

**Desarrollo de una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC
como alternativa para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.**

LEONARDO CALDERÓN JARAMILLO

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Santiago de Cali

2023

**Desarrollo de una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC
como alternativa para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.**

LEONARDO CALDERÓN JARAMILLO

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Director

M.Sc. Remigio Delgado Escobar

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Santiago de Cali

2023

Dedicatoria

A mi esposa Katerine Serna y mi hijo Isaac.

A mi padre Efraín, mi madre Beatriz y mi hermana Ana María.

Resumen

Con el presente proyecto se desarrolló una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC como alternativa para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, para lo cual se desarrolló una aplicación gráfica para dispositivos móviles y una secuencia didáctica. Está diseñada para que el profesor oriente su uso dentro y fuera del aula de clase durante el desarrollo de la asignatura. Así se presentan los conceptos desde el punto y la línea hasta polígonos y circunferencia, usando un enfoque constructivista, donde la relación del usuario (estudiante) con gráficos interactivos permite desarrollar conceptos geométricos, previamente o en paralelo al estudio formal de estos.

El diseño de los gráficos interactivos y la secuencia didáctica de conceptos son propios del autor, buscando una mayor apropiación de los conceptos que tradicionalmente son presentados de forma estática y contemplativa versus un nuevo enfoque dinámico e interactivo.

A diferencia de otras alternativas actuales que se exploraron, algunas de las cuales solo brindan un listado de fórmulas o calculadoras de propiedades de objetos geométricos, otras solo muestran los conceptos con texto e imágenes estáticas u otras son tan abiertas e interactivas que se requiere de conocimientos previos del tema para poder usarse, la aplicación desarrollada permite interactuar con objetos geométricos de forma ordenada, muestra las diferentes características de cada uno al cambiar sus propiedades y acompaña cada concepto con una fundamentación teórica de lo experimentado en cada caso.

Palabras clave: Geometría, aplicación móvil, ayuda didáctica, enfoque constructivista.

Abstract

This project develops a didactic aid with the pedagogical use of the ICTs as an alternative for learning Euclidean Geometry, for which a graphic application for mobile devices and a didactic sequence were developed. It is designed for the teacher to guide its use inside and outside the classroom during the development of the subject. Thus, concepts are presented from the point and the line to polygons and circumference, using a constructivist approach, where the relationship of the user (student) with interactive graphics allows the development of geometric concepts, previously or in parallel to their formal study.

The design of the interactive graphics and the didactic sequence of concepts are the author's own, seeking a greater appropriation of the concepts that are traditionally presented in a static and contemplative way versus a new dynamic and interactive approach.

Unlike other current alternatives that were explored, some of which only provide a list of formulas or calculators of properties of geometric objects, others only show the concepts with text and static images or others are so open and interactive that some knowledge is required prior to be used, the developed application allows interaction with geometric objects in an orderly manner, shows the different characteristics of each geometric object when its properties change, and accompanies each concept with a theoretical foundation of what is experienced in each case.

Keywords: Geometry, mobile application, teaching aid, constructivist approach.

Tabla de Contenidos

Resumen	iv
Abstract	v
Introducción	1
Objetivos	2
Objetivo general.....	2
Objetivos específicos	2
Planteamiento y Justificación del Problema	3
Antecedentes	5
Metodología	8
1. Ayuda didáctica	9
En Geometría	9
Fundamentos	10
Hacia las TIC	14
Diseño	17
Secuencia	18
2. Aplicación gráfica	20
Tipo de aplicación.....	20
Tipo de plataforma.....	21
Tipo de interacción	22
Tipo de tecnología.....	23
Diferenciadores	26

Propuestas para el uso de la aplicación.....	29
3. Secuencia didáctica.....	32
Alcance	32
Secuencia	33
4. Conclusiones.....	39
5. Recomendaciones	42
6. Referencias.....	43
7. Anexos	47
Anexo 1. Propuesta para futuros capítulos de la aplicación.	47
Anexo 2. Algunas imágenes de ayuda creadas para los contenidos de la aplicación	49
Anexo 3. Capturas de pantalla de la aplicación	52
Anexo 4. Ejemplo de código de control.....	59

Lista de tablas

Tabla 1. Listado de librerías gráficas para Python.....	25
Tabla 2. Aplicaciones en la Google Play relacionadas con Geometría (mayo de 2023).	27

Lista de figuras

Figura 1. Gráfica notas de cursos de Mediciones y Geometría UNIAJC	3
Figura 2. Cono de aprendizaje (Dale, 1969). Tomado de (Duru, 2010)	11
Figura 3. Modelado desde la perspectiva realística. Tomado de Blum (2011)	12
Figura 4. Modelado de la perspectiva educativa. Tomado de (Conner & Zbiek, 2006).....	13
Figura 5. Facetas y componentes del conocimiento del profesor. Tomado de (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017)	14
Figura 6. Materiales usados para una actividad de calcular el volumen de una esfera (Duru, 2010)	15
Figura 7. Diseño de una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC.....	17
Figura 8. Esquema general para el diseño de cada página de la aplicación gráfica.	37
Figura 9. Ejemplo de una página de la aplicación gráfica con el uso pedagógico de las TIC....	38

Introducción

Se desarrolló con este trabajo una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC como alternativa para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, basada en un modelo activo de enseñanza-aprendizaje y teniendo en cuenta que cada estudiante puede tener un estilo diferente de aprendizaje (Kolb, 1984), pero utilizando un enfoque moderno basado en la interacción a través del modelamiento (Abassian, Bostic, Bush, & Safi, 2019) y la experiencia (Duru, 2010), con el fin de mejorar el aprendizaje de los conceptos geométricos. Esto se hizo a través del diseño y desarrollo de una aplicación gráfica interactiva y una secuencia didáctica que pueden ser usadas por los profesores para la enseñanza de la Geometría tanto en el aula como por fuera de esta.

Objetivos

Objetivo general

Desarrollar una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC como alternativa para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.

Objetivos específicos

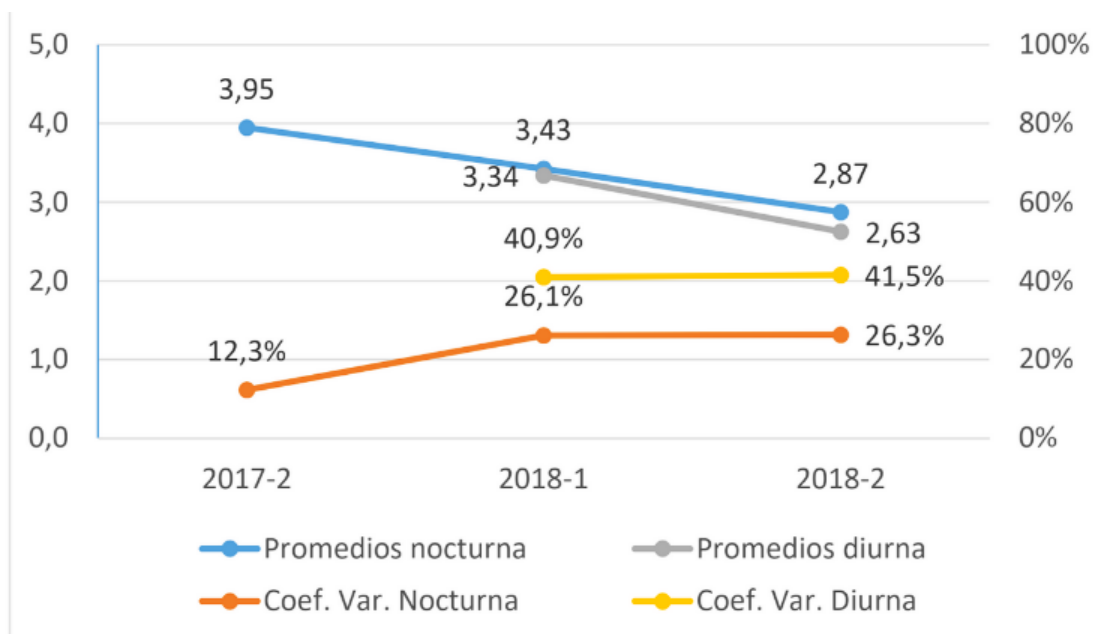
- Diseñar una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.
- Desarrollar una aplicación gráfica para la interacción con objetos geométricos.
- Crear una secuencia didáctica para una aplicación de interacción gráfica con base en un modelo activo de enseñanza-aprendizaje.

Planteamiento y Justificación del Problema

Este planteamiento se hace con base en las referencias documentales descritas en los antecedentes y en la situación vivida personalmente en la UNIAJC durante los años 2017 y 2018, la cual se muestra gráficamente en la figura 1 que, sin pretender ser un estudio estadístico, sugiere una tendencia negativa del rendimiento académico de los estudiantes del curso de Mediciones y Geometría de los programas de Ingeniería Industrial, tanto de la jornada diurna como de la jornada nocturna.

Figura 1.

Gráfica notas de cursos de Mediciones y Geometría UNIAJC



Se puede notar adicionalmente un coeficiente de variación muy alto (41%) en la jornada diurna y un incremento (de 12% a 26%) en la jornada nocturna, lo cual es indicativo de una posible tendencia a la heterogeneidad de los grupos donde se pueden encontrar unos pocos estudiantes muy brillantes en su quehacer, un grupo muy disperso en el medio y unos estudiantes con resultados muy deficientes.

Esta tendencia se continúa evidenciando incluso hasta los primeros meses del año 2020 cuando inició la pandemia mundial que marcó un hito en nuestra historia reciente y es de esperarse además que la transición forzada a la virtualidad, que se vivió por casi dos años, la haya agudizado aún mucho más.

Con este entorno de fondo y teniendo en cuenta que desde ese momento mi carrera como docente ha estado suspendida, se cambió el enfoque del proyecto de investigación. Este inicialmente pretendía crear un laboratorio físico de Geometría aplicada a la ingeniería e iba a tener un impacto localizado en algunos cursos de la UNIAJC, y pasó a ser un proyecto virtual con un potencial impacto a nivel regional e incluso nacional.

Teniendo en cuenta lo anterior y procurando generar un aporte significativo a la comunidad académica, especialmente con relación a la Geometría y cursos afines o similares, se plantea el siguiente problema de investigación: ¿Cómo desarrollar una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC para brindar una alternativa en el aprendizaje de la Geometría Euclidiana?

