
Projet numérique, Master 2 NPU

Résolution numérique de l'équation de Lane-Emden, et application à l'étude du Soleil

Université de Bordeaux

Janvier-Avril 2017

Léo ESNAULT, Erwan OLIVIER

Introduction

Le but de ce projet numérique est le développement d'un code de calcul simple permettant la résolution de l'équation de Lane-Emden. Les objectifs principaux sous-jacents de ce travail sont l'écriture d'un code fonctionnel permettant de résoudre le problème physique donné, ainsi que la vérification et l'interprétation des solutions calculées, tant sur le plan physique que numérique.

En astrophysique, l'équation de Lane-Emden est une équation adimensionnée de structure stellaire, établie sous certaines hypothèses simplificatrices. Elle décrit la structure d'un objet satisfaisant une équation d'état polytropique, auto-gravitant et à symétrie sphérique, c'est-à-dire qu'il n'est pas significativement déformé par sa propre rotation. Les solutions permettent de déterminer le profil de pression et de densité de l'objet, ainsi que sa configuration (extension spatiale, masse totale). L'équation est nommée en l'honneur des astrophysiciens Jonathan H. Lane et Robert Emden. C'est Jonathan Lane qui proposa cette équation en 1870 [LAN], dans un travail présenté comme étant le premier visant à étudier la structure interne d'une étoile. Y sont également liés Lord Kelvin et A. Ritter à la fin du XIX^{ème} siècle, puis Ralph H. Fowler et Subrahmanyan Chandrasekhar dans le courant des années 1930.

C'est une équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre qui nécessite d'être résolue numériquement. Mais fait remarquable, elle possède trois solutions analytiques, pour différents indices polytropiques.

Nous commencerons par présenter les hypothèses initiales permettant d'établir l'équation. Par la suite, nous discrétisons l'équation et présentons les méthodes numériques utilisées dans l'écriture du code. Nous utilisons ensuite les solutions analytiques exactes de l'équation pour vérifier celles calculées par le code, ce qui nous permet de discuter ses propriétés de convergence, et l'influence du maillage et des conditions aux bords. Nous appliquerons enfin notre schéma au calcul de la structure du Soleil.

Table des matières

1	Équations de structure stellaire	3
1.1	Hypothèses et équations fondamentales	3
1.2	Équation de Lane-Emden adimensionnée	4
1.3	Équation de la masse	5
1.4	Conditions aux limites	6
2	Discretisation et schéma numérique	6
2.1	Méthode des différences finies	6
2.2	Équation de Lane-Emden	7
2.3	Équation de la masse	7
2.4	Conditions au centre	8
3	Racines d'une équation non linéaire	9
3.1	Méthode de la dichotomie	9
3.2	Méthode de Newton-Raphson	10
3.3	Validation et comparaison des méthodes	10
4	Validation et étude du schéma numérique	11
4.1	Validation du schéma	11
4.2	Influence du nombre de points sur la précision	12
4.3	Influence des conditions au centre sur la précision	13
5	Utilisation du programme	13
5.1	Étude des polytropes	13
5.2	Application à l'étude du Soleil	15

1 Équations de structure stellaire

En premier lieu, nous commençons par présenter les hypothèses du modèle polytropique et les équations de structure stellaire utilisées pour établir l'équation de Lane-Emden.

1.1 Hypothèses et équations fondamentales

Nous considérons une sphère chimiquement homogène, sans rotation propre, en équilibre hydrostatique. Les solutions seront ainsi stationnaires, et le calcul sera effectué par un traitement eulérien en une dimension, soit le rayon r .

Les équations considérées sont donc :

- L'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho G \quad (1)$$

avec Φ le potentiel gravitationnel, ρ la densité et G la constante de gravitation.

- L'équation d'équilibre hydrostatique :

$$\nabla P = -\rho\nabla\Phi \quad (2)$$

avec P la pression.

- L'équation d'état polytropique :

$$P = K\rho^\gamma \quad (3)$$

avec $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$, n étant l'indice polytropique, et K une constante.

Ces dernières peuvent être utilisées pour démontrer l'équation de structure stellaire de Lane-Emden. Les hypothèses faites peuvent sembler très restrictives, surtout parce qu'elles excluent le traitement du transfert radiatif. Néanmoins, nous nous limitons ici à l'étude de la *structure* des étoiles (traiter les aspects thermiques est bien entendu indispensable pour *prévoir l'évolution* de cette structure) et ces équations ne sont couplées qu'implicitement à la connaissance de la structure thermique des étoiles.

Or, il existe des situations dans lesquelles la pression totale P peut être décrite uniquement au moyen de la masse volumique ρ :

- dans le cas d'un plasma stellaire parfait classique au sein duquel la pression de radiation est négligeable,

$$P \sim \rho^{c_P/c_V} \sim \rho^{5/3}$$

lorsque ce plasma a un comportement adiabatique. C'est le cas par exemple d'étoiles complètement convectives, si la convection est très efficace pour transporter l'énergie. De tels objets existent : ce sont des étoiles jeunes, du type *T Tauri* [KIP],[FOR].

- un plasma d'électrons complètement dégénéré exerce une pression principalement due à ces électrons (pression de Fermi), telle que :

$$P \simeq P_e \sim \rho^\gamma$$

où $\gamma = 5/3$ si les électrons sont non-relativistes ou $\gamma = 4/3$ s'ils sont ultra-relativistes. De tels astres existent également : ce sont les naines blanches [KIP],[FOR].

Par conséquent, il existe des situations pour lesquelles on peut éviter le traitement explicite du transport de chaleur, parce qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la température T pour connaître la pression P qui régit l'équilibre mécanique, étant donné que $P = K\rho^\gamma$ (3).

