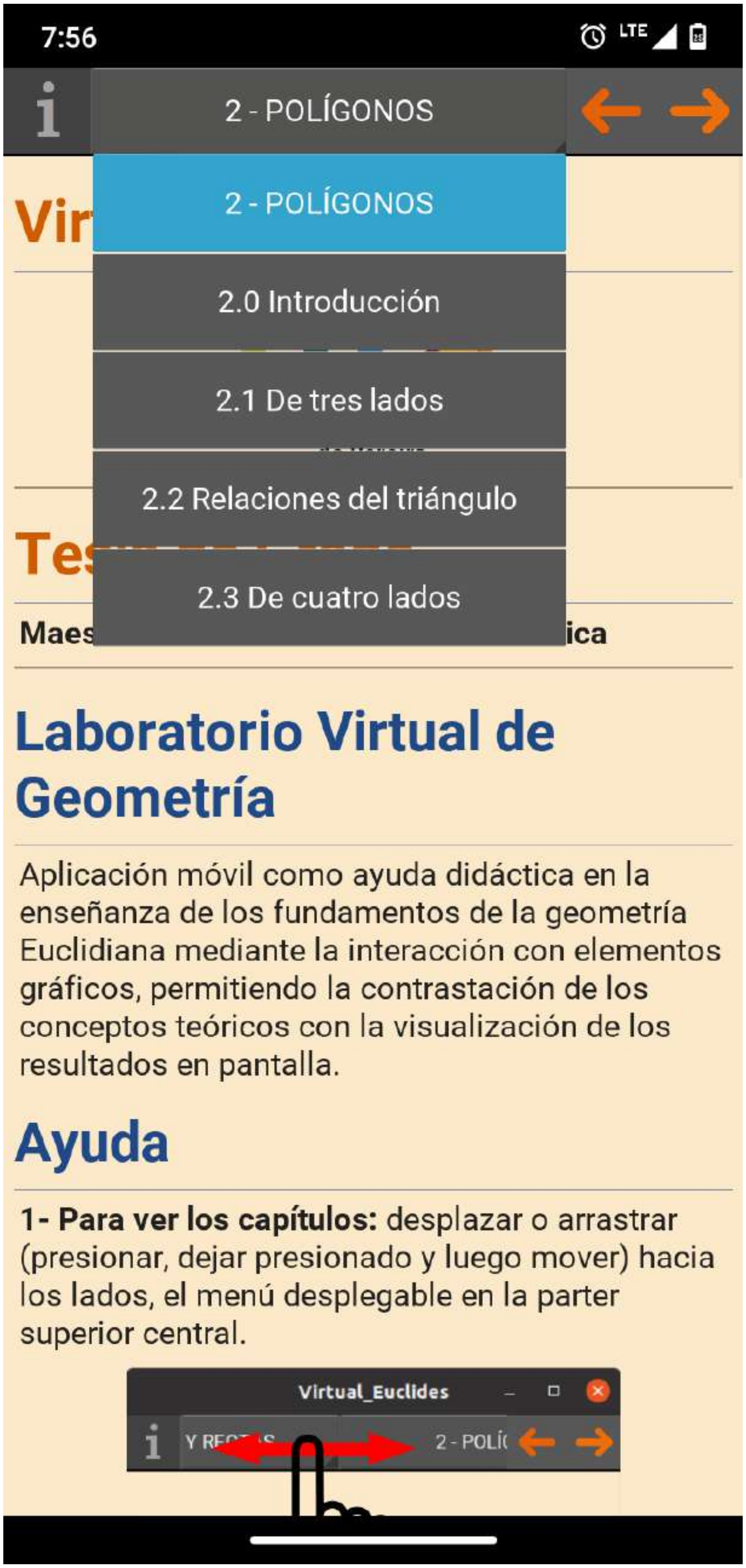
Director de tésis: Prof. Remigio Delgado Escobar

