Proyecto Piloto*

Leonard David Vivas Dallos**

17 de diciembre de 2023

Índice

1. Introducción

En el presente documento se manejarán los conceptos adquiridos en clase, haciendo la transcripción de un informe realizado en la aplicación Word, y presentado como parte de una actividad correspondiente a la materia de Cálculo Diferencial. El documento descrito fue escogido para este fin dado a que usa de manera precisa y conveniente la mayoría de los ítem en la presentación. Se verán el manejo de los siguientes conceptos.

*Proyecto piloto realizado con el fin de practicar los conocimientos adquiridos en el taller.

**Estudiante de Pregrado en Ciencias de la Computación de la Universidad Nacional de Colombia

- Tipo de archivo.
- Notas al pie de página y agradecimientos.
- Índices.
- Secciones y subsecciones.
- Manejo de figuras y tablas.
- Tipo de letras.
- Listados.
- Escritura matemática.

2. Informe Actividad 1 Tarea 4

Tomando en cuenta el fractal conocido como *Esponja de Menger*, pero en dos dimensiones, denotamos que podríamos estar analizando la *Alfombra de Sierpinski*, ya que la *Esponja* por definición es la generalización tridimensional de la *Alfombra*, la cual es a su vez una generalización bidimensional del conjunto de Cantor.

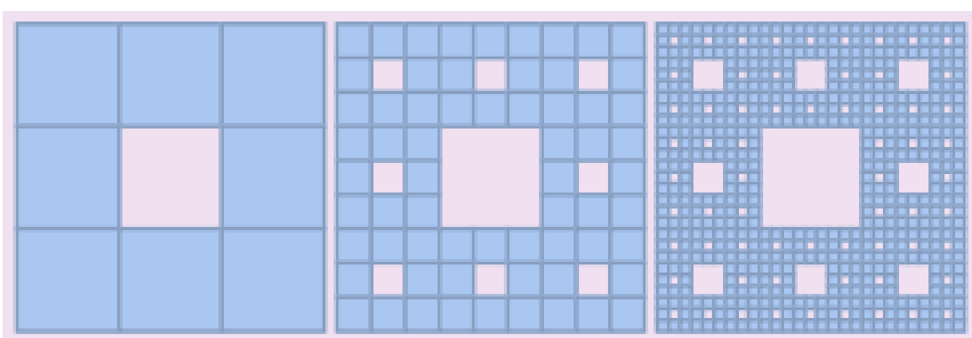

Figura 1: Paso 1,2,3 del fractal

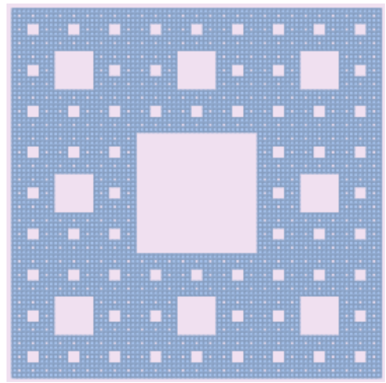

Figura 2: Paso 4 del fractal

2.1. Cálculo de la dimensión fractal D:

Teniendo en cuenta la función $N(s) = s^{-D}$, y sabiendo que N corresponde al número de copias del objeto a escala "s". Notemos que hay 8 copias del cuadrado, cada uno de un tercio de lado con respecto al original. Así, $N(s) = 8$; $s = \frac{1}{3}$, reemplazando nos queda:

$$8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-D}$$

$$D = \frac{log(8)}{log(3)} \cong 1{,}892789261$$

Para saber la cantidad de cuadraditos blancos más pequeños que se ven en la figura del 4° paso, basta con usar la función $N(s) = s^{-D}$ para buscar cuantos cuadrados del estilo del 1° paso hay en el cuarto, esto ya que por cada cuadrado de este estilo tenemos 1 cuadradito blanco. Así pues, sabemos que cada una de estas copias mide $\frac{1}{27}$ de la longitud original. Como anteriormente hallamos la dimensión fractal, podemos usar estos datos para buscar $N(s)$

$$N(s) = s^{-D}$$

$$N(s) = \left(\frac{1}{27}\right)^{-1{,}892789261} \cong 512{,}0000005$$

Como por cada copia tenemos 1 cuadradito blanco, podemos decir que en el cuarto paso tenemos 512 cuadraditos blancos, lo que corresponde al mismo valor si lo miramos gráficamente, o por la fórmula 8^3, que corresponde a la cantidad de divisiones que se toman (8), con respecto a la cantidad de veces que se realiza el procedimiento (3).

2.2. Perímetro, suponiendo que el lado de la esponja es 1

Definamos el lado original de la esponja $l_0 = 1$, así sabemos que el perímetro original es $P_0 = 4$. Ahora bien, como por cada paso debemos suprimir 1 cuadrado de los 9 que formamos, a P_0 debemos sumarle el perímetro del cuadrado que hemos quitado, que correspondería a los bordes de la figura por dentro.

