Universidad Autónoma de Entre Ríos
Facultad de Ciencia y Tecnología

LICENCIATURA EN SISTEMAS INFORMÁTICOS

MÓDULO 3

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Reseña histórica

El origen de la Teoría de Probabilidades se ubica en el siglo XVII y nace como consecuencia de consultas efectuadas por un jugador, el caballero// De Meráy al matemático Blas Pascal, en un intento de establecer leyes que rijan los juegos de azar. De todos modos no fue hasta el siglo XVIII que aparecen verdaderas escuelas que tratan de introducir leyes sobre la regularidad aproximada de ciertos fenómenos sociales. Recién en el siglo XX se desarrolla una teoría matemática rigurosa basada en axiomas, teoremas y definiciones al respecto. Con el correr del tiempo la aplicación de la Teoría de Probabilidades se amplía abarcando no solo a la Ingeniería y a las Matemáticas, sino también a la Agricultura, Economía, Medicina y Psicología.

Modelos determinísticos y probabilísticas

Cada vez que se utiliza la matemática con el objeto de estudiar fenómenos observables se intentan construir **modelos matemáticos** para describirlos. Este modelo es una representación simplificada de la realidad del fenómeno que se estudia, que permite sugerir alternativas de solución y, posteriormente, seleccionar la solución óptima para actuar en consecuencia.

Un **modelo** es un esquema teórico, generalmente expresado en forma matemática, que representa una realidad compleja, y que se utiliza para facilitar su comprensión y estudiar su comportamiento. En consecuencia, un modelo se manifiesta en forma de expresiones matemáticas que relacionan a las variables que se presentan en él.

Podemos sintetizar, diciendo que un modelo matemático es un esquema que se expresa en forma de expresiones que relacionan las variables presentes en su enunciado. Generalmente suelen usarse para representar realidades complejas y facilitar su comprensión.

Los modelos matemáticos se clasifican en **determinísticos** y **probabilísticos**.

Al estudiar un hecho de la naturaleza y elaborar un modelo matemático que lo represente, se está buscando la forma más exacta posible para describir la relación causa-efecto. Existen casos en los cuales se pueden encontrar fórmulas matemáticas o leyes físicas que describen el suceso con toda precisión.

Este tipo de modelos se los llama **modelos determinísticos**, pues estipulan que las condiciones bajo las cuales se verifica un experimento, determinan en forma exacta los resultados del mismo.

Un ejemplo clásico de **modelo determinístico** es la fórmula de caída libre $h = \frac{1}{2}\, g\, t^2$. Las hipótesis simplificativas o condiciones de validez de este modelo de caída son: cuerpo puntual (suficientemente pequeño), gravedad constante (cercana a la Tierra), sin aire (en un tubo con vacío). En estas condiciones se podría predecir la altura que se desplaza un cuerpo transcurrido un tiempo "*t*". En la Física clásica es muy común el uso de modelos determinísticos.

También se estaría en presencia de un modelo determinístico al analizar el siguiente ejemplo físico:

"Si un móvil recorre 30 kilómetros en 2 horas, ¿cuál es su velocidad media?"

La siguiente fórmula de la física, del movimiento rectilíneo uniforme nos permite hallar en forma exacta su velocidad:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{30\,km}{2\,h} = 15\, {}^{km}\!/_{h}$$

Las afirmaciones:

a) Si "3 x + 5 = 5 x – 1", entonces x = 3

b) El 3 de junio del próximo año se producirá un eclipse total de sol.

pueden ser confirmadas o refutadas en forma terminante, utilizando elementos de juicio que nos proporciona la Matemática y la Astronomía respectivamente; se dice que se trata de afirmaciones categóricas; es decir verdaderas o falsas. Son, por lo tanto, modelos determinísticos.

> Un **modelo determinístico o determinista** es aquel que se puede pronosticar con precisión e infalibilidad, debido a que obedece a leyes y principios inmutables.

Pertenecen a esta categoría los fenómenos químicos, eléctricos, astronómicos, mecánicos, de ingeniería, etcétera.

Existen otros casos en los cuales el hecho no responde a ninguna ley física ni matemática que permita, conociendo las causas, establecer con precisión los efectos. Estos modelos se los llama modelos **probabilísticos**, **estocásticos** o **aleatorios** (regidos por el azar). Es decir que en este tipo de modelos el resultado o el comportamiento de la variable en estudio, no puede predecirse de antemano, pues no están sujetos a leyes fijas como ocurría en el caso de los modelos determinísticos. En estos modelos probabilísticos la igualdad de condiciones no asegura la obtención de idénticos resultados.

