Aplicação das equações de Lagrange

Leonardo Oliveira Gugé

Definimos a função de Lagrange (ou lagrangiana) L, que é, por definição:

$$L = T - V \tag{1}$$

Onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema em questão. Agora, as equações do movimento podem ser escritas na forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{2}$$

Vamos aplicar à máquina de Atwood:

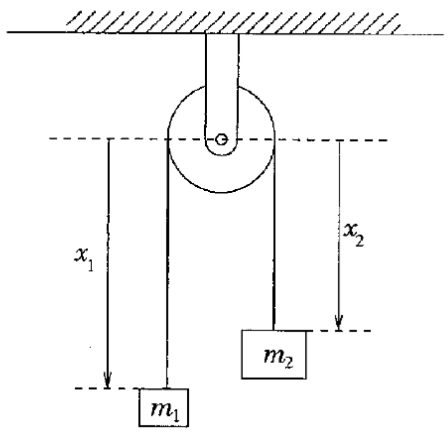

Figura 1: Máquina de Atwood

Primeiro, vamos determinar a lagrangiana desse sistema. Considerando o nível zero do potencial gravitacional como sendo o plano horizontal que passa pelo centro da polia, teremos então:

$$V = -m_1 g(l - x_1) - m_2 g(l - x_2) \tag{3}$$

Nesse caso, consideramos l determinada pelo raio da roldana e pelo comprimento do fio, que supomos ser inextensível e de massa desprezível. O vínculo que temos no sistema é:

$$x_1 + x_2 = l \tag{4}$$

Daí tiramos a condição de vínculo: $x_1 + x_2 = l$ donde $x_1 = l - x_2$. Logo, o potencial pode ser expresso por apenas uma das coordenadas independentes(Nesse caso, x_1).

$$V = -m_1 g(l - x_1) - m_2 g x_1 \quad \therefore \quad V = -m_1 g l + m_1 g x_1 - m_2 g x_1 \tag{5}$$

Para a energia cinética do sistema, faremos:

$$T = \frac{m_1 \dot{x_1}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x_2}^2}{2} \tag{6}$$

Pelas condições de vínculo:

$$x_1 + x_2 = l \Rightarrow \dot{x_1} + \dot{x_2} = 0 \Rightarrow \dot{x_1} = -\dot{x_2} \tag{7}$$

Então, podemos reescrever a energia cinética do sistema como:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x_1}^2 \tag{8}$$

Agora, podemos calcular a lagrangiana L:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x_1}^2 - m_1 g(l - x_1) - m_2 g x_2 \tag{9}$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \tag{10}$$

Temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}} = (m_1 + m_2)\dot{x_1} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}) = (m_1 + m_2)\ddot{x_1} \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1 g - m_2 g \tag{13}$$

Portanto, a equação do movimento da máquina de Atwood para a coordenada x_1 é:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x_1} - m_1 g + m_2 g = 0 \tag{14}$$

Ou, simplismente:

$$\ddot{x_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \tag{15}$$