1.2 Équation de Lane-Emden adimensionnée

On part de l'équation d'équilibre hydrostatique (2) en une dimension (r) en coordonnées sphériques, dans laquelle on injecte l'équation d'état polytropique (3) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} &= -\frac{d\Phi}{dr} \\ \frac{\gamma}{\rho} K \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} &= -\frac{d\Phi}{dr} \\ -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} &= \frac{d\Phi}{dr}\end{aligned}$$

Comme $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$, et si $\gamma \neq 1$ ($n \neq \infty$), il vient :

$$\rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{(1 + \frac{1}{n})K} \frac{d\Phi}{dr}$$

En intégrant sur r ,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} + A_1 = -\frac{1}{(1 + \frac{1}{n})K} \Phi$$

Or $A_1 = 0$ car $\Phi(\rho = 0) = 0$, d'où :

$$\Phi = -(n+1)K\rho^{\frac{1}{n}}$$

Avec l'équation du potentiel gravitationnel en une dimension en coordonnées sphériques, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right) &= 4\pi\rho G \\ \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} &= 4\pi\rho G \\ -(n+1)K \frac{d^2\rho^{\frac{1}{n}}}{dr^2} - (n+1)K \frac{2}{r} \frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr} &= 4\pi\rho G\end{aligned}$$

On cherche maintenant à adimensionner les variables. Pour ce faire, on utilise les grandeurs caractéristiques R pour r et ρ_c pour ρ . On obtient :

$$-(n+1)K \frac{\rho_c^{\frac{1}{n}}}{R^2} \frac{d^2(\frac{\rho}{\rho_c})^{\frac{1}{n}}}{d(\frac{r}{R})^2} - (n+1)K \frac{1}{R} \frac{2}{\frac{r}{R}} \frac{\rho_c^{\frac{1}{n}}}{R} \frac{d(\frac{\rho}{\rho_c})^{\frac{1}{n}}}{d\frac{r}{R}} = 4\pi\rho_c \frac{\rho}{\rho_c} G$$

On pose $q = \frac{m}{M}$ la masse adimensionnée, $z = \frac{r}{R}$ le rayon adimensionné, et $w = (\frac{\rho}{\rho_c})^{\frac{1}{n}}$ la densité adimensionnée. Ceci entraîne la simplification :

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} = R^2 \frac{-4\pi G \rho_c}{\rho_c^{\frac{1}{n}} (n+1)K} w^n$$

On choisit $\rho_c = \rho(r=0)$ tel que $w(z=0) = 1$ et $R = \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}}$ tel que finalement :

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0 \quad (4)$$

Il existe des solutions analytiques aux équations de structure stellaire de Lane-Emden pour les indices polytropiques $n = 0$, $n = 1$ et $n = 5$.

Ces solutions sont données dans le tableau 1.

n	0	1	5
$w(z)$	$1 - \frac{1}{6}z^2$	$\frac{\sin(z)}{z}$	$\frac{1}{(1+\frac{z^2}{3})^{\frac{1}{2}}}$

TABLE 1 – Solutions analytiques de l'équation de Lane-Emden

1.3 Équation de la masse

On peut aussi obtenir l'expression de la masse, en intégrant la densité sur un volume V voulu. On a donc :

$$m(r) = \int_V \rho dV$$

Soit, avec $dV = 4\pi r^2 dr$

$$m(r) = \int_r 4\pi \rho r^2 dr$$

En utilisant les variables adimensionnées, on écrit :

$$m(r) = 4\pi \int \rho_c w^2 r^2 dr$$

qui, en réutilisant l'équation 4, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} m(z) &= 4\pi \rho_c \int -\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) (zR)^2 d(zR) \\ m(z) &= -4\pi \rho_c \int \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) R^2 R dz \\ m(z) &= -4\pi \rho_c R^3 \int \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) dz \\ m(z) &= -4\pi \rho_c R^3 \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + A_2 \end{aligned}$$

Avec $A_2 = 0$ car $m(z = 0) = 0$. En reprenant l'expression de R , on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \rho_c R &= \rho_c \left(\frac{(n+1)K \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \rho_c R^3 &= \rho_c \cdot \rho_c^{\frac{(1-n)}{n} \frac{3}{2}} \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \rho_c R^3 &= \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant cette expression dans la dernière relation exprimant $m(z)$, puis en posant $M = 4\pi \rho_c R^3 = 4\pi \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}$ une masse caractéristique on obtient finalement :

$$q(z) = -z^2 \frac{dw}{dz} \tag{5}$$

1.4 Conditions aux limites

Pour résoudre numériquement l'équation 4, il est nécessaire de connaître les conditions au point de départ, soit dans notre cas des conditions physiques à respecter au centre de l'étoile.

Par définition, le rayon au centre est nul et la densité vaut la densité centrale, soit les conditions :

Rayon : $r = 0$

Densité : $\rho(r = 0) = \rho_c$

L'étoile étant en équilibre hydrostatique, la densité est maximale au centre, soit :

Dérivée de la densité : $\frac{\partial \rho}{\partial r}|_{r=0} = 0$

De plus, la masse étant l'intégrale de la densité sur le volume, celle-ci est également nulle au centre.

Masse : $m(r = 0) = 0$

Ce qui implique, pour les variables adimensionnées :

$z = R \times 0 = 0$

$w = \frac{\rho_c}{\rho_c} = 1$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{R\rho_c} \frac{d\rho}{dr} = 0$

$q = 0$

Certains schémas demandent des conditions au bord, ce qui n'est pas notre cas, mais toutefois nous pouvons savoir que le bord de l'étoile est atteint au point où la densité s'annule, soit $w = 0$.

2 Discrétisation et schéma numérique

Nous considérons maintenant la discrétisation de l'équation (4) sur une grille de $N+1$ points, avec un pas h régulier défini par $h = \frac{z_N}{N}$ en définissant une valeur arbitraire de z en N , correspondant à la longueur voulue pour la grille.

On notera X_i la valeur de la variable X au point $i \in [0..N]$, la valeur X_0 correspondant à la valeur de X au centre.

La méthode numérique utilisée est non-itérative (pas de relaxation) avec un schéma aux différences finies excentré à gauche. Cette méthode a l'avantage d'être simple et très rapide en exécution, mais, comme tous les points sont calculés à partir des deux premiers, elle est très sensible aux conditions au centre et devient *a priori* de moins en moins correcte avec la distance.

2.1 Méthode des différences finies

La discrétisation des équations, et notamment les dérivées, repose sur la formule de Taylor.

