

## MODELO ESTOCÁSTICO PARA DETERMINACIÓN DE LA TENSIÓN EN LA BASE DEL DIENTE DE UN ENGRANAJE

Leonardo Ferreira da Silva<sup>1</sup>, David Díaz Maimone<sup>2</sup> y Leonel O. Pico<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
Av. Del Valle 5737, Olavarría, Buenos Aires, Argentina  
[lferreira@fio.unicen.edu.ar](mailto:lferreira@fio.unicen.edu.ar)

<sup>2</sup> Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
Av. Del Valle 5737, Olavarría, Buenos Aires, Argentina  
[david.diaz@fio.unicen.edu.ar](mailto:david.diaz@fio.unicen.edu.ar)

<sup>3</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
Av. Del Valle 5737, Olavarría, Buenos Aires, Argentina  
[lpico@fio.unicen.edu.ar](mailto:lpico@fio.unicen.edu.ar)

### RESUMEN

El presente trabajo consiste en el desarrollo de un modelo estocástico que represente la tensión de flexión ejercida sobre la base del diente de un engranaje que forma parte de una máquina de trituración de piedra.

Para ello, se parte de un histograma que representa la distribución del peso por tamaño de partícula para piedra arrancada por una voladura. Estas piedras son las que alimentan a la trituradora primaria y sobre las cuales se aplica la fuerza transmitida por medio del engranaje. Se supone que la relación entre el tamaño de la piedra y la fuerza a ejercer por el engranaje es lineal, pero debido a la naturaleza aleatoria del tamaño de las piedras, la fuerza a ejercer también será aleatoria.

Determinando un tamaño inicial del engranaje por medio de la expresión de la tensión de Lewis, se obtiene la función de distribución que mejor se ajusta y representa a la tensión ejercida sobre la base del diente. Los resultados muestran que la tensión en la base del diente responde a una función de distribución del tipo Weibull y que se pudo estimar un valor de la esperanza por medio del método de Monte Carlo. La presente metodología constituye un aporte para la determinación práctica de los esfuerzos en partes de componentes mecánicos sometidos a solicitaciones de grandes fluctuaciones.

**Palabras Claves:** Estocástico, engranaje.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los engranajes cilíndricos de dientes rectos son ampliamente utilizados para transmitir potencia de maquinarias. Una de sus principales aplicaciones es su uso en reductores, acoplados al eje de un motor, provocando una disminución en la velocidad de giro con el consecuente aumento del par ejercido. Este par transmitido por el engranaje provoca una sollicitación a flexión en la base del diente. En consecuencia, la determinación de la tensión de flexión en el diente es de vital importancia para el diseño de engranajes.

En este trabajo se estudia el caso de un engranaje reductor de una máquina de trituración primaria en una cantera de piedra. Esta máquina es alimentada con las piedras obtenidas de la explosión de la cantera, para disminuir su tamaño y posteriormente realizar su molienda. La trituradora es alimentada con piedras de tamaños muy diversos, obtenidas de la voladura realizada en la cantera. Su diferente tamaño provoca que no se deba realizar el mismo esfuerzo para triturarlas ya que se necesita una fuerza mayor para romper una piedra de mayor tamaño y una fuerza menor para las piedras de menor tamaño. La distribución de tamaños de piedras en el tiempo es aleatoria, debido a que no se conoce de antemano qué tipo de piedra llegará a la trituradora. Por ello, la fuerza que debe realizar la máquina para su trabajo también es de naturaleza aleatoria.

El objetivo del presente trabajo es el desarrollo de un modelo estocástico que represente la tensión de flexión ejercida sobre la base del diente de un engranaje cilíndrico recto que forma parte de una máquina de trituración de piedra.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La tensión de flexión está dada por la fórmula de Lewis [1], Ecuación 1.

$$\sigma_f = \frac{W^t P}{F Y} \quad (1)$$

Donde:

$\sigma_f$  es la tensión de flexión,  $W^t$  es la fuerza tangencial ejercida sobre el diente del engranaje,  $P$  es el paso diametral del engranaje,  $F$  es el ancho de la cara del diente,  $Y$  es el factor de forma de Lewis. La Figura 1 muestra el perfil de un diente de engranaje cilíndrico recto, con la fuerza  $W$  aplicada en su extremo libre y sus componentes radial  $W^r$  y tangencial  $W^t$ .

