Universidad Veracruzna

Inteligencia Artificial

Análisis de Algoritmos

Actividad 1

Leonardo Flores Torres

28 de agosto de 2022

Resolver las siguientes relaciones de recurrencia.

a. $x(n) = x(n-1) + 5$ para $n > 1$, $x(1) = 0$.

Solución:

Primero se utilizó *forward substitution* para trarar de encontrar un patrón que se pueda identificar fácilmente, y se encontró que se podía escribir de la siguiente forma,

$$\left.\begin{array}{lll} n & x(n) & \\ 1 & x(1) = 0 & = 0 \cdot 5 = (1-1) \cdot 5 \\ 2 & x(2) = x(1) + 5 = 5 & = 1 \cdot 5 = (2-1) \cdot 5 \\ 3 & x(3) = x(2) + 5 = 10 & = 2 \cdot 5 = (3-1) \cdot 5 \\ 4 & x(4) = x(3) + 5 = 15 & = 3 \cdot 5 = (4-1) \cdot 5 \end{array}\right\} x(k) = (k-1) \cdot 5,\ k \geq 1 \ .$$

Posteriormente, se aplicó *backward substitution* para encontrar una relación de recurrencia,

$$\left.\begin{array}{llll} n & x(n) & = x(n-1) + 5 & \\ n-1 & & = [x(n-2) + 5] + 5 & = x(n-2) + 2 \cdot 5 \\ n-2 & & = [x(n-3) + 5] + 2 \cdot 5 & = x(n-3) + 3 \cdot 5 \\ n-3 & & = [x(n-4) + 5] + 3 \cdot 5 & = x(n-4) + 4 \cdot 5 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right\} x_{n-i+1} = x(n-i) + i \cdot 5,\ i \geq 1 \ ,$$

de donde se encontró que el valor para el cual se llegaba al final de $x(n)$ está dado por,

$$\left.\begin{array}{l} x(1) = 0 \\ x(1) = x(n-i) \end{array}\right\} \begin{array}{l} n - i = 1 \\ i = n - 1 \end{array} \ ,$$

donde $1 \leq i \leq n-1$. Al usar la relación de recurrencia se obtiene que

$$\begin{array}{llll} \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & x(n) & = x\left(n - (n-1)\right) + (n-1) \cdot 5 & = \cancelto{0}{x(1)} + (n-1) \cdot 5 \ . \end{array}$$

Finalmente, el resultado es

$$\boxed{x(n) = (n-1) \cdot 5 \ .} \tag{1}$$

Este procedimiento es el mismo que se repetirá para el resto de los problemas.

b. $x(n) = 3x(n-1)$ para $n > 1$, $x(1) = 4$.

Solución:

La solución encontrada usando el método de *forward substitution* es

$$\left.\begin{array}{lll} n & x(n) & \\ 1 & x(1) = 4 & = 4\cdot 3^0 \\ 2 & x(2) = 3\cdot x(1) & = 4\cdot 3^1 \\ 3 & x(3) = 3\cdot x(2) & = 4\cdot 3^2 \\ 4 & x(4) = 4\cdot x(3) & = 4\cdot 3^3 \end{array}\right\} x(k) = 4\cdot 3^{k-1},\ k \geq 0\ .$$

De manera similar al problema anterior, por el método de *backward substitution*, se encuentra que

$$\left.\begin{array}{llll} n & x(n) & = 3\cdot x(n-1) & = 3^1\cdot x(n-1) \\ n-1 & & = 3\,[3\cdot x(n-2)] & = 3^2\cdot x(n-2) \\ n-2 & & = 3\,[3\cdot x(n-3)] & = 3^3\cdot x(n-3) \\ n-3 & & = 3\,[3\cdot x(n-4)] & = 3^4\cdot x(n-4) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right\} x_{n-i+1} = 3^i\cdot x(n-i)\ , i\geq 1\ .$$

Además, se puede utilizar la condición inicial $x(1)$ para determinar el último valor de la sucesión,

$$\left.\begin{array}{l} x(1) = 4 \\ x(1) = x(n-i) \end{array}\right\} \begin{array}{l} n-i = 1 \\ i = n-1 \end{array}\ ,$$

donde $1 \leq i \leq n-1$, y el último valor de la sucesión está dado por

$$\begin{array}{llll} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & x(n) & = 3^{n-1}\cdot x\,(n-(n-1)) & = 3^{n-1}\cdot \cancelto{4}{x(1)}\ . \end{array}$$

El resultado final es,

$$\boxed{x(n) = 4\cdot 3^{n-1}\ .} \tag{2}$$

c. $x(n) = x(n-1) + n$ para $n > 0$, $x(0) = 0$.

