Tarea 3

Leonard David Vivas Dallos
Tomás Escobar Rivera
Grupo 13

December 17, 2023

Contents

1 Ejercicio 12 Sección 7.2

Derive una fórmula para aproximar

$$\int_1^3 f(x)dx$$

en términos de $f(0)$, $f(2)$, y $f(4)$. Debería ser exacta para toda f en Π_2.

1.a Solución:

Como se pide que debe ser exacta para todo f en Π_2, podemos usar los polinomios que forman una base para esta, pues basta con que sea exacta para estos. Así, usamos $f(x) = 1, x, x^2$. Tenemos,

$$\int_1^3 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(2) + A_2 f(4)$$

Para $f(x) = 1$

$$\int_1^3 1dx = A_0 + A_1 + A_2$$
$$\therefore 2 = A_0 + A_1 + A_2 \quad (1)$$

Para $f(x) = x$

$$\int_1^3 xdx = A_0(0) + A_1(2) + A_2(4)$$
$$\left(\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = 2A_1 + 4A_2$$
$$\therefore 4 = 2A_1 + 4A_2 \quad (2)$$

Para $f(x) = x^2$

$$\int_1^3 x^2dx = A_0(0) + A_1(4) + A_2(16)$$
$$\left(\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = 4A_1 + 16A_2$$
$$\therefore \frac{26}{3} = 4A_1 + 16A_2 \quad (3)$$

$(3) - 4(2)$:

$$\frac{26}{3} - 16 = 4A_1 - 8A_1$$
$$-\frac{22}{3} = -4A_1$$
$$\therefore A_1 = \frac{11}{6}$$

En (2):

$$4 = 2(\frac{11}{6}) + 4A_2$$
$$4 - \frac{11}{3} = 4A_2$$
$$\therefore A_2 = \frac{1}{12}$$

En (1):

$$2 = A_0 + \frac{11}{6} + \frac{1}{12}$$
$$2 - \frac{11}{6} - \frac{1}{12} = A_0$$
$$\therefore A_0 = \frac{1}{12}$$

Luego,

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{12}f(0) + \frac{11}{6}f(2) + \frac{1}{12}f(4)$$

2 Ejercicio 7 Sección 7.3

a) Halle una fórmula de la forma

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

con $n = 1$, que sea exacta para todo polinomio de grado 3.

b) Repita con $n = 2$, haciendo la fórmula exacta en Π_5.

2.a Solución:

Con ayuda del Teorema de Cuadratura Gaussiana, sabemos que para $n = 1$, la fórmula es exacta para todo polinomio de grado $2n + 1 = 3$. Así, sea $q(x) = x^2 + ax + b$, $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$. Necesitamos que $q(x)$ sea w-ortogonal a q_0, q_1, donde $w(x) = x$. Ahora

$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \int_0^1 (x^2 + ax + b) * 1 * xdx$$
$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0$$

Además, tenemos

$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \int_0^1 (x^2 + ax + b) * x * xdx$$
$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{ax^4}{4} + \frac{bx}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3} = 0$$

Resolviendo el sistema tenemos: $a = -\frac{6}{5}$ y $b = \frac{3}{10}$, por lo que reemplazando en nuestra $q(x)$ tenemos:

$$q(x) = x^2 + ax + b = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática tenemos dos raíces x_0 y x_1, que serán los nodos de nuestra fórmula. $x_0 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}$ y $x_1 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}$. Ahora, solucionamos para A_0 y A_1.

Sea $f_0(x) = 1$ y $f_1(x) = x$, luego tenemos:

$$A_0 + A_1 = \frac{1}{2} \tag{1}$$
$$\frac{6-\sqrt{6}}{10}A_0 + \frac{6+\sqrt{6}}{10}A_1 = \frac{1}{3} \tag{2}$$

Resolviendo, tenemos $A_0 = \frac{9-\sqrt{6}}{36}$ y $A_1 = \frac{9-\sqrt{6}}{36}$. Luego, la fórmula es:

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx \frac{9-\sqrt{6}}{36} f\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right) + \frac{9-\sqrt{6}}{36} f\left(\frac{9-\sqrt{6}}{36}\right)$$

2.b Solución:

Con ayuda del Teorema de Cuadratura Gaussiana, sabemos que para $n = 2$, la fórmula es exacta para todo polinomio de grado $2n + 1 = 5$. Así, sea $q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$, $q_2(x) = x^2$. Necesitamos que $q(x)$ sea w-ortogonal a q_0, q_1, q_2, donde $w(x) = x$. Ahora

$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c) * 1 * xdx$$
$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right|_0^1$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0$$

Además, tenemos

$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c) * x * xdx$$
$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \left(\frac{x^6}{6} + \frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3}\right|_0^1$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = 0$$

Por último, tenemos

$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c) * x * x^2dx$$
$$\int_0^1 q(x)q_0(x)w(x)dx = \left(\frac{x^7}{7} + \frac{ax^6}{6} + \frac{bx^5}{5} + \frac{cx^4}{4}\right|_0^1$$
$$= \frac{1}{7} + \frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = 0$$

Resolviendo el sistema tenemos: $a = -\frac{12}{7}$, $b = \frac{6}{7}$ y $c = -\frac{4}{35}$, por lo que reemplazando en nuestra $q(x)$ tenemos:

$$q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - \frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x - \frac{4}{35} = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos tres raíces x_0, x_1 y x_2, que serán los nodos de nuestra fórmula. $x_0 \approx 0.21$, $x_1 \approx 0.59$ y $x_2 \approx 0.91$. Ahora, solucionamos para A_0, A_1 y A_2.

Sea $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$, luego tenemos:

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$0.21A_0 + 0.59A_1 + 0.91A_2 = \frac{1}{3} \tag{4}$$

$$0.0441A_0 + 0.3481A_1 + 0.8281A_2 = \frac{1}{4} \tag{5}$$

Resolviendo, tenemos $A_0 = 0.069$ y $A_1 = 0.202$ y $A_2 = 0.228$. Luego, la fórmula es:

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx 0.069f(0.21) + 0.202f(0.59) + 0.228f(0.91)$$

3 Ejercicio 1 Lista

a) Encuentre el polinomio cúbico $p_3(x)$ que interpola a una función $f(x)$ en los nodos $x = -1, 0, 1$ y satisface $p_3'(0) = f'(0)$.

b) Evalúe $S = \int_{-1}^1 p_3(x)dx$ como una aproximación a $\int_{-1}^1 f(x)dx$. ¿Qué método se obtiene?

c) Aplique la identidad

$$\int uv'''dx = uv'' - u'v' + u''v - \int u'''vdx$$

para el caso de

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1-x)^2, \quad v(x) = f(x) + f(-x)$$

para obtener el resultado

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = S - \int_0^1 u(x)v'''(x)dx.$$

d) Muestre que si $f \in C^4[-1,1]$, entonces

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)dx - S\right| \leq \frac{||f^{(4)}||_\infty}{90}$$

3.a Solución:

Sea $p_3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sabemos que $p_3(-1) = f(-1), p_3(0) = f(0), p_3(1) = f(1)$

$$\begin{aligned} p_3(-1) &= -a + b - c + d = f(-1) \\ p_3(0) &= d = f(0) \\ p_3(1) &= a + b + c + d = f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(-1) &= -a + b - c + d = f(-1) \\ p_3(0) &= d = f(0) \\ p_3(1) &= a + b + c + d = f(1) \end{aligned}$$

Además, $p_3'(0) = f'(0)$

$$\begin{aligned} p_3'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ p_3'(0) &= c = f'(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore -a + b &= f(-1) + f'(0) - f(0) \\ a + b &= f(1) - f'(0) - f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+)2b &= f(-1) - 2f(0) + f(1) \\ \therefore b &= \frac{f(-1)}{2} - f(0) + \frac{f(1)}{2} \\ \therefore a &= \frac{f(1)}{2} - f'(0) - \frac{f(-1)}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio queda

$$p_3(x) = \left(\frac{f(1)}{2} - f'(0) - \frac{f(-1)}{2}\right)x^3 + \left(\frac{f(-1)}{2} - f(0) + \frac{f(1)}{2}\right)x^2 + f'(0)x + f(0)$$

3.b Solución:

Sea $A = \left(\frac{f(1)}{2} - f'(0) - \frac{f(-1)}{2}\right)$ y $B = \left(\frac{f(-1)}{2} - f(0) + \frac{f(1)}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} p_3(x)dx = \int_{-1}^{1} Ax^3 + Bx^2 + f'(0)x + f(0)dx \\
&= \left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{f'(0)x^2}{2} + f(0)x\right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{f'(0)}{2} + f(0) - \frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{f'(0)}{2} + f(0) \\
&= \frac{2b}{3} + 2f(0) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{f(-1)}{2} - f(0) + \frac{f(1)}{2}\right) + 2f(0) \\
&= \frac{f(-1)}{3} - \frac{2f(0)}{3} + \frac{f(1)}{3} + 2f(0) \\
&= \frac{f(-1)}{3} + \frac{4f(0)}{3} + \frac{f(1)}{3} \\
&= \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1))
\end{aligned}$$

Como vemos, se obtiene el método de Simpson 1/3 con $a = -1, b = 1$

3.c Solución:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} uv'''dx &= \frac{1}{6}x(1-x)^2(f(x) + f(-x))'' - \frac{3x^2 - 4x + 1}{6}(f(x) - f(-x))' \\
&+ \frac{3x-2}{3}(f(x) - f(-x)) - \int_{0}^{1} \frac{3x-2}{3}(f(x) + f(-x))dx \\
&= \frac{1}{6}x(1-x)^2(f''(x) + f''(-x)) - \frac{3x^2 - 4x + 2}{6}(f'(x) - f'(-x)) \\
&+ \frac{3x-2}{3}(f(x) - f(-x)) - \int_{0}^{1} \frac{3x-2}{4}(f(x) + f(-x))dx
\end{aligned}$$

Evaluando en los intervalos tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 uv'''dx &= -\frac{1}{6}(f'(1)-f'(-1)) + \frac{1}{3}(f(1)-f(-1)) + \frac{2}{6}(f'(0)-f'(0)) \\ &\quad + \frac{2}{3}(f(0)-f(0)) - \int_0^1 \frac{3x-2}{4}(f(x)+f(-x))dx \\ &= -\frac{1}{6}(f'(1)-f'(-1)) + \frac{1}{3}(f(1)-f(-1)) - \int_0^1 \frac{3x-2}{4}(f(x)+f(-x))dx\end{aligned}$$

por lo que nos queda:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &= \frac{1}{3}(f(-1)+4f(0)+f(1)) \\ &\quad - \left(-\frac{1}{6}(f'(1)-f'(-1)) + \frac{1}{3}(f(1)-f(-1)) - \int_0^1 \frac{3x-2}{4}(f(x)+f(-x))dx\right)\end{aligned}$$

3.d Solución:

Por b), tenemos que el método obtenido es el método de Simpson 1/3 para extremos $a=-1, b=1$. De la teoría del método sabemos que su error es

$$-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)$$

De donde, por definición de norma infinito tenemos

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)dx - S\right| \leq \frac{||f^{(4)}||_\infty}{90}$$

4 Ejercicio 7 Lista

Determine las constantes a y b en términos del parámetro α de tal manera que el método multipaso

$$y_{n+1} = -ay_n - \alpha y_{n-1} + hby_n'$$

tenga el orden más grande posible. Para qué rangos de valores de α es el método estable?

4.a Solución:

Observemos el error de truncamiento global $\tau(h)$. Sabemos que para $\tau = O(h^m)$ es necesario y suficiente con que

$$\sum_{j=0}^{p}(-j)^i a_j + i\sum_{j=-1}^{p}(-j)^{i-1}b_j = 1 \text{ para cualquier } i = 1, 2, \ldots, m$$

así, debemos hallara los coeficientes y resolver el sistema lineal de ecuaciones en términos de estos coeficientes. Expandamos la forma general del método multipaso con $p = 1$ y comparemos con el método dado:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h\sum_{j=-1}^{p} b_j f(x_{n-j}, y_{n-j}) \\ &= \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h\sum_{j=-1}^{p} b_j y'_{n-j} \\ &= a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + h\left(b_{-1}y'_{n+1} + b_0 y'_n + b_1 y'_{n-1}\right) \\ &= -a y_n - \alpha y_{n-1} + h b y'_n. \end{aligned}$$