Soit f une fonction numérique définie dans un intervalle I de \mathbb{R} contenant a . Si les n premières dérivées de f existent en a , alors pour tout x appartenant à I :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \epsilon(x)(x-a)^n \quad (6)$$

où ϵ est une fonction telle que $\epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a (le dernier terme est appelé reste de Young).

En posant $h = x - a$, la formule de Taylor s'écrit sous sa forme la plus utilisée en physique :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h^1}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a) + \dots \quad (7)$$

Aucune condition n'étant posée sur le signe de h , on peut aussi écrire :

$$f(a-h) = f(a) + \frac{(-h)^1}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(-h)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \frac{(-h)^3}{3!} f^{(3)}(a) + \dots \quad (8)$$

En effectuant la combinaison linéaire (7) – (8) nous obtenons

$$f(a+h) - f(a-h) = 2hf^{(1)}(a) + 2h^3f^{(3)}(a) + \dots$$

Soit en approximant à l'ordre 2 :

$$f(a+h) - f(a-h) = 2hf^{(1)}(a)$$

Nous en déduisons ainsi le schéma aux différences finies centrée d'ordre 2 pour la dérivée première

$$f^{(1)}(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad (9)$$

De la même manière, avec la combinaison (7) + (8), nous en déduisons le schéma aux différences finies centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde

$$f^{(2)}(a) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \quad (10)$$

En prenant un voisinage à $-2h$ et en effectuant des combinaisons linéaires avec (8), il est très facile d'obtenir les deux équations suivantes, soit les schéma aux différences finies excentrées à gauche respectivement d'ordre 1 et 2

$$f^{(1)}(a) = \frac{f(a-2h) - 4f(a-h) + 3f(a)}{2h} \quad (11)$$

$$f^{(2)}(a) = \frac{f(a-2h) - 2f(a-h) + f(a)}{h^2} \quad (12)$$

Nous pouvons ensuite utiliser ces schémas pour discrétiser les équations (4) et (5).

2.2 Équation de Lane-Emden

En considérant un pas h faible, équivalent au voisinage des différences finies, et en utilisant les équations (11) et (12) pour les dérivées première et seconde, il vient (en notant w_{i-a} , $a \in \mathbb{N}$ la valeur de w au point $i-a$)

$$\frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{h^2} + \frac{2}{z_i} \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 3w_i}{2h} + w_i^n = 0$$

Soit en multipliant par h^2

$$h^2w_i^n + w_i \left(1 + \frac{3h}{z_i}\right) - w_{i-1} \left(2 + \frac{4h}{z_i}\right) - w_{i-2} \left(-1 - \frac{h}{z_i}\right) = 0 \quad (13)$$

Nous avons donc la possibilité d'obtenir une solution satisfaisant (4) en définissant uniquement les deux premiers points. Pour ceci, il nous sera nécessaire de trouver la racine positive du polynôme en w_i de degré n , dont la méthode sera détaillée dans la section suivante.

2.3 Équation de la masse

Nous discrétisons l'équation (5) en utilisant le schéma centré (9) pour obtenir :

$$q_i = -z_i^2 \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \quad (14)$$

2.4 Conditions au centre

Reprenons la densité adimensionnée w . Développée en série de Taylor autour de w_0 , elle s'écrit en ne considérant que les 2 premiers termes :

$$w(z) \approx w_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 \quad (15a)$$

En dérivant cette équation, et en se plaçant au centre : $w'|_0 = \alpha_1$ et $w''|_0 = 2\alpha_2$. En remplaçant dans l'équation de Lane-Emden (4), on trouve :

$$2\alpha_2 + \frac{2}{z}(\alpha_1 + 2\alpha_2 z) + w_0^n = 0 \quad (15b)$$

En $z = 0$, la condition sur la dérivée de la densité au centre implique que α_1 doit s'annuler, soit :

$$2\alpha_2 + 4\alpha_2 = -w_0^n = -1 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{6} \quad (15c)$$

Soit en réinsérant les termes dans 15a, l'approximation au deuxième ordre autour de 0 devient :

$$w(z) \approx 1 - \frac{z^2}{6} \quad (15d)$$

En se plaçant maintenant en w_1 :

$$w_1 \approx 1 - \frac{h^2}{6} \quad (15e)$$

Cette condition nous permet donc de nous assurer que la dérivée au centre est bien nulle. Nous voyons que $w_1 < w_0$, ce qui est le comportement attendu pour une étoile, sa densité étant maximale au centre.

Il est intéressant de remarquer que la formule (15d) correspond à la solution exacte pour $n = 0$. Tout les polytropes doivent donc *a priori* varier de la même manière au début (ce qui sera illustré en figure 8).

3 Racines d'une équation non linéaire

Comme nous l'avons vu, résoudre l'équation de Lane-Emden est ramené à trouver les racines en w_i du polynôme d'ordre n pour chaque i :

$$h^2 w_i^n + A w_i + B = 0 \quad (16)$$

avec A et B dépendant du schéma utilisé.

Pour résoudre cette équation, dont il peut exister ou non des solutions analytiques, nous pouvons utiliser plusieurs méthodes numériques, dont deux sont présentées dans la suite.

Une remarque importante est que, un polynôme d'ordre n pouvant avoir jusqu'à n racines réelles, il est nécessaire d'avoir un critère pour pouvoir les discriminer (voir figure 1).

Dans notre cas, nous considérons que la solution globale de w doit être assez lisse. Ceci se traduit par le fait qu'un point w_i ne doit pas être trop éloigné du point précédent w_{i-1} .

Les coefficients A et B dépendant uniquement des deux points précédents, de constantes et du rapport $\frac{h}{z_i}$ qui est faible, les coefficients du polynôme varient donc peu d'un point au point suivant. La valeur de la racine à choisir pour w_i ne doit pas être très éloignée de w_{i-1} . Connaissant les deux premières valeurs de w , ce critère permet a priori de s'assurer que la racine choisie est la bonne.

