Tarea 2

Leonard David Vivas Dallos
Tomás Escobar Rivera
Grupo 13

December 17, 2023

Contents

1 Ejercicio 28 Sección 4.4 **1**
1.1 Solución 1

2 Ejercicio 1 Sección 4.6 **2**
2.1 Solución 2

3 Ejercicio 11 Sección 6.1 **3**
3.1 Solución 3

4 Ejercicio 4 Sección 6.2 **4**
4.1 Solución 5

1 Ejercicio 28 Sección 4.4

Pruebe que si A tiene un punto fijo no trivial (esto es, $Ax = x \neq 0$), luego $\|A\| \geq 1$ para cualquier norma de matriz subordinada.

1.1 Solución

Supongamos que A tiene un punto fijo no trivial $x \neq 0$ tal que $Ax = x$. Consideremos cualquier norma matricial subordinada $||A||_s$. Veamos que

$||A||_s \geq 1$. Por definición,

$$||A||_s = \max\{||Ax||_s : \quad ||x||_s, x \neq 0\} = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Ahora, veamos que $||A||_s \geq 1$. Usando la hipótesis, estimemos $||A||_s$

$$\frac{||Ax||_s}{||x||_s} = \frac{||x||_s}{||x||_s} \quad \text{pues } Ax = x$$

Como $x \neq 0$, $||x||_s > 0$. Luego,

$$\frac{||Ax||_s}{||x||_s} = 1$$

Luego, para esta x específica, el radio $\frac{||Ax||_s}{||x||_s}$ es 1. Como estamos mirando el valor máximo de este radio sobre todo vector $x \neq 0$, se sigue que el máximo valor es al menos 1. Por tanto,

$$||A||_s \geq 1$$

2 Ejercicio 1 Sección 4.6

Pruebe que si A es diagonalmente dominante y si Q es escogido como en el método de Jacobi, entonces

$$\rho(I - Q^{-1}A) < 1$$

2.1 Solución

Como A es diagonalmente dominante,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

Supongamos que Q es escogido como en el método de Jacobi, es decir, supongamos que Q es la matriz conformada por la diagonal de A (resto de entradas fuera de la diagonal son 0). Veamos que

$$\rho(I - Q^{-1}A) < 1$$

Recordemos $\rho(B) = \max\limits_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|$ con σ_i valor propio de B, denominado el radio espectral de B. Además, tenemos que

$$\rho(B) = \inf_{||\cdot||}||B|| \tag{2}$$

De (1) tenemos

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\therefore \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\therefore \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

$$\therefore ||I - Q^{-1}A||_\infty < 1$$

Luego, de (2) tenemos, por propiedades del ínfimo, que

$$\rho(I - Q^{-1}A) \leq ||I - Q^{-1}A||_\infty < 1$$

Por tanto, $\rho(I - Q^{-1}A) < 1$

3 Ejercicio 11 Sección 6.1

Pruebe que para cualquier polinomio q de grado $\leq n-1$,

$$\sum_{i=0}^{n} q(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)^{-1} = 0$$

3.1 Solución

Sea

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} q(x_i) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

Notemos que $p(x)$ es de grado a lo más n. Veamos que $p(x)$ tiene $n+1$ raíces, $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Notemos que para cualquier x_i

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} q(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_i - x_k)$$

Tenemos dos casos, cuando $j = i$, el término en la suma es

$$q(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_i - x_k)$$

y cuando $j \neq i$ tenemos

$$q(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_i - x_k) = 0 \quad (x_i - x_j = 0)$$

Luego, la suma tiene sólo un término distinto de 0,

$$p(x_i) = q(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_i - x_k)$$

Como $q(x_i)$ es de grado $\leq n-1$, tiene a lo más $n-1$ raíces. Luego, hay al menos un x_i tal que $q(x_i) \neq 0$. Para este x_i, $p(x_i) \neq 0$ y por tanto $p(x)$ tiene $n+1$ raíces.

Veamos que $p(x) = 0$. Como $p(x)$ es de grado ≤ 0 con $n+1$ raíces, el polinomio debe ser 0.

$$0 = p(x) = \sum_{i=0}^{n} q(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

Dividiendo por el producto de diferencias obtenemos la igualdad deseada.

4 Ejercicio 4 Sección 6.2

Pruebe que si f es un polinomio de grado k, entonces para $n > k$,

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0$$

4.1 Solución

Sea $p(x)$ un polinomio de interpolación de grado $\leq n$ para f, luego

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

Sea $q(x) = p(x) - f(x)$ un polinomio de grado $\leq n$. De (3), sabemos que $q(x)$ tiene al menos $n + 1$ raíces. Luego, $q(x)$ solo puede ser el polinomio 0

$$\begin{aligned} q(x) &= 0 \\ \Rightarrow p(x) - f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow p(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Esto, por hipótesis implica que $p(x)$ es un polinomio de grado k. Ahora, por diferencias divididas tenemos

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Luego, $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ es el coeficiente de x^n. Por tanto,

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0 \quad \text{cuando} n > k$$