



Università degli Studi di Milano–Bicocca
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale in Informatica

Tesi di laurea magistrale

Continuous time Bayesian Network Classifiers

Sottotitolo

Candidato:
Leonardo Di Donato
Matricola 744739

Relatore:
Prof. F. Antonio Stella

Correlatore:
Dott. Daniele Codecasa

Anno Accademico 2012–2013

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit.

— Oscar Wilde

Dedicato a tutti gli appassionati di L^AT_EX.

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
2	CTBN	2
2.1	Fondamenti	2
2.1.1	Bayesian Network	2
2.1.2	Markov Process	6
2.2	Introduzione	9
2.3	Rappresentazione	10
2.4	Apprendimento	11
2.4.1	Sufficient Statistics	11
2.4.2	Stima dei parametri	12
2.4.3	Algoritmo di apprendimento	12
2.5	Inferenza	12
2.6	Apprendimento strutturale	12
2.6.1	Score	12
2.6.2	Ricerca della struttura	12
3	CTBNC	13
3.1	Definizioni	13
3.2	Apprendimento	13
3.3	Inferenza	14
4	PACKAGE R	15
4.1	Analisi	15
4.2	Package	15
4.3	Guida all'uso	16
5	ESPERIMENTI NUMERICI	17
5.1	Dataset	17
5.2	Previsione di stati di traffico	17
6	CONCLUSIONI	19
6.1	Mane	19
6.2	Tekel	19
6.3	Fares	20
A	DOLOR	21
A.1	Mane	21
A.2	Tekel	21
A.3	Fares	22
B	IPSUM	23
B.1	Nozioni basilari	23

B.1.1	Insiemi numerici	23
B.1.2	Le matrici	23
B.2	Formule fuori corpo	24
B.2.1	Una formula spezzata con allineamento	24
B.2.2	Casi	24
B.3	Enunciati e dimostrazioni	25
C	LOREM	26
C.1	Esempi	26
C.1.1	Tabelle	26
C.1.2	Figure	28
	ACRONIMI	31
	BIBLIOGRAFIA	32

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1	Un esempio di figura mobile	29
Figura 2	Tu duo titulo debitas latente	30

ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 1	Un esempio di tabella mobile	28
-----------	--	----

SOMMARIO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

ABSTRACT

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit.
Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis.
Curabitur dictum gravida mauris.*

— Donald Ervin Knuth

RINGRAZIAMENTI

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Milano, luglio 2013

L.

INTRODUZIONE

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit.

IL PRIMO CAPITOLO offre una visione d'insieme della storia di \LaTeX e ne vengono presentate le idee di fondo.

IL SECONDO CAPITOLO offre una visione d'insieme della storia di \LaTeX e ne vengono presentate le idee di fondo.

IL TERZO CAPITOLO spiega le operazioni, veramente semplici, per installare \LaTeX sul proprio calcolatore.

IL QUARTO CAPITOLO descrive sinteticamente le principali norme tipografiche della lingua italiana, utili nella composizione di articoli, tesi o libri.

IL QUINTO CAPITOLO descrive sinteticamente le principali norme tipografiche della lingua italiana, utili nella composizione di articoli, tesi o libri.

IL SESTO CAPITOLO descrive sinteticamente le principali norme tipografiche della lingua italiana, utili nella composizione di articoli, tesi o libri.

1

INTRODUZIONE

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

2 | CTBN

In questo capitolo si introducono i concetti fondamentali delle Continuous time Bayesian Network (CTBN), un framework utile a modellare i processi stocastici relativi a uno spazio degli stati che evolve nel tempo. Tuttavia, prima di affrontare tale argomento si ritiene indispensabile presentare i suoi fondamenti matematici: le Bayesian Network (BN) e i Markov Process, trattati entrambi nella [sezione 2.1](#).

2.1 FONDAMENTI

Come accennato, le Continuous time Bayesian Network sviluppano e integrano concetti e idee provenienti da altre teorie afferenti l'area statistica e del machine learning. Al fine di conferire alla discussione sulle CTBN un quadro iniziale completo ed esauriente, si presentano quindi gli aspetti di maggior rilievo di tali argomenti.

BAYESIAN NETWORK

Le Continuous time Bayesian Network utilizzano una rappresentazione strutturata dello spazio degli stati propria della teoria delle Bayesian Network. Ne ereditano perciò gli aspetti chiave (e.g. indipendenza condizionale) nonché l'insieme delle tecniche algoritmiche efficienti per l'apprendimento e l'inferenza.