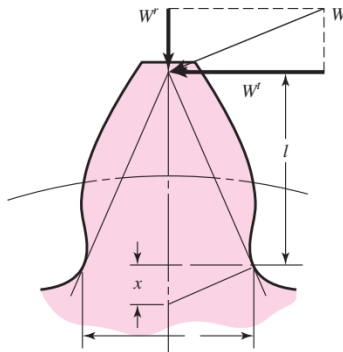


Figura 1: Perfil de diente de engranaje con la fuerza aplicada.

### 3. DESARROLLO DEL MODELO ESTOCÁSTICO

Se considera que la fuerza aplicada  $W^t$  es de naturaleza aleatoria. Según [2], la fuerza aplicada sobre la piedra para su trituración es función del diámetro “d” del agregado que llegue a la trituradora. Como existen infinitos diámetros posibles en un intervalo de 0 a 2000 mm (máximo tamaño de piedra arrojado por la voladura), el sistema estudiado se considera continuo. Para generar valores de las variables de entrada de un modelo y poder desarrollar la simulación, es necesario modelar la aleatoriedad que rige a estas variables. Este modelado se aproxima a través del ajuste de los datos mediante una distribución teórica, evaluando la bondad del ajuste para confirmar que el modelo es el apropiado [3,4]. Luego se utiliza esta distribución para generar valores de la variable aleatoria. Para elegir la distribución, el procedimiento consta de una serie de pasos:

- Se proponen dos tipos de distribuciones: distribución *Weibull* y distribución *Normal* de acuerdo al histograma mostrado en la Figura 2 [2].
- Se estiman los parámetros de las distribuciones propuestas: Para esto, se replicó el histograma en *Matlab* con datos uniformemente distribuidos dentro de cada rango de valores y se ajustó mediante el comando *dfittool*. La Figura 3 muestra los ajustes realizados y la Figura 4 muestra los valores de los parámetros obtenidos.
- Se determinan cuán representativas son las distribuciones ajustadas mediante el test de Kolmogorov-Smirnov. La Figura 5 muestra las funciones de distribución acumuladas teóricas (línea continua, en rojo) y los histogramas empíricos (línea segmentada, en azul).

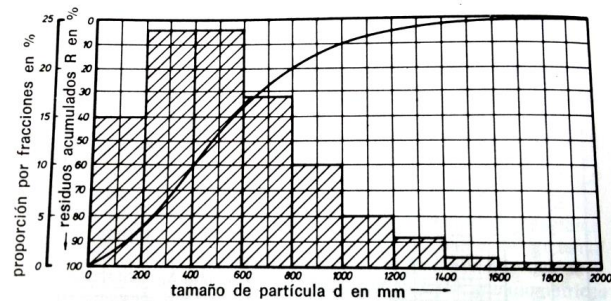
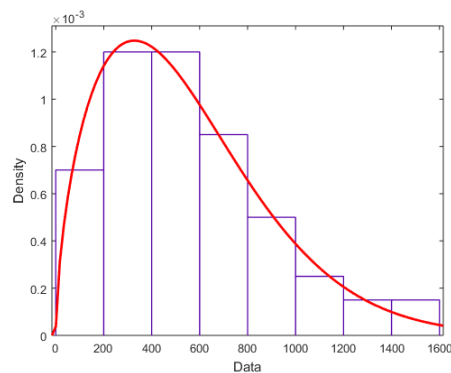
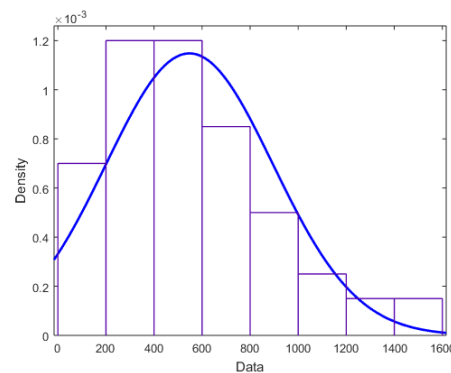


Figura 2: Distribución del peso por tamaño de partícula para piedra arrancada por voladura.



a)



b)

Figura 3: Histogramas ajustados: a) con distribución Weibull; b) con distribución Normal.

