Méthodes numériques : Structure Stellaire.

January 25, 2017

Contents

Notes

Bouquin structure stellaire (Kippenhahn) :
`http://bookzz.org/book/2292709/51adf0`
Voire Chapitres I.1, I.2 ; II.10, II.11, II.12 ; IV.19, IV.21

On s'intéresse à la structure mécanique d'étoiles pouvant être décrites par une équation d'état polytropique, soit les étoiles avec un gaz d'électrons dégénérés (type naine blanche, K fixé, n=3/2 si non relativiste, n=3 si relativiste), ou décrits par un gaz parfait + condition adiabatique (étoiles convectives très massives, K paramètre libre).
Un exemple de résolution des équations de Lane-Endem pour les naines blanches est donné ici : `http://userpages.irap.omp.eu/~rbelmont/mypage/numerique/naines_blanches.pdf`

1 Hypothèses

- Équilibre hydrostatique
- Chimiquement homogène
- Sans rotation propre
- Équation d'état polytropique $P = K\rho^{(1+\frac{1}{n})}$
- Traitement Eulerien (variable indépendante : r)
- Calcul à une dimension

2 Équations de structure stellaire

Kippenhahn Ch.10, p89

2.1 Structure mécanique

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{1}$$

Équation d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \tag{2}$$

2.2 Structure thermique et énergétique

Équations découplées de la structure mécanique dans le cas d'une équation d'état polytropique. Ces équations ne sont donc pas considérées dans un premier temps.
Équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{dl}{dm} = \epsilon_{nuc} \tag{3}$$

Équation de transport de l'énergie :

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}\frac{T}{P} \triangledown \ \ avec \ \triangledown = \frac{d\ lnT}{d\ lnP} \tag{4}$$

3 Dédimensionnement des équations

Kippenhahn Ch.20, p234 ou Ch.2 p 12
On pose $q = \frac{m}{M}$ la masse adimensionnée, $z = Ar$ le rayon adimensionné, et $w = (\frac{\rho}{\rho_c})^{\frac{1}{n}}$ la densité adimensionnée ; avec $A = ...$

En utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique et l'équation de Poisson du potentiel gravitationnel, ainsi que l'équation d'état polytropique, on arrive à l'équation de Lane-Emden :

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}(z^2\frac{dw}{dz}) + w^n = 0 \tag{5}$$

$$m(r) = 4\pi r^3 \rho_c \left(-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}\right) \tag{6}$$

4 Conditions aux limites

Kippenhahn Ch.11, p93

Au centre :
Rayon $r(m = 0) = 0$:
Variation de pression $\frac{\partial P}{\partial m}|_{m=0} = 0$
Ce qui implique :
$z = 0$:
$\frac{dw}{dz} = 0$
$w = 1$

En surface :
Pression $P(m = M) = 0$

$w = 0$

5 Passage en variables de Milne

Kippenhahn Ch.21, p243
$U = \frac{d\ lnm}{d\ lnr}$ et $V = -\frac{d\ lnP}{d\ lnr}$
Au centre, $U \rightarrow 3$ et $V \rightarrow 0$.
En surface, U devient très faible et V augmente beaucoup.

6 Discrétisation

7 Méthode de relaxation

8 Validation par comparaison à une méthode de référence

Kippenhahn Ch.19 p216.
Il existe des solutions analytiques aux équations de structure stellaire de Lane-Endem pour les polytropes n=0, n=1 et n=5.
On compare les solutions trouvées avec ces solutions analytiques pour valider le modèle numérique.
Ces solutions sont données dans le tableau ci dessous :

n	w(z)
n=0	$1 - \frac{1}{6}z^2$
n=1	$\frac{\sin(z)}{z}$
n=5	$\frac{1}{(1+\frac{z^2}{3})^{\frac{1}{2}}}$

9 Utilisation du programme