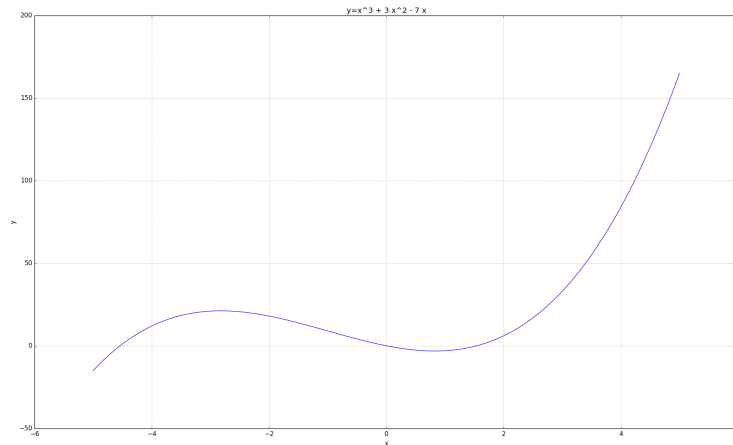


FIGURE 1 – Polynôme de degré 3. Il est aisé de voir que la proximité relative entre les racines $r_2 = 0$ et $r_3 = 3/2$ pose le problème du choix de la racine la plus pertinente.

3.1 Méthode de la dichotomie

La méthode de la dichotomie consiste à partir d'un intervalle où une solution existe, puis à le diviser sans cesse par 2 jusqu'à atteindre la précision souhaitée.

1. Il faut commencer par donner un intervalle $[a, b]$ où une solution existe, donc $f(a) \times f(b) < 0$.
2. On calcule ensuite la moyenne $c = \frac{a+b}{2}$ des deux valeurs des deux bornes, et on teste si $f(c)$ est inférieur à la précision voulue. Si c'est le cas, on affiche c .
3. Si ce n'est pas le cas on teste si la solution est dans l'intervalle supérieur $[c, b]$ par exemple, soit $f(c) \times f(b) < 0$.
4. Si c'est le cas, alors on pose $a = c$, sinon on pose $b = c$ et on recommence à l'étape 2.

Cette méthode permet donc de trouver la racine d'une équation non linéaire. Toutefois, il est nécessaire de connaître un intervalle englobant cette racine, ce qui peut être parfois compliqué. Dans notre cas, nous choisissons d'entourer la valeur précédente w_{i-1} afin de s'assurer de choisir la bonne racine. Toutefois, l'intervalle utilisé est déterminé de manière empirique. Une valeur entre 0.01 et 0.3 semble convenir, ce qui valide notre hypothèse de la faible variation des racines.

Cette méthode est aussi assez lente (temps de convergence linéaire), ce qui est peu contraignant

dans notre cas, mais l'incertitude sur la valeur de l'intervalle à adopter reste un point négatif pour cette méthode.

3.2 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson permet de trouver le zéro d'une fonction continue et dérivable sur un intervalle.

Soit f une fonction réelle de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$, ayant une racine unique \bar{x} sur $\llbracket a, b \rrbracket$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\llbracket a, b \rrbracket$. La méthode de Newton-Raphson consiste à déterminer des valeurs approchées de \bar{x} en introduisant la fonction N_f , définie par $N_f = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, qui admet \bar{x} comme point fixe. Il existe un voisinage V de \bar{x} tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite (x_n) définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = N_f(x_n)$ et de premier terme x_0 converge vers \bar{x} .

Cette méthode est donc très simple : à chaque itération, la fonction dont on cherche un zéro est linéarisée en l'itéré courant et l'itéré suivant est pris égal au zéro de la fonction linéarisée (comme illustré en figure 2). Ceci est particulièrement adapté à notre cas car il n'y a besoin que d'un nombre de départ et d'une dérivée, qui est simplement la dérivée d'un polynôme, soit dans notre cas :

$$nh^2 w_i^{n-1} + A \quad (17)$$

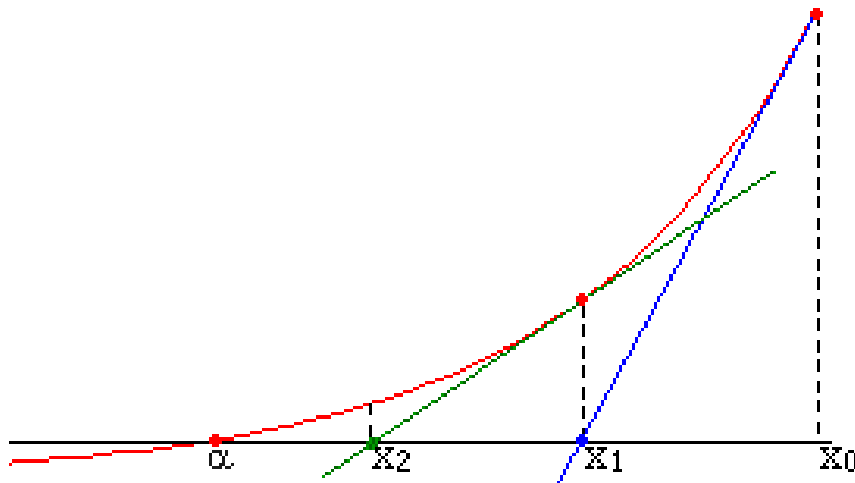


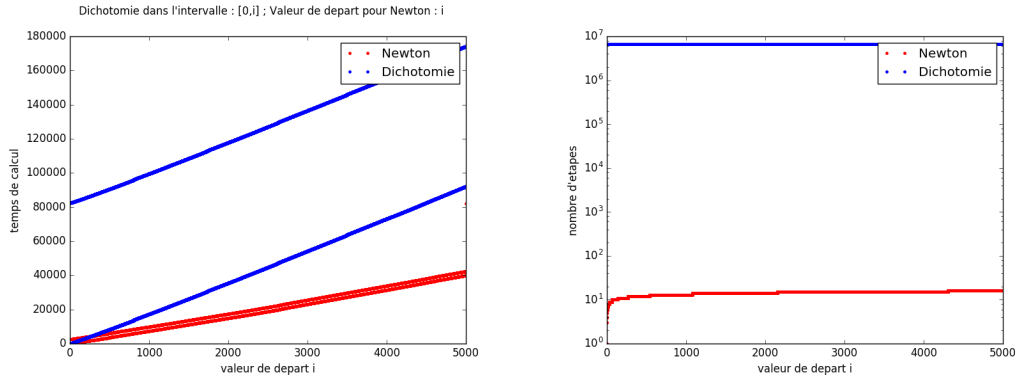
FIGURE 2 – Illustration de la convergence de la méthode de Newton-Raphson.