MARKOV PROCESS

Le Continuous time Bayesian Network descrivono la dinamica evolutiva delle variabili casuali da cui sono costituite tramite un Homogeneous Markov Process globale, costituito da un insieme di Conditional Markov Process.

2.1.1 Bayesian Network

Una Bayesian Network è un modello grafico probabilistico costituito da un grafo aciclico diretto (DAG).¹ I nodi di tale grafo rappresentano un insieme di variabili casuali mentre gli archi rappresentano le dipendenze (e le indipendenze) condizionali fra esse. Una BN rappresenta la distribuzione di probabilità congiunta del suo insieme di variabili casuali tramite la distribuzione di probabilità condizionale

¹ Un grafo aciclico diretto (anche detto grafo orientato aciclico o digrafo aciclico) è un tipo di grafo che non presenta cicli diretti: comunque si scelga un vertice non è possibile tornare ad esso percorrendo gli archi del grafo.

di ognuna di essa 2. Le BN sono quindi modelli grafico probabilistici con cui è possibile modellare in modo probabilistico le relazioni causali dirette fra eventi. Perciò esse risultano molto utili nella rappresentazione e analisi di modelli del mondo reale che coinvolgono incertezza. Sono infatti usate in svariate applicazioni di supporto alle decisioni, bioinformatica, biologia computazionale, data mining, information retrieval e classificazione.

Rappresentazione

Di seguito si dà la definizione formale delle Bayesian Network e si introducono i loro aspetti basilari.

Definizione 2.1.1 (Bayesian Network). Una Bayesian Network \mathcal{B} è una coppia $\mathcal{B} = (\mathcal{G}, \theta_{\mathcal{G}})$ costituita da:

- $\mathcal{G} = (\mathbf{V}(\mathcal{G}), \mathbf{A}(\mathcal{G}))$, un grafo aciclico diretto dove:
 - $\mathbf{V}(\mathcal{G}) = \{V_1, \dots, V_n\}$ è l'insieme dei nodi, ognuno dei quali è associato con una distribuzione di probabilità condizionale (CPD)²
 - ogni nodo è condizionalmente indipendente (2.1.2) dai suoi non-discendenti dati i suoi nodi genitori
 - $\mathbf{A}(\mathcal{G}) \subseteq \mathbf{V}(\mathcal{G}) \times \mathbf{V}(\mathcal{G})$ è l'insieme degli archi fra i nodi $\mathbf{V}(\mathcal{G})$
- $\theta_{\mathcal{G}}$, insieme delle CPD dei nodi che specifica $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$, la distribuzione di probabilità congiunta delle variabili casuali $\mathbf{X}_{\mathbf{V}(\mathcal{G})}$ a cui corrispondono i nodi $\mathbf{V}(\mathcal{G})$.

La CPD di ogni variabile casuale $X_i \in \mathbf{X}_{\mathbf{V}(\mathcal{G})}$ esprime i suoi valori di probabilità in funzione dei valori assunti da $\text{pa}(X_i)$, notazione con cui denotiamo l'insieme dei nodi genitori per ogni nodo o variabile casuale.

Mentre un arco da un nodo genitore verso un nodo figlio di \mathcal{G} rappresenta una dipendenza condizionale fra le corrispettive variabili casuali, i nodi non connessi, invece, rappresentano variabili casuali condizionalmente indipendenti dagli altri nodi (per quanto riguarda il concetto di *indipendenza condizionale* si rimanda invece a 2.1.2).

Prima di procedere con la discussione si introduce la Chain Rule, regola molto utile nel caso delle BN.

Teorema 1 (Chain Rule). *Dato un insieme di variabili casuali e una distribuzione di probabilità congiunta definita su di esse è possibile calcolare qualsiasi elemento di tale distribuzione tramite le distribuzioni di probabilità condizionale delle variabili casuali [3].*

² Nel caso di variabili causali discrete, le CPD sono rappresentabili come delle tabelle che contengono i valori di probabilità di un nodo in funzione di tutte le possibili configurazioni dei nodi genitori (cioè l'insieme dei nodi da cui parte un arco che punta al nodo di interesse).