Antecedentes

La Matemática es un constructo social que nace en la mente humana que se usa, se comunica y se enseña en múltiples formas, bien sea de forma abstracta por medio del lenguaje verbal o escrito, de forma simbólica o por medios gráficos, todos igualmente válidos y que han sido usados desde la antigüedad. Sin embargo, estos medios no pueden considerarse efectivos de forma individual, es decir, tratar de describir la curva de una función con palabras, nunca va a ser tan efectivo como hacer una gráfica que la represente. Por otra parte, tratar de resolver una ecuación diferencial con su representación se convierte en una aproximación y deberán usarse medios escritos y simbólicos para tratar de hallar su solución exacta. Es así como proponemos que estos tres tipos de lenguajes, escrito, simbólico y gráfico son complementarios e indispensables para el estudio de esta ciencia.

Se puede afirmar desde la experiencia, que generar un proceso de enseñanza-aprendizaje es más efectivo cuando se combinan estos tres lenguajes de una forma armoniosa para transmitir el concepto matemático abstracto de una mente a otra y que el estudiante pueda apropiarse de dicho concepto para su uso. Ahora bien, ¿Por qué decimos que el lenguaje gráfico es también indispensable? ¿Por qué es la visualización de los conceptos matemáticos también un aspecto fundamental de su enseñanza?

El ser humano es un ser visual por naturaleza porque nuestro sentido predominante en términos generales es la visión, ya que esta nos permite tener una mayor cantidad de información de nuestro entorno que cualquiera de los demás sentidos que

poseemos. De esta forma se convierte en la entrada principal de acceso a nuestro cerebro y funciona de una forma muy especializada pudiendo procesar nuestro cerebro una gran cantidad de información con solo abrir los ojos durante un segundo, cosa que no ocurre con los demás sentidos. Es así como la visión es nuestro sentido más desarrollado y desafortunadamente no es el que más aprovechamos a la hora de enseñar. Este es el caso de un docente, por ejemplo, al tratar de explicar con palabras y un dibujo estático en un tablero un concepto como una figura tridimensional con sus caras, vistas, vértices y aristas donde para poder hacer alguna transformación necesitaría volver a dibujarla, lo cual toma un tiempo importante y por ello se puede preferir explicar con palabras un concepto que es principalmente visual.

Es en este punto donde la visualización de conceptos matemáticos toma un papel fundamental para poder realizar tareas como la expuesta, de una forma más efectiva e interactiva, que permita al estudiante ver muchos más puntos de vista que los mencionados por el docente y donde se pueda comprobar si el concepto que tenemos es correcto o no. La visualización mediada especialmente por tecnologías de la información permite al docente mostrar sus ideas, pero lo más importante es que le permite al estudiante interactuar para que el aprendizaje sea una actividad de transmisión de información bidireccional, en donde el software utilizado brinde una retroalimentación de las ideas que el estudiante desea comprobar si son las deseadas.

Ahora, si nos detenemos a pensar un poco en el proceso de visualización como tal, este ha existido desde que realizamos los primeros dibujos en papiros como en los Elementos de Euclides, ha evolucionado en la impresión de libros con gráficas y se ha

perfeccionado con el uso de ilustraciones realizadas por computador, pero ha alcanzado su máxima expresión hasta el momento con el desarrollo de software que permite no solo la visualización sino también la interacción de la persona con un entorno gráfico en 2D, 3D simulado en 2D (pantallas) o 3D simulado en profundidad como la realidad aumentada o realidad virtual (AR/VR).

Y es precisamente esta característica de interacción la que ha arrinconado en las últimas dos décadas a muchos docentes que tal vez no nos hemos apropiado oportunamente de estas tecnologías desaprovechando sus beneficios. Y decimos arrinconado porque hoy en día un estudiante puede tener acceso en su teléfono celular a un sin fin de herramientas multimediales e interactivas que le hace ver la obsolescencia de tratar de explicar conceptos visuales en tablero. Pero es este fenómeno el que nos debe impulsar a realizar un cambio en nuestros paradigmas actuales, a usar y fomentar el uso de herramientas digitales como un paso importante para el desarrollo de la visualización de conceptos matemáticos por parte de nuestros estudiantes.

Metodología

Para cumplir con los objetivos del presente trabajo se emplearon los siguientes métodos experimentales.

Investigación exploratoria: para conocer el estado actual de aplicaciones para la enseñanza de la Geometría Euclidiana, con el fin de revisar las condiciones existentes sobre las cuales no se tiene información determinante y los aspectos fundamentales de la problemática planteada. Con los resultados se espera también abrir nuevas líneas de investigación en la enseñanza de la Matemática.

Investigación aplicada: para buscar la aplicación de los conocimientos adquiridos en la enseñanza de la Geometría, con énfasis en los resultados prácticos, útiles tanto al docente como al estudiante en el contexto actual.

Revisión bibliográfica: para luego diseñar una ayuda didáctica con base en experiencias exitosas y la experiencia del investigador con el curso de Geometría aplicada teniendo como base al entorno académico y sociocultural de la UNIAJC.

Modelo incremental: se utiliza esta metodología de desarrollo de software donde se realizarán diferentes versiones cada vez con mayores características y contenidos hasta lograr un mínimo deseado. Igualmente se utilizan buenas prácticas como: control de versiones, código abierto y modelo vista-controlador entre otros.

1. Ayuda didáctica

En Geometría

Desde la antigüedad han existido dos tendencias para la enseñanza de la Geometría: la línea abstracta basada en Platón y Euclides y la línea pragmática representada por el trabajo de Herón de Alejandría, alentando tensiones a lo largo de la historia por diferentes manuscritos que han usado una u otra obra y generaron diferentes formas de enseñanza durante las edades antigua y media (Barbin & Menghini, 2014). Desde este punto se empezaron a generar diferentes opciones para la enseñanza de la Geometría.

Por otro lado, la enseñanza tradicional de la Matemática no ha generado los resultados esperados a lo largo de las últimas décadas, obteniéndose a cambio un proceso de memorización por parte de los estudiantes y la metodología basada en lecturas promueve una actitud pasiva, desinterés y fallas en el proceso (Duru, 2010). Para contrarrestar esta situación se han desarrollado múltiples estrategias para la enseñanza de la Matemática incluyendo metodologías activas (Mulyono, 2011), enfoques basados en modelamientos (Conner & Zbiek, 2006), enfoques basados en competencias tanto de los estudiantes como del profesor (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017), enfoques histórico-culturales (Rowlands, 2010), reformas curriculares (Aydin, Halat, & Jakubowski, 2008), medios tecnológicos como herramientas didácticas (Bortolossi, 2015), uso de juegos de computador y ayudas de inteligencia artificial (Su, 2017) y enfoques pragmáticos (Menghini, 2015) entre otros, mostrando en todos los casos

mejores resultados que el enfoque tradicional conductivista, los cuales serán tenidos en cuenta para el desarrollo de esta investigación.

Fundamentos

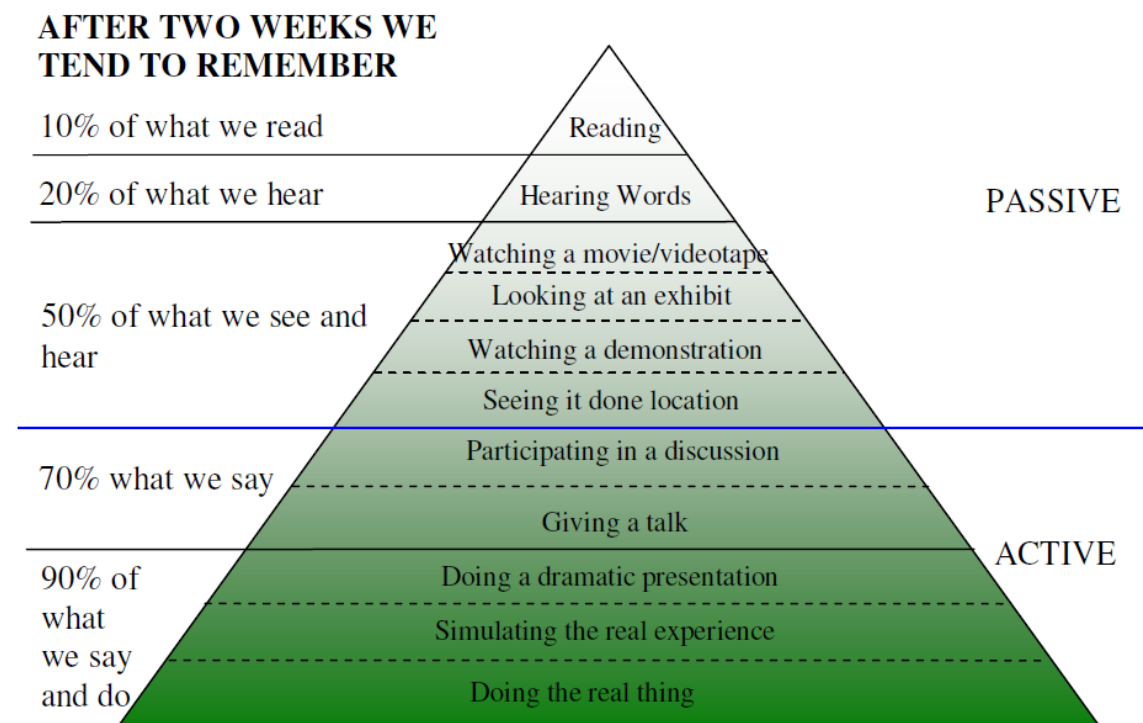
Partiendo de la base de que cada estudiante puede tener un estilo de aprendizaje (Kolb, 1984) el cual no necesariamente puede estar alineado con la didáctica generada en el espacio de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, se desea primero revisar como estos estilos de aprendizaje que han sido validados en estudios recientes (Assudani, Burns, Chinta, & Manolis, 2013) o han sido actualizados con un enfoque moderno (Ertekb & Gogusa, 2016) pueden ser aplicables o no al objeto de estudio, o si por el contrario puede ser más viable utilizar enfoques que dan recomendaciones para abandonar la caracterización de los estudiantes por su estilos de aprendizaje (Kirschner, 2017) y que van más allá brindando un acercamiento que busca enfocarse en las diferencias individuales de aprendizaje (An & Carr, 2017).

Con base en lo anterior, se desarrolló una investigación para diseño de una ayuda didáctica con base en el modelo activo de enseñanza-aprendizaje de la Geometría basado en el trabajo de (Duru, 2010) quien realizó un estudio comparativo para una clase con estudiantes de bachillerato usando el método de enseñanza activa experimental y el método de enseñanza tradicional enfocado en el profesor. Adicionalmente se tuvo como base fundamental, el cono del aprendizaje de (Dale, 1969) mostrado en la Figura 2, donde entendemos como una metodología activa aquella en la cual empieza a haber

participación en discusiones y hacer exposiciones hasta construir representaciones, simulaciones o situaciones reales.