De donde, por igualación tenemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= -a \\ a_1 &= -\alpha \\ b_{-1} &= 0 \\ b_0 &= b \\ b_1 &= 0. \end{aligned}$$

Además, por el mismo teorema tenemos para que el método sea consistente es necesario y suficiente con que (usando $p = 1$:

$$\sum_{j=0}^{1} a_j = 1 \quad \text{y} \quad -\sum_{j=0}^{1} j a_j + \sum_{j=-1}^{1} b_j = 1$$

Luego, tenemos:

$$\sum_{j=0}^{1} a_j = a_0 + a_1 = -a - \alpha = 1$$
$$\therefore a = -1 - \alpha$$

Además,

$$-\sum_{j=0}^{1} ja_j + \sum_{j=-1}^{1} b_j = -a_1 + b_0 = -\alpha + b = 1$$
$$\therefore b = 1 + \alpha$$

Para ver los rangos de valores de α para los cuales el método es estable basta con ver la condición de raíz.

$$\begin{aligned}\rho(r) &= r^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j r^{p-j} \\ &= r^2 - \sum_{j=0}^{1} a_j r^{1-j} \\ &= r^2 + ar + \alpha\end{aligned}$$

el cual tiene raíz
$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\alpha}}{2}$$
Reemplazando a con los valores obtenidos para α en la primer parte tenemos

$$\begin{aligned}r &= \frac{(1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4\alpha}}{2} \\ &= \frac{(1+\alpha) \pm \sqrt{1 + 2\alpha + \alpha^2 - 4\alpha}}{2} \\ &= \frac{(1+\alpha) \pm \sqrt{1 - 2\alpha + \alpha^2}}{2} \\ &= \frac{(1+\alpha) \pm \sqrt{(1-\alpha)^2}}{2} \\ &= \frac{(1+\alpha) \pm (1-\alpha)}{2}.\end{aligned}$$

Luego, las raíces son

$$r_+ = \frac{1 + \alpha + 1 - \alpha}{2} = 1 \quad \text{y} \quad r_- = \frac{1 + \alpha - (1 - \alpha)}{2} = \alpha$$

Luego, el método es estable para $\alpha \in [-1, 1]$, pues de esta manera cumple la condición $|\alpha| \leq 1$

5 Ejercicio 11 Lista

Considere el método implícito de Runge-Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(y_n + 2y_{n+1})\right)$$

a) Muestre que el error de truncamiento local es $O(h^2)$.

b) Muestre que el método es A-estable.

5.a Solución:

Sea $z = \frac{1}{3}(y_n + 2y_{n+1})$, luego

$$\begin{aligned} 2y_{n+1} + y_n &= 3y_n + 2hf(z) \\ z &= y_n + \frac{2h}{3}f(z) \end{aligned}$$

lo cual es una fórmula del método de Euler implícito. El resto del paso puede ser escrito como

$$y_{n+1} = y_n + hf(z) = z + \frac{h}{3}f(z)$$

El cual es un método de Euler hacia adelante. Así, estamos considerando un método implícito de tamaño de paso k seguido de uno explícito de paso l, en donde $k + l = h$

Comenzando con un análisis del método implícito, para una solución exacta que vaya a través de (t_n, y_n), sabemos que expandido en $y(t_n+k) = z+w$ para obtener las derivadas de z

$$\begin{aligned} y(t_n) &= y((t_n + k) - k) && (6) \\ &= (z + w) - kf(z + w) + \frac{k^2}{2}f^{[1]}(z + w) && \text{(A2)} \\ &\quad - \frac{k^3}{6}f^{[2]}(z + w) + ... \end{aligned}$$

donde $y^{(k+1)}(t) = f^{[k]}(y(t))$ es la base para el método numérico, las derivadas parciales de una solución exacta pueden ser expresadas en f y sus derivadas espaciales. Las primeras son:

$$f^{[1]}(z) = f'(z)f(z), \quad f^{[2]}(z) = f''(z)[f(z), f(z)] + f'(z)^2 f(z).$$

Usando (A2) como fórmula recursiva para w, la diferencia del punto medio entre el valor numérico y la solución exacta.