Perciò, dato un insieme di variabili casuali A_1, \dots, A_n è possibile calcolare il valore di tale membro della distribuzione di probabilità congiunta applicando la definizione di probabilità condizionale:

$$\mathbf{P}(A_1, \dots, A_n) = \mathbf{P}(A_n | A_{n-1}, \dots, A_1) \cdot \mathbf{P}(A_{n-1}, \dots, A_1)$$

Ripetendo tale processo per ogni termine finale si ottiene:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k | \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j) \quad (1)$$

Applicando la 1 alle Bayesian Network diciamo che la distribuzione di probabilità congiunta $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ si *fattorizza* rispetto al grafo \mathcal{G} se è possibile scrivere:

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i | \text{pa}(X_i)) \quad (2)$$

L'equazione 2 esprime quindi la *proprietà di fattorizzazione* della distribuzione congiunta del modello grafico, ed è ciò che permette di descriverla efficientemente in funzione delle distribuzioni condizionali dei nodi. Si noti inoltre, che le Bayesian Network richiedono che la loro componente \mathcal{G} non contenga cicli (si veda DAG in 2.1.1) affinché possano rispettare tale proprietà.

Poiché, come detto, una Bayesian Network stabilisce che ogni nodo, dati i suoi immediati ascendenti (i.e. nodi genitori), è *condizionalmente indipendente* da ogni altro nodo che non sia un suo discendente, di seguito introduciamo tale concetto formalmente.

Definizione 2.1.2 (Indipendenza condizionale). Un evento A è *condizionalmente indipendente* da un evento B , data l'evidenza su un evento C , qualora la conoscenza di B non apporta alcuna variazione alla probabilità di A rispetto a quella conseguente alla conoscenza di C . Formalmente, ciò significa che:

$$\mathbf{P}(A, B | C) = \mathbf{P}(A | B, C) \cdot \mathbf{P}(B | C) = \mathbf{P}(A | C) \cdot \mathbf{P}(B | C)$$

Da cui segue che:

$$A \perp B | C \iff \mathbf{P}(A | B, C) = \mathbf{P}(A | C)$$

In termini non formali, supponendo di essere nel caso della definizione, cioè di avere una variabile casuale A *condizionalmente indipendente* da B dato C , ciò significa che è possibile ignorare B poiché essa non ha alcun riflesso sulla distribuzione condizionale di A .

Si noti che il concetto appena espresso gioca quindi un ruolo importante per i modelli probabilistici, quali sono le Bayesian Network: semplifica la struttura del modello e i calcoli richiesti per l'inferenza e l'apprendimento del modello. Le Bayesian Network ereditano questi benefici dell'indipendenza condizionale come conseguenza della

loro definizione (si veda 2.1.1): la distribuzione condizionale di ogni variabile casuale X_i dipende solo ed esclusivamente dal valore dei suoi genitori $pa(X_i)$ mentre ignora completamente le variabili casuali associate a nodi non-discendenti di X_i . In breve:

$$\forall X_i \in \mathbf{X}_{V(G)}:$$

$$\mathbf{P}(X_i | E, pa(X_i)) = \mathbf{P}(X_i | pa(X_i)) \quad \forall E \in nd(X_i)$$

dove $nd(X_i)$ è l'insieme dei nodi non-discendenti (ed E è una variabile casuale o un insieme di variabili casuali ad essi associati). In base a ciò si dice quindi che le Bayesian Network rispettano l'*assunzione locale di Markov*.

Apprendimento e Inferenza

In questa sezione si descrivono brevemente, e solo a scopo introduttivo, i processi di apprendimento e inferenza sulle Bayesian Network.

Il problema dell'apprendimento per le Bayesian Network si divide principalmente in due casi:

- apprendere le CPD, nota la struttura
- apprendere sia le CPD, sia la struttura (incognita).

In entrambi i casi è di grande aiuto la rappresentazione efficiente delle Bayesian Network che, tramite la *fattorizzazione* della distribuzione di probabilità congiunta, permette di rappresentarla in modo compatto 2 riducendo notevolmente il numero di parametri da calcolare.

Come detto, per specificare completamente una Bayesian Network è necessario rappresentare completamente la distribuzione di probabilità congiunta delle sue variabili tramite la distribuzione di probabilità condizionale di ognuna di esse. In generale, tali distribuzioni condizionali possono avere una qualsiasi forma anche se, al fine di semplificare i calcoli, è comune utilizzare distribuzioni discrete o Gaussiane per modellarle. È frequente la situazione in cui queste distribuzioni condizionali includono parametri sconosciuti che è necessario stimare dai dati. In tali casi solitamente si procede tramite l'algoritmo di Expectation Maximization (EM), il quale alterna il calcolo dei valori attesi delle variabili casuali non osservate condizionalmente ai dati osservati con la massimizzazione della likelihood. Tale approccio generalmente converge ai valori di massima probabilità a posteriori per i parametri. Esistono comunque una varietà di altri approcci possibili (e.g. trattare i parametri come variabili casuali sconosciute addizionali) per l'*apprendimento dei parametri* che tuttavia non sono argomento di questo lavoro di tesi.