Al abordar este tipo de problemas solo es posible analizar el conjunto de resultados posibles que se obtienen al experimentarlo u observarlo.

Son ejemplos de modelos probabilísticos los resultados obtenidos al lanzar un dado, una situación meteorológica (cantidad de lluvia que caerá en una tormenta y en un lugar específicos), la cantidad de bacterias en un litro de leche, el número de glóbulos blancos en una muestra de sangre, la cantidad de días lluviosos en el año en curso, la vida útil de un electrodoméstico, etcétera; ya que el resultado de tales hechos no es predecible.

Una de las diferencias fundamentales entre un modelo determinístico y uno probabilístico, es que el primero se utilizan consideraciones específicas para predecir resultados, mientras que en un modelo probabilístico se utilizan las mismas consideraciones para especificar una distribución de probabilidades para cada resultado posible.

Un **modelo probabilístico o aleatorio** es aquel en el que no se puede predecir con precisión su resultado, debido a que no obedece a leyes fijas, sino que depende del azar.

Algunos ejemplos de fenómenos para los cuales son aplicables los modelos probabilísticos:

a) Se lanza un dado y se observa cuál es el número que aparece en su cara superior.

b) Se considera un grupo de 10 semillas, se las planta y se observa cuántas de ellas germinan.

c) Se eligen 10 jóvenes al azar de una escuela secundaria y se observa cuántos de ellos superan 1,60 m de estatura.

d) Se sumergen peces en agua contaminada y se observa cuántos días sobrevive cada uno.

Acontecimiento aleatorio – Experimento aleatorio

Para decir el concepto de acontecimiento aleatorio es necesario dar la noción de:

- Fenómeno observable:

Es todo hecho de la naturaleza, que responde a leyes del azar y sobre el cual no podemos influir, solamente podemos contemplarlo y analizarlo.

Acontecimiento aleatorio:

Si se analiza un fenómeno observable, es decir que es imposible intervenir en sus condiciones de ocurrencia, o no se pueden modificar las causas que lo producen y mucho menos predecir con exactitud los resultados a obtener, estamos frente a un acontecimiento aleatorio.

Acontecimiento aleatorio es todo fenómeno observable que se puede analizar, predecir los posibles resultados futuros, pero sobre él no se ejerce influencia alguna.

Un ejemplo de este tipo de acontecimiento lo constituye la tarea del meteorólogo, quien para determinar las características climáticas de una región busca datos sobre precipitaciones, temperaturas, velocidad de los vientos, etcétera. Posteriormente, observando los fenómenos ocurridos en años anteriores en temporadas similares, predice y pronostica la intensidad media de lluvias, las temperaturas máximas y mínimas, etc. Estos valores son solo probables, pues responden a fenómenos regidos por el azar y la temporada puede presentarse muy distinta a la de años anteriores y sus pronósticos no cumplirse.

En muchos campos de la actividad científica, industrial, biológica y de los juegos de azar se hallan casos en que ciertos experimentos u operaciones pueden repetirse varias veces en condiciones más o menos uniformes pero en los que aparece una variabilidad intrínseca imposible de controlar que se llama azar. En estos casos se dice que nos encontramos ante un experimento aleatorio, el que se puede ensayar todas las veces que sea necesario cubriendo todas las posibilidades de la variable "causa" y se analizan los resultados obtenidos en cada repetición hasta descubrir una relación aproximada entre causa y efecto.

Experimento aleatorio:

Es todo fenómeno que puede ensayarse, es decir que se lo puede repetir en condiciones análogas y sus resultados pueden diferir en cada repetición. Solo reiterándolo un gran número de veces se descubre cierta regularidad en dichos resultados, siendo posible también variar a voluntad las causas para posteriormente examinar la influencia que ejercen sobre los efectos.

Condiciones que debe cumplir un experimento aleatorio:

a) Antes de realizar el experimento no es posible asegurar que resultado que se obtendrá en un ensayo, pues cada resultado depende de la "casualidad" o sea de influencias que no se pueden controlar.

b) No se puede precisar el resultado a obtener en una repetición pero sí es posible conocer todos los resultados posibles.

c) Es posible reiterarlo todas las veces que sea necesario en iguales condiciones.

d) Al repetirlo un gran número de veces el experimento muestra regularidad estadística, es decir que cada uno de los resultados aparece siguiendo una determinada proporción del total de repeticiones efectuadas.

Por ejemplo, al arrojar una moneda se tienen dos resultados posibles, "cara" o "sello", pero antes del lanzamiento no se puede predecir cuál aparecerá. Si la arrojamos numerosas veces se advierte que la aparición de cada resultado es igual al 50% del total.

