Modelado estocástico y cuantificación de incertidumbres

Leonardo Ferreira Da Silva   David Diaz Maimone

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Noviembre, 2017

Resumen

- El trabajo consiste en estudiar de manera estocástica la tensión por exión en un diente de un engranaje de una trituradora. Será objeto de estudio saber mediante qué función se distribuyen los resultados, así como sus parámetros . Así también, conocer en qué momento el modelo alcanza su estado estacionario. Por medio del método de Monte Carlo se estimará la esperanza .

Ecuación de Lewis

- Expresión de la tensión de flexión ejercida sobre la base del diente del engranaje

$$\sigma_f = \frac{W^t * P}{F * Y} \tag{1}$$

Siendo:

$$\sigma_f = \text{Tensión de flexión}$$

$$W^t = \text{Fuerza tangencial ejercida por el diente del engranaje}$$

$$P = \text{Paso diametral del engranaje}$$

$$F = \text{Ancho de la cara del diente}$$

$$Y = \text{Factor de forma de Lewis}$$

Consideraciones

- Se considera como aleatoria la variable W pero a traves de hacer aleatoria la variable "dimetro".Para eso hay que encontrar cul es la relacion entre estas dos, es decir un coeficiente X. Para estimarlo se supuso que existe una fuerza de 858.66 kilos(calculada segn diferentes parmetros acordes a la geometria,etc)cuando el dimetro es de 546.1 mm (media de la muestra).

Parámetros y cálculos

$$P = \frac{N\ [numero\ de\ dientes]}{d\ [diametro\ primitivo]}$$

$$P = \frac{150\ dientes}{1000\ mm} \rightarrow\ P = 0{,}15\ \frac{dientes}{mm}$$

$$\sigma_f\ = 1200\ [kg/cm^2]$$

$$P = 0{,}15\ [dientes/mm]$$

$$F = 35\ [mm]$$

$$Y = 0{,}46$$

$$f\ = factor\ de\ seguridad\ \ = 1{,}5$$

Parámetros y cálculos

$$\sigma = \frac{W_1 * P}{F * Y}$$

$$1200\ kg/cm^2 = \frac{W_1 * 0{,}15\ dientes/mm}{35\ mm * 0{,}46} \rightarrow W_1 = 1288\ [kg]$$

$$W^t = W_1/f = \frac{1288\ kg}{1{,}5} = 858{,}66\ [kg]$$

$$W^t = d * X$$

$$W^t = 858{,}66\ kg = 546{,}1\ mm * X$$

$$W^t = 858{,}66\ kg = 546{,}1\ mm * X \rightarrow X = 1{,}57\ [\frac{kg}{mm}]$$

$$\therefore\ \ \sigma_f = \frac{d * X * P}{F * Y}$$

Elección del tipo de distribución

- De acuerdo al histograma del tamao de piedra que le llega a la trituradora, obtenido de bibliografa, se propuso como distribucin la funcin WEIBULL y la NORMAL, luego de ambas se calculan los parmetros,se comparan visualmente, y por ultimo se realiza el test de bondad de ajuste para mayor precisin,utilizando el test de Kolmogorov-Smirnov. De ambas,se concluye que la que mejor se adapta es la distribucin WEIBULL

Elección del tipo de distribución

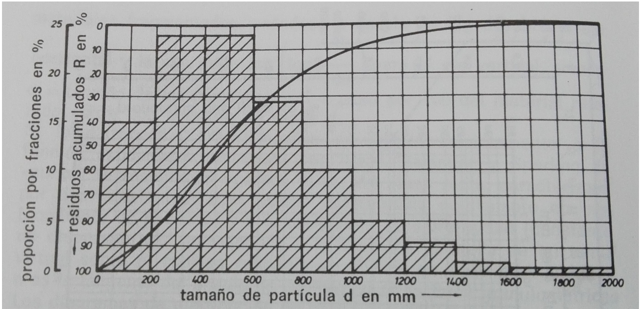

Fig. 5: Diagrama de distribución del peso por tamaño de partícula para piedra arrancada por una gran voladura

Figura: 1

Elección del tipo de distribución

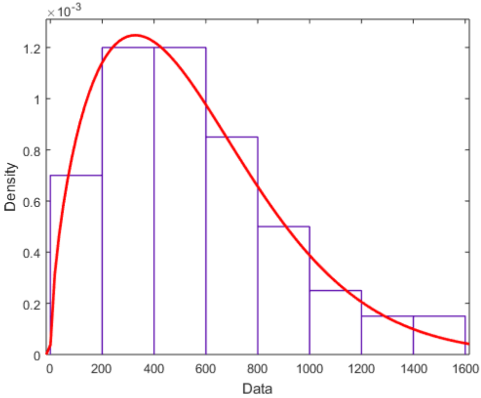

Figura: Histograma ajustado con distribución WEIBULL para la variable “d”

Elección del tipo de distribución

```
Distribution:     Weibull
Log likelihood:   -716.644
Domain:           0 < y < Inf
Mean:             546.181
Variance:         123162

Parameter  Estimate   Std. Err.
A          608.932     40.1696
B          1.59283    0.125871

Estimated covariance of parameter estimates:
   A         B
A   1613.6    1.55234
B  1.55234  0.0158435
```

Figura: Valores de los parámetros obtenidos con MATLAB para la distribución WEIBULL

Elección del tipo de distribución

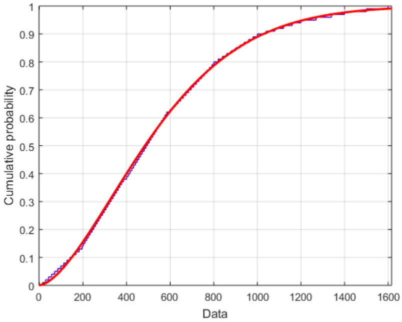

Figura: Función de distribución acumulada WEIBULL

Elección del tipo de distribución

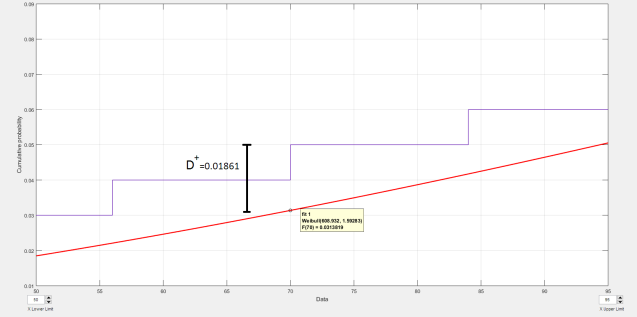

Figura: Mayor separación positiva entre las curvas.

Elección del tipo de distribución

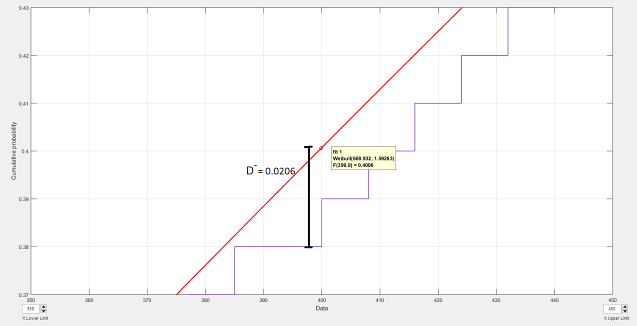

Figura: Mayor separación negativa entre las curvas.

Kolmogorov-Smirnov

$$D^- = F_0(399{,}9) - F_E(399{,}9) = 0{,}4006 - 0{,}38 = 0{,}0206$$

$$D^+ = F_E(70) - F_0(70) = 0{,}05 - 0{,}0313819 = 0{,}0186181$$

$$\therefore max[D^-, D^+] = D^- = 0{,}0206$$

$$D^\alpha = \frac{c_\alpha}{k(n)}$$

Siendo $\alpha = 0{,}05$ y WEIBULL $n > 50 \rightarrow c_\alpha = 0,874$

Además para WEIBULL $k(n) = \sqrt{n} = \sqrt{100} = 10$

$$D^\alpha = \frac{0{,}874}{10} = 0{,}0874$$

Luego, si $D^- < D^\alpha$ se acepta la distribución

$D^- = 0{,}0206 < 0{,}0874 = D^\alpha \rightarrow$ Se acepta la distribución WEIBULL

Generación de la variable aleatoria

Primero se comienza por generar un número aleatorio entre 0 y 1 de una distribución UNIFORME. Para ello, en una primera instancia se utilizó el método de los cuadrados medios mediante algoritmo en MATLAB, pero el método no era capaz de generar más de 64 números aleatorios. Se optó entonces por generar números aleatorios entre 0 y 1 mediante el comando rand en el mismo software. Una vez obtenidos estos números, es posible utilizar el método de la transformada inversa para la distribución WEIBULL y asi obtener los diferentes valores que puede tomar la variable aleatoria. Luego se reemplazan los múltiples valores de la variable aleatoria en la fórmula de σ_f y se devuelve un excel con todos los resultados.

Código utilizado en MATLAB para obtener σ_f

Editor - C:\Users\lferreira\Documents\MATLAB\FINAL.m

Untitled2.m | cuadradosmedios.m | FINAL.m

```
  t = 1000;
 x_total = 0;
 UNIFORME=rand(1,t);
for i=1:t
    COEFICIENTE=1.57; %medido en kg/mm
    P=0.15; % en dientes/mm
    F=35; %ancho de la cara en mm
    Y=0.46; %adimensional

    w1=UNIFORME(i);
    W=((-log(w1))^(1/1.57926))*602.017;
    W_total(i)=W %este W es el diametro, no la fuerza. La fuerza será W multiplicado por un coeficiente
    sigma=100*W*COEFICIENTE*P/(F*Y);
    sigma2_total(i)=sigma; %se mide en kg/mm^2

end
```

Figura: Código utilizado en MATLAB para obtener σ_f

Análisis de resultados

Equilibrio: Se encuentra el equilibrio del sistema probando con diferentes números de iteraciones y graficando sus respectivos histogramas. Se prueba con 10, 100, 500, 700, 1000, 2000, 5000 y 10000. El sistema alcanza su equilibrio a las 5000 iteraciones, es decir, no varía sus resultados significativamente superada esta cantidad de iteraciones.

Histogramas

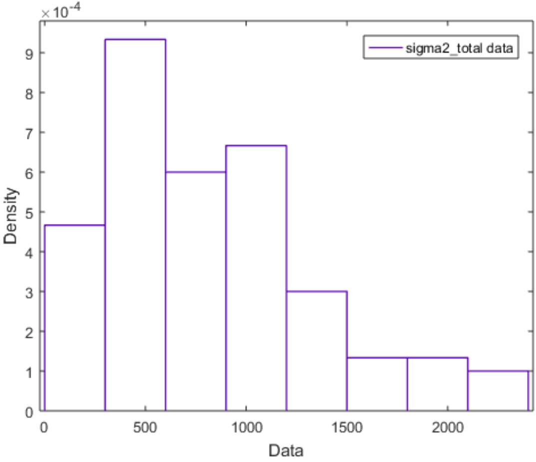

Figura: Histograma realizado con 100 iteraciones.

Histogramas

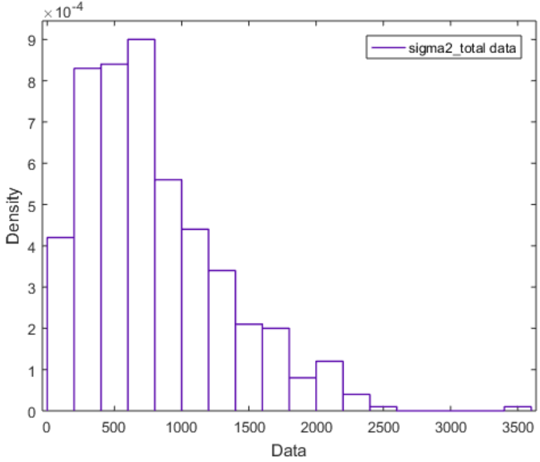

Figura: Histograma realizado con 500 iteraciones.

Histogramas

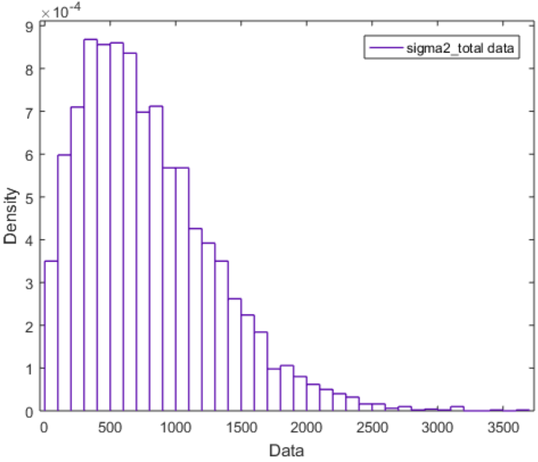

Figura: Histograma realizado con 5000 iteraciones.

Análisis de resultados

Método Monte Carlo: El objeto de estudio de una simulación es, entre tanto, la estimación de la esperanza. Como la esperanza resulta ser la integral de la función de densidad multiplicada por x, se realizará el cálculo de ésta integral mediante el método de Monte Carlo. Para la elaboración se realizó una planilla en EXCEL generando puntos aleatorios uniformes de un rango de valores posibles. Se observa la cantidad de puntos que están por debajo de la curva y se los toma como verdaderos, asignándole valor 1. Luego se cuenta la cantidad de aciertos (en porcentaje) y se lo multiplica por el área conocida (rango de valores). De acuerdo al mtodo de Monte Carlo, se estimó que el valor de la esperanza es de $586,5229111\ kg/cm^2$ (según excel).

Monte Carlo

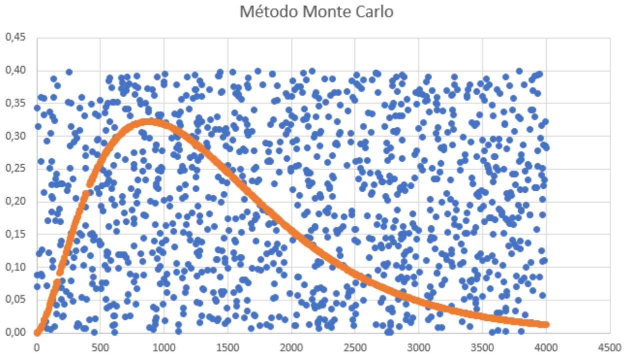

Figura: Método de Monte Carlo

Distribución final de σ_f

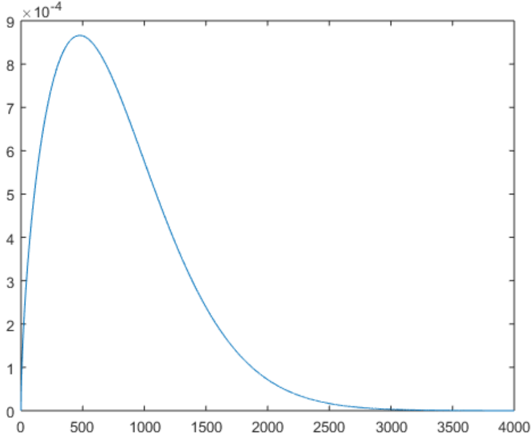

Figura: Función de densidad de σ_f.

Conclusiones

Se construyó un modelo estocástico para obtener el valor de la tensión de flexión σ_f de un diente de acero de un engranaje de dientes rectos. Los valores obtenidos de σ_f, de acuerdo al test de Kolmogorov-Smirnov, afirman que los valores de la tensión de flexión siguen una distribución de tipo WEIBULL cuyos parámetros son $k = 1{,}60$ y $\lambda = 879$. El modelo alcanza su estado estacionario a partir de las 5000 iteraciones. Por medio del método de Monte Carlo se estima que la esperanza es de $586,52\ kg/cm^2$. El trabajo ha permitido integrar y asimilar conocimientos nuevos y encarar un problema generalmente abordado de manera determinista como estocástico, permitiendo realizar una mejor comprensión de lo que realmente está pasando, es decir, variando la tensión a través del tiempo.

Conclusiones

MUCHAS GRACIAS!