Si noti che le Bayesian Network non sono solamente un *modello discriminativo ma anche generativo* poiché possono essere utilizzate per soddisfare query arbitrarie, cioè per effettuare *inferenza probabilistica*:

calcolare la distribuzione a posteriori di un insieme di variabili casuali data l'osservazione (evidenza) di altre (sfruttando il *teorema di Bayes*). In letteratura sono stati esplorati molti metodi di *inferenza esatta*, quali ad esempio l'eliminazione tramite integrazione o somma delle variabili non osservate che non fanno parte della query probabilistica o il metodo clique tree propagation. Questi metodi, come gli altri presenti in letterature, sono esponenziali rispetto al tree-width del grafo. Per quanto riguarda invece gli algoritmi di *inferenza approssimata* si citano due tra i più comuni: l'importance sampling e la simulazione Markov Chain Monte Carlo ([MCMC](#)).

Quando si dispone del grafo sottostante una [BN](#), al di là dell'osservabilità o meno delle sue variabili casuali, è possibile quindi usare tale [BN](#) per effettuare inferenza. Nel caso in cui invece non si disponga della struttura di una [BN](#) si presenta innanzitutto il problema dell'*apprendimento strutturale*. Per apprendere automaticamente il grafo di una Bayesian Network sono stati sviluppati principalmente due famiglie di algoritmi:

- algoritmi basati sulla ricerca dello scheletro del grafo dal quale, tramite le indipendenze condizionali osservate, si deducono successivamente le direzioni degli archi
- algoritmi che utilizzano tecniche di ricerca ottimizzata.

Gli algoritmi facenti parte della seconda famiglia utilizzando una strategia di ricerca (e.g. Hill Climbing, Best First Search, Simulated Annealing) e una funzione di scoring. Solitamente la funzione di scoring utilizza la probabilità a posteriori della struttura in esame, dato l'insieme dei dati di apprendimento (i.e. training set). Tuttavia, per quanto questi algoritmi siano utilizzati molto frequentemente, essi sono super esponenziali rispetto al numero di nodi della struttura del grafo. Inoltre, qualora si utilizzi una strategia di ricerca locale, è possibile che l'algoritmo restituisca come risultato un minimo locale (per evitare questa situazione si ricorre spesso a metodi di ricerca globale quali il [MCMC](#)). Si fa notare che è possibile ridurre il tempo necessario richiesto per l'apprendimento strutturale fissando un numero massimo di genitori candidati e cercando esaustivamente in insiemi di tale cardinalità una struttura che massimizzi l'informazione mutua fra variabili.

2.1.2 Markov Process

Sempre al fine di preparare la discussione delle Continuous time Bayesian Network si prosegue presentando alcuni concetti propedeutici relativi ai Markov Process, una categoria di processi stocastici *memoryless* (con assenza di memoria).

Definizione 2.1.3 (Proprietà di Markov). Secondo la proprietà di Markov gli stati futuri di un processo stocastico sono indipendenti dagli stati passati, avendo evidenza sullo stato presente di tale processo.

Formalmente, se $X(t)$, $t > 0$ è un processo stocastico che gode di tale proprietà, allora $\forall h > 0$ vale la seguente equazione:

$$\mathbf{P}(X(t+h) | X(s) = x(s), s \leq t) = \mathbf{P}(X(t+h) | X(t) = x(t)) \quad (3)$$

Con la caratterizzazione *assunzione di Markov* si è soliti descrivere i modelli che rispettano tale proprietà.

Di conseguenza possiamo osservare che la distribuzione di probabilità condizionale degli stati futuri di un processo stocastico che gode di tale proprietà dipende solo ed esclusivamente dallo stato attuale del processo, data la conoscenza dei suoi stati passati.

In altri termini ciò indica che lo stato futuro di una variabile casuale è *condizionalmente indipendente* (si veda 2.1.2) dalla sequenza dei suoi stati passati, avendo evidenza sul suo stato presente.

Dalla proprietà di Markov deriva la definizione di Markov Process.

Definizione 2.1.4 (Markov Process). Si definisce come Markov process un processo stocastico che gode della proprietà di Markov.

Esistono due tipi di processi di Markov: omogenei e non. Si procede quindi dandone le definizioni.