Video Google Play Store

Obra: Lo Tomas o lo Dejas

Música de https://www.fiftysounds.com/es/


7:56
LTE
1 - PUNTOS Y LINEAS
1 - PUNTOS Y LINEAS
1.0 Introducción
1.1 Concepto de punto
1.2 Concepto de línea
1.3 Dos líneas rectas
1.4 Tres líneas rectas
Geometría
Aplicación móvil como ayuda didáctica en la enseñanza de los fundamentos de la geometría Euclidiana mediante la interacción con elementos gráficos, permitiendo la contrastación de los conceptos teóricos con la visualización de los resultados en pantalla.
Ayuda
1- Para ver los capítulos: desplazar o arrastrar (presionar, dejar presionado y luego mover) hacia los lados, el menú desplegable en la parter superior central.
Virtual_Euclides
2 - POLÍ


7:56
LTE
2 - POLÍGONOS
2 - POLÍGONOS
2.0 Introducción
2.1 De tres lados
2.2 Relaciones del triángulo
2.3 De cuatro lados
Vir
Tes
Maes
ica
Laboratorio Virtual de Geometría
Aplicación móvil como ayuda didáctica en la enseñanza de los fundamentos de la geometría Euclidiana mediante la interacción con elementos gráficos, permitiendo la contrastación de los conceptos teóricos con la visualización de los resultados en pantalla.
Ayuda
1- Para ver los capítulos: desplazar o arrastrar (presionar, dejar presionado y luego mover) hacia los lados, el menú desplegable en la parter superior central.
Virtual_Euclides
2 - POLÍ(


7:56
3 - LÍNEAS CURVAS
3 - LÍNEAS CURVAS
3.0 Introducción
3.1 Circunferencia y círculo
Vir
de Pereira
Tesis de Grado
Maestría en Enseñanza de la Matemática
Laboratorio Virtual de Geometría
Aplicación móvil como ayuda didáctica en la enseñanza de los fundamentos de la geometría Euclidiana mediante la interacción con elementos gráficos, permitiendo la contrastación de los conceptos teóricos con la visualización de los resultados en pantalla.
Ayuda
1- Para ver los capítulos: desplazar o arrastrar (presionar, dejar presionado y luego mover) hacia los lados, el menú desplegable en la parter superior central.
Virtual_Euclides
2 - POLÍ

Cap.1 Sec.2 Pag.0

Concepto intuitivo

En el gráfico interactivo podemos ver un punto rojo, uno verde y una serie de puntos blancos. A medida que desplazamos el slider, el número de puntos blancos aumenta y el espacio entre cada uno se hace menor. Llega un momento en que la cantidad de puntos es tan grande que es muy difícil poder ver cada punto de manera individual.

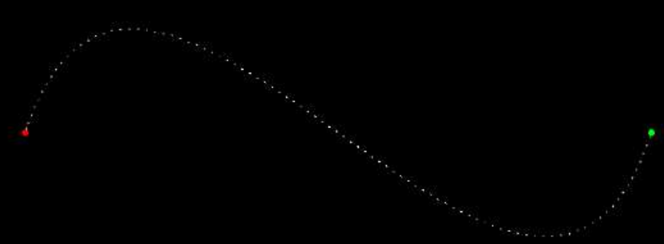
Si este proceso lo seguimos imaginariamente hasta llegar a infinitos puntos blancos, podríamos decir que 'justo' al lado de un punto se encuentra el otro sin haber espacio entre estos.

Este **segúndo concepto** es fundamental para todas las contrucciones geométricas que

7:58 LTE

1.2 Concepto de línea

Cantidad de puntos: 10^9



Definición 2

"Un línea es una lóngitud sin anchura."