Un autre avantage de cette méthode réside dans sa vitesse d'exécution, beaucoup plus rapide que la méthode de la dichotomie (temps de calcul quadratique). Nous prenons w_{i-1} comme valeur de départ, pour les raisons détaillées précédemment.

3.3 Validation et comparaison des méthodes

Pour valider ces deux méthodes, nous avons étudié la racine d'un polynôme du second degré, arbitrairement $P(x) = x^2 + 2x - 3$, dont les racines valent -3.0 et 1.0 .

Les courbes ci-dessous (figure 3) représentent le temps de calcul (en unités arbitraires) en faisant varier la valeur de départ pour la méthode de Newton-Raphson (3a), et la borne b pour la méthode de la dichotomie (3b) (en fixant $a = 0.0$). La valeur de départ pour la méthode de Newton-Raphson, et la valeur de départ de b pour la méthode de la dichotomie, sont $i = 1 + j/20$ avec $j = 0 \dots 100\,000$, et le critère de convergence est fixé à 10^{-6} .



(a) Temps de calcul en fonction de la valeur d'entrée. (b) Nombre d'itérations en fonction de la valeur d'entrée.

FIGURE 3 – Comparaison de la performance des méthodes de dichotomie (bleu) et de Newton-Raphson (rouge) en terme de temps de calcul (3a) et de nombre d'étapes (3b).

Comme attendu, la méthode de Newton-Raphson converge beaucoup plus rapidement que la méthode de la dichotomie (figure 3a), et en effectuant un nombre d'itérations moindre (figure 3b). Le dédoublement des courbes est lié à un phénomène surnaturel inexpliqué. À l'heure où nous écrivons ces lignes, nous n'avons pas encore pu expliquer précisément ce comportement (qui semble lié à la parité de j : j impair \rightarrow courbe du haut, j pair \rightarrow courbe du bas).

Bien que la vitesse de calcul ne soit pas un facteur déterminant pour notre choix, la difficulté à obtenir un intervalle raisonnable pour la méthode de la dichotomie, et la facilité d'obtention de la dérivée du polynôme dans notre cas nous permet de nous orienter particulièrement vers la méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce problème. Toutefois, les deux méthodes ont été implémentées dans le code final pour permettre de tester les intervalles et de comparer les résultats.

4 Validation et étude du schéma numérique

4.1 Validation du schéma

Pour valider le schéma numérique, nous comparons une solution calculée pour un indice polytropique donné avec la solution exacte correspondante, qui sert de référence. Ici, on choisit un indice polytropique de 1 et 2001 points sur la grille¹. Dans tout ce qui suit, on utilisera $N = 2000$.

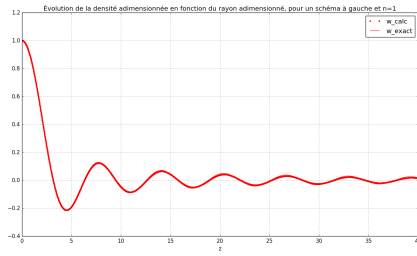
La figure 4a présente conjointement la densité en fonction du rayon, tous deux adimensionnés, pour la solution analytique (trait plein) et la solution calculée par le code (points). La solution calculée semble confondue avec la solution exacte, un tracé en plan rapproché permet de mettre en évidence un faible écart, visible notamment au niveau des oscillations pour $z > 10$. Cependant, le résultat fourni par le code est globalement en très bon accord avec la solution de référence, ce qui permet de valider notre schéma de calcul.

L'erreur tracée en figure 4b semble périodique, comme la solution, dont l'amplitude semble diminuer avec z . Ceci pourrait être expliqué par une difficulté à reproduire les extrema locaux, et par une convergence du schéma vers 0. L'erreur est inférieure à 1 %, ce qui est une valeur acceptable.

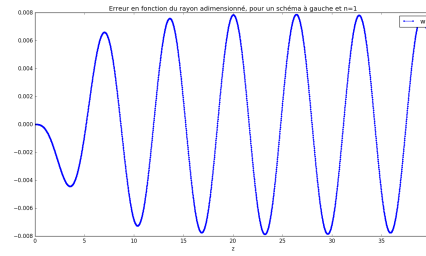
La figure 5a permet d'observer la précision du schéma avec une solution non oscillante et convergant beaucoup moins rapidement vers 0, soit pour $n = 5$. L'erreur tracée en figure 5b augmente cette fois-ci avec z , mais reste toutefois inférieure à 1%.

Ces deux études nous permettent d'être confiant dans la précision de notre schéma. Toutefois, il peut être intéressant d'approfondir l'étude en faisant varier le nombre de points de la grille ou la valeur de w_1 .

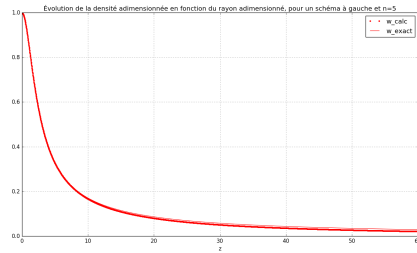
1. La grille est divisée en N intervalles, le calcul est donc effectué sur $N+1$ points.



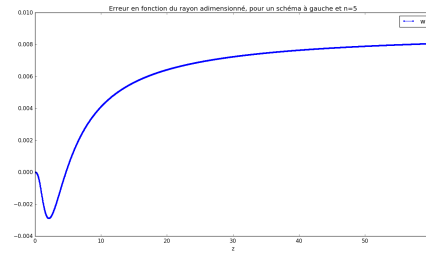
(a) Solutions théorique (trait fin) et simulée (points).