Figura 2.

Cono de aprendizaje (Dale, 1969). Tomado de (Duru, 2010)



Se utilizó como marco general un enfoque moderno basado en la interacción de los estudiantes con objetos matemáticos a través del modelamiento, para lo cual existen al menos dos perspectivas, una realística y otra educativa (Abassian, Bostic, Bush, & Safi, 2019). Aunque las dos son muy similares, difieren un poco en su modelo central y su objetivo final. La perspectiva realística basada en (Blum, 2011) que se muestra en la

Figura 3, busca desarrollar habilidades de modelamiento matemático y entendimiento de escenarios del mundo real, mientras que la perspectiva educativa basada en (Conner & Zbiek, 2006) de la Figura 4, busca desarrollar habilidades de modelamiento matemático de escenarios reales y entendimiento de la Matemática al mismo tiempo.

Figura 3.

Modelado desde la perspectiva realística. Tomado de Blum (2011)

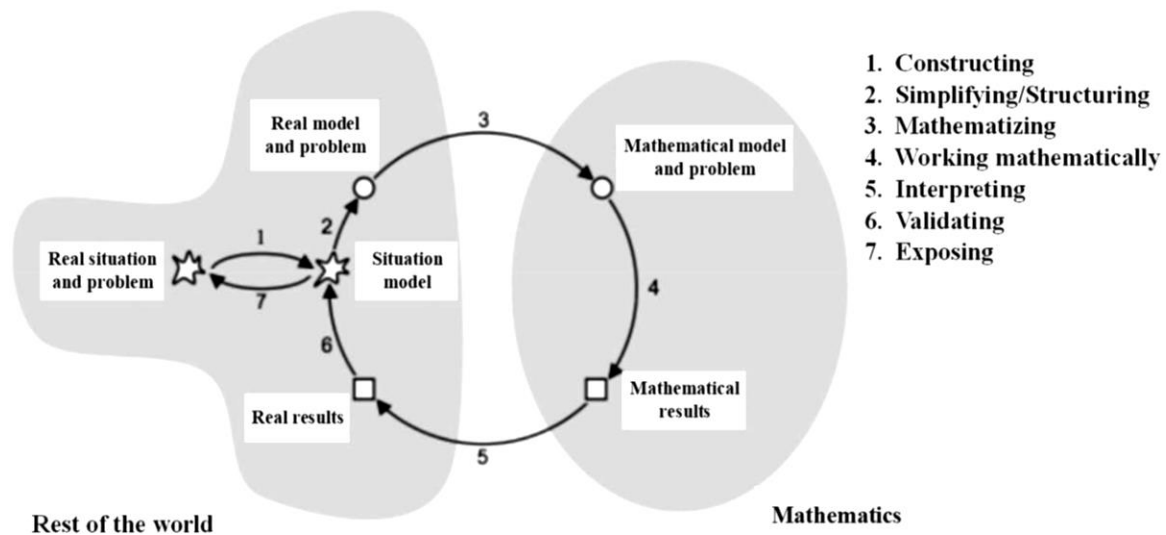
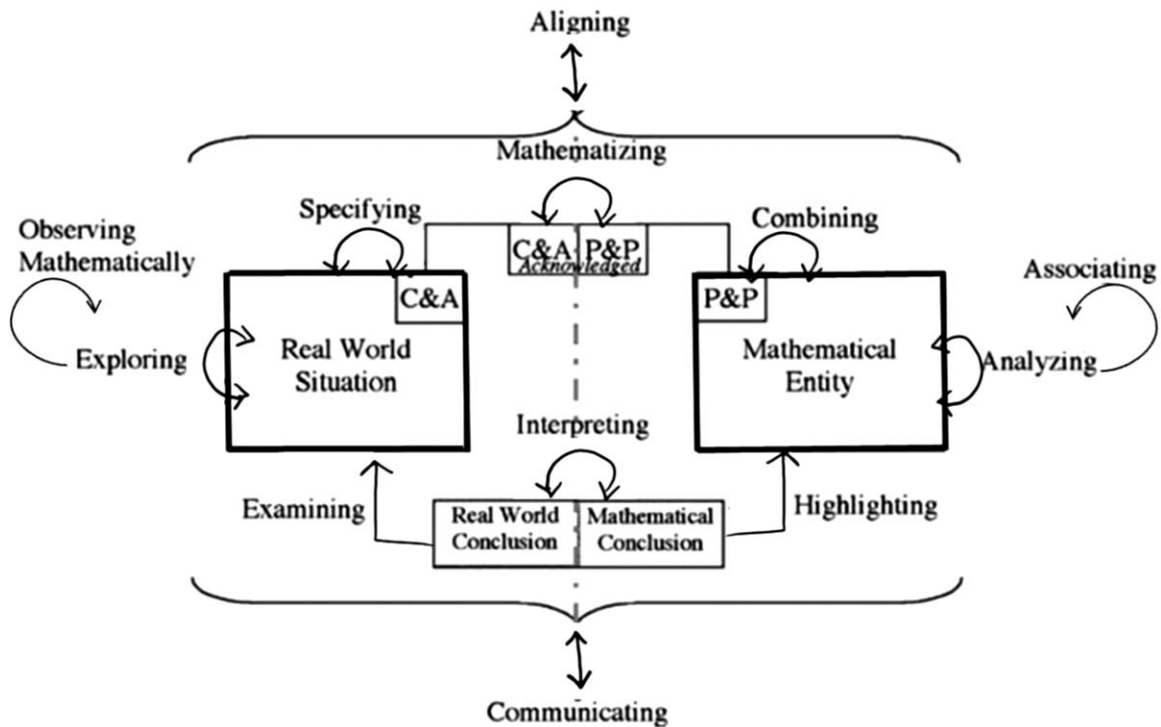


Figura 4.

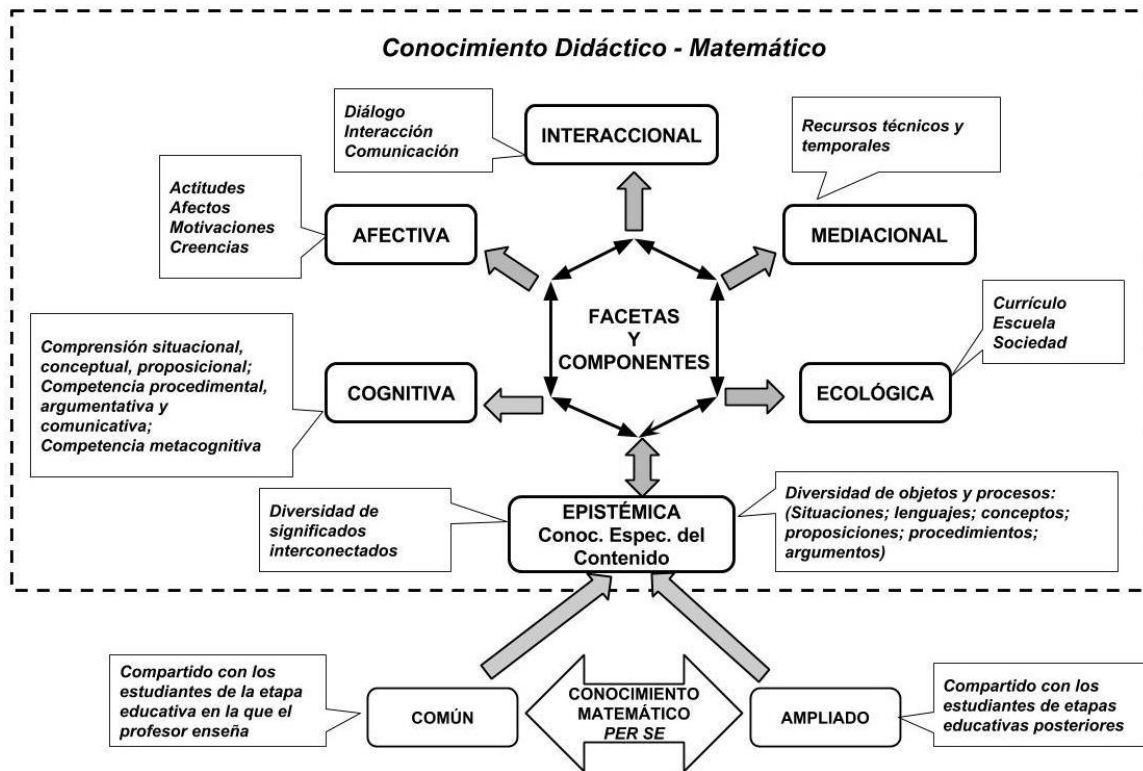
Modelado de la perspectiva educativa. Tomado de (Conner & Zbiek, 2006).



Estas perspectivas se adaptaron para diseñar una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC de un curso de Geometría Euclidiana, teniendo en cuenta que el conocimiento matemático por sí solo no es suficiente para organizar, implementar y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los factores influyentes son complejos, y se debe tener un conocimiento más profundo de la Matemática y su enseñanza, más allá del que adquieren los estudiantes. En la Figura 5 se presenta el modelo de conocimiento didáctico-matemático, que se superpone al conocimiento matemático (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017).

Figura 5.

Facetas y componentes del conocimiento del profesor. Tomado de (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017)



Hacia las TIC

En la Figura 6 se muestra un ejemplo de una práctica que se desarrolla para la enseñanza del concepto de volumen la cual genera mayor apropiación durante el proceso de aprendizaje.

Figura 6.

Materiales usados para una actividad de calcular el volumen de una esfera (Duru, 2010)



Con base en esta idea se planteó el uso de una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC y desarrollo de una aplicación gráfica para dispositivos móviles la cual brinda al estudiante una experiencia que va más allá de las prácticas físicas, al permitir interactuar directamente con representaciones de objetos geométricos y poder ver sus propiedades a medida que se alteran dichas representaciones.

La masificación de las TIC en el ámbito educativo desde finales de la década de los años 90 e inicios del nuevo siglo hasta nuestros días, ha llevado a muchos investigadores a revisar el papel de estas dentro y fuera del aula de clase.

Es así como se distinguen tres tipos de procesos cognitivos:

- La visualización de procesos (interpretación de diagramas geométricos)
- La construcción de herramientas para la resolución de problemas: exploración, manipulación e interpretación de los datos.
- El razonamiento, la conjetura y la prueba, relacionando las representaciones con los conocimientos teóricos

Los cuales crean una sinergia cognitiva necesaria para el aprendizaje de la Geometría y podemos decir que “... los entornos tecnológicos han creado nuevas formas de ofrecer la realización de actividades geométricas en Educación Matemática” (Fortuny, Iranzo, & Morera, 2010).