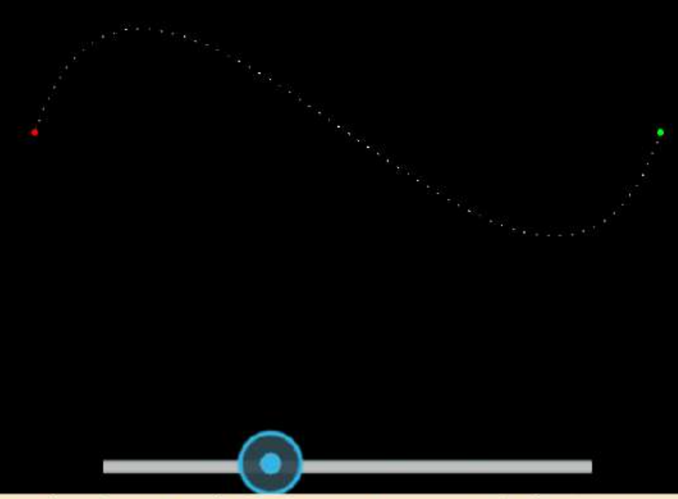
Interpretación

- Podemos decir entonces que la línea es lá **mínima expresión geométrica posible que solo tiene longitud**, no tiene ancho, ni altura por estar compuesta por una serie de puntos consecutivos sin espacio entre estos.

(Consultar el concepto de longitud).

- Su ancho no puede ser medido de ninguna forma y lo representamos con la mínima expresión visible, en este caso en la pantalla sería un pixel de ancho. En otras palabras

Cantidad de puntos: 10^5



Esto lo dice Euclides en su tercera definición:

Definición 3

"Los extremos de una línea son puntos."

Interpretación

- En este momento ya debe ser claro que una línea inicia en un punto, termina en otro punto y entre estos tiene infinitos puntos

Nota: Los puntos extremos (los de inicio y fin), no son diferentes a los demás, por definición todos los puntos son iguales. En la gráfica interactiva se representan un poco más grandes y en un color diferentes a los puntos intermedios solo para tener el efecto visual y poderlos diferenciar.

Ejemplo de código de control

El siguiente extracto de código, muestra una función para el control de la página cero, de la sección 3, capítulo 1, donde se muestran los tipos de intersección posibles entre dos líneas rectas.

```
def cap1_sec3_pag0(self):
    """Control sliders events"""
    Clock.schedule_interval(self.update_points, 0.01)
    rotation_in_degrees = self.slider_y1.value
    pivot_point_y = self.slider_y2.value
    max_length = max(self.height, self.width)
    v = Vector(1, 0)
    rotation_transformation = v.rotate(rotation_in_degrees).normalize()

    # Horizontal fixed line
    self.p_1 = [0, self.height * 3 / 4, self.width, self.height * 3 / 4]

    # Pivot point for second (mobile) line
    self.p_3 = (self.width / 2, self.height * (3 + pivot_point_y) / 4)

    # Points to draw second (mobile) line
    self.p_0 = [
        self.p_3[0] + offset - max_length * rotation_transformation.x,
        self.p_3[1] + offset - max_length * rotation_transformation.y,
        self.p_3[0] + offset + max_length * rotation_transformation.x,
        self.p_3[1] + offset + max_length * rotation_transformation.y,
    ]
    # Intersection point between two lines
    intersect = Vector.line_intersection(
        (self.p_0[0], self.p_0[1]),
        (self.p_0[2], self.p_0[3]),
        (self.p_1[0], self.p_1[1]),
        (self.p_1[2], self.p_1[3]),
    )
    # Y-distance between pivot point and fixed line
    distance = self.p_3[1] + offset - self.p_1[1]

    if not intersect or abs(intersect.x) > 100000:
        if abs(distance) < 1:
            self.label_wid.text = f"Las dos rectas son la misma.\nInfinitos puntos de intersección :-/"
        else:
            self.label_wid.text = f"Paralelas!!! No hay punto de intersección :-0\n Distancia entre rectas:
        self.p_4 = (0, 0)
    else:
        self.p_4 = (intersect.x - offset, intersect.y - offset)
        self.label_wid.text = f"Punto de intesección: ({(intersect.x - self.width/2 - offset):.1f}, {(inters
```