(b) Différence calculée entre solutions théorique et simulée.

 FIGURE 4 – Comparaison entre théorie et simulation pour le cas $n = 1$ avec $N = 2000$.


(a) Solutions théorique (trait fin) et simulée (points).



(b) Différence calculée entre solutions théorique et simulée.

 FIGURE 5 – Comparaison entre théorie et simulation pour le cas $n = 5$ avec $N = 2000$.

4.2 Influence du nombre de points sur la précision

L'étude de la précision de la solution en fonction de N est effectuée pour $n = 1$. La figure 6a représente l'erreur pour différentes valeurs de N et la figure 6b trace sa valeur maximale en fonction de N . L'erreur diminue lorsque l'on augmente le nombre de points, ce qui est le comportement attendu car le pas h est inversement proportionnel à N . L'erreur diminue toutefois de moins en moins avec N , et le choix $N = 2000$ semble donc un bon compromis pour avoir une bonne précision sans avoir trop de points (bien qu'un nombre de points élevé ne constitue pas un grand problème, le temps de calcul étant très faible, de l'ordre d'une seconde pour $N = 2000$).

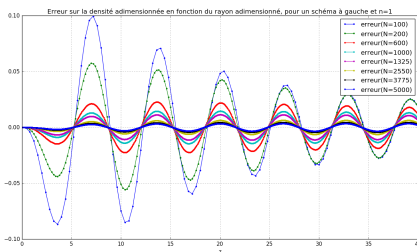
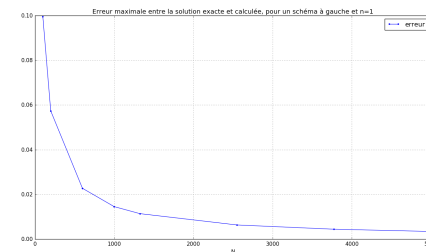
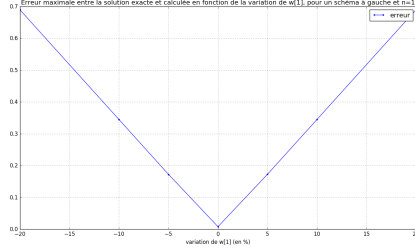

 (a) Différence entre théorie et simulation pour $n = 1$ et différentes valeurs de N .

 (b) Différence entre théorie et simulation pour $n = 1$ en fonction de N .

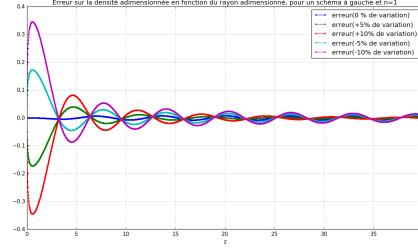
FIGURE 6 – Effet du raffinement de la grille sur la précision.

4.3 Influence des conditions au centre sur la précision

Pour tester l'influence de la condition (15d) sur w_1 , nous avons augmenté ou diminué sa valeur de 0 à 20 %. La figure (7a) représente l'erreur maximale entre les solutions analytique et numérique sur w en fonction de cette variation.



(a) Différence entre théorie et simulation pour $n = 1$ et $N = 2000$, en fonction de la variation de w_1 .



(b) Différence entre théorie et simulation en fonction de z pour $n = 1$ et $N = 2000$, pour différentes variations de w_1 .

FIGURE 7 – Effet de la variation de la dérivée au centre sur la précision.

Il apparaît clairement une symétrie entre l'augmentation et la diminution de la valeur de w_1 . Si nous augmentons w_1 , la courbe ne pouvant pas présenter de cassure, la solution va continuer d'augmenter avant de passer par un maximum, puis va diminuer pour converger vers la solution analytique. Si nous diminuons w_1 , la solution va suivre un mauvais chemin jusqu'à converger vers la solution analytique, comme représenté en figure 7b.

Il est intéressant de remarquer que l'erreur maximale est proche du centre, ceci indiquant que la méthode va donc converger vers la solution analytique même avec une variation importante des conditions initiales.

Comme nous l'attendions, la variation maximale est très importante pour une variation des conditions au centre, toutefois le fait que le schéma converge tout de même lors de grandes variations est un point intéressant.

5 Utilisation du programme

5.1 Étude des polytropes

On peut donc utiliser ce schéma pour tracer les courbes des différents polytropes (figure 8).

Comme prévu, les différentes solutions ne présentent pas de cassures (sauf pour $n = 2$), varient de la même manière au centre, et la période des variations semble augmenter avec n jusqu'à un certain seuil où il n'y a plus de variations, tandis que leur amplitude diminue. Il ne nous a pas été possible de résoudre le cas $n = 2$ strictement, et nous avons donc tracé la courbe $n = 2$ pour $n = 2.001$. Ce problème est peut être causé par la non-existence de racines réelles en un point du maillage. Toutefois, cette hypothèse mérite d'être vérifiée par de plus amples investigations.

Il est important de noter que les oscillations des solutions sont un caractère uniquement mathématique et non physique des solutions. En effet, w représentant une densité, elle ne peut être physiquement que positive.

Nous pouvons aussi remarquer que le point correspondant à la surface, soit pour $w = 0$, s'éloigne de plus en plus du centre avec l'augmentation de n .

Il est aussi possible de tracer les courbes des masses correspondantes (figure 9).

Nous remarquons le même comportement oscillatoire pour la masse adimensionnée, ce qui est logique car la masse est proportionnelle à la dérivée de w . Celle-ci (la masse totale) étant une intégrale de la densité, elle devrait physiquement toujours augmenter. Les valeurs se situant après un maximum sont donc des valeurs non physiques.