Todo esto ha llevado a la idea de laboratorio tecnológico durante la realización de este proyecto de investigación, muy alineado con tendencias actuales en enseñanza de las Matemáticas (Yerbes & Méndez, 2018):

- “...establecer un laboratorio tecnológico... es configurar un espacio de debate, experimentación y construcción de estrategias de solución donde la tecnología juegue un papel relevante para estudiar la Matemática de la escuela desde otro plano, uno donde puedan generarse una diversidad de argumentaciones”
- “... se propone una actividad que busca la incorporación de la tecnología educativa en el aula de Matemáticas, como un instrumento en la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes”.
- “La tecnología educativa debe ser usada como apoyo en la construcción de conocimiento matemático, en lugar de usarla para representar o emular un objeto matemático.”

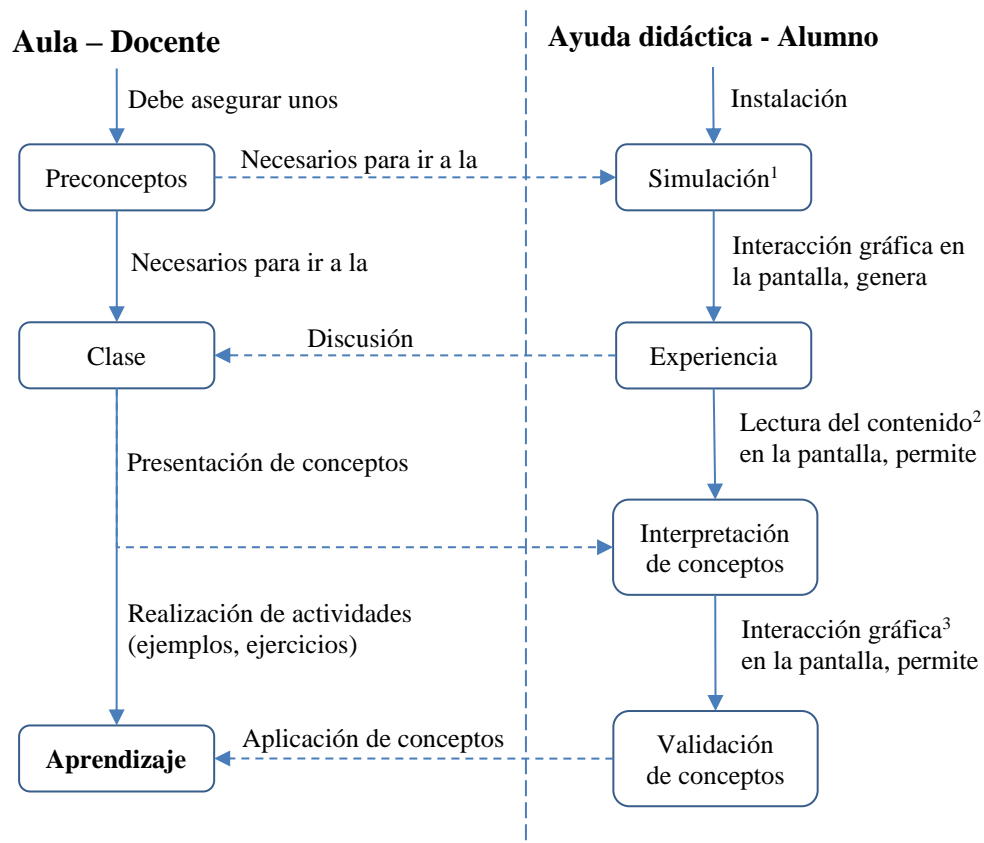
Especialmente esta última idea llevó a la realización de una aplicación móvil desde cero y a no utilizar programas de computación actuales para modelación matemática los cuales, sin desconocer su gran utilidad, requieren de ciertas destrezas, conocimientos previos y finalmente están más enfocados en la representación de objetos matemáticos y cálculos, pero no tanto en la construcción del conocimiento matemático.

Diseño

Para el diseño de la ayuda didáctica se ubica esta primero en el cono del aprendizaje de la Figura 2, en la simulación de experiencias reales, siendo por lo tanto parte de una metodología activa.

Figura 7.

Diseño de una ayuda didáctica con el uso pedagógico de las TIC.



¹ simulación interactiva de modelos de objetos geométricos.

² el contenido asociado a cada objeto geométrico y sus propiedades puede contener conceptos teóricos, gráficos explicativos, tablas informativas y actividades de consulta.

³ una nueva interacción con la simulación a través de la observación y la exploración matemática guiada o autónoma.

En la Figura 7 se describen los diferentes espacios o estados con recuadros y las actividades u observaciones con texto sobre las flechas de flujo para definir el diseño de la ayuda didáctica. Tenemos entonces dos espacios (izquierda y derecha) y diferentes momentos (recuadros hacia abajo). A la izquierda tenemos el espacio tradicional del aula con el docente donde se aseguran unos *preconceptos*, se desarrolla una clase presentando unos conceptos y se espera lograr un aprendizaje luego de la realización de actividades académicas. A la derecha tenemos el nuevo espacio generado con la ayuda didáctica, con el uso pedagógico de las TIC y el alumno.

Secuencia

Iniciando con el Docente quién debe asegurar unos *preconceptos* de clase, se puede iniciar el trabajo en paralelo con la aplicación (ayuda didáctica) partiendo de un proceso de *simulación* donde se interactúa con gráficos de objetos geométricos, lo cual genera una primera *experiencia* en el Alumno.

Se podrá propiciar una *discusión* durante la misma *clase* o en la clase siguiente, generando un entorno constructivo donde cada Alumno pueden debatir sobre lo observado, para luego realizar una lectura de los contenidos de la aplicación que complementarán los conceptos presentados por el Docente. Se obtendrá una *interpretación de conceptos* y en una segunda interacción gráfica con la aplicación, se podrá realizar una *validación* de estos, es decir, el estudiante podrá confrontar lo estudiado con los datos de la interacción gráfica.

En la etapa final, los conceptos validados podrán ser aplicados en clase con la realización de actividades para permitir un *aprendizaje* del Estudiante.

Para apoyar el diseño de esta ayuda didáctica se desarrolló una aplicación gráfica para la interacción con objetos geométricos acompañada de una secuencia didáctica para guiar su uso efectivo de esta.

2. Aplicación gráfica

El laboratorio inicialmente concebido durante el anteproyecto era físico, presencial, con materiales que podían manipularse en un aula de clase; sin embargo, debido a los grandes cambios ocurridos en los últimos dos años a nivel mundial y la gran relevancia que han tomado las alternativas no presenciales en la enseñanza, se concibe la construcción de un piloto de laboratorio interactivo de Geometría usando las TIC.

Para esto se evaluaron múltiples opciones de implementación entre las cuales estaban: aplicaciones web, aplicaciones para computador, diferentes tecnologías como realidad aumentada, realidad virtual y varias plataformas o lenguajes de programación.

Tipo de aplicación

La primera decisión por tomar fue el tipo de aplicación, es decir, si sería un software de aplicación gráfica, de realidad virtual o de realidad aumentada, seleccionando la primera opción por las siguientes consideraciones:

- La realidad virtual se descartó inicialmente por el relativo alto costo de los dispositivos necesarios, lo cual reduciría considerablemente el alcance de la población objetivo.
- La realidad aumentada puede tener un costo similar a una aplicación gráfica para dispositivos móviles, es decir, solo se requeriría por ejemplo un teléfono móvil en ambos casos. Sin embargo, la realidad aumentada se descartó porque implica la necesidad de tener ciertos objetos, accesorios, dibujos o impresión de códigos QR

para que el usuario pueda interactuar con esta realidad a través de su teléfono móvil. Esto finalmente suma un grado más de dificultad al proceso, el cual se espera sea lo más sencillo posible de tal forma que abarque la mayor cantidad de población. Sin embargo, se recomienda explorar esta alternativa en futuras investigaciones usando la misma ayuda didáctica pero implementada con esta tecnología.

- La aplicación gráfica, presenta el menor costo de implementación y permite ser lo suficientemente genérica para ser usada de forma masiva en muchos tipos de dispositivos como computadores, tabletas digitales y teléfonos móviles.

Tipo de plataforma

La segunda decisión importante fue el tipo de plataforma para la cual se desarrollaría la aplicación y las tres opciones principales a evaluar fueron: web, móvil o computador. La selección tuvo en cuenta lo siguiente:

- Una aplicación web implica que el usuario debe tener un dispositivo para acceso a internet con una conexión permanente. Esto aumenta el costo del proceso y reduce las posibilidades de uso en situaciones donde no se tenga una conexión o esta no sea suficiente y estable para todos los estudiantes.
- Una aplicación para computador o también llamada aplicación de escritorio se traduce en tener un computador disponible por cada estudiante (o pareja de estudiantes). Eso no es posible en muchos casos, donde el estudiante puede no

tener esta herramienta disponible en su casa o en el salón de clase (Portafolio, 2021).

- Por otro lado, una aplicación móvil, es decir, aquella que puede ser instalada y usada en dispositivos como tabletas digitales o teléfonos móviles y la cual no requiera el uso de internet podría ser accesible, al menos en teoría, a toda la población en Colombia donde existen 1.28 celulares por cada colombiano (128% de incidencia) respecto al 69% de cobertura del servicio de internet (Gaviria, 2022)

Tipo de interacción

Una vez fueron tomadas estas dos importantes decisiones, en resumen, realizar una aplicación gráfica para dispositivos móviles sin usar conexión a internet, el siguiente punto importante fue definir el tipo de interacción que tendría el estudiante entre las siguientes opciones: imágenes estáticas, animaciones, imágenes interactivas o espacios para graficación libre. La opción seleccionada fue tener imágenes interactivas, es decir, gráficos que pudieran ser manipulados por el estudiante para ver diferentes comportamientos de los objetos presentados y que de esta forma se puedan ver diferentes resultados según la manipulación que se realice. Un ejemplo de la cuarta opción es el software Geogebra, el cual presenta un espacio de trabajo libre pero que también puede ser previamente configurado para realizar un proceso similar al de tener imágenes interactivas.

Aunque a primera vista esta opción (Geogebra) podría haber sido la mejor opción, se descartó porque en principio está diseñada más para la graficación y cálculo matemático, que para presentar conceptos abstractos de estudio como los objetos geométricos puros que, en esencia, son libres de dimensiones. De esta forma el autor está alineado con la idea de usar más las TIC para la construcción del conocimiento y no tanto para la representación, emulación o cálculos de objetos matemáticos (Yerbes & Méndez, 2018).