Distribution:	Weibull
Log likelihood:	-716.644
Domain:	$0 < y < \text{Inf}$
Mean:	546.181
Variance:	123162

Parameter	Estimate	Std. Err.
A	608.932	40.1696
B	1.59283	0.125871

Estimated covariance of parameter estimates:		
A	B	
A	1613.6	1.55234
B	1.55234	0.0158435

a)

Distribution:	Normal	
Log likelihood:	-726.461	
Domain:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$	
Mean:	547.52	
Variance:	120733	
Parameter	Estimate	Std. Err.
mu	547.52	34.7466
sigma	347.466	24.756
Estimated covariance of parameter estimates:		
	mu	sigma
mu	1207.33	-6.20533e-13
sigma	-6.20533e-13	612.858

b)

Figura 4: Valores de los parámetros obtenidos con: a) Weibull; b) Normal.

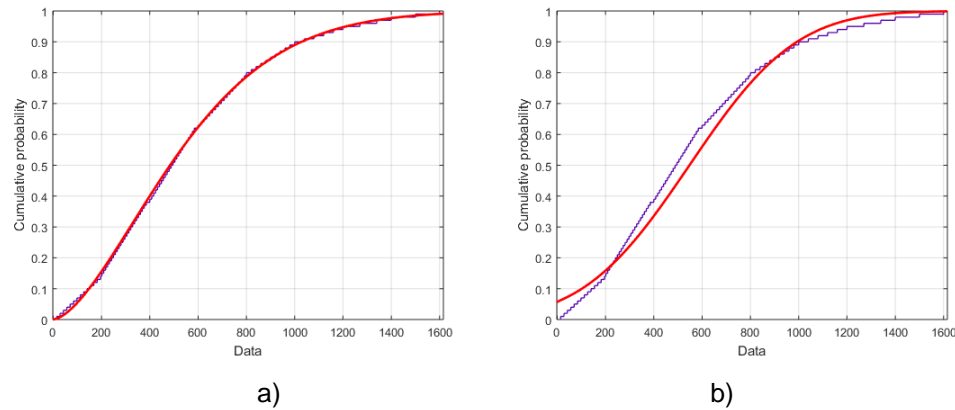


Figura 5: Función de distribución acumulada: a) Weibull; b) Normal.

Los resultados obtenidos indican que la distribución que mejor ajusta es la Weibull debido a que la máxima diferencia entre las funciones empírica (escalonada, en azul) y teórica (continua, en rojo) es menor que en la distribución Normal. La Figura 6 muestra la mayor diferencia entre las curvas teórica y empírica para la distribución Weibull.

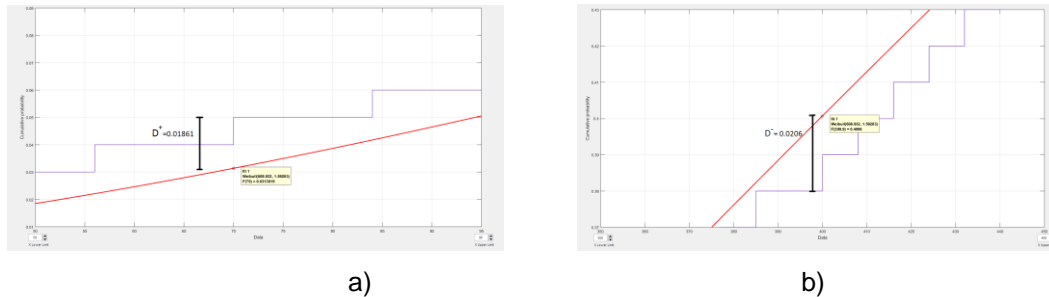


Figura 6: Mayor diferencia entre valores de distribución *Weibull*: a) positiva; b) negativa.