Definizione 2.1.5 (Homogeneous Markov Process). Un processo di Markov è detto *omogeneo* qualora esso $\forall t, h > 0$ non dipenda dal tempo t , ovvero:

$$\mathbf{P}(X(t+h) | X(t) = x(t)) = \mathbf{P}(X(h) | X(0) = x(0)) \quad (4)$$

Data quindi una variabile casuale X e l'insieme delle sue istanziazioni $\text{val}(X) = \{x_1, \dots, x_J\}$, $X(t)$ è un processo di Markov *omogeneo, a tempo continuo e stati finiti* se e solo se la sua dinamica è definibile in termini di:

- una distribuzione di probabilità iniziale \mathbf{P}_X^0 su $\text{val}(X)$
- una matrice di intensità \mathbf{Q}_X .

Definizione 2.1.6 (Matrice di intensità). Una matrice di intensità, o Intensity Matrix (**IM**), rappresenta un *modello di transizione Markoviano*

$$\mathbf{Q}_X = \begin{bmatrix} -q_{x_1} & q_{x_1 x_2} & \cdots & q_{x_1 x_k} \\ q_{x_2 x_1} & -q_{x_2} & \cdots & q_{x_2 x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{x_k x_1} & q_{x_k x_2} & \cdots & -q_{x_k} \end{bmatrix}$$

il cui scopo è rappresentare e descrivere il comportamento transiente di X , un processo di Markov omogeneo.

Affinché \mathbf{Q}_X sia una Intensity Matrix valida, ogni sua riga deve sommare a 0. Ciò è possibile solo se:

$$q_{x_i} = \sum_{i \neq j} q_{x_{ij}} \quad \text{con} \quad q_{x_i}, q_{x_{ij}} > 0$$

Data quindi una matrice di intensità \mathbf{Q}_X essa descrive il comportamento transiente di $X(t)$. Se $X(0) = x_i$ allora il processo di Markov omogeneo (e indicizzato dal tempo t) $X(t)$ rimarrà nello stato x_i una quantità di tempo esponenzialmente distribuita rispetto al parametro q_{x_i} . Di conseguenza la funzione di densità di probabilità f e la corrispondente funzione di distribuzione F per $X(t)$ che rimane uguale a x_i sono date da:

$$\begin{aligned} f(t) &= q_{x_i} \exp(-q_{x_i} t), \quad t > 0 \\ F(t) &= 1 - \exp(-q_{x_i} t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Mentre gli elementi sulla diagonale, q_{x_i} , codificano la *probabilità istantanea* che X abbandoni lo stato x_i , gli elementi non sulla diagonale³, $q_{x_{ij}}$, esprimono l'*intensità di transizione* dallo stato x_i allo stato x_j .

Possiamo quindi calcolare:

- il *tempo atteso di una transizione uscente* dallo stato x_i

$$1/q_{x_i}$$

- la *probabilità istantanea di transizione* dallo stato x_i allo stato x_j

$$\theta_{x_{ij}} = q_{x_{ij}}/q_{x_i}.$$

Quindi una matrice di intensità induce una distribuzione di probabilità locale fattorizzata in due parti:

- q_{x_i} , una *distribuzione esponenziale*, che esprime *quando* avvengono le transizioni
- $\theta_{x_{ij}}$, una *distribuzione multinomiale*, che esprime *verso* quale stato avvengono le transizioni.

Si osservi infine come la matrice \mathbf{Q}_X fa in modo che X soddisfi la proprietà di Markov poiché il comportamento futuro di X è definito solamente in base al suo stato attuale (perciò vale l'equazione 4).⁷

Definizione 2.1.7 (Conditional Markov Process). Un processo di Markov le cui intensità di transizione variano nel tempo non in funzione del tempo ma in funzione dei valori assunti ad ogni determinato istante t da un insieme di altre variabili, che evolvono anch'esse come

³ Elementi della matrice per i cui indici i e j risulta vero che $i \neq j$.

dei processi di Markov, è detto essere un Conditional Markov Process (o Inhomogeneous Markov Process).

Assumendo quindi che una variabile casuale X evolva come un processo di Markov $X(t)$ e che la sua dinamica sia condizionata da un insieme di altre variabili casuali U , anch'esse dei processi di Markov, possiamo definire per tale variabile casuale una Conditional Intensity Matrix (CIM) $Q_{X|U}$.

Se specifichiamo una distribuzione di probabilità iniziale su X abbiamo così definito un Markov Process il cui comportamento dipende dalle istanziazioni dei valori di U .