Por otro lado, al tener múltiples herramientas, configuraciones y opciones, el objetivo central de estudio de objetos geométricos se dispersa hacia el aprendizaje del uso de un software específico más que del objeto matemático en sí y por ello se prefirió la construcción de una aplicación propia, desarrollada específicamente para implementar la ayuda didáctica diseñada.

Se recomienda explorar para un futuro trabajo de investigación, la implementación del diseño concebido y la secuencia didáctica en el software Geogebra con base en los resultados del presente proyecto, o como una segunda ayuda didáctica con un enfoque más abierto y enfocado a la resolución de problemas numéricos.

Tipo de tecnología

A continuación, siguió una fase de exploración de tecnologías que permitieran realizar la aplicación móvil teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Plataforma o lenguaje de programación con una rápida curva de aprendizaje.

- De código abierto, es decir, que sea de acceso libre para su uso, copia y modificación.
- Capacidad y rendimiento suficiente para poder crear gráficos bidimensionales interactivos con pantalla táctil en teléfonos móviles.

La siguiente es una lista no exhaustiva de tecnologías y/o lenguajes explorados (Inmune, 2021) (InnovaAge, 2022) (Sakovich, 2022):

- Java
- Python
- Swift
- Javascript
- Kotlin
- React native
- Ionic
- PhoneGap
- Xamarin
- Sencha
- Flutter.

Sin entrar en detalles técnicos que no son relevantes para los objetivos del presente trabajo, se escogió el lenguaje de programación Python y posteriormente se escogió una librería gráfica específica (Kivi) para el desarrollo de aplicaciones en plataformas móviles con sistema de pantalla táctil. Estas dos elecciones cumplen con los criterios propuestos. En la Tabla 1 se listan otras librerías para Python que fueron

evaluadas, las cuales pueden ser de interés (Gui Programming, 2022) (Farooq, 2018) (Python on Android, 2022) (Adabala, 2020).

Tabla 1.

Listado de librerías gráficas para Python

Nombre	Página web
Turtle	https://docs.python.org/3/library/turtle.html
BeeWare	https://beeware.org/
Kivy	https://kivy.org/
QPython	https://www.qpython.com/
Termux	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.termux
Matplotlib	https://matplotlib.org/
Blender	https://www.blender.org/
Panda3D	https://www.panda3d.org/
Bokeh	https://bokeh.org/
OpenCV	https://opencv.org/
Sandbox	http://www.sandbox.game/

Una decisión adicional que se tomó después de explorar las librerías anteriormente mencionadas tenía que ver con el tipo de sistema operativo de teléfonos móviles. La librería seleccionada permite la generación de instaladores tanto para Android como para IOS de Apple, los dos sistemas operativos dominantes en el

momento, sin embargo, los siguientes factores influyeron para decidir crear instaladores solo para Android:

- El autor no cuenta con acceso a un teléfono móvil con sistema operativo IOS, lo cual dificultaría el proceso de pruebas de la aplicación.
- Crear el instalador para IOS implicaría subir dicho instalador a la tienda de aplicaciones de Apple (App Store) y es un proceso más complejo y costoso que para subir los instaladores a la tienda de aplicaciones de Android (Google Play) a donde finalmente se subió el instalador.
- El 89% de los usuarios colombianos ingresan a Internet a través de un sistema operativo Android y el 10% Apple (StatCounter, 2022) (Medina, 2022)

Diferenciadores

Finalmente se tomó la decisión de diferenciarse de otras aplicaciones móviles de Geometría, que por un lado solo brindan un listado de fórmulas y/o calculadoras de objetos geométricos o solo muestran los conceptos con texto e imágenes estáticas. Incluso una combinación de estos dos tipos de aplicación no permite un aprendizaje desde la construcción del conocimiento sino solo una apropiación de ideas no siempre conexas. A continuación, se presenta una lista no exhaustiva de aplicaciones móviles disponibles para Colombia en la Google Play, relacionadas con Geometría y acompañadas con su descripción oficial y una opinión del autor del este trabajo.

Tabla 2.

Aplicaciones en la Google Play relacionadas con Geometría (mayo de 2023).

Nombre	Descripción	Comentarios
Euclidean geometry	Handbook of Euclidean geometry	En inglés, información estática, metodología conductivista
Euclidean	Geometric construction puzzles.	En inglés. Es interactiva. Aunque presenta algunos conceptos básicos, se enfoca solo en la solución de problemas de construcciones geométricas complejas.
Geometry Practice & Prep	Geometry full-length, timed practice tests, diagnostic exams, and flashcards	En inglés. Información estática. Se enfoca exclusivamente en la resolución de cálculos de problemas geométricos con base en selección múltiple.
Geometry Mathematics	Learner's series application for Geometry Mathematics	En inglés. Información estática. Presenta de una forma muy completa muchos objetos matemáticos, sin embargo, es totalmente estática usando un enfoque conductivista.
Geometry (NaNsolvers)	All you need in geometry. Over 30 figures.	Está en inglés y también en español como Geometría. Interactiva solo para cálculos matemáticos. Básicamente una calculadora de problemas de longitudes, áreas y volúmenes.
Geometry (ARPAPLUS)	Expects the majority of geometric shapes on the given parameters.	Está en inglés y también en español como Geometría Calculadora. Similar a la anterior, solo para cálculos matemáticos. Es una calculadora de problemas de longitudes, áreas y volúmenes.

Geometry solver & Trig solver	Geometry solver – Trigonometry calculator.	En inglés y también en español como Calculadora geometría formulas. Similar a la anterior, solo para cálculos matemáticos. Es una calculadora de problemas de longitudes, áreas y volúmenes.
Geometryx: Geometry calculator	Formulas and calculations for 2D and 3D geometry	Está en inglés y también en español como Geometrix: Geometría Cálculos. Similar a la anterior, solo para cálculos matemáticos. Es una calculadora de problemas de longitudes, áreas y volúmenes.
xGeometry	Solve geometry problems step by step	Está en inglés y también en español como Resuelve Geometría. Aunque es interactiva, solo permite seleccionar lados de las figuras para calcular longitudes, áreas y volúmenes.
Learn Trigonometry & Geometry	Learn complete Trigonometry Mathematics	En inglés. Tiene partes que requieren una suscripción (pago). Es estática y presenta el contenido de forma tradicional.
Geometry Pad	Plane geometry study companion	En inglés. Es interactiva pero su función es solo la graficación de objetos geométricos.

De esta forma la aplicación desarrollada se diferencia del estado actual de aplicaciones relacionadas, porque permite al estudiante:

- Interactuar con objetos geométricos para modificarlos de forma natural en la pantalla y explorar los resultados de diferentes parámetros de estudio.

- Tener algunos conceptos teóricos de soporte que refuerzan cada una de las interacciones y permiten realizar una nueva exploración de parámetros, si algunas características no fueron descubiertas la primera vez.
- Tener un aprendizaje constructivista. Se parte desde los fundamentos mismos de la Geometría Euclidiana, al estudiar el concepto de punto y línea para luego generar otros a partir de estos como línea recta, distancia, ángulo, paralelismo, perpendicularidad y finalmente construyendo polígonos y estudiando sus características, tipos y propiedades.

Al crear esta aplicación como código abierto (una diferencia más) usando tecnologías de fácil aprendizaje por un entusiasta de la programación, la ingeniería o las ciencias exactas, se deja una plataforma para futuros desarrollos que permitan ampliar su alcance con respecto a la Geometría, o incluso explorar otras áreas del conocimiento usando el mismo principio de aprendizaje constructivista con un método inductivo, donde el estudiante va soportando el nuevo conocimiento desde los objetos más simples hasta llegar a objetos más complejos.

Propuestas para el uso de la aplicación

Se proponen diferentes niveles de uso de la aplicación para el aprendizaje de la Geometría desde posibles puntos de interés, diferentes niveles de formación y se generan algunos enfoques de futuros trabajos de investigación.

- **Inicial:** enfocado en un estudiante de bachillerato o primeros semestres de carreras técnicas, tecnológicas o profesionales. Se recomienda la interacción directa con la aplicación, esto incluye el uso de las gráficas interactivas de manera conjunta con la lectura de los contenidos y en paralelo a una *asignatura de Geometría, Matemática fundamental o similares*.
- **Intermedio opción 1:** enfocado en un estudiante de ciencias básicas, ingenierías o afines. En adición a la recomendación del nivel inicial, se propone al estudiante la descripción matemática detallada o demostración de los conceptos expuestos en cada página, lo cual supone un nivel de madurez teórica un poco mayor.
- **Intermedio opción 2:** para estudiantes de ciencias básicas, ingeniería de sistemas, mecatrónica o afines. Se propone el análisis, interpretación y pruebas del código fuente de uno o más de los conceptos (páginas de sección) de la aplicación y de esta forma entender el concepto Matemático en paralelo con un tema afín a la profesión.
- **Avanzado 1:** para estudiantes de ciencias básicas, ingeniería de sistemas, mecatrónica o afines como alternativa de proyectos de semestre, donde un grupo de estudiantes tenga la oportunidad de profundizar en conceptos de varias áreas del conocimiento. Se propone modificar el código fuente de alguna sección de la aplicación, para modificar o agregar páginas y poder ver nuevos resultados gráficos al compilar la aplicación e interactuar con la nueva versión.
- **Avanzado 2:** para estudiantes de ciencias básicas, ingeniería de sistemas, mecatrónica o afines como alternativa de tesis de grado. Se propone hacer un *fork*

del código (DesarrolloWeb, 2021) o un aporte a la aplicación haciendo un *pull request* (DesarrolloWeb, 2015) para generar una nueva aplicación. Se plantean dos variantes las cuales podrían ser trabajos de tesis de pregrado, especialización o maestría según el alcance:

- Ampliación de las páginas y/o contenidos de una sección o capítulo.
- Creación de una nueva sección o capítulo.
- Usar la estructura de la aplicación para una nueva temática.

Para una fácil distribución de la aplicación se creó una cuenta en Google Play y así poder instalarla fácilmente en cualquier teléfono móvil con sistema operativo Android. Se puede acceder a la aplicación Google Play y buscar “Virtual Euclides” para encontrar la aplicación o ir directamente a (Calderon, Virtual Euclides, 2023). Por último, el código fuente del proyecto queda disponible en la plataforma GitHub en (Calderon, leocjj/msc_thesis, 2023).

3. Secuencia didáctica

Alcance

Como soporte a la aplicación de interacción gráfica desarrollada, se tiene una secuencia didáctica creada para seguir un enfoque inductivo, constructivista, donde cada objeto matemático estudiado es la base para la construcción de los siguientes objetos presentados. De esta forma la secuencia puede diferir en su orden respecto, por ejemplo, del orden de las definiciones y postulados de Euclides o de textos modernos de Geometría (Recalde Caicedo, 2018).