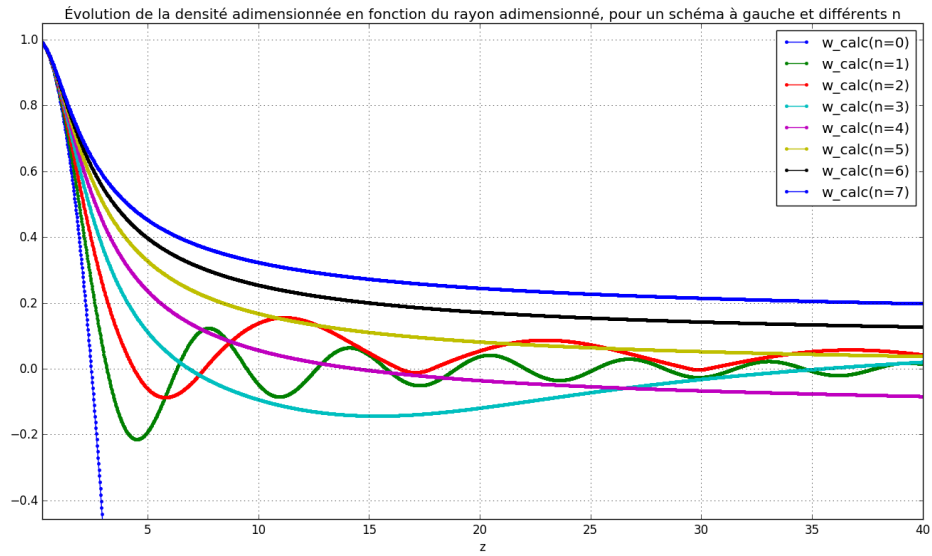


FIGURE 8 – Densités adimensionnées pour $N = 2000$ et différentes valeurs de n .

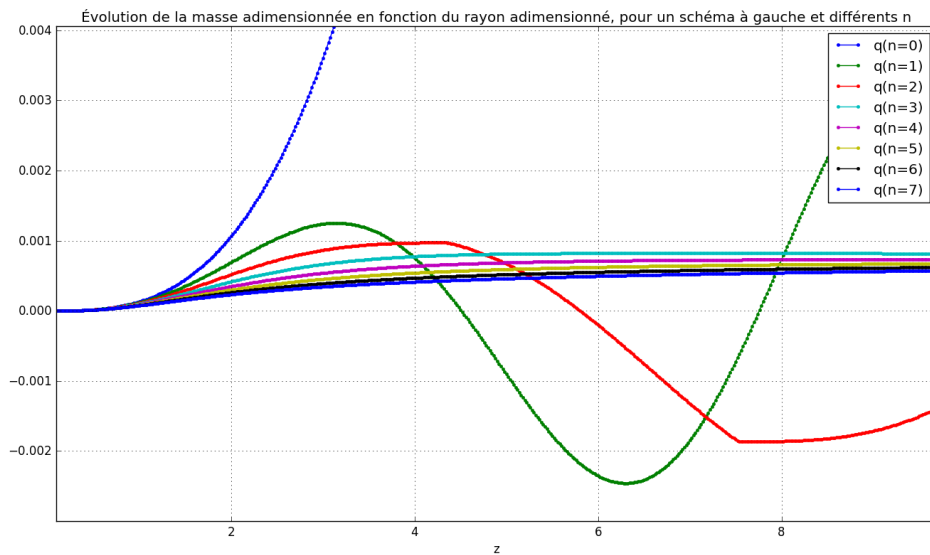


FIGURE 9 – Masses adimensionnées pour $N = 2000$ et différents n .

5.2 Application à l'étude du Soleil

Nous pouvons désormais utiliser ce schéma pour calculer la structure du Soleil.

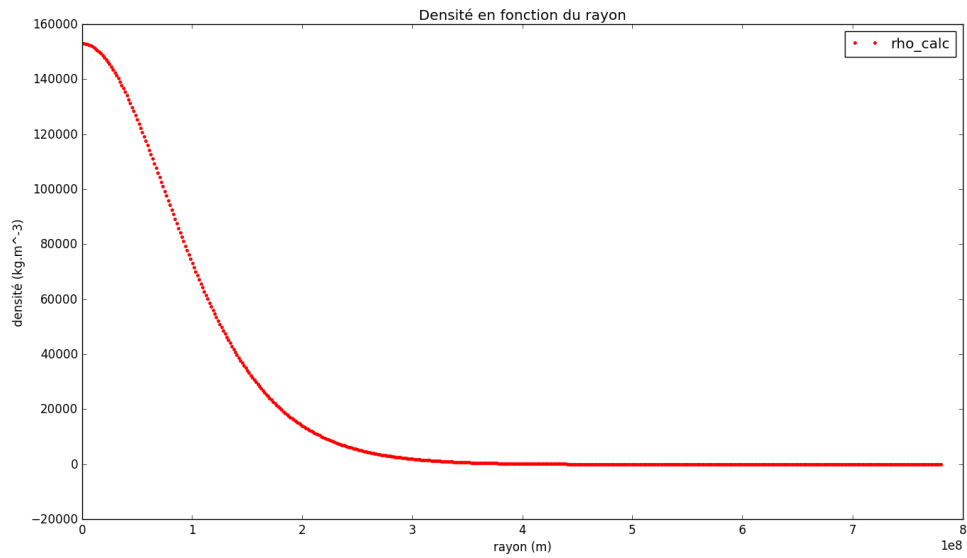
Nous utilisons les paramètres centraux de simulations plus complexes de la structure du Soleil, utilisés dans la référence [HEN], soit :

$$\rho_c = 1.53 \cdot 10^5 \text{ kg.m}^{-3}$$

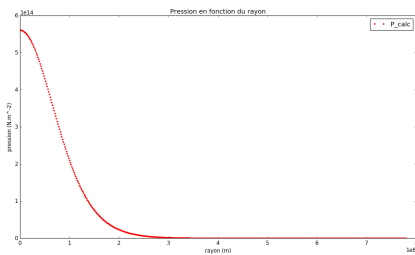
$$P_c = 3.00 \cdot 10^{16} \text{ N.m}^{-2}$$

L'indice polytropique est pris à $n = 3$, et nous utilisons les résultats de nos simulations précédentes, soit $N = 2000$ points et $z_{max} = 40$, pour revenir aux variables physiques en utilisant les formules de ρ , P , m et r décrites jusqu'à présent.

