Vektoren

Ortsvektor
Vektor von Ursprung zu Punkt

Verbindungsvektor
Vektor zwischen zwei Punkten

Rechenoperationen

Rechenoperation	Formel
Addition	$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$
Multiplikation mit Skalar	$\lambda \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \times a_1 \\ \lambda \times a_2 \end{pmatrix}$
Länge / Betrag	$\mid \vec{a} \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$
Abstand zweier Punkte	$\mid \vec{BA} \mid = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

Einheitsvektoren

Vektor der Länge 1 in beliebiger Richtung

$$\vec{a_E} = \frac{1}{\mid \vec{a} \mid} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- maximale Menge linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$
- Basis (Standardbasis für $\vec{e}$) des $\mathbb{R}^n$ / Erzeugendensystem
- Anzahl der Basisvektoren ist $dim(V)$

Lineare Abhängigkeit

Linearkombination:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \vec{a_k}$$

Linear unabhängig:

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + ... + \lambda_n \vec{a_n} \text{ nicht nur triviale Lösung}$$

Untervektorräume

Nichtleere Teilmenge $U \leq \mathbb{R}^n$

1. $\lambda \cdot \vec{v} \in U$, für $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in U$
2. $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in U$, für $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in U$

Lineare Hülle

Menge aller Linearkombinationen einer Gruppe von Vektoren

Basis von Vektoren

Vektor wird erzeugt durch Linearkombination von Basisvektoren

$$\vec{v} = k_1 \vec{b_1} + ... + k_n \vec{b_n} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Matrizen

$(m \times n)$ - Matrix (m Zeilen, n Spalten)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponieren einer Matrix

$$B = A^T$$

Vertauschen der Zeilen und Spalten

Rechenoperationen

Addition

$$A = (a_{ij})$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Multiplikation mit Skalaren

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$$

Multiplikation

	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	

Abbildungen

M & N nichtleere Menge

surjektiv
Jeder Eintrag von M hat einen Eintrag in N, aber mehrere können den gleichen haben

injektiv
Jeder Eintrag von M hat einen Eintrag in N, aber N kann unbesetzte Einträge haben

bijektiv
surjektiv + injektiv

Lineare Abbildungen

V, W sind reelle Vektorräume, $F : V \leftrightarrow W$ heißt lineare Abbildung, wenn

- $F(\vec{a} + \vec{b}) = F(\vec{a}) + F(\vec{b})$
- $F(R \cdot \vec{a}) = R \cdot F(\vec{a})$

Besondere Matrizen

Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Streckungsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$$

Bild einer Matrix

Projektion

$\vec{b}$ auf $\vec{a}$ projezieren, ohne $|\vec{b}|$ zu erhalten:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$$

Skalare Projektion

$$comp_a(\vec{b}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Vektorielle Projektion

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Vektor-/Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Spatprodukt

$$S = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Betrag ist Volumen des durch die 3 Vektoren aufgespannten Spates (Raum)
$S = 0 \Rightarrow$ Vektoren liegen in einer Ebene

Geraden im $\mathbb{R}^3$

$$g : \vec{x} = \vec{x_0} + \lambda \cdot \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Punktrichtungsform

$$g : \vec{x} = \vec{x_0} + \lambda \cdot (\vec{x_1} - \vec{x_0}), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Punktrichtungsform

$$E : \vec{x} = \vec{x_0} + \lambda \cdot \vec{e} + \mu \cdot \vec{b}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Parameterfreie Darstellung

$$E : (\vec{x} - \vec{x_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

Ausmultipliziert:

$$E : Ax + By + Cz = D$$

Schnittgerade zweier Ebenen

1. Parameterform gleichsetzen und LGS aufstellen
2. Eine Variable festlegen und LGS lösen

Schnitt Gerade-Ebene

1. Gerade in Parameterform einsetzen
2. λ in g einsetzen

Abstand Punkt-Ebene:

$$d_p = |\frac{(\vec{x} - \vec{x_0}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}|$$

Reihen

Lineare Hülle der Spaltenvektoren / Menge der linear unabhängigen Spaltenvektoren

Kern einer Matrix

LGS aufstellen für $A\vec{x} = \vec{0}$

- $lL = Kern(A)$
- $dim(Kern(A)) =$ Anzahl der Vektoren in LH (lL)