Es importante destacar la distinción entre "acontecimiento aleatorio" y "experimento aleatorio". En los primeros se observan hechos que ocurren en la Naturaleza, Economía o en otra actividad humana; dichas observaciones proporcionan datos que serán luego analizados.

Los "experimentos aleatorios" se presentan en aquellos casos en los cuales los datos son obtenidos a partir de ensayos debidamente planificados y que cubren variaciones de las causas para determinar sus repercusiones en los efectos.

TEORÍA DE CONJUNTOS APLICADA AL ESPACIO MUESTRAL

* En una ciudad se publican tres revistas, *"Historial"*, *"Auditorio"* y "*La información"*. Se realiza una encuesta entre sus habitantes y se obtiene los siguientes datos:
22% lee "*Historial*", 12% lee "*Auditorio*", 17% lee "*La información*", 4% lee "*Historial*" y "*Auditorio*", 8% lee "*Historial*" y "*La información*", 3% lee "*Auditorio*" y "*La información*" y un 2% lee las tres.
¿Qué probabilidad existe de que un habitante sea un lector de alguna de estas revistas?
¿Qué probabilidad existe de que no lea ninguna de ellas?
¿Qué probabilidad existe de que lea "*Historial*" o "*Auditorio*"?
¿Qué probabilidad existe de que lea sólo una de ellas?
....

En el problema motivador se observa que aparecen conectivos como *"y"*, *"o"*, y también negaciones de un suceso. La resolución de este tipo de problemáticas requiere un buen manejo de la teoría de conjuntos, y es por esto, que a continuación se repasa conceptualmente este tema.

- Espacio muestral:

"El **espacio muestral** de un experimento aleatorio E es el conjunto de todos los resultados posibles."

Este conjunto corresponde al conjunto universal de la Teoría conjuntista.

Por ejemplo:

En el lanzamiento de un dado el espacio muestral es: E = $\{1;2;3;4;5;6\}$

En el lanzamiento de una moneda es: E = $\{c; s\}$

En el lanzamiento de dos monedas es: E = $\{(c;c),(c;s),(s;c),(s,s)\}$

En la medición de la vida útil de una lamparilla es: E = $\{t \in R / t \geq 0\}$

Clasificación de los espacios muestrales:

1. Espacio muestral finito: es el que posee un número finito de muestras o sea de elementos o resultados posibles.

   Ejemplo: el espacio muestral en el lanzamiento de un dado.

2. Espacio muestral infinito numerable: es aquel que posee infinitas muestras, pero se puede poner a las mismas en correspondencia con la sucesión de los números naturales.

   Ejemplo: el espacio muestral del experimento "número de lanzamientos de una moneda hasta que aparezca por primera vez sello". E = $\{1; 2; 3; ....\}$

3. Espacio muestral infinito no numerable: es el que posee infinitas muestras, las que no están dispuestas en correspondencia con los números naturales.

   Ejemplo: espacio muestral que resulta en el experimento "medición de la vida útil de una lamparilla"

4. Espacio muestral discreto: es todo espacio muestral que corresponde a variables estadísticas discretas (definidas en unidad 1).

   Ejemplo: el espacio muestral en el lanzamiento de un dado.

5. Espacio muestral continuo: es todo espacio muestral que corresponde a variables estadísticas continuas (definidas en unidad 1).

   Ejemplo: espacio muestral que resulta en el experimento "medición de la vida útil de una lamparilla"

Repasemos un poco ¿???!!!!!

Escriba los espacios muestrales correspondientes a los siguientes hechos:

1) Se cuenta el número de artículos defectuosos producidos en 24 horas en una línea de producción.

2) Se obtiene una muestra de 5 piezas de una línea de producción y se cuenta el número de piezas defectuosas.

3) Se mide la resistencia de una barra de acero.

4) Se cuenta la cantidad fumadores en un curso de alumnos determinado.

- Suceso o evento:

"Se llama **suceso** o **evento** a cualquier subconjunto del espacio muestral."

