Universidad Veracruzna

Inteligencia Artificial

Análisis de Algoritmos

Actividad 2

Leonardo Flores Torres

3 de septiembre de 2022

Para $x(n) = 3 \cdot x(n-1) - x(n-2)$, donde $x(0) = 1$ y $x(1) = 3$,

- calcular $x(2)$ y $x(3)$,
- obtener la fórmula general y la característica,
- verificar los resultados de $x(2)$ y $x(3)$ con la fórmula de recurrencia.

Solución:

Primero se usará la relación de recurrencia para obtener los valores de $x(2)$ y $x(3)$:

$$\begin{aligned} x(2) &= 3 \cdot x(1) - x(0) \\ &= 3 \cdot 3 - 1 \\ &= 8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x(3) &= 3 \cdot x(2) - x(1) \\ &= 3 \cdot 8 - 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Ahora, si se reordenan los términos de $x(n)$ de la siguiente manera

$$x(n) - 3 \cdot x(n-1) + x(n-2) = 0,$$

su correspondiente ecuación característica es

$$r^2 - 3r + 1 = 0 \ .$$

La cual tiene las siguientes raíces,

$$r_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \ .$$

Ya que sus raíces son distintas la solución general de $x(n)$ es

$$x(n) = \alpha r_+^n + \beta r_-^n \ . \tag{1}$$

Posteriormente se aplicaron los casos base $x(1)$ y $x(0)$ para encontrar los valores de las constantes,

$$x(1) = \alpha r_+ + \beta r_- = 3 \ , \tag{2}$$
$$x(0) = \alpha + \beta = 1 \ . \tag{3}$$

La eq. (3) se resuelve para α, y se sustituye en la eq. (2) de donde se obtiene

$$\beta = \frac{r_+ - 3}{r_+ - r_-} \ ,$$

$$= \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \; . \tag{4}$$

Ahora se toma la eq. (4) y se sustituye en la eq. (2) resolviendo para α,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \beta \; , \\ &= \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \; . \end{aligned}$$

Tomando los valores de α y β, y sustituyendolos en la eq. (1) se obtiene la solución al problema,

$$\begin{aligned} x(n) &= \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)^n \; , \\ &= \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)^{n+1} + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)^{n+1} \; . \end{aligned} \tag{5}$$

Finalmente, se comprueban los resultados de la eq. (5) con los resultados obtenidos al usar la relación de recurrencia,

$$\begin{aligned} x(0) &= \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) = \frac{10}{10} = 1 \; , \\ x(1) &= \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3 \; , \\ x(2) &= \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{16}{2} = 8 \; , \\ x(3) &= \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{42}{2} = 21 \; . \end{aligned}$$

Determinar por inducción matemática que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \; .$$

Solución:

Primero, se denominará a la igualdad anterior como $T(n)$, y se dividirá en en dos partes, la del lado derecho y la del lado izquierdo,

$$\begin{aligned} I(n) &= \sum_{i=1}^{k} i^2 \; , \\ D(n) &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \; . \end{aligned}$$

Ambos lados de la igualdad tienen que ser iguales para cualquier valor de $n = k$ donde $k \geq 1$. Se calcularon un par de términos para comprobar este hecho:

k	$I(k)$	$D(k)$
1	$1^2 = 1$	$\frac{2+3+1}{6} = 1$
2	$1^2 + 2^2 = 5$	$\frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 2}{6} = 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Las soluciones a los problemas se realizaron revisando el libro de referencia [1].

Por inspección se puede decir que $I(n) = D(n)$, y se puede proceder con la demostración. Ahora, supóngase que la igualdad $T(n)$ es válida para $n = k$, si eso es cierto entonces queda demostrar que también lo es para $n = k+1$ como se muestra a continuación,

$$
\begin{aligned}
T(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2 \ , \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \ , \\
&= \frac{k+1}{6}\left[2(k+1)^2 + 3(k+1) + 1\right] \ , \\
&= \frac{k+1}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) \ , \\
&= \frac{1}{6}\left(2k^3 + 9k^2 + 13k + 6\right) \ , \\
T(k+1) &= \frac{1}{6}\left[\left(2k^3 + 3k^2 + k\right) + \left(6k^2 + 12k + 6\right)\right] \ , \\
\sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 &= \frac{k}{6}\left(2k+1\right)\left(k+1\right) + \left(k+1\right)^2 \ , \\
\sum_{i=1}^{k} i^2 &= \frac{k}{6}\left(2k+1\right)\left(k+1\right) \ , \\
&= \frac{2k^3 + 3^k + 1}{6} \ .
\end{aligned}
$$

Con lo que se demuestra que $T(n)$ también es válida para $n = k+1$.

Referencias

[1] Levitin, A. (2008). *Introduction to Design and Analysis of Algorithms, Second Edition.* Pearson Education India.