Rang einer Matrix

1. Matrix als Rechenschema aufschreiben
2. Zeilenstufennormalform durch Gauß-Algorithmus Anzahl der Zeilen $\neq \vec{0} \hat{=} rang(A)$

Eigenschaften

- $rang(A) = rang(A^T)$
- Anzahl l.u. Zeilen/Spalten
- $dim(Bild(A)) = rang(A)$

Rangsatz

$$dim(Kern(A)) + rang(A) = n$$

Matrizen und LGS

$A\vec{x} = \vec{b}$

- A: Koeffizientenmatrix
- $\vec{x}$: Spaltenvektor der Unbekannten
- $(A \mid \vec{b})$: Erweiterte Koeffizientenmatrix

LGS ist lösbar, wenn:

- $rang(A) = rang(A \mid \vec{b})$
- $\vec{b} \in Bild(A)$

Inverse Matrix

Rückgängig machen einer Matrix (A^{-1})

Matrix ist invertierbar, wenn

- $rang(A) = n$ (voller Rang)
- $A \cdot A^{-1} = E_n$ (Einheitsmatrix)

Lösung von LGS mithilfe Koeffizientenmatrix

- $Kern(A) = \vec{0} \Rightarrow (A \mid \vec{b})$ hat eindeutige Lösung
- Ist A invertierbar, ist $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar $\Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Determinante

$$D := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Regel des Sarrus

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{2}$$

Entwicklungssatz nach LaPlace

A ist $(m \times n)$-Matrix

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A'_{ij})$$

Zahlenfolge

$$S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Partialsumme / Reihe

Folge der Partialsummen einer Zahlenfolge heißt Reihe

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$$

Konvergenz

$$lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

hat einen endlichen Wert? ("Summe der unendlichen Reihe")

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + ...$$

$\Rightarrow$ konvergent für $|q| < 1$

Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

$\Rightarrow$ divergent

Minorantenkriterium

Ist $0 < a_i \leq b_i$ ab einem $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \; divergent \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i \; divergent$$

Leibniz-Kriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm ...$$

Alternierende Reihe ist konvergent, falls $a_1 > a_2 > a_3 > ... > 0$ und $lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Quotientenkriterium

Gegeben ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid < 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent}$$

Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 + a_2 x^2 + ...$$

Definitionsbereich besteht aus allen $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert

Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_n}{a_{n+1}} \mid$$

1. Eine Zeile / Spalte mit möglichst vielen 0 heraussuchen
2. Matrix wie ein Schacheld mit negativen/positiven Vorzeichen bestücken
3. Jeden Eintrag der Spalte/Zeile mit Unterdeterminante multiplizieren

Eigenschaften der Determinante

- $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar
- wechselt bei vertauschen der Zeilen/Spalten Vorzeichen
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- Determinante einer Dreiecksmatrix $\hat{=}$ Produkt der Hauptdiagonalelemente

Beweis durch vollständige Induktion

1. **Induktionsanfang**: Für $n = 1$ ist die Aussage richtig
2. **Induktionsschluss**: Ergebnis von n_0 in Formel von n_1 einsetzen

Funktionen

Symmetrie

y-Achse (gerade)	Punktsymetrie (ungerade)
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$

Umkehrung

1. $f(x)$ durch y ersetzen
2. Nach x umformen

Reelle Zahlenfolgen & Grenzwert

$$(a_n)_n = 1, 2, 3, 4, ... \quad , a_n = n$$

Ableitung elementarer Funktionen

Funktion	Ableitung
x^n	nx^{n-1}
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arccot(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{ln(a) \cdot x}$

Ableitungsregeln

Faktorregel

$$y = c \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot f'(x)$$

Summenregel

$$y = f_1(x) + f_2(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(x) + f_2'(x)$$

- eindeutig bestimmbar für jede Potenzreihe
- Reihe konvergiert für $|x| < \rho$
- Reihe divergiert für $|x| > \rho$

Taylorreihen

Funktionen können als Potenzreihen ausgedrückt werden Taylor-Reihe der Funktion f mit Entwicklungsstelle x_0:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Taylor-Polynom