Ejemplos:

En el lanzamiento de un dado el espacio muestral es: E = $\{1;2;3;4;5;6\}$ y se considera el suceso "que aparezca número par" se tiene el subconjunto A = $\{2;4;6\}$

En el lanzamiento de dos monedas es: E = $\{(c;c),(c;s),(s;c),(s,s)\}$ y se define el evento "que aparezcan dos resultados iguales" se tiene B = $\{(c;c),(s;s)\}$

1. Suceso cierto: es que aquel que siempre va a ocurrir.
   En el lanzamiento de un dado el evento "que aparezca un número natural menor que 7"

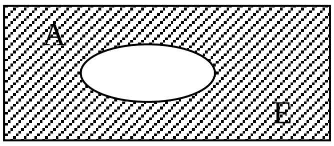
2. Suceso imposible: es el que nunca puede suceder.
   Está caracterizado por el conjunto vacío. ($\varnothing$)
   En el lanzamiento de un dado el suceso "que aparezca el número 8"

- Evento complementario:

Dado un evento A se llama evento complementario de A, que se denota $\bar{A}$, a aquel que sucede cuando no ocurre A.

Esta caracterizado por el conjunto complementario de un conjunto respecto de su universal.

Gráficamente:



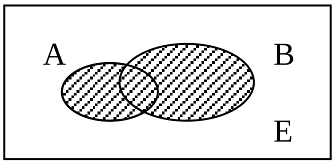
- <u>Evento unión:</u>

Dados dos eventos A y B, se llama evento unión a aquel que sucede si ocurre A ó B (esto indica que ha ocurrido al menos uno de los dos sucesos).

Se caracteriza por medio de la unión entre conjuntos, tal como se resuelve en teoría conjuntista.

En símbolos: $C = A \cup B$

Gráficamente:



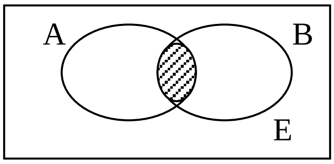
- <u>Evento intersección:</u>

Dados dos eventos A y B, se llama evento intersección a aquel que sucede si ocurre A y B (esto indica que deben suceder los dos eventos simultáneamente).

Se caracteriza por medio de la intersección entre conjuntos, tal como se resuelve en teoría conjuntista.

En símbolos: $C = A \cap B$

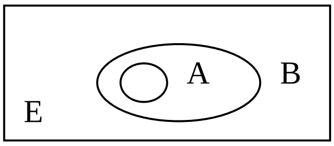
Gráficamente:



- <u>Inclusión de eventos:</u>

Un evento A está incluido en otro B, A ocurre sí y solo sí necesariamente sucede primero B.

Gráficamente:

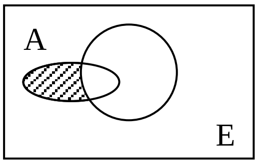


- <u>Evento diferencia:</u>

El evento A – B ocurre sí y solo sí ocurre A solamente (esto implica que el nuevo suceso diferencia de los dados recoge los resultados que se presenta en A pero no en B).

En símbolos $C = A – B$

Gráficamente:



- Eventos mutuamente excluyentes:

Dados dos eventos A y B definidos en un mismo espacio muestral E son mutuamente excluyentes sí y solo sí la ocurrencia de uno de ellos excluye toda posibilidad de que suceda el otro.

Esto implica que no pueden tener resultados comunes o no pueden suceder simultáneamente.

Por lo tanto $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$.

Repasemos un poco ¿???!!!!!

Escriba el espacio muestral y defina por extensión los eventos citados:

Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.

1) Evento A: Salió una cantidad par de caras en el experimento
2) Evento B: Salieron a lo sumo dos caras en el experimento.
3) Evento C: Salieron por lo menos dos caras en el experimento.
4) Evento D: Busque en los anteriores dos sucesos que no sean complementarios.
5) Evento F: Cite un ejemplo de evento complementario a alguno de los casos anteriores.

ACTIVIDAD 1

1) Definir por extensión los espacios muestrales correspondientes a los siguientes experimentos:

1.1* Lanzamiento de una moneda.
1.2* Lanzamiento de dos dados.
1.3* Lanzamiento de tres monedas.
1.4* Efectos de una droga sobre una enfermedad.
1.5* Suma de puntos obtenidos en el lanzamiento de dos dados.
1.6* Lanzamiento de una moneda y un dado.
1.7* Se arroja una moneda hasta que hayan aparecido tres caras y se va anotando la cantidad de veces que se tiró la moneda.
1.8* Se siembran 4 semillas en una maceta y se cuentan cuántas germinaron.
1.9* Se distribuyen dos objetos en tres celdas numeradas.

2) Se arroja un dado y se pide:

2.1* Describir el espacio muestral.
2.2* Describir el evento **A** : que aparezca número par.
2.3* Describir el evento **B** : que aparezca número impar.
2.4* Describir el evento **C** : que aparezca número primo.
2.5* Describir el evento **D** : que aparezca número par y primo.
2.6* Describir el evento **F** : que aparezca número impar o primo.
2.7* Describir el evento **H** : que no aparezca número par.
2.8* Describir el evento **M**: que no aparezca número impar.
2.9* Describir el evento **N** : que no aparezca número impar ni primo.
2.10* Describir el evento **P** : que no aparezca número par y primo.

