Méthodes numériques : Structure Stellaire.

March 26, 2017

Contents

Notes

Bouquin structure stellaire (Kippenhahn) :
`http://bookzz.org/book/2292709/51adf0`
Voire Chapitres I.1, I.2 ; II.10, II.11, II.12 ; IV.19, IV.21

On s'intéresse à la structure mécanique d'étoiles pouvant être décrites par une équation d'état polytropique, soit les étoiles avec un gaz d'électrons dégénérés (type naine blanche, K fixé, n=3/2 si non relativiste, n=3 si relativiste), ou décrits par un gaz parfait + condition adiabatique (étoiles convectives très massives, K paramètre libre).
Un exemple de résolution des équations de Lane-Endem pour les naines blanches est donné ici : `http://userpages.irap.omp.eu/~rbelmont/mypage/numerique/naines_blanches.pdf`
`http://www.rfrench.org/astro/papers/P110-HET611-RobertFrench.pdf` Explications polytropes, Lane-Endem, exemple Soleil.
`http://www.unige.ch/ses/dsec/static/gilli/Teaching/MNE-Cours.pdf` Méthode de relaxation
`http://irfu.cea.fr/Projets/COAST/Derivation_of_stellareq.pdf` page 8 explication succinte méthode de relaxation dans le cadre de la structure stellaire polytropique
`http://www.fsr.ac.ma/cours/maths/Said%20EL%20HAJJI%20et%20Touria%20GHEMIRES/slides19-04-AnNum-chap2.pdf` Résolution équation non linéaire

1 Hypothèses

- Équilibre hydrostatique
- Chimiquement homogène
- Sans rotation propre
- Équation d'état polytropique $P = K\rho^{(1+\frac{1}{n})}$
- Traitement Eulerien (variable indépendante : r)
- Calcul à une dimension

2 Équations de structure stellaire et dédimensionnement

Kippenhahn Ch.10, p89
Kippenhahn Ch.20, p234 ou Ch.2 p 12

On pose $q = \frac{m}{M}$ la masse adimensionnée, $z = Ar$ le rayon adimensionné, et $w = (\frac{\rho}{\rho_c})^{\frac{1}{n}}$ la densité adimensionnée ; avec $A = \sqrt{\frac{4\pi G}{(n+1)K\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}}$

On part des équations (ref eqn Poisson) et (ref eqn équi hydro) et (ref eqn d'état).

$\Delta\phi = 4\pi\rho G$

En utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique et l'équation de Poisson du potentiel gravitationnel, ainsi que l'équation d'état polytropique, on arrive à l'équation de Lane-Emden :

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}(z^2\frac{dw}{dz}) + w^n = 0 \tag{1}$$

$$m(z) = 4\pi r^3\rho_c\left(-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}\right) \tag{2}$$

3 Conditions aux limites

Kippenhahn Ch.11, p93

Au centre :
Rayon $r = 0$
Densité $\rho(r = 0) = \rho_c$
Variation de densité $\frac{\partial \rho}{\partial r}|_{r=0} = 0$
Masse $m(r = 0) = 0$

Ce qui implique :
$z = 0$
$w = 1$
$\frac{dw}{dz} = 0$
$q = 0$

4 Discrétisation

On considère une discrétisation de l'espace sur une grille de N+1 points, avec un pas h régulier défini par $h = \frac{z_N}{N}$ en définissant une valeur de z en N arbitraire. On notera X_i la valeur de la variable X au point $i \in [0..N]$, la valeur X_0 correspondant à la valeur de X au centre.
Partant du développement de Taylor-Young, il est possible d'obtenir des formules pour la discrétisation centrée ou excentrée autour d'un point a.
$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{h}{2!} f^{(2)}(a) + \frac{h}{3!} f^{(3)}(a) + ...$
En prenant un pas h,$2h$, ... ou $-h$,$-2h$, ... et en faisant des combinaisons linéaires entre ces formules, on peut obtenir différents schémas de discrétisation. On utilise ensuite ces schémas pour discrétiser les équations (ref eqn Lane-Emden et masse) :

4.1 Lane-Emden

pour $i = 0$:
On doit avoir la dérivée première de w nulle à droite. On utilise donc un schéma excentré à droite à 3 points afin d'assurer cette condition. (justifier ?)
$f^{(1)}(a) = \frac{-3w_i + 4w_{i+1} - w_{i+2}}{2h} = 0$

pour $i = 1..N - 1$:
Pour les dérivées d'ordres 1 et 2, on utilise un schéma centré à 3 points.
$f^{(1)}(a) = \frac{-w_{i-1} + w_{i+1}}{2h}$
$f^{(2)}(a) = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2}$

pour $i = N$:
Il réside un problème en $i = N$ par rapport au schéma précédent car un schéma centré fait appel à la valeur w_{N+1} qui n'est dans notre cas pas définie. Il faut donc utiliser un schéma excentré à gauche, ici à 3 points pour les dérivées d'ordres 1 et 2.
$f^{(1)}(a) = \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 3w_i}{2h}$
$f^{(2)}(a) = \frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{h^2}$

4.2 Équation de la masse

De la même manière, on discrétise l'équation (ref) en utilisant respectivement un schéma excentré à droite à 3 points, un schéma centré à 3 points et un schéma excentré à gauche à 3 points.
$f^{(1)}(a) = \frac{-3q_i+4q_{i+1}-q_{i+2}}{2h}$
$f^{(1)}(a) = \frac{-q_{i-1}+q_{i+1}}{2h}$
$f^{(1)}(a) = \frac{q_{i-2}-4q_{i-1}+3q_i}{2h}$

5 Méthode de relaxation

Ayant défini les discrétisations au paragraphe précédent, on peut les insérer dans les équations (ref Lane-Emden et masse).

6 Validation par comparaison à une méthode de référence

Kippenhahn Ch.19 p216.
Il existe des solutions analytiques aux équations de structure stellaire de Lane-Endem pour les polytropes n=0, n=1 et n=5.
On compare les solutions trouvées avec ces solutions analytiques pour valider le modèle numérique.
Ces solutions sont données dans le tableau ci dessous :

n	w(z)
n=0	$1 - \frac{1}{6}z^2$
n=1	$\frac{\sin(z)}{z}$
n=5	$\frac{1}{(1+\frac{z^2}{3})^{\frac{1}{2}}}$

7 Utilisation du programme