Polynom T_n

- $f(x_0) = T(x_0)$
- $f^n(x_0) = T^n(x_0)$

Taylor-Polynom der Ordnung n:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Taylor-Restglied

$$R_n = f(x) - T_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

ξ ist eine Stelle zwischen x und x_0

Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1$$

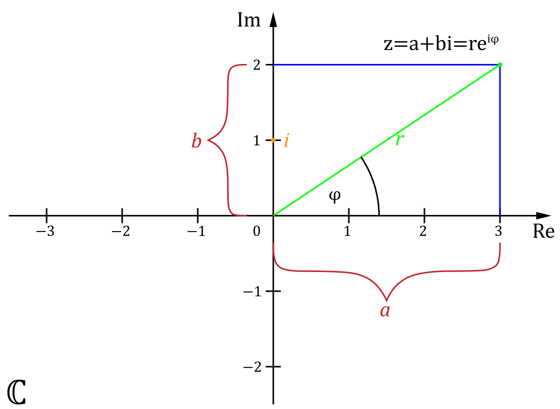
Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{c = a + ib;\ a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}$$

a: Realteil von c ($Re(c)$)

b: Imaginärteil von c ($Im(c)$)

i: Imaginäre Einheit



Kartesische Form

$$c = a + ib$$

Rechenoperation	Formel
Gleichheit	$a + ib = c + id$, wenn $a = c$ und $b = d$
Summe/Differenz	$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + (b \pm d) \cdot i$
Multiplikation	$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Produktregel

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Potenzregel

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = nx^{n-1}$$

Quotientenregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Kettenregel

$$y = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

Krümmungsverhalten von Funktionen

$f''(x) > 0 \hat{=}$ Linkskrümmung

$f''(x) < 0 \hat{=}$ Rechtskrümmung

Hinreichende Bedingung für relative Maxima

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$ relatives Maximum

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow$ relatives Minimum

Wendepunkte und Sattelpunkte

$f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendepunkt

$f''(x_0) = 0, f'''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt

Newton-Verfahren zur Näherung einer Nullstelle

$$x_{neu} = x_{start} - \frac{f(x_{start})}{f(x_{start})}$$

1. x_{start} nahe Nullpunkt heraussuchen
2. Verfahren wiederholen, bis x_{start} sich stabilisiert

Integration

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Eigenschaften des Integrals

- $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$
- $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Integrationstechniken

Substitution

1. Teil von abzuleitender Funktion durch u substituieren
2. Ableitung $\frac{du}{dx}$ bestimmen
3. Nach dx auflösen & einsetzen

Partielle Integration

$g(x)$ wird als abgeleitet betrachtet

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

Uneigentliche Integrale

Rechenoperation	Formel
Komplex-Konjugierte	entsteht durch Spiegelung an reeller Achse $c = a + ib, c^* = a - ib$
Betrag	$\mid c \mid = \sqrt{a^2 + b^2} \quad c \cdot c^* = \mid c \mid^2$

Division

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{w^*}{w^*} = \frac{z \cdot w^*}{\mid w \mid^2}$$

Polarform

$$c = r \cdot (cos(\varphi) + isin(\varphi))$$

- $a = Re(c) = r \cdot cos(\varphi)$
- $b = Im(c) = r \cdot sin(\varphi)$
- $r = \mid c \mid$
- $\varphi =$Winkelargument, nicht eindeutig

Rechenoperation	Formel
Multiplikation	$c_1 \cdot c_2 = r_1 r_2 \cdot (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Division	$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$
Potenzieren (Satz von Moivre)	$c^n = r^n(cos(n\varphi) + isin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N}$

Wurzeln

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot (cos(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}) + isin(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}))$$

mit $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$

- Wurzeln liegen auf Kreis mit Radius $r^{\frac{1}{n}}$
- Winkelabstand $\frac{2\pi}{n}$ zueinander

PQ-Formel

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\frac{p^2}{4} - q := D, \text{Diskriminante}$$

$D > 0$: 2 reelle Lösungen $D = 0$: 1 reelle Lösung (doppelte Nullstelle) $D < 0$: 2 komplexe Lösungen, zueinander komplex konjugiert

Exponentialform

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

$z^* = r * e^{-i\varphi}$
$cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$
$sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{2i}$

Rechenoperation	Formel
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Potenzen	$z^n = r^n \cdot e^{n \cdot i\varphi}$

Wurzeln

$$w^k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi + 2\pi k}{n})}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n - 1$$

1. Variable für einen der Grenzwerte einbauen
2. $\lim_{t \to \infty}$ oder $\lim_{t \to 0}$ berechnen

Mittelwert

Mittelwert für $f(x)$ im Intervall $[a; b]$

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Flächenberechnung

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

, wenn $f(x) \geq g(x) \quad \forall \quad x \in [a; b]$