2.2.1. Caso 1

$n = 1$

Sabemos que el lado de cada cuadrado formado en este paso el $l_1 = \frac{1}{3}$. Con esto, tenemos que el perímetro en el primer paso es $P_1 = P_0 + 4l_1$. Desarrollando:

$$P_1 = P_0 + 4\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$P_1 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \cong 5{,}3$$

2.2.2. Caso 2

$n = 2$

$l_2 = \frac{1}{9}$. Para este caso, debemos adicionar al perímetro de la figura del anterior paso, el perímetro de los cubos formados en este paso, que son 8.

$$P_2 = P_1 + 8\left(4\left(\frac{1}{9}\right)\right)$$

$$P_2 = \frac{16}{3} + \frac{32}{9} = \frac{80}{9} \cong 8{,}89$$

2.2.3. Caso 3

$n = 3$
$l_3 = \frac{1}{27}$

$$P_3 = P_2 + 8\left(8\left(4\left(\frac{1}{27}\right)\right)\right)$$

$$P_3 = \frac{80}{9} + \frac{256}{27} = \frac{496}{27} \cong 18{,}370$$

2.2.4. Caso 4

$n = 4$
$l_4 = \frac{1}{81}$

$$P_4 = P_3 + 8\left(8\left(8\left(4\left(\frac{1}{81}\right)\right)\right)\right)$$

$$P_4 = \frac{496}{27} + \frac{2048}{81} = \frac{3536}{81} \cong 43{,}65432099$$

Apliquemos la siguiente fórmula para los casos y encontremos que se mantiene la igualdad

$$P(n) = 4\left[1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{8}{3}\right)^{k}\right] \tag{1}$$

$$P(1) = 4\left[1 + \frac{1}{3} * \left(\frac{8}{3}\right)^{0}\right] = 4\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 4 * \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$P(2) = 4\left[1 + \frac{1}{3} * \left\{\left(\frac{8}{3}\right)^{0} + \left(\frac{8}{3}\right)^{1}\right\}\right] = 4\left[1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{8}{3}\right)\right]$$

$$= 4\left[1 + \frac{1}{3} * \frac{11}{3}\right] = 4\left[1 + \frac{11}{9}\right] = 4\left[\frac{20}{9}\right] = \frac{80}{9}$$

$$P(3) = 4\left[1 + \frac{1}{3} * \left\{\left(\frac{8}{3}\right)^{0} + \left(\frac{8}{3}\right)^{1} + \left(\frac{8}{3}\right)^{2}\right\}\right] = 4\left[1 + \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{8}{3} + \frac{64}{9}\right\}\right]$$

$$= 4\left[1 + \frac{1}{3} * \frac{97}{9}\right] = 4\left[1 + \frac{97}{27}\right] = 4\left[\frac{124}{27}\right] = \frac{496}{27}$$

$$P(4)=4\left[1+\frac{1}{3}*\left\{\left(\frac{8}{3}\right)^{0}+\left(\frac{8}{3}\right)^{1}+\left(\frac{8}{3}\right)^{2}+\left(\frac{8}{3}\right)^{3}\right\}\right]$$
$$=4\left[1+\frac{1}{3}\left\{1+\frac{8}{3}+\frac{64}{9}+\frac{512}{27}\right\}\right]=4\left[1+\frac{1}{3}*\frac{803}{27}\right]$$
$$=4\left[1+\frac{803}{81}\right]=4\left[\frac{884}{81}\right]=\frac{3536}{81}$$

Partamos de la fórmula ya usada, demostremos que $P(n)=\frac{16}{15}\left[3+2\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right]$ y veamos que pasa cuando n tiende a infinito. Para iniciar, simplifiquemos la suma geométrica aparte:

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{8}{3}\right)^{k}=\frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{8}{3}\right)^{n}}{1-\frac{8}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{8}{3}\right)^{n}}{-\frac{5}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{-3}{5}\right)\left(1-\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)$$
$$=\frac{-3}{15}\left(1-\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)$$

Teniendo esta respuesta, remplacemos en la fórmula inicial:

$$P(n)=4\left[1+\frac{-3}{15}\left(1-\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)\right]$$
$$=4\left[1+\left(-\frac{3}{15}+\frac{3}{15}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)\right]=4\left[1+\frac{1}{15}\left(-3+3\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)\right]$$
$$=4+\frac{4}{15}\left(-3+3\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)=4-\frac{12}{15}+\frac{12}{15}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}=4\left[1-\frac{3}{15}+\frac{3}{15}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]$$
$$=\frac{3}{3}*4\left[1-\frac{3}{15}+\frac{3}{15}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]=\frac{4}{3}\left[3-\frac{9}{15}+\frac{9}{15}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]=\frac{4}{3}\left[3-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]$$
$$=\frac{4}{3}\left[\frac{15-3}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]=\frac{4}{3}\left[\frac{12}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]=\frac{4}{3}*\frac{1}{5}\left[12+3\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]$$
$$=\frac{4}{15}\left[12+3\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right]=\frac{4}{15}\left[12+3*\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{4}{15}\left[12+\frac{24}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right]$$
$$=\frac{4}{15}\left[12+8\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{4}{15}\left[4\left(3+2\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right)\right]=\frac{16}{15}\left(3+2\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}\right)$$

Intuitivamente, tal como se referenció, a medida que aumenta n, aumenta el perímetro de la función (esponja). Es decir, cuando $n\to\infty, P(n)\to\infty$