La mayor de estas diferencias se utilizó para realizar el test de Kolmogorov-Smirnov a fines de aceptar o no la distribución Weibull. La Figura 7 muestra los resultados del test Kolmogorov-Smirnov, donde se indica que la distribución Weibull es adecuada para ajustar el histograma dado.

$$D^- = F_0(399,9) - F_E(399,9) = 0,4006 - 0,38 = 0,0206$$

$$D^+ = F_E(70) - F_0(70) = 0,05 - 0,0313819 = 0,0186181$$

$$\therefore \max[D^-, D^+] = D^- = 0,0206$$

$$D^\alpha = \frac{c_\alpha}{k(n)}$$

Siendo  $\alpha = 0,05$  y WEIBULL  $n > 50 \rightarrow c_\alpha = 0,874$

$$\text{Además para WEIBULL } k(n) = \sqrt{n} = \sqrt{100} = 10$$

$$D^\alpha = \frac{0,874}{10} = 0,0874$$

Luego, si  $D^- < D^\alpha$  se acepta la distribución

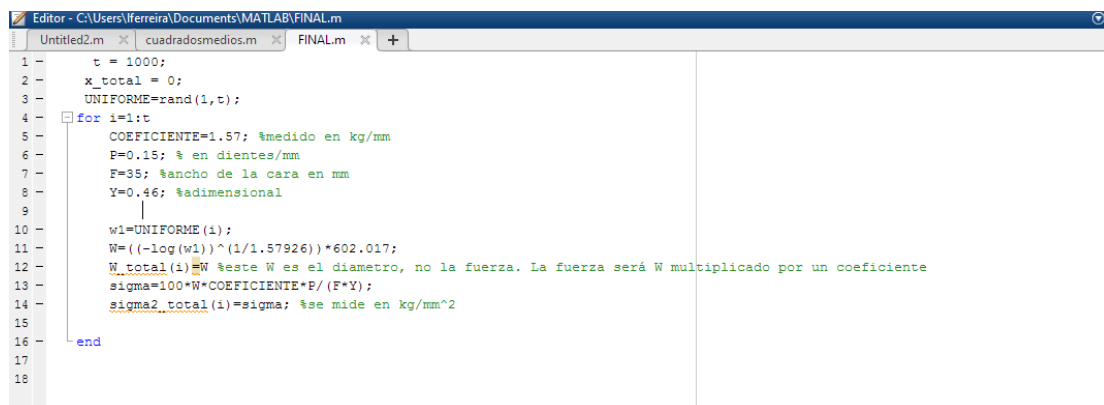
$$D^- = 0,0206 < 0,0874 = D^\alpha \rightarrow \text{Se acepta la distribución WEIBULL}$$

Figura 7: Resultados del test de Kolmogorov-Smirnov.

#### 4. GENERACIÓN DE LA VARIABLE ALEATORIA $W^t$

Una vez elegida la distribución Weibull, mediante el comando *rand* de Matlab se generaron aleatoriamente números entre 0 y 1, que constituyen el argumento de la función transformada inversa de la distribución Weibull. Con estos números generados, y aplicando la transformación inversa se obtuvieron los diferentes valores que puede adoptar la variable aleatoria [5,6]. Esta variable representa el diámetro de la piedra, mediante el cual se obtiene el valor de la fuerza  $W^t$  al multiplicarlo por un coeficiente  $X$ , suponiéndose una relación lineal entre el diámetro y la fuerza. Una vez hallado  $W^t$  se determina con la fórmula de Lewis (Ecuación 1) la tensión en la base del diente.