Definizione 2.1.8 (Matrice di intensità condizionale). Dato un insieme di processi di Markov U , una matrice di intensità condizionale $Q_{X|U}$ è costituita da un insieme di matrici di intensità $Q_{X|u_i}$, una per ogni diversa istanziazione u_i di U .

$$Q_{X|U} = \{ Q_{X|u_1}, Q_{X|u_2}, \dots, Q_{X|u_n} \}$$

dove

$$Q_{X|u_i} = \begin{bmatrix} -q_{x_1}^{u_i} & q_{x_1 x_2}^{u_i} & \cdots & q_{x_1 x_k}^{u_i} \\ q_{x_2 x_1}^{u_i} & -q_{x_2}^{u_i} & \cdots & q_{x_2 x_k}^{u_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{x_k x_1}^{u_i} & q_{x_k x_2}^{u_i} & \cdots & -q_{x_k}^{u_i} \end{bmatrix}$$

2.2 INTRODUZIONE

Nelle precedenti sezioni sono stati illustrati i concetti che si pongono a fondamento delle Continuous time Bayesian Network:

- le Bayesian Network utili a comprendere la rappresentazione strutturata dello spazio degli stati delle CTBN, l'utilizzo della nozione di indipendenza condizionale e le conseguenti tecniche di apprendimento e inferenza
- i Markov Process, omogenei e non, al fine di introdurre le modalità di rappresentazione (qualitativa e quantitativa) esplicita delle dinamiche temporali.

È ora possibile quindi presentare le Continuous time Bayesian Network come una collezione di Continuous Time Markov Process (CTMP) con spazio degli stati discreto [2].

Definizione 2.2.1 (Continuous Time Markov Process). Variabile casuale $X(t)$, che gode della proprietà di Markov, indicizzata dal tempo $t \in [0, \infty)$.

Dato quindi un insieme di Continuous Time Markov Process \mathbf{X} è conveniente definire questo insieme come una singola *Process Variable* $\mathbf{X}(t)$. Chiameremo invece *traiettoria* l'istanziamento di un insieme di valori per $\mathbf{X}(t)$ al variare di t .

2.3 RAPPRESENTAZIONE

Una Continuous time Bayesian Network è un modello grafico in cui ogni nodo è associato con una variabile casuale i cui stati evolvono nel tempo continuo. Le dinamiche evolutive degli stati dei nodi sono governate e dipendono dal valore che gli stati dei nodi padre⁴ assumono [4]. Quindi ogni nodo è un Conditional Markov Process (2.1.7) a tempo continuo e spazio degli stati discreto.

Una CTBN è composta principalmente da due componenti:

- una distribuzione di probabilità iniziale
- le dinamiche che regolano l'evoluzione nel tempo continuo della distribuzione di probabilità

Più formalmente si definisce:

Definizione 2.3.1 (Continuous time Bayesian Network). Data una Process Variable \mathbf{X} , cioè un insieme di processi di Markov X_1, X_2, \dots, X_N dove ogni X_n ha uno spazio degli stati finito $\text{val}(X_n) = \{x_1, \dots, x_J\}$, una CTBN \mathcal{N} su \mathbf{X} consiste di:

- una distribuzione di probabilità iniziale \mathbf{P}_X^0 specificata come una Bayesian Network \mathcal{B} su \mathbf{X}
- un modello di transizione continuo, specificato da:
 - un grafo \mathcal{G} , orientato e non necessariamente aciclico, composto dai nodi X_1, X_2, \dots, X_N , ognuno dei quali possiede un insieme di genitori (possibilmente vuoto) denotato da $\text{pa}(X_n)$
 - una matrice di intensità condizionale $\mathbf{Q}_{X_n|\text{pa}(X_n)}$ per ogni nodo $X_n \in \mathbf{X}$.

Per ogni variabile causale $X_n \in \mathbf{X}$ di \mathcal{N} si ha quindi un insieme di modelli di probabilità locali: $\mathbf{Q}_{X_n|\text{pa}(X_n)}$, la CIM di X_n , è infatti un insieme di modelli di transizione Markoviani (definiti tramite delle matrici di intensità IM) la cui cardinalità è pari a quella dell'insieme delle diverse istanziazioni di $\text{pa}(X_n)$, l'insieme dei suoi nodi genitori.

Si riscontra, quindi, quanto già affermato in precedenza (si veda 2.1), cioè che una CTBN, fissato un ordinamento delle variabili da cui

⁴ Con il termine «nodo padre», o *parent node*, si intende un nodo il cui stato condiziona quello di un altro nodo del modello grafico.

è costituita, esprime la sua dinamica evolutiva globale tramite un unico Homogeneous Markov Process, costituito da un insieme di Conditional Markov Process (un insieme di CIM e relative distribuzioni di probabilità iniziali).