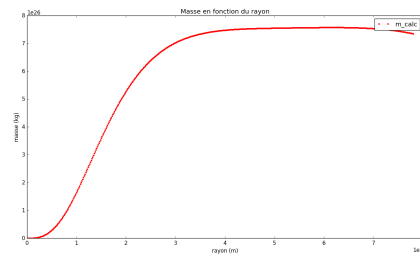
Les résultats sont donnés en figures 10a, 10b et 10c, où l'affichage a été réduit aux 500 premiers points pour plus de visibilité.



(a) Densité calculée du Soleil en fonction du rayon.



(b) Pression calculée du Soleil en fonction du rayon.



(c) Masse calculée du Soleil en fonction du rayon.

FIGURE 10 – Paramètres physiques du Soleil calculés à l'aide du modèle.

Les résultats obtenus peuvent être comparés avec les valeurs expérimentales [HEN], qui sont :

$$R_{sol} = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$M_{sol} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

En analysant la figure 10a, nous pouvons en déduire la valeur du rayon pour laquelle la densité devient nulle, soit :

$$R_{calc} = 5.38 \cdot 10^8 m$$

ce qui diffère de $1.58 \cdot 10^8 m$ avec la référence, ou relativement à la valeur expérimentale de 22.72 %. L'ordre de grandeur du rayon réel est donc bien préservé et l'erreur est relativement faible eu égard à toutes les approximations faites, notamment le calcul par un seul polytrophe.

Concernant la masse pour laquelle la densité devient nulle, nous obtenons :

$$M_{calc} = 7.35 \cdot 10^{26} m$$

soit une différence de $1.99 \cdot 10^{30} m$, ou relativement à la valeur réelle 99.96 %. Nous remarquons que le bord est bien atteint avant le maximum de la masse.

Cette valeur est cette fois-ci bien moins convaincante, et il existe en effet presque 6 ordres de grandeur entre la valeur réelle et la valeur calculée.

Cette grande différence est probablement due à l'hypothèse d'homogénéité chimique du Soleil, que nous savons inhomogène entre les couches externes et le cœur, ainsi qu'à l'hypothèse d'un indice polytropique unique. En effet, nous pensons aujourd'hui que le Soleil est constitué de 3 couches ; le cœur, la zone radiative et la zone convective, qui ont des propriétés thermodynamiques très différentes. Il serait beaucoup plus approprié de considérer un indice polytropique par couche, ce qui est effectué dans certains articles [HEN].

Conclusion

L'objectif de ce projet était de déterminer numériquement la structure interne d'un gaz autogravitant à l'équilibre, chimiquement homogène et sans rotation propre.

L'écriture des équations de structure stellaire sous ces hypothèses nous a conduit à une équation différentielle non-linéaire adimensionnée sur la densité, variant en fonction du rayon : l'équation de Lane-Emden.

Nous avons discrétisé cette équation sur une grille régulière à une dimension et implémenté la méthode de Newton-Raphson que nous avons choisie pour trouver les racines de polynômes de degré n . La comparaison des solutions calculées par le code avec les solutions analytiques nous a permis d'apprécier son comportement : stabilité, sensibilité aux conditions aux bords, effet du maillage. Cette nécessaire phase de validation autorise une utilisation du code sur l'ensemble des cas n'admettant pas de solution exacte. Nous avons alors calculé la masse et la densité adimensionnées avec diverses valeurs pour l'indice polytropique.

Enfin, nous avons pu établir des solutions dans l'espace physique par application des facteurs d'échelle adéquats, en considérant le cas du Soleil. Le modèle ayant été testé au préalable, la différence constatée entre notre résultat pour la masse et la valeur donnée dans la littérature nous laisse penser que le Soleil ne vérifie pas l'hypothèse d'un indice polytropique unique. C'est effectivement un modèle avec trois couches physiques distinctes qui est admis aujourd'hui.

La méthode utilisée n'est toutefois pas la seule possibilité, il est par exemple possible de résoudre l'équation par une méthode de relaxation avec conditions aux bords variables, que nous avons tenté d'implémenter dans le code, sans succès à cause des conditions aux bords variables difficiles à définir.

Les équations de type Lane-Emden font toujours l'objet de recherches, aussi en bien en mathématiques [SOU] qu'en astrophysique, où elles sont appliquées à la description d'intérieurs planétaires [WEP] ou à des systèmes à plusieurs polytropes [HEN].

Références et bibliographie

HEN : A. W. Hendry : A polytropic model of the Sun. Am. J. Phys. **61**, 906 (1993)

LAN : J. H. Lane : On the theoretical temperature of the Sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment. Am. J. Sci., **50** (2) no. 148 (1870) 57-74

SOU : P. Souplet : The proof of the Lane–Emden conjecture in four space dimensions. Advances in Mathematics **221** (2009) 1409–1427

WEP : S. P. Weppner, J. P. McKelvey, K. D. Thielen, A. K. Zielinski : A variable polytrope index applied to planet and material models. arXiv :1409.5525 (2015)

R.S. French : Polytropes for Stellar Modeling. HET611, Swinburne Astronomy Online
<http://www.rfrench.org/astro/papers/P110-HET611-RobertFrench.pdf>

M. Gilli : Méthodes numériques. Département d'économétrie, Université de Genève, 25 mars 2006
<http://www.unige.ch/ses/dsec/static/gilli/Teaching/MNE-Cours.pdf>

S. El Hajji, T. Ghemires : Résolution d'équations non linéaires. Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications, Université Mohammed V-Agdal, Rabat

M. I. Nouh, A. S. Saad, M. M. Elkhateeb, B. Korany : White Dwarf Stars as a Polytropic Gas Spheres. arXiv :1406.1482 (2014)

A.S. Brun, EcAq2006, Maubuisson – 11/09/06
http://irfu.cea.fr/Projets/COAST/Derivation_of_stellareq.pdf

Monographies

FOR : M. Forestini : *Principes fondamentaux de structure stellaire*. Gordon and Breach Science Publishers (1999)

KIP : R. Kippenhahn, A. Weigert, A. Weiss : *Stellar Structure and Evolution - 2nd edition*. Springer (2012)