3) En el experimento que consiste en arrojan simultáneamente una moneda y un dado, se definen los siguientes eventos:
A: aparece cara
B: aparece número impar
C: aparece número primo
D: aparece sello
F: aparece número par.

3.1* Determinar por extensión los eventos antes definidos.
3.2* Determinar por extensión el evento: que aparezca cara y número impar.
3.3* Determinar por extensión el evento: que aparezca sello y número par.
3.4* Determinar por extensión el evento: que aparezca sello o número par.
3.5* Determinar por extensión el evento: que aparezca cara y número primo.
3.6* Determinar por extensión el evento: que aparezca sello o número impar.
3.7* Determinar por extensión el evento: que no aparezca número primo.
3.8* Determinar por extensión el evento: que no aparezca ni sello ni número par.

4) La clase de primer año está formada por 100 estudiantes. De ellos 40 son mujeres, 73 estudian historia y 12 son mujeres que no estudian historia. ¿Cuántos hombres no estudian historia?

CONCEPTO DE PROBABILIDAD Y SUS PROPIEDADES

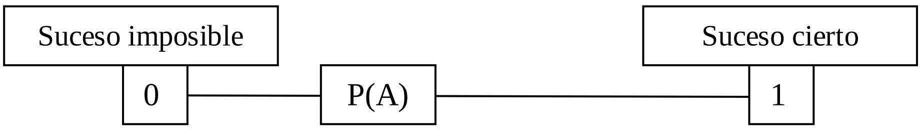
Según lo visto, todo proceso aleatorio se caracteriza porque no se puede precisar de antemano cuál va a ser su resultado en una repetición. Por otro lado, es factible conocer todos los resultados posibles y, al repetir un gran número de veces el experimento, tienden a mantener una cierta regularidad o uniformidad en la cantidad de apariciones frente al total. Esta proporción o porcentaje de ocurrencia de uno de los resultados posibles con respecto al total de ellos, es la noción genérica de probabilidad.

Además se define como **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio y, por lo tanto es posible calcular, desde diferentes perspectivas, que porcentaje del total de resultados corresponde a cada uno de ellos.

De esto se desprenden dos ideas importantes:

1. La probabilidad es un número no negativo pues indica una porción de un total, en su noción más general.
2. La probabilidad no puede superar a la unidad, pues dicha porción no puede ser mayor que el total.

Gráficamente:



DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Para definir, en la forma clásica a la probabilidad, se debe presentar el concepto de sucesos equiprobables.

Definimos:

> Dos sucesos de un mismo experimento son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de ocurrir

Los experimentos "lanzamiento de una moneda" o "lanzamiento de un dado" tienen una característica común. El primer caso, al lanzar una moneda, se puede observar que si la moneda no está cargada, o sea que cada uno de sus lados puede quedar en la parte superior respondiendo solamente a azar, ambas caras tiene la misma posibilidad de caer. Al igual que en este caso, en el lanzamiento de un dado no cargado, vemos que cada número del dado tiene la misma posibilidad de caer hacia arriba.

A este tipo de eventos se le conoce como eventos equiprobables o equiposibles, debido a que la posibilidad de todos los resultados es igual.

Definición:

> A los sucesos elementales de un espacio muestral que tienen la misma probabilidad de ocurrir se les denomina **sucesos equiprobables**.

Hay experimentos aleatorios en los cuales los sucesos elementales tienen la misma posibilidad de salir, como en los ejemplos anteriores. Otros, como por ejemplo, que en Entre Ríos llueva un día del mes de julio, o un día del mes de enero, no tienen la misma probabilidad de ocurrir. Parece más probable que llueva en julio a que lo haga en pleno verano. En este caso los sucesos no son equiprobables.

Esta es una de las condiciones que se deben verificar en un experimento para poder aplicar la definición clásica, la que se denomina postulado de indiferencia:

> Si un fenómeno aleatorio cualquiera puede dar *n* resultados distintos y no se conoce razón alguna que favorezca la presentación de uno respecto de los otros, debe admitirse que todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad.