Si noti che, diversamente dalle Bayesian Network, nelle Continuous time Bayesian Network gli archi fra i nodi rappresentano le relazioni temporali fra essi. Tali relazioni codificano le dinamiche evolutive dei nodi, ognuna delle quali è espressa condizionatamente alla dinamica evolutiva degli stati dei suoi nodi genitori, tramite le matrici di intensità condizionale. Per tale motivo è possibile che la componente \mathcal{G} del modello di transizione continuo contenga dei cicli. Tra l'altro, come vedremo nel prosieguo, la mancanza di tale vincolo di aciclicità porta a notevoli vantaggi computazionali relativamente all'apprendimento della struttura di una CTBN dai dati.

2.4 APPENDIMENTO

In questa sezione si affronta il processo di apprendimento (dei parametri) delle Continuous time Bayesian Network. Poiché le CTBN sono un modello esponenziale la probabilità di un dataset può essere espressa in termini di *sufficient statistics* aggregate, argomento che viene introdotto di seguito.

Si noti comunque che si affronta solamente il processo di apprendimento da dati completi mentre quello relativo a dati non completi viene tralasciato poiché non è argomento di questo lavoro di tesi.

Per dati completi si intende un insieme $\mathcal{D} = \{\delta_1, \dots, \delta_h\}$ composto da una o più traiettorie di tutte le variabili casuali di una CTBN, dove ogni δ_i è un insieme completo di transizioni fra stati (indicizzato dal tempo): per ogni momento temporale di ogni traiettoria conosciamo l'istanziatura di tutte le variabili casuali in questione.

2.4.1 Sufficient Statistics

Lo scopo delle *sufficient statistics* è riassumere la dinamica evolutiva di un singolo Homogeneous Markov Process $X(t)$ tramite:

- $T[x]$, la quantità di tempo trascorsa nello stato x
- $M[x, x']$, il numero di transizioni dallo stato x allo stato x' .

Il numero totale di transizioni uscenti da uno stato x è

$$M[x] = \sum_{x'} M[x, x'].$$

Traslando il concetto alle Continuous time Bayesian Network e quindi ai Conditional Markov Process è necessario considerare le succitate quantità contestualmente all'istanziatura dell'insieme \mathbf{U} dei nodi

genitori. Poiché, nel caso di dati completi, si conosce l'istanziamento di \mathbf{U} durante l'intera traiettoria allora, per ogni preciso momento nel tempo t , si conosce quale matrice di intensità (omogenea) $\mathbf{Q}_{X|u}$ governi la dinamica di X . Perciò otteniamo:

- $T[x|u]$, la quantità di tempo trascorsa da $X(t)$ nello stato x quando $\mathbf{U} = u$
- $M[x, x'|u]$, il numero di transizioni dallo stato x allo stato x' di $X(t)$ quando $\mathbf{U} = u$.

2.4.2 Stima dei parametri

Introdotte le *sufficient statistics* possiamo approcciare il problema dell'apprendimento dei parametri di una Continuous time Bayesian Network di cui conosciamo la struttura da un insieme di dati completi. I parametri, infatti, sono funzione delle *sufficient statistics*.

2.4.3 Algoritmo di apprendimento

...

2.5 INFERENZA

...

2.6 APPRENDIMENTO STRUTTURALE

...

2.6.1 Score

2.6.2 Ricerca della struttura

Hill Climbing

...

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

3.1 DEFINIZIONI

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

3.2 APPENDIMENTO

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus.

Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

3.3 INFERENZA

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

4

PACKAGE R

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

4.1 ANALISI

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

4.2 PACKAGE

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus.

Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

4.3 GUIDA ALL'USO

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

5

ESPERIMENTI NUMERICI

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

5.1 DATASET

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

5.2 PREVISIONE DI STATI DI TRAFFICO

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus.

Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

6 | CONCLUSIONI

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

6.1 MANE

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

6.2 TEKEL

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus.

Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

6.3 FARES

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

A | DOLOR

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

A.1 MANE

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

A.2 TEKEL

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus.

Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

A.3 FARES

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

B | IPSUM

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.

LOREM IPSUM DOLOR sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

MAURIS UT LEO. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis.

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (6)$$

Dalla formula 6 si deduce che...

B.1 NOZIONI BASILARI

B.1.1 Insiemi numerici

Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit.

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

B.1.2 Le matrici

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (8)$$

B.2 FORMULE FUORI CORPO

Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum.