El procedimiento consiste primero en estimar un valor de fuerza  $W_1$  que resulta igual a 858,66 kg, afectado por un factor de seguridad de 1,5. Este valor de  $W^t$  se supondrá que es para un diámetro de agregado de 546,1 mm (media de la muestra) sólo a efectos de obtener el coeficiente de proporcionalidad. Se utiliza un motor de 100 kW de potencia para accionar la trituradora. El engranaje se considera de 1 m de diámetro primitivo, con un total de 150 dientes de 35 mm de ancho y girando a una velocidad de 60 rpm. De esta manera, resulta un paso diametral del engranaje  $P = 150 \text{ dientes} / 1000 \text{ mm} = 0,15 \text{ dientes/mm}$ . El valor de  $Y$  se obtiene de tablas [1] y resulta igual a 0,46 (adimensional) y se utiliza una tensión admisible de flexión para el acero del engranaje de  $1200 \text{ kg/cm}^2$ . La Figura 8 muestra el código desarrollado para obtener la tensión en la base del diente.



```

Editor - C:\Users\lferreira\Documents\MATLAB\FINAL.m
Untitled2.m  cuadradosmedios.m  FINAL.m  +
1 - t = 1000;
2 - x_total = 0;
3 - UNIFORME=rand(1,t);
4 - for i=1:t
5 -     COEFICIENTE=1.57; %medido en kg/mm
6 -     F=0.15; % en dientes/mm
7 -     F=35; %ancho de la cara en mm
8 -     Y=0.46; %adimensional
9 -     |
10 -    w1=UNIFORME(i);
11 -    W=((-log(w1))^(1/1.57926))*602.017;
12 -    W_total(i)=W %este W es el diametro, no la fuerza. La fuerza será W multiplicado por un coeficiente
13 -    sigma=100*W*COEFICIENTE*P/(F*Y);
14 -    sigma2_total(i)=sigma; %se mide en kg/mm^2
15 -
16 - end
17
18

```

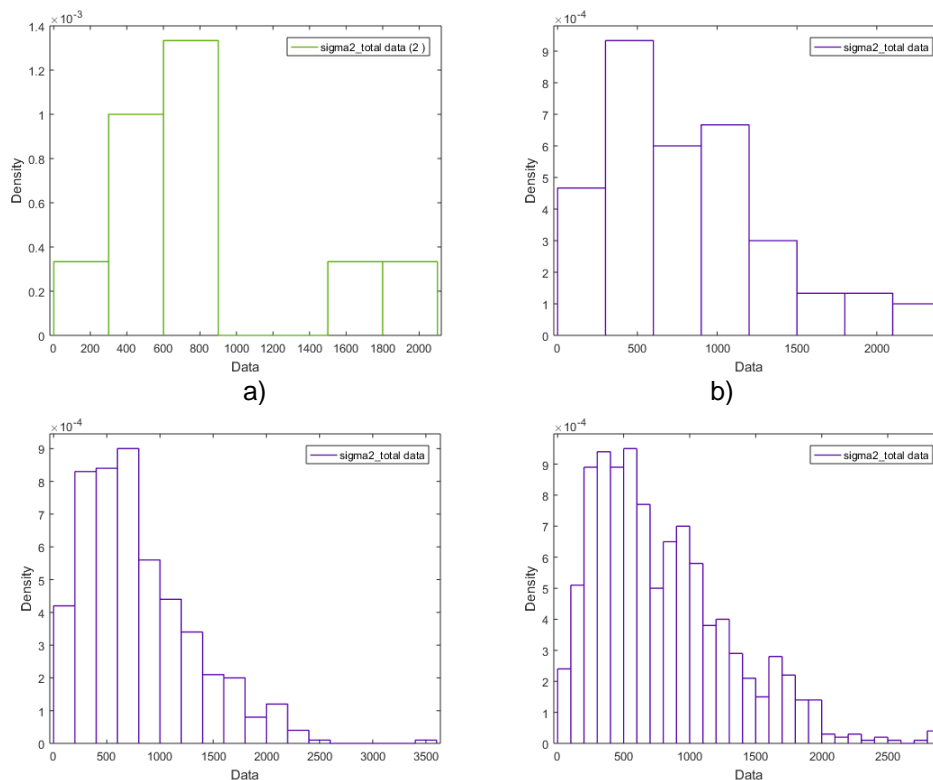
Figura 8: Código utilizado para obtener la tensión.

#### 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros de la función Weibull de tensión se obtienen cuando el sistema se encuentra en estado estacionario. Para ello se realizaron diferentes escenarios de simulación: 10, 100, 500, 1000, 5000 y 10000 iteraciones.

## 6.1. Equilibrio del sistema y parámetros finales

Existen dos tipos de modelos estocásticos, los de horizonte finito, donde un evento especial marca el fin de la simulación y por otro lado los de horizonte infinito donde la simulación no tiene un límite establecido. En el caso analizado en este trabajo se considera que es un problema de horizonte infinito debido a que ningún evento frenará la trituradora. Es preciso entonces evaluar los estados del sistema, transitorio y estacionario. En el primero los parámetros dependen de la cantidad de iteraciones realizadas en la simulación y en el segundo, el modelo supera un valor de “t” iteraciones que hacen que el sistema no varíe de manera sustancial su respuesta, es decir, que converja a un resultado. Este análisis se presenta a través de la elaboración de histogramas para diferentes iteraciones como se muestra en la Figura 9.





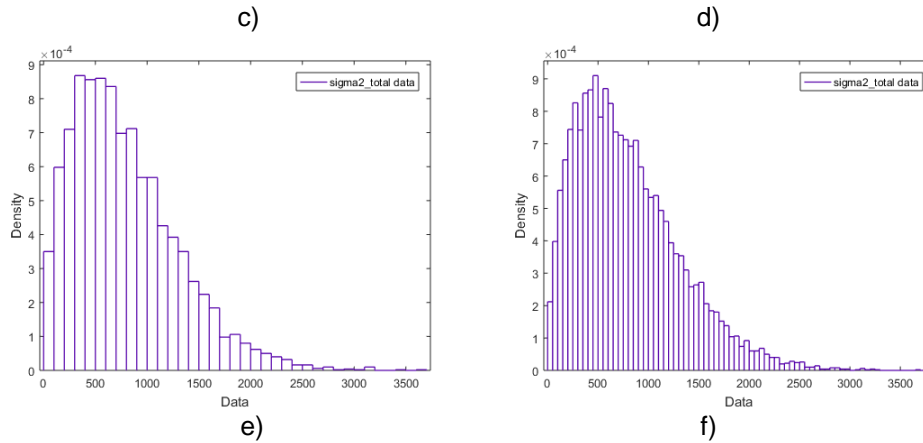


Figura 9: Histogramas realizados con: a) 10; b) 100; c) 500; d) 1000; e) 5000; f) 10000 iteraciones.

Se puede observar que para 10 iteraciones, el histograma no se aproxima a una distribución Weibull. Para 100, 500 y 1000 iteraciones, se observan cambios en las formas de los histogramas pero el sistema se encuentra aún en estado transitorio, ya que depende fuertemente de la cantidad de iteraciones. Para valores de 5000 iteraciones o más, el histograma correspondiente presenta la misma distribución que la curva ajustada de Figura 3, considerándose que se alcanza la estacionalidad del sistema. A continuación se muestran los valores de los parámetros de la función de densidad Weibull (Ecuación 2) de  $\sigma_f$  para 10000 iteraciones (Figura 10) donde A representa el valor de  $\lambda$  y B representa el valor de k. La Figura 11 muestra la gráfica de la distribución Weibull obtenida con estos parámetros.

Distribution:	Weibull
Log likelihood:	-75242.6
Domain:	$0 < y < \text{Inf}$
Mean:	788.315
Variance:	253282

Parameter	Estimate	Std. Err.
A	879.457	5.77303
B	1.60409	0.0125226

Estimated covariance of parameter estimates:

	A	B
A	33.3278	0.0226409
B	0.0226409	0.000156816

Figura 10: Parámetros de la función de densidad de  $\sigma$ .

$$f(x) = \frac{k}{\lambda} \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad (2)$$



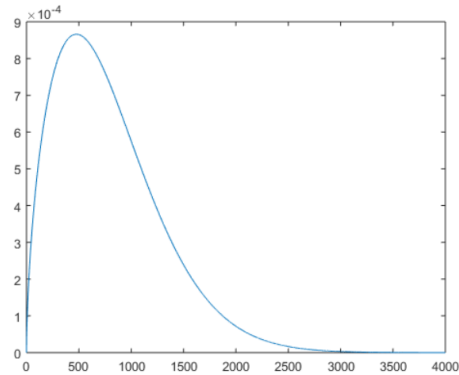


Figura 11: Función de densidad de  $\sigma_f$ .

## 6.2. Método de Monte Carlo

Uno de los objetivos de esta simulación es la estimación de la esperanza de la tensión [7-9]. Como la esperanza es la integral de la función de densidad multiplicada por "x", se realiza el cálculo de esta integral mediante el método de Monte Carlo. Para su cálculo se utilizó una planilla en Excel generando puntos aleatorios uniformes de un rango de valores posibles. En la Figura 12 se muestran los puntos generados con este método. La cantidad de puntos que están por debajo de la curva se los toma como verdaderos, asignándole a cada uno el valor 1. Luego se cuenta la cantidad de aciertos (en porcentaje) y se lo multiplica por el área conocida (rango de valores).

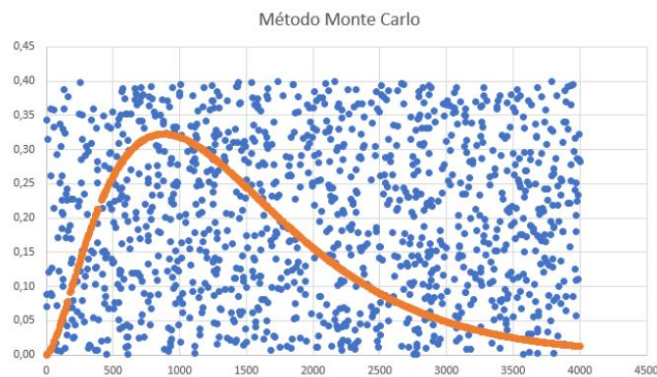


Figura 12: Cálculo de la esperanza por método Monte Carlo.

De acuerdo al método de Monte Carlo la esperanza es de 586,52 kg/cm<sup>2</sup>.

## 7. CONCLUSIONES

Se construyó un modelo estocástico para obtener el valor de la tensión de flexión  $\sigma_f$  de un diente de acero de un engranaje de dientes rectos. Los resultados obtenidos de  $\sigma_f$ , de acuerdo al test de Kolmogorov-Smirnov, afirman que los valores de la tensión de flexión siguen una distribución de tipo Weibull cuyos parámetros son  $k = 1,60$  y  $\lambda = 879$ . El modelo alcanza su estado estacionario a partir de las 5000 iteraciones. Por medio del método de Monte Carlo se estima que la esperanza es de  $586,52 \text{ kg/cm}^2$ .

La presente metodología constituye un aporte para la determinación estocástica de los esfuerzos en partes de componentes mecánicos sometidos a solicitaciones de grandes fluctuaciones como ser dientes de engranajes.

## 4. REFERENCIAS

- [1] RICHARD G. BUDYNAS y KEITH NISBETT, *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley* octava edición, Mc Graw-Hill Interamericana, 2008.
- [2] LABAHN y KOHLHAAS, *Prontuario del cemento*, quinta edición, Editores Técnicos Asociados S.A, Barcelona, 1985.
- [3] RUBENS SAMPAIO y ROBERTA DE QUEIROZ LIMA, *Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatorios*, SBMAC, Sao Carlos, SP, 2012.
- [4] RUBENS SAMPAIO y JOSE´ EDUARDO SOUZA DE CURSI, *Modelagem estocástica e quantificação de incertezas*, SBMAC, Sao Carlos, SP, 2012.
- [5] BEGONA VITORIANO, *Modelos y métodos de simulación estocástica. Aplicación en la valoración de opciones financieras*, Universidad Complutense de Madrid.

- [6] BALLABEN J.S, ROSALES M.B. y SAMPAIO R, *Stochastic dynamics of a guyed mast under wind load*, Departamento de Ingeniería - Universidad Nacional del Sur, Junio 2015.
- [7] RONALD W. SHONKWILER y FRANKLIN MENDIVIL, *Explorations in Monte Carlo Methods*, Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2000.
- [8] PETER J. OLVER y CHEHRZAD SHAKIBAN, *Applied Mathematics*, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455.
- [9] GEOFFREY GRIMMETT y DOMINIC WELSH, *Probability: an introduction*, Clarendon Press Oxford, 1986.