$$w - kf'(z)w = k(f(z+w) - f(z) - f'(z)w) - \frac{k^2}{2} f^{[1]}(z+w) + \frac{k^3}{6} f^{[2]}(z+w) + ...$$

Todo término de la derecha tiene al menos segundo orden en $k \sim h$, luego también w es de segundo orden. Usando esto y dejando fuera términos de orden 4 o mayor

$$\begin{aligned}(I - kf'(z))w &= -\frac{k^2}{2} f^{[1]}(z) + \frac{k^3}{6} f^{[2]}(z) + O(k^4) \\ w &= -\frac{k^2}{2} f^{[1]}(z) - \frac{k^3}{2} f'(z) f^{[1]}(z) + \frac{k^3}{6} f^{[2]}(z) + O(k^4)\end{aligned}$$

Ahora, analizando el método explícito y tomando Taylor en (A2) tenemos

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) &= y((t_n + k) + \ell) \\ &= (z + w) + \ell f(z + w) + \frac{\ell^2}{2} f^{[1]}(z + w) \\ &\quad + \frac{\ell^3}{6} f^{[2]}(z + w) + ... \\ &= z + \ell f(z) + w + \frac{\ell^2}{2} f^{[1]}(z) \\ &\quad + \ell f'(z) w + \frac{\ell^3}{6} f^{[2]}(z) + O(h^4)\end{aligned} \tag{B2}$$

Insertando w

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) &= z + \ell f(z) + \frac{h(\ell - k)}{2} f^{[1]}(z) - \frac{hk^2}{2} f'(z) f^{[1]}(z) \\ &\quad + \frac{h(k^2 + k\ell + \ell^2)}{6} f^{[2]}(z) + O(h^4) \\ &= y(t_n) + hf(z) + \frac{h(\ell - k)}{2} f'(z) f(z) \\ &\quad + \frac{h(\ell - k)(h + k)}{6} f'(z)^2 f(z) \\ &\quad + \frac{h(k^2 + k\ell + \ell^2)}{6} f''(z)[f(z), f(z)] + O(h^4)\end{aligned}$$

Concluyendo, podemos decir que

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(z) \\ &= \frac{\ell - k}{2} f'(z) f(z) + \frac{(\ell - k)(h + k)}{6} f'(z)^2 f(z) \\ &\quad + \frac{k^2 + k\ell + \ell^2}{6} f''(z)[f(z), f(z)] + O(h^3).\end{aligned}$$

Solo para $k = l = \frac{h}{2}$ el primer término desaparece. También el primer término de segundo orden se va. Pero incluso el segundo término de segundo orden no tiene término incluyendo la segunda derivada de f que compense el orden 2 del método implícito de punto medio. Para la $k = \frac{2}{3}h$, el método tiene orden uno.

5.b Solución:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(y_n + 2y_{n+1})\right) \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + hf\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(\dot{y}_n + 2\dot{y}_{n+1})\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left| f\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(y_n + 2y_{n+1})\right) - f\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(\dot{y}_n + 2\dot{y}_{n+1})\right) \right| \\ &\qquad \leq M \left| \frac{1}{3}(y_n + 2y_{n+1}) - \frac{1}{3}(\dot{y}_n + 2\dot{y}_{n+1}) \right|\end{aligned}$$

Supongamos así que la función incremental del método $\left(f\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(y_n + 2y_{n+1})\right)\right)$ satisface una condición uniforme de Lipschitz en su segunda variable

$$\begin{aligned}|y_{n+1} - \dot{y}_{n+1}| &\leq |y_n - \dot{y}_n| + h\left| f\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(y_n + 2y_{n+1})\right) - f\left(t_n + \frac{2}{3}h, \frac{1}{3}(\dot{y}_n + 2y_{n+1})\right) \right| \\ &\leq |y_n - \dot{y}_n| + hM||y_n - \dot{y}_n| \\ &\leq (1 + hM)^M |y_0 - \dot{y}_0| \\ &\leq e^{nhM} |y_0 - \dot{y}_0| \\ &= c|y_0 - \dot{y}_0|\end{aligned}$$

De donde tenemos que el método es estable.