El primero en dar la definición clásica de probabilidad fue Jakob Bernoulli (1654–1705) en su obra *El Arte de Predecir*, publicada póstumamente en 1713. Más adelante, el matemático francés exiliado en Inglaterra Abraham De Moivre (1667–1754) aceptó la definición dada por Bernoulli y la reformuló en términos modernos: «una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que es suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra el suceso». La definición clásica de la probabilidad, en su forma actual, está basada en el concepto de equiprobabilidad de los resultados. Se supone que un experimento se puede descomponer en *n* sucesos equiprobables y mutuamente excluyentes, llamados sucesos 'elementales'. Así, la probabilidad de suceso aleatorio A es el número del intervalo [0,1] que expresa el cociente entre los *m* sucesos elementales que componen A y el número total *n* de posibles sucesos elementales.

Laplace (1749-1827) es uno de los personajes más importantes de la historia de la probabilidad. Su gran obra *Théorie analityque des Probabilités* , publicada en París en 1812, contiene la formalización de la Teoría Clásica de la Probabilidad. Sus formulaciones son las primeras en las que los temas tratados no se refieren a los juegos de azar. En la memoria *Sur les naissances les mariages et les morts á Paris* aborda un tema de 'inferencia estadística' inaugurando un campo de aplicación de la ciencia Estadística a las ciencias sociales.

El concepto de probabilidad según esta teoría clásica, que presenta como su mayor representante a Laplace, es muy simple y de mucha aplicación práctica.

Se detallan las condiciones que deben ser cumplidas por los experimentos aleatorios para poder ser analizados bajo esta definición:

a) El número de resultados posibles del espacio muestral E debe ser finito.

b) Si se define una propiedad A, los casos posibles se pueden dividir en dos grupos; los que la verifican, llamados casos favorables, y los que no lo hacen denominados casos no favorables o desfavorables.

c) Se puede afirmar que todos los casos son igualmente probables, es decir que antes de realizar el experimento, todos tienen la misma posibilidad de ocurrir. En este caso, los resultados se denominan *equiprobables.*

d) Los casos posibles son, entre ellos, excluyentes; es decir que dos de ellos no pueden ocurrir simultáneamente.

Cuando se cumplen las condiciones antes expuestas, es posible definir, con respecto a la propiedad *A*, un número $P(A)$, llamado probabilidad de *A* en **E** de la siguiente manera:

> La probabilidad de un evento que responde a una propiedad *A* es igual al cociente entre el número de casos favorables (m) y el número de casos posibles (n).
>
> $$P(A) = \frac{m}{n}$$

Debe quedar en claro que la definición de Laplace resulta aplicable únicamente cuando se cumplen las condiciones antes citadas; pero tiene la ventaja de ser fácilmente aplicable y de comprensión inmediata. Más adelante veremos la generalización de la misma para variables continuas.

La aplicación inmediata de la definición nos permite resolver diversos problemas del cálculo de probabilidades, sobre todo aquellos en los cuales es posible hallar por simple recuento o aplicando combinatoria el número de casos posibles y favorables.

Por ejemplo:

En el lanzamiento de una moneda el espacio muestral es: E = $\{c; s\}$ y los resultados experimentales son equiprobables. Por lo tanto la probabilidad de cada uno de ellos es $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

O sea que existe un 50% de posibilidad de tener cara o sello al arrojar una moneda.

DEFINICIÓN FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD

La definición clásica se ve limitada a situaciones en las que hay un número finito de resultados igualmente probables. Hay situaciones prácticas que no son de este tipo y la definición de Laplace no se puede aplicar. Por ejemplo, si se pregunta por la probabilidad de que un paciente se cure mediante cierto tratamiento médico, o la probabilidad de que una determinada máquina produzca artículos defectuosos, entonces no hay forma de introducir resultados igualmente probables. Por ello se necesita un concepto más general de probabilidad. Una forma de dar respuesta a estas preguntas es obtener algunos datos empíricos en un intento por estimar las probabilidades.

Esta manera de asignar probabilidades a los resultados experimentales mediante el concepto de frecuencia relativa es apropiada cuando se tiene un número grande de repeticiones del experimento.

Ejemplo:

Se estudian los tiempos de espera en el sector naranja de rayos X de un sanatorio. Durante 20 días se anotó el número de pacientes en espera a las 9 horas, registrándose los siguientes datos:

Nº de pacientes en espera	Nº de días
0	2
1	5
2	6
3	4
4	3
	Total: 20

Se observa en la tabla que en 2 de los 20 días, no hubo pacientes en espera; en 5 días solo hubo un paciente en espera, y así sucesivamente.

Se adopta la frecuencia relativa como el valor de la probabilidad de cada resultado experimental; podemos afirmar que la probabilidad de que haya cero paciente en espera es de $\frac{2}{20} = 0{,}10$. O sea que tenemos una posibilidad del 10% de que esto ocurra.