B.2.1 Una formula spezzata con allineamento

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

$$\begin{aligned} a &= b + c - d \\ &= e - f \\ &= g + h \\ &= i. \end{aligned} \quad (9)$$

B.2.2 Casi

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

$$f(n) := \begin{cases} 2n + 1, & \text{con } n \text{ dispari,} \\ n/2, & \text{con } n \text{ pari.} \end{cases} \quad (10)$$

B.3 ENUNCIATI E DIMOSTRAZIONI

Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus.

Definizione B.3.1 (di Gauss). Un *matematico* trova ovvio che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Teorema 2. *I matematici, se ce ne sono, sono molto rari.*

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Teorema 3 (di Pitagora). *La somma dei quadrati costruiti sui cateti ugualia il quadrato costruito sull'ipotenusa.*

La dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Teorema 4 (Sorpresa). *Si ha che $\log(-1)^2 = 2\log(-1)$.*

Dimostrazione. Si ha che $\log(1)^2 = 2\log(1)$. Ma si ha anche che $\log(-1)^2 = \log(1) = 0$. Quindi $2\log(-1) = 0$, da cui la tesi. \square

Viene un quadratino a fine dimostrazione.

Legge 1. *Il capo ha ragione.*

Decreto 2 (Aggiornamento alla legge 1). *Il capo ha sempre ragione.*

Legge 3. *Se il capo ha torto, vedere la legge 1.*

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque.

C.1 ESEMPLI

C.1.1 Tabelle

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim.

Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

La tabella [1 nella pagina seguente](#) fornisce un esempio di tabella mobile.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur

Tabella 1: Un esempio di tabella mobile.

p	$\neg p$
V	F
F	V

id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

c.1.2 Figure

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

La figura 1 nella pagina successiva fornisce un esempio di figura mobile.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vi-

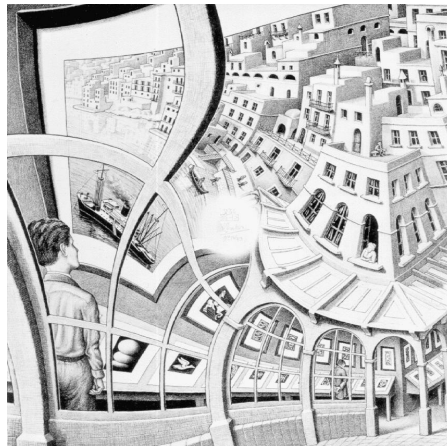


Figura 1: Un esempio di figura mobile (l'immagine, che riproduce la litografia *Galleria di stampe*, di M. Escher, proviene da <http://www.mcescher.com/>).

tae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

La figura 2 nella pagina seguente costituisce un esempio di figura mobile.

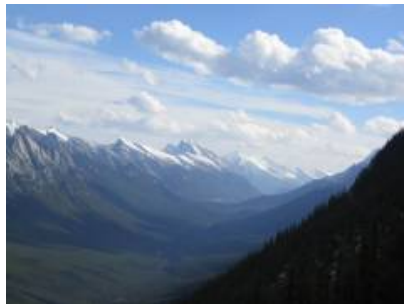
Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.



(a) Asia personas duo.



(b) Pan ma signo.



(c) Methodicamente o uno.



(d) Titolo debitas.

Figura 2: Tu duo titulo debitas latente.

ACRONIMI

BN	Bayesian Network.....	2
CIM	Conditional Intensity Matrix.....	9
CPD	Conditional probability distribution.....	3
CTBN	Continuos time Bayesian Network	2
CTMP	Continuos Time Markov Process	9
DAG	Directed acyclic graph	2
EM	Expectation Maximization	5
IM	Intensity Matrix.....	7
MCMC	Markov Chain Monte Carlo	6

BIBLIOGRAFIA

- [1] Uri Nodelman, CR Shelton e Daphne Koller. «Learning continuous time Bayesian networks». In: *Proceedings of the Nineteenth ... X* (2002). arXiv:arxiv.org/abs/1212.2498 [http:]. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2100639>.
- [2] Uri D. Nodelman. «Continuous Time Bayesian Networks». Tesi di dott. Stanford University, 2007 (cit. a p. 9).
- [3] Stuart J. Russell e Peter Norvig. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson Education, 2003. ISBN: 0137903952. URL: <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=773294> (cit. a p. 3).
- [4] F Stella e Y Amer. «Continuous time Bayesian network classifiers.» In: *Journal of biomedical informatics* 45.6 (dic. 2012), pp. 1108–19. ISSN: 1532-0480. DOI: [10.1016/j.jbi.2012.07.002](https://doi.org/10.1016/j.jbi.2012.07.002). URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/22846170> (cit. a p. 10).

DICHIARAZIONE

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices.

Milano, luglio 2013

Leonardo Di Donato