La secuencia didáctica fue creada con base en el diseño previamente propuesto, donde se describe un espacio para la simulación e interacción gráfica y otro espacio para lectura del contenido asociado al objeto geométrico presentado con sus propiedades.

Por otro lado, hay ciertos aspectos de se deben mencionar, los cuales no son parte del alcance del presente trabajo:

- No se pretende realizar un proceso demostrativo de los conceptos y no sustituye el estudio formal del contenido de un curso que implique los conceptos básicos de la Geometría Euclidiana.
- No se presenta una rigurosidad matemática en la descripción de los objetos matemáticos, la cual hace parte de la responsabilidad del profesor y no se pretende sustituirlo en su función.
- No contiene todos los objetos geométricos de estudio, ni se presenta como una lista exhaustiva de temas; solo se trabajan aquellos que el autor considera

importantes y en un orden específico para construir unas bases conceptuales sólidas, que permitan al estudiante más adelante poder abordar otros objetos o conceptos geométricos.

- Por lo tanto, el orden de presentación de los conceptos sigue el orden que el autor consideró adecuado desde un punto de vista constructivista, inductivo, a partir de la experiencia con la interacción virtual de objetos geométricos. Y de este modo se recomienda seguir el orden propuesto para tener una mayor coherencia entre capítulos y secciones.
- En el contenido se presentan definiciones, postulados y nociones comunes del libro I de los Elementos de Euclides (de allí el nombre de la aplicación, Virtual Euclides) pero no se pretende hacer una presentación completa y detallada al respecto, sino utilizar estos como referente conceptual para ahondar en la experiencia de interacción.
- Se utilizará la palabra Geometría para referirse a la Geometría Euclidiana en el plano, es decir, a la Geometría que cumple con los cinco postulados de Euclides en dos dimensiones. Por lo tanto, no se tratarán en este trabajo, Geometría Euclidiana en tres dimensiones ni Geometrías no Euclidianas.

Secuencia

A continuación, los resultados, donde las numeraciones principales corresponden a los capítulos trabajados, las numeraciones secundarias a las secciones de cada capítulo y las numeraciones terciarias a las páginas de cada sección que

corresponden en la práctica a una página en la pantalla. Cuando se mencione alguna definición (e.g. definición 1) o Postulado (e.g. Postulado 1), entiéndanse las definiciones y Postulados del Libro I de Euclides (Recalde Caicedo, 2018).

1. Puntos y líneas

1.0. Introducción

1.0.0. Virtual Euclides - Propuesta

1.0.1. Recomendaciones iniciales - Geometría

1.0.2. Estructura general del contenido: capítulos, secciones y páginas

1.0.3. Método recomendado – Espacio de interacción - Espacio de lectura

1.0.4. Descargo de responsabilidad

1.1. Concepto de punto

1.1.0. Concepto intuitivo de punto

1.1.1. Representación 1

1.1.2. Representación 2

1.2. Concepto de línea

1.2.0. Concepto intuitivo de línea

1.2.1. Concepto intuitivo de rectitud

1.2.2. Segmentos, semirrectas y rectas

1.3. Dos líneas rectas

1.3.0. Tipos de intersecciones entre dos rectas

1.3.1. Concepto de ángulo

1.3.2. Concepto de distancia

1.4. Tres líneas rectas

1.4.0. Intersecciones y ángulos formados

1.4.1. Concepto de polígono

1.4.2. Concepto de triángulo

2. Polígonos

2.1. Introducción

2.0.0. Polígonos – Definiciones

2.1. Polígonos de tres lados

2.1.0. Tipos de triángulos

2.1.1. Líneas de importantes

2.1.2. Mediatrices – Circuncentro – Circunferencia circunscrita

2.1.3. Bisectrices – Incentro – Circunferencia inscrita

2.1.4. Alturas - Ortocentro

2.1.5. Medianas – Baricentro, centroide o centro de gravedad

2.1.6. Recta de Euler

2.2. Relaciones del triángulo

2.2.0. Relación de lados

2.2.1. Ángulos internos

2.2.2. Ley de los senos

2.2.3. Ley de los cosenos

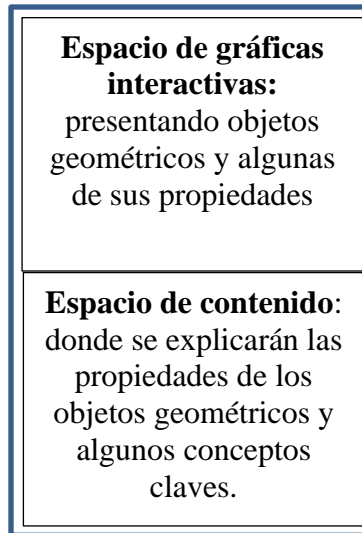
2.3. Polígonos de cuatro lados

- 2.3.0. Conceptos
- 2.3.1. Cuadrángulos: trapezoide, trapecio y paralelogramo
- 2.3.2. Paralelogramos: romboide, rombo, rectángulo y cuadrado
- 2.4. Áreas y perímetros
 - 2.4.0. Conceptos de área y perímetro
 - 2.4.1. Área y perímetro de un paralelogramo
 - 2.4.2. Área y perímetro de un triángulo
- 2.5. Otros polígonos
 - 2.5.0. Otros polígonos regulares
 - 2.5.1. Centro de un polígono regular
 - 2.5.2. ¿Infinitos lados?

Cada una de las páginas anteriores, fueron implementadas en la aplicación gráfica utilizando el siguiente esquema visual con base en el diseño discutido en el capítulo anterior. En la mitad superior de cada página se presenta un espacio para la simulación e interacción gráfica y en la mitad inferior otro espacio para lectura del contenido asociado al objeto geométrico presentado con sus propiedades, como se ve esquemáticamente en la Figura 8.

Figura 8.

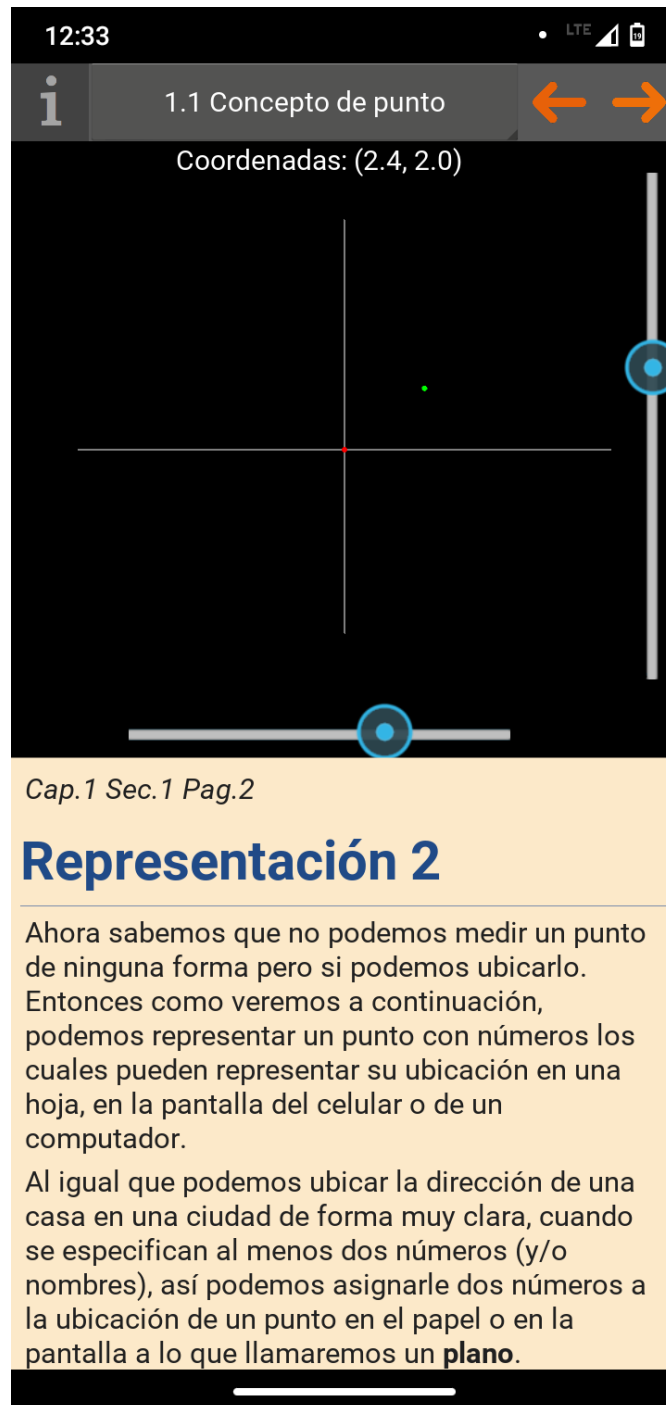
Esquema general para el diseño de cada página de la aplicación gráfica.



Cada una de las páginas implementa el esquema anterior para un concepto determinado, como se ve en un ejemplo en la Figura 9.

Figura 9.

Ejemplo de una página de la aplicación gráfica con el uso pedagógico de las TIC.



4. Conclusiones

El autor considera que los resultados del presente proyecto de investigación van más allá de los objetivos inicialmente aprobados en el anteproyecto, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se diseñó una ayuda didáctica que finalmente, con algunos ajustes, puede ser un nuevo modelo para la enseñanza de la Geometría con el uso pedagógico de las TIC. Después de la revisión bibliográfica realizada y la búsqueda de aplicaciones móviles, no se encontró hasta el momento una solución equivalente.
- Se creó una secuencia didáctica organizada desde un punto de vista inductivo, con base en las definiciones y Postulados de Euclides, siguiendo un modelo constructivista y con un enfoque para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos más fundamentales de la Geometría de una forma estructurada, dejando de lado el enfoque tradicional de exponer conceptos, figuras estáticas, ejemplos y ejercicios.
- Se desarrolló una aplicación gráfica para dispositivos móviles, que permite la interacción con objetos geométricos, la lectura de contenidos relacionados que soportan la interacción, la cual es de fácil uso, creada en un lenguaje de programación con librerías modernas y es de código abierto, es decir, cualquier persona puede ver el código fuente, usarlo y modificarlo.
- Se generaron varias propuestas de uso de la aplicación con el fin de motivar a los estudiantes con diferentes intereses y niveles de escolaridad, para que usen la

aplicación con varios enfoques, permitiendo la apropiación de los conceptos geométricos desde varias áreas del conocimiento.

- Se subió la aplicación a Google Play, pudiendo de esta forma ser instalada fácilmente en cualquier teléfono móvil e incluso en tabletas digitales con sistema operativo Android, de una forma segura a nivel de Latinoamérica. Además, garantiza la fácil difusión de nuevas versiones que el autor podrá subir en el futuro, es compatible con una gama muy amplia de dispositivos y es de un tamaño muy reducido (decenas de megas) lo cual permite que muchas personas, así tengan un teléfono móvil no muy moderno, puedan descargarla e instalarla sin inconvenientes.
- Se deja un punto de partida para crear una nueva línea de investigación enfocada en el desarrollo de aplicaciones para dispositivos móviles para la enseñanza de la Matemática, como se puede ver en las recomendaciones.

Otro punto importante para considerar sobre la aplicación desarrollada es que permite una interacción constructiva por parte del estudiante, es decir, puede interactuar con los objetos geométricos visualizados para llevar a crear sus propias conclusiones. Esto implica un espacio gráfico relativamente abierto, pero a la vez guiado, entendiendo que cada programa tiene sus limitaciones propias, donde el estudiante puede explorar, rectificar, encontrar y validar uno o varios conceptos sobre un objeto de estudio.

La primera interacción del estudiante con la aplicación y la visualización Matemática presentada, brinda una libertad de pensamiento que genera en el estudiante

mayor curiosidad y esto lleva a tener una conexión emocional con el proceso, muy diferente a un sistema tradicional de transmisión y recepción de información donde esta conexión no existe o se limita a un temor por la mediación de una evaluación. En una segunda interacción como se propone en la figura 7, el estudiante podrá interactuar de nuevo con los objetos geométricos desde una perspectiva mucho más amplia, buscando lograr los objetivos de aprendizaje por cuenta propia.

Después de este análisis se puede decir que el desarrollo matemático de una persona se puede ver incrementado sustancialmente al hacer uso de la visualización matemática con procesos mediados por tecnologías digitales y además, esto ya no es una opción, sino que pasa a convertirse en una obligación el hecho que como docentes debemos apropiarnos de estas tecnologías y usarlas para brindar a nuestros estudiantes mejores procesos de aprendizaje.

5. Recomendaciones

Explorar la realidad aumentada como campo de investigación para generar otro tipo de experiencias al estudiante y usarla en futuras investigaciones utilizando la misma ayuda didáctica pero implementada en esa tecnología.

Construir los capítulos 3 y 4 para la aplicación, con base en el código abierto del presente proyecto y los lineamientos recomendados en el Anexo 1.

Ejecutar las propuestas de uso de la aplicación explicadas previamente, de tal forma que el proyecto permita brindar variadas experiencias a distintos niveles educativos y a diferentes intereses personales.

Se recomienda explorar para un futuro trabajo de investigación, la implementación del diseño concebido y la secuencia didáctica en el software Geogebra, con base en los resultados del presente proyecto o como una segunda ayuda didáctica con un enfoque más libre y orientado a la resolución de problemas numéricos.

6. Referencias

- Assudani, R., Burns, D. J., Chinta, R., & Manolis, C. (2013). Assessing experiential learning styles: A methodological reconstruction and validation of the Kolb Learning Style Inventory. *Learning and Individual Differences*, 23, 44-52. doi:10.1016/j.lindif.2012.10.009
- Abassian, A., Bostic, J., Bush, S., & Safi, F. (2019). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*. doi:10.1080/19477503.2019.1595360
- Adabala, P. (26 de Agosto de 2020). *Create and run Python apps on your Android phone*. Obtenido de Opensource: <https://opensource.com/article/20/8/python-android-mobile>
- An, D., & Carr, M. (2017). Learning styles theory fails to explain learning and achievement: Recommendations for alternative approaches. *Personality and Individual Differences*, 116, 410-416. doi:10.1016/j.paid.2017.04.050
- Aydin, N., Halat, E., & Jakubowski, E. (2008). Reform-Based Curriculum and Motivation in Geometry. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 4(3), 285-292. doi:10.12973/ejmste/75351
- Barbin, E., & Menghini, M. (2014). History of Teaching Geometry. In S. G. Karp A., *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 473-492). New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-1-4614
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? some answers from empirical research. En W. Blum, R. B. Ferri, G. Kaiser, & G. Stillman (Edits.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA14* (Vol. 1, págs. 15-30). Springer Science & Business Media. doi:10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Bortolossi, H. (2015). Developing Free Computer-Based Learning Objects for High School Mathematics: Examples, Issues and Directions. En S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (págs. 27-49). Seoul, South Korea: Springer International Publishing Switzerland. doi:DOI 10.1007/978-3-319-17187-6_3
- Calderon, L. (2022). *leocjj/msc_thesis*. Obtenido de GitHub: https://github.com/leocjj/msc_thesis
- Calderon, L. (2022). *Virtual Euclides*. Obtenido de Google Play: <https://play.google.com/store/apps/details?id=co.edu.utp.virtualeuclides>
- Conner, A., & Zbiek, R. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63(1), 89-112. doi:10.1007/s10649-005-9002-4
- Dale, E. (1969). *Audio-visual methods in teaching* (3 ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

- DesarrolloWeb. (9 de Noviembre de 2015). *Pull Request con Git*. Obtenido de DesarrolloWeb: <https://desarrolloweb.com/articulos/pull-request-git.html>
- DesarrolloWeb. (10 de Septiembre de 2021). *Fork en Git*. Obtenido de DesarrolloWeb: <https://desarrolloweb.com/articulos/fork-git>
- Duru, A. (2010). The experimental teaching in some of topics geometry. *Educational Research and Reviews*, 5(10), 584-592. Obtenido de <https://academicjournals.org/journal/ERR/article-abstract/43C57274193>
- Ertekb, G., & Gogusa, A. (2016). Learning and Personal Attributes of University Students in Predicting and Classifying the Learning Styles: Kolb's Nine-region Versus Four-region Learning Styles. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 217, 779-789. doi:10.1016/j.sbspro.2016.02.145
- Farooq, U. (14 de Junio de 2018). *Tools to run Python on Android*. Obtenido de Medium: https://medium.com/@umerfarooq_26378/tools-to-run-python-on-android-9060663972b4
- Fortuny, J. M., Iranzo, N., & Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. *Investigación en Educación Matemática XIV*, págs. 69-85.
- Gaviria, N. (16 de Julio de 2022). *Teléfonos superan el total de población, cada colombiano tiene al menos un celular*. Obtenido de Editorial La República: <https://www.larepublica.co/economia/los-celulares-superan-el-total-de-la-poblacion-por-cada-colombiano-hay-1-2-moviles-3403559>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. doi:10.1590/1980-4415v31n57a05
- Gui Programming. (5 de Agosto de 2022). *The Python Wiki*. Obtenido de Python Software Foundation: <https://wiki.python.org/moin/GuiProgramming>
- Inmune. (14 de Octubre de 2021). *Lenguajes de programación para móvil*. Obtenido de Immune Technology Institute: <https://immune.institute/lenguajes-de-programacion-para-movil/>
- InnovaAge. (2022). Obtenido de <https://www.innovaportal.com/innovaportal/v/696/1/innova.front/apps-hibridas-vs-nativas-vs-generadas-que-decision-tomar>
- Kirschner, P. (2017). Stop propagating the learning styles myth. *Computers & Education*, 106, 166-171. doi:10.1016/j.compedu.2016.12.006
- Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

- Medina, R. (21 de Junio de 2022). *Estadísticas de la situación digital de Colombia en el 2021-2022*. Obtenido de Branch Group: <https://branch.com.co/marketing-digital/estadisticas-de-la-situacion-digital-de-colombia-en-el-2021-2022/>
- Menghini, M. (2015). From Practical Geometry to the Laboratory Method: The Search for an Alternative to Euclid in the History of Teaching Geometry. En S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (págs. 561-587). Seoul, South Korea: Springer International Publishing Switzerland. doi:DOI 10.1007/978-3-319-17187-6_32
- Mulyono, B. (2011). Traditional Teaching About Angles Compared To An Active Learning Approach That Focuses On Students Skills In Seeing, Measuring And Reasoning, Including The Use Of Dynamic Geometry Software: Differences In Achievement. *International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education* (págs. 37-46). Yogyakarta: Department of Mathematics Education, Yogyakarta State. Obtenido de <http://eprints.unsri.ac.id/4913/>
- Portafolio. (14 de Septiembre de 2021). *En 2020, 60.7% de los hogares no tenían un computador*. Obtenido de EL TIEMPO Casa Editorial: <https://www.portafolio.co/economia/en-2020-60-7-de-los-hogares-no-tenian-un-computador-556258>
- Python on Android. (30 de Agosto de 2022). *The Python Wiki*. Obtenido de Python Software Foundation: <https://wiki.python.org/moin/Android>
- Recalde Caicedo, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas*. Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.
- Rowlands, S. (2010). A Pilot Study of a Cultural-Historical Approach to Teaching Geometry. *Science & Education*, 19, 55-73. doi:10.1007/s11191-008-9181-3
- Sakovich, N. (2022). *Cross-Platform Mobile Development: Five Best Frameworks*. Obtenido de SaM Solutions: <https://www.sam-solutions.com/blog/cross-platform-mobile-development/>
- StatCounter. (2022). *Mobile Operating System Market Share Colombia - Jan - Dec 2021*. Obtenido de StatCounter: <https://gs.statcounter.com/os-market-share/mobile/colombia/2021>
- Su, C.-H. (2017). Designing and Developing a Novel Hybrid Adaptive Learning Path Recommendation System (ALPRS) for Gamification Mathematics Geometry Course. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(6), 2275-2298. doi:10.12973/eurasia.2017.01225a
- Yerbes, J., & Méndez, C. L. (2018). El uso de las gráficas y la tecnología en el bachillerato. *ALME* 31, págs. 1256-1262.

7. Anexos

Anexo 1. Propuesta para futuros capítulos de la aplicación.

3. Líneas curvas

3.0. Introducción

3.0.0. Concepto de curva abierta

3.0.1. Concepto de curva cerrada

3.1. Circunferencia y círculo

3.1.0. Concepto de circunferencia: ¿polígono regular de infinitos lados?

3.1.1. Centro, radio, diámetro, secantes, tangentes

3.1.2. Conceptos de círculo, perímetro, área y valor de pi

3.1.3. Relaciones con base en el radio

3.2. Cerradas – casos especiales:

3.2.0. Elipse: curva cerrada con dos centros

3.2.1. Perímetro y área

3.2.2. Óvalo: dos semicircunferencias y dos líneas rectas paralelas.

3.2.3. Perímetro y área

3.3. Abiertas – casos especiales:

3.3.0. Parábola (polinomio de grado 2) y raíz cuadrada

3.3.1. Polinomios de grado superior

3.3.2. Hipérbola: ver en general las cónicas

3.3.3. Exponenciales y logaritmos

3.3.4. Funciones trigonométricas: sen, cos, tan

4. Conceptos del espacio

4.0. Introducción

4.1. Punto en el espacio

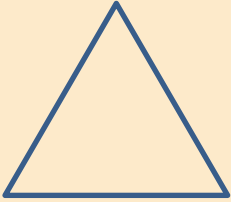
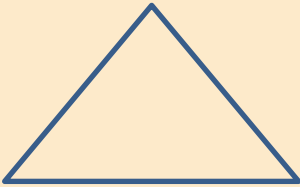
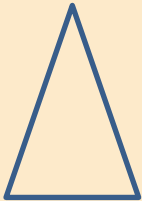
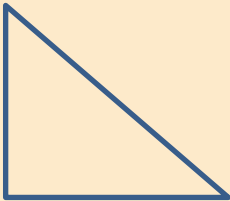
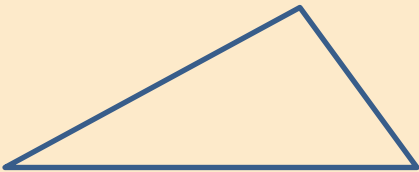

4.2. Líneas rectas en el espacio

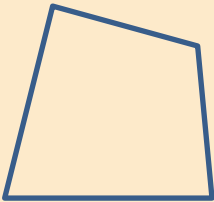
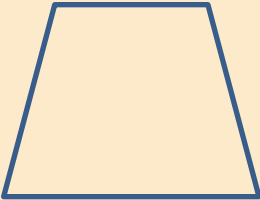

4.3. Figuras planas en el espacio


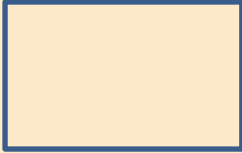
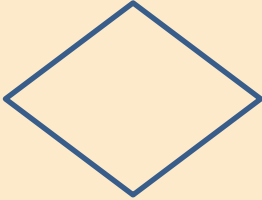

4.4. Sólidos

4.5. Planos en el espacio

Anexo 2. Algunas imágenes de ayuda creadas para los contenidos de la aplicación

Según sus lados	Según sus ángulos
Equilátero: 3 lados iguales	Acutángulo: 3 ángulos agudos ($< 90^\circ$)
	
Isósceles: 2 lados iguales	Rectángulo: 1 ángulo recto (90°)
	
Escaleno: 0 lados iguales	Obtusángulo: 1 ángulo obtuso ($> 90^\circ$)
	

Lados paralelos	Cuadrángulos convexos
Ninguno	Trapezoide 
2 lados paralelos	Trapecio 
Opuestos (paralelos 2 a 2)	Paralelogramos 

<div> <div>Ángulos</div> <div>Lados</div> </div>	Opuestos Iguales (Iguales 2 a 2)	4 iguales (4 rectos)
Opuestos Iguales (Iguales 2 a 2)	Romboide 	Rectángulo 
4 iguales	Rombo 	Cuadrado 

Función \ Ángulo	0°	30°	45°	60°	90°
Seno $\frac{\text{cateto}_{\text{opuesto}}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
Coseno $\frac{\text{cateto}_{\text{adyacente}}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
Tangente $\frac{\text{cateto}_{\text{opuesto}}}{\text{cateto}_{\text{adyacente}}} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Función \ Ángulo	0°	30°	45°	60°	90°
Seno $\frac{\text{cateto}_{\text{opuesto}}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
Coseno $\frac{\text{cateto}_{\text{adyacente}}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
Tangente $\frac{\text{cateto}_{\text{opuesto}}}{\text{cateto}_{\text{adyacente}}} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Anexo 3. Capturas de pantalla de la aplicación

A continuación, se muestran algunas capturas de pantalla de la aplicación desarrollada:





Cap.1 Sec.3 Pag.1

Concepto de ángulo

Cuando dos rectas (o semirrectas) se intersectan, podemos describir la forma como lo hacen con un concepto que llamaremos **ángulo**. Este es una medida de la 'abertura' o inclinación de una recta respecto a la otra. En el gráfico podemos observar los diferentes ángulos que se forman al girar la semirrecta blanca y la café.

El **ángulo principal en color verde** (también llamado ángulo positivo) lo mediremos en el sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir, en sentido antihorario. A medida que la semirrecta blanca gire en este sentido, el ángulo verde será mayor.



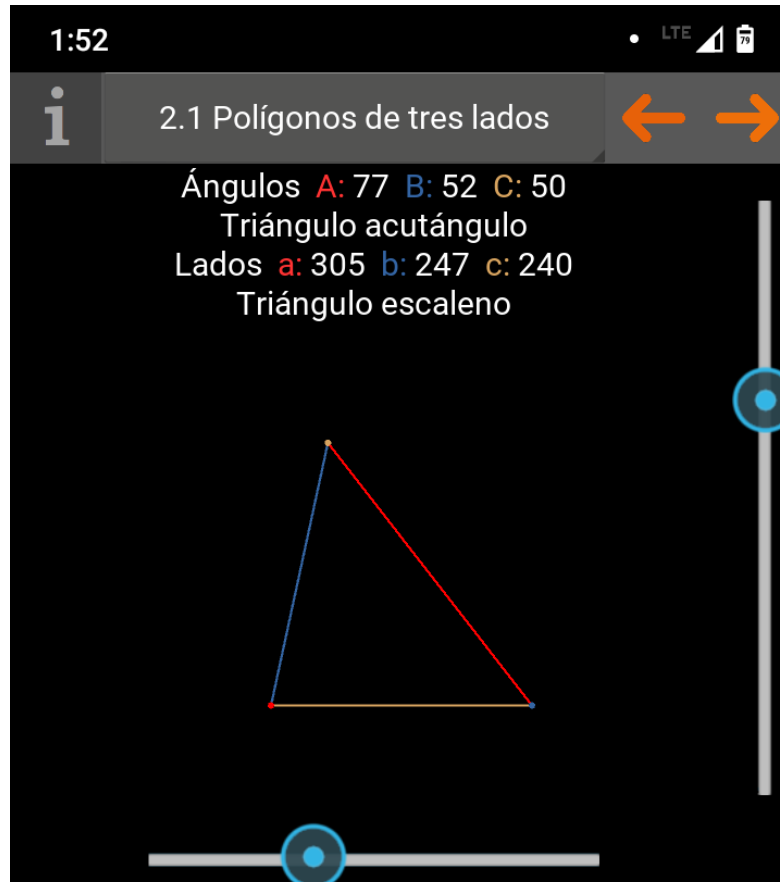
Cap.1 Sec.4 Pag.0

Intersecciones y ángulos formados

En esta sección veremos que ocurre si tenemos tres líneas rectas.

Primero analizaremos en esta página el caso de dos rectas paralelas fijas y una recta que podemos mover. En la siguiente página tendremos una recta fija y dos rectas que podremos mover.

La gráfica interactiva **inicia con las tres rectas paralelas** (dos cafés fijas y una blanca móvil), es decir, por más que las sigamos hasta el infinito, nunca las veremos intersectarse entre si, por lo



Cap.2 Sec.1 Pag.0

Tipos de triángulos

Analizaremos los tipos de triángulos que existen; para ello, primero debemos tener claro los componentes de un triángulo como vimos en las definiciones anteriores: lados, vértices y ángulos.

- **Lado:**

Es cada uno de los segmentos que forman el triángulo.

- **Vértice:**

Es cada uno de los puntos donde se unen dos lados del triángulo.

- **Ángulo:**



Cap.2 Sec.2 Pag.0

Relación de lados

En esta sección revisaremos en detalle las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, empezando por los triángulos rectángulos y luego con los triángulos en el caso más general (triángulos oblicuángulos). Para esto primero debemos definir algunos conceptos básicos.

- **Triángulo rectángulo:**

Triángulo que tiene un ángulo recto (90°).
En otras palabras, tiene un lado perpendicular a otro.

- **Lado opuesto a un ángulo:**



Cap.2 Sec.5 Pag.0

Otros polígonos regulares

En esta última sección veremos otros polígonos regulares, es decir, polígonos que tienen todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.

Para el caso del triángulo tenemos que un **triángulo equilátero** es un triángulo que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales. En la gráfica interactiva se muestra un triángulo equilátero cuando el control vertical está en la posición inferior. Este es el primer ejemplo de un polígono regular.

El segundo caso de polígono regular sería un **cuadrilátero regular**, es decir, un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos

Anexo 4. Ejemplo de código de control

El siguiente extracto de código, muestra una función para el control de la página cero, de la sección 3, capítulo 1, donde se muestran los tipos de intersección posibles entre dos líneas rectas.

```
def cap1_sec3_pag0(self):
    """Control sliders events"""
    Clock.schedule_interval(self.update_points, 0.01)
    rotation_in_degrees = self.slider_y1.value
    pivot_point_y = self.slider_y2.value
    max_length = max(self.height, self.width)
    v = Vector(1, 0)
    rotation_transformation = v.rotate(rotation_in_degrees).normalize()

    # Horizontal fixed line
    self.p_1 = [0, self.height * 3 / 4, self.width, self.height * 3 / 4]

    # Pivot point for second (mobile) line
    self.p_3 = (self.width / 2, self.height * (3 + pivot_point_y) / 4)

    # Points to draw second (mobile) line
    self.p_0 = [
        self.p_3[0] + offset - max_length * rotation_transformation.x,
        self.p_3[1] + offset - max_length * rotation_transformation.y,
        self.p_3[0] + offset + max_length * rotation_transformation.x,
        self.p_3[1] + offset + max_length * rotation_transformation.y,
    ]

    # Intersection point between two lines
    intersect = Vector.line_intersection(
        (self.p_0[0], self.p_0[1]),
        (self.p_0[2], self.p_0[3]),
        (self.p_1[0], self.p_1[1]),
        (self.p_1[2], self.p_1[3]),
    )

    # Y-distance between pivot point and fixed line
    distance = self.p_3[1] + offset - self.p_1[1]

    if not intersect or abs(intersect.x) > 100000:
        if abs(distance) < 1:
            self.label_wid.text = f"Las dos rectas son la misma.\nInfinitos puntos de intersección :-/"
        else:
            self.label_wid.text = f"Paralelas!!! No hay punto de intersección :-0\nDistancia entre rectas:"
            self.p_4 = (0, 0)
    else:
        self.p_4 = (intersect.x - offset, intersect.y - offset)
        self.label_wid.text = f"Punto de intersección: ({(intersect.x - self.width/2 - offset):.1f}), {(inters
```