En este método se supone que el valor de la frecuencia relativa de un resultado experimental, se estabiliza en un número, que es su probabilidad, si se repite la experiencia un gran número de veces.

La probabilidad de que haya 4 pacientes esperando es $\frac{3}{20} = 0{,}15$.

Esta propiedad empírica de la probabilidad, llamada ley del azar o ley de la estabilización de las frecuencias relativas puede enunciarse:

> En una larga serie de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un número fijo, llamado **probabilidad del suceso**.

En símbolos: $P(A) = \lim_{n \to \infty} f_{r(a)}$.

Esta definición tiene valor desde el punto de vista teórico, pues en la práctica, presenta la dificultad de tener que realizar la prueba infinitas veces para hallarla, lo que es bastante tedioso, y en algunos casos imposible.

Busque en la bibliografía dos ejemplos de eventos en los cuales se calcula la probabilidad mediante la teoría clásica y mediante la frecuencial. Escriba sus enunciados y calcule dicha probabilidades.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Esta definición, que sigue la corriente axiomática, basa la conceptualización de "probabilidad" en la teoría conjuntista o teoría moderna.

Definición:

"Sea **E** un espacio muestral correspondiente a un experimento aleatorio y ***P*** una función que asocia a cada evento ***S*** un número real. Se llama probabilidad del suceso ***S***, que se denota $\boldsymbol{P(S)}$ al número real que cumple los siguientes axiomas:

1) $0 \leq P(S) \leq 1$
2) $P(E) = 1$
3) Si A; B; C; ...... son sucesos mutuamente excluyentes de a pares, se verifica:

$$P(A \cup B \cup C \cup ...) = P(A) + P(B) + P(C) + ...$$ "

Resumiendo, hay tres formas de calcular o estimar la probabilidad. El enfoque clásico o "*a priori*" proveniente de los juegos de azar o definición clásica de Laplace que se emplea cuando los espacios muestrales son finitos y tienen resultados igualmente probables; la definición empírica, "*a posteriori*" o frecuencial que se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de ensayos repetidos y por último la definición de Kolmogorov o definición axiomática de probabilidad.

Propiedades de la probabilidad

a) La probabilidad de que ocurra un evento ***S*** es un número real comprendido entre 0 y 1. En símbolos: $\boldsymbol{0 \leq P(S) \leq 1}$

b) Si el número de casos favorables es igual al número de casos posibles ***m = n*** siendo, por lo tanto, la probabilidad $\boldsymbol{P(S)}$ **= 1 = 100 %**
En este caso, tenemos la certeza de que el evento siempre ocurrirá.

c) Si el número de casos favorables es nulo, será ***m* = 0 y** $\boldsymbol{P(S)}$ **= 0 = 0 %**
Para este caso, el evento nunca sucederá, es decir que hablamos de un evento imposible, el que se caracteriza con el conjunto vacío ($\varnothing$)

d) Si llamamos ***p*** a la probabilidad de que ocurra el evento ***S***, o sea ***p* =** $\boldsymbol{P(S)}$, y ***q*** a la probabilidad de su complemento (evento complementario), ***q* =** $\boldsymbol{P(\overline{S})}$, resulta:

$$q = P(\overline{S}) = \frac{casos \quad no \quad favorables}{casos \quad posibles} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - p$$

Es: $q = 1 - p \Rightarrow \boxed{p + q = 1}$

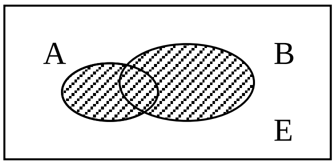
e) Dados dos eventos A y B definidos en un espacio muestral E; si un evento está incluido en otro, la probabilidad del primero es menor o igual que la del segundo.
$A \subseteq B \quad es \quad P(A) \leq (B)$

Teorema de la adición de probabilidades:

Considerando dos sucesos cualesquiera **A** y **B** definidos en un espacio muestral **E**, cuyas probabilidades son $\boldsymbol{P(A)}$ y $\boldsymbol{P(B)}$ respectivamente, es:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

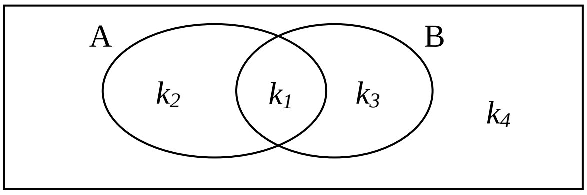
Gráficamente:



Se observa en el gráfico que si definimos a la probabilidad total o suma de probabilidades como la simple suma de las probabilidades individuales de cada evento, $P(A) + P(B)$, estamos considerando dos veces la probabilidad conjunta de los mismos, es decir $P(A \cap B)$; es por esto que debemos restar una vez dicha probabilidad.

Demostración:

Si se tabulan el número de casos correspondientes al gráfico siguiente, resulta:



	A	$\bar{A}$	Total
B	k_1	k_3	$k_1 + k_3$
$\bar{B}$	k_2	k_4	$k_2 + k_4$
Total	$k_1 + k_2$	$k_3 + k_4$	

El número total de casos n es igual a $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$

Aplicando la definición clásica de probabilidad:

$$P(A \cup B) = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{n} = \qquad \text{sumamos y restamos } k_1$$

$$= \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_1 - k_1}{n} = \frac{k_1 + k_2}{n} + \frac{k_1 + k_3}{n} - \frac{k_1}{n} = P(A) + P(B) - P(a \cap B)$$

Si los sucesos son mutuamente excluyentes resulta: $P(A \cap B) = 0$ y el teorema se reduce a la forma simple del teorema de la suma de probabilidades, llamado **Teorema de la probabilidad total**.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Repasemos un poco ¿???!!!!!

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema motivador de la página 7. Intentémoslo ....

ACTIVIDAD 2

1) En el experimento lanzar tres monedas, calcular:
1.1* La probabilidad de obtener sólo un sello.
1.2* La probabilidad de obtener al menos un sello.
1.3* La probabilidad de obtener exactamente dos sellos.

2) Un dado tiene el número 1 en tres de sus caras, el número 2 en dos de ellas, y el número tres en la restante. Calcular la probabilidad de que salgan cada uno de los números al arrojarlo.

3) Se arrojan tres monedas:
3.1* Describir el espacio muestral.
3.2* ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan exactamente dos caras?
3.3* ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan como máximo dos caras?

4) Se tira una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara y un número mayor que 4?

5) En una comunidad, el 52% de sus habitantes son lectores del diario “La Noticia”, el 28% de “El Ciudadano” y un 14% de ambos. Si se selecciona un ciudadano al azar, calcular la probabilidad de que:
5.1* Sea lector de algún diario.
5.2* No lea prensa.
5.3* Sea lector del diario “La Noticia”, solamente.

6) En cierta población de 1500 habitantes se clasificó según su nacionalidad resultando 950 argentinos, 200 españoles, 300 italianos y 50 franceses. Si se elige un habitante al azar calcular la probabilidad de que:
6.1* sea de habla castellana
6.2* sea extranjero.

7) En el control de calidad de un lote de 6.000 lámparas, se selecciona una lámpara al azar. Se sabe por estudios anteriores que, en general, el 2 % de las lámparas son defectuosas en cada lote. ¿Qué probabilidad tenemos de seleccionar una defectuosa? ¿Qué probabilidad existe de sacar una que no lo sea? ¿Qué relación liga a los eventos?

8) Entre los clientes de un banco se realizó una encuesta acerca de la conveniencia de instalar un cajero automático en el mismo. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	A favor	En contra	Total
Hombre	60	20	80
Mujer	40	30	70
Total	100	50	150

Si se elige un cliente al azar:

8.1* ¿Qué probabilidad existe de que sea un hombre?

8.2* ¿Qué probabilidad existe de que esté a favor de la instalación del cajero?

8.3* ¿Qué probabilidad existe de que sea un hombre y esté a favor de la instalación?

8.4* ¿Qué probabilidad existe de que sea un hombre o esté a favor de dicha instalación?

9) Una pequeña empresa tiene 50 empleados. Cada trabajador debe terminar su trabajo a tiempo y, además, el producto por él ensamblado debe ser aprobado mediante inspección de calidad. Al finalizar un período de evaluación de desempeño, el gerente de producción vio que 5 empleados, de los 50, habían terminado su trabajo tarde, que 6 empleados del total habían ensamblado productos defectuosos y que 2 de ellos habían terminado tarde y armado artículos defectuosos. El gerente decidió asignar una mala calificación a aquellos empleados que hubiesen terminado tarde o hubiesen armado productos defectuosos. ¿Qué probabilidad existe de que un empleado elegido al azar reciba una mala calificación?

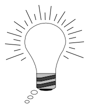
TABLAS DE CONTINGENCIAS O PROBABILIDADES CONJUNTAS

Existen dos formas de mostrar un espacio muestral. Una de ellas es mediante el uso de los diagramas de Venn, como se ha hecho hasta ahora.

La representación gráfica de los eventos brinda un modelo matemático para interpretar un problema y poder resolverlo usando la operatoria entre conjuntos.