Solución:

Se usó el método de *forward substitution* pero no se logró encontrar un patrón para determinar la solución.

$$\left.\begin{array}{lll} n & x(n) & \\ 0 & x(0) & = 0 \\ 1 & x(1) = x(0)+1 & = 1 \\ 2 & x(2) = x(1)+2 & = 3 \\ 3 & x(3) = x(2)+3 & = 6 \end{array}\right\} \text{¡Patrón no tan evidente!}$$

Debido a lo anteriormente mencionado se dió espacial atención al caso usando *backward substitution* para encontrar la relación de recurrencia,

$$\underbrace{\begin{array}{llll} n & x(n) & = x(n-1)+n & \\ n-1 & & = [x(n-2)+(n-1)]+n & = x(n-2)+\sum_{i=0}^{1}(n-i) \\ n-2 & & = [x(n-3)+(n-2)]+\sum_{i=0}^{1}(n-i) & = x(n-3)+\sum_{i=0}^{2}(n-i) \\ n-3 & & = [x(n-4)+(n-3)]+\sum_{i=0}^{2}(n-i) & = x(n-4)+\sum_{i=0}^{3}(n-i) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}}_{x_{n-i} = x(n-1-i)+\sum_{k=0}^{i}(n-k),\ i\geq 0\ .}$$

Usando la condición inicial, y comparando con la relación de recurrencia, se encontró el último valor de la sucesión

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ x(0) = x(n-1-i) \end{array}\right\} \begin{array}{l} n-1-i = 0 \\ i = n-1 \end{array} \quad ,$$

donde $0 \leq i \leq n-1$. Y la sucesión termina en

$$\begin{array}{llll} \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x(n) & = x\left(n - 1(n-1)\right) + \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) & = \cancelto{0}{x(0)} + \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) \ . \end{array}$$

A pesar de haber llegado ya a un resultado no parece ser que pudiera considerarse la solución al problema ya que desde un inicio en el caso de *forward substitution* el comportamiento indicaba una sumataoria de términos. Se decidió tomar dicha sumatoria y buscar una manera de reducirla como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} x(n) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(n-k) \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + \cancelto{3}{[n-(n-3)]} + \cancelto{2}{[n-(n-2)]} + \cancelto{1}{[n-(n-1)]} \\ &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k \ . \end{aligned}$$

Sumando ambas sumas y resolviendo para $x(n)$,

$$\begin{aligned} x(n) + x(n) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(n-k) + \sum_{k=1}^{n} k \\ 2 \cdot x(n) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(n-k-1) + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(n+1) \\ &= n(n+1) \\ x(n) &= \tfrac{n}{2}(n+1) \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado al problema es

$$\boxed{x(n) = \frac{n}{2}(n+1) \ .} \tag{3}$$

Es curioso que la suma de 1 hasta n, donde $n \in \mathbb{N}$, se pueda expresar de esta manera tan elegante.

d. $x(n) = x(n/2) + n$ para $n > 1$, $x(1) = 1$ (resolver para $n = 2^k$).

Solución:

Primeramente se realizó el cambio en $x(n)$ de $n \to 2^k$,

$$x(2^k) = x(2^{k-1}) + 2^k \ .$$

Después se calcularon varios casos usando *forward substitution*. El patrón encontrado no es tan evidente de detectar si se observa solamente el valor de k, pero al comparar el resultado de cada intento con su respectivo valor de n puede resultar mas sencillo como se muestra a continuación.

$$\left.\begin{array}{lllll} n & k & x(2^k) & & \\ 1 & 0 & x(2^0) & = 1 & = 1 \\ 2 & 1 & x(2^1) = x(2^0) + 2^1 & = 1 + 2^1 & = 3 \\ 4 & 2 & x(2^2) = x(2^1) + 2^2 & = 1 + 2^1 + 2^2 & = 7 \\ 8 & 3 & x(2^3) = x(2^2) + 2^3 & = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 & = 15 \end{array}\right\} x(n) = 2 \cdot n - 1 = 2^{k+1} - 1 \ .$$

La relación de recurrencia se encuentra usando *backward substitution*,

$$\underbrace{\begin{array}{llll} k & x(2^k) & = x(2^{k-1}) + 2^k & \\ k-1 & & = \left[x(2^{k-2}) + 2^{k-1}\right] + 2^k & = x(2^{k-2}) + \sum_{i=0}^{1}(2^{k-j}) \\ k-2 & & = \left[x(2^{k-3}) + 2^{k-2}\right] + \sum_{i=0}^{1}(2^{k-j}) & = x(2^{k-3}) + \sum_{i=0}^{2}(2^{k-j}) \\ k-3 & & = \left[x(2^{k-4}) + 2^{k-3}\right] + \sum_{i=0}^{2}(2^{k-j}) & = x(2^{k-4}) + \sum_{i=0}^{3}(2^{k-j}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}}_{x_{k-i+1} = x(2^{k-i}) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^{k-j}\ .}$$

De la condición inicial y de la relación de recurrencia se puede encontrar que

$$\left.\begin{array}{lll} x(1) & = x(2^0) & = 1 \\ x(2^0) & = x(2^{k-i}) & \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2^0 = 2^{k-i} \\ 0 = k-i \end{array} \implies i = k\ .$$

Sustituyendo $i = k$ en la relación de recurrencia se encuentra el último término de $x(n)$,

$$\begin{array}{llll} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x(n) & = x(2^{k-k}) + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-j} & = \underbrace{x(2^0)}_{1=2^{k-k}} + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-j} \\ & x(n) & = \sum_{j=0}^{k} 2^{k-j}\ , & \end{array}$$

donde $0 \leq j \leq k$. Esta suma se puede simplificar,

$$\begin{aligned} x(2^k) &= \sum_{j=0}^{k} 2^{k-j} \\ &= 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + \overbrace{2^{k-(k-2)}}^{2^2} + \overbrace{2^{k-(k-1)}}^{2^1} + \overbrace{2^{k-k}}^{2^0} \\ &= \sum_{j=0}^{k} 2^j\ . \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo un poco de manipulación a la serie se llega al r esultado que se encontró por el método de *forward substitution*,

$$\begin{aligned} x(2^k) &= \sum_{j=0}^{k} 2^j \\ 2^1 \cdot x(2^k) &= \sum_{j=1}^{k+1} 2^j \\ 2^1 \cdot x(2^k) &= \sum_{j=1}^{k} 2^j + 2^{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k} 2^j + 2^{k+1} + (2^0 - 2^0) \\ &= \sum_{j=0}^{k} 2^j + 2^{k+1} - \underbrace{2^0}_{=1} \\ 2^1 \cdot x(2^k) &= x(2^k) + 2^{k+1} - 1 \\ x(2^k) &= 2^{k+1} - 1\ . \end{aligned}$$

La serie anterior es conocida como una *serie geométrica*, y el procedimiento para resolverla es el comunmente encontrado en la litertura. El resultado a este problema es,

$$\boxed{x(2^k) = 2^{k+1} - 1\ .} \tag{4}$$

e. $x(n) = x(n/3) + 1$ para $n > 1$, $x(1) = 1$ (resolver para $n = 3^k$).

Solución:

Nuevamente se hizo el cambio en $x(n)$ de $n \to 3^k$,

$$x(3^k) = x(3^{k-1}) + 1\ .$$

En este problema fue sencillo de identificar la dependencia de k al usar *forward substitution*,

$$\left.\begin{array}{lll} n & k & x(3^k) \\ 1 & 0 & x(3^0) = x(1) \qquad = 1 \\ 3^1 & 1 & x(3^1) = x(3^0) + 1 \quad = 2 \\ 3^2 & 2 & x(3^2) = x(3^1) + 1 \quad = 3 \\ 3^3 & 3 & x(3^3) = x(3^2) + 1 \quad = 4 \end{array}\right\} x(3^k) = k + 1 = \log_3(n) + 1 \ .$$

Por completez se repitió lo mismo que para los problemas anteriores, se calcularon varios términos usando *backward substitution* y se dedujo la relación de recurrencia,

$$\left.\begin{array}{lll} k & x(3^k) & = x(3^{k-1}) + 1 \\ k-1 & & = x(3^{k-2}) + 2 \\ k-2 & & = x(3^{k-3}) + 3 \\ k-3 & & = x(3^{k-4}) + 4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} x_{k-i+1} = x(3^{k-i}) + i \ , i \geq 1 \ .$$

Se usa la relación de recurrencia y el caso base para encontrar el último índice de la serie,

$$\left.\begin{array}{ll} x(1) = x(3^0) & = 1 \\ x(3^0) = x(3^{k-i}) & \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3^0 = 3^{k-i} \\ 0 = k - i \end{array} \implies i = k \ .$$

El último elemento de la serie será,

$$\begin{array}{lll} \vdots & & \vdots \\ 1 & x(3^k) & = \underbrace{x(3^{k-k})}_{=1} + \underbrace{k}_{\log_3(n)} \end{array} \ .$$

El resultado final coincide con aquel encontrado mediante *forward substitution*,

$$\boxed{x(n) = 1 + \log_3(n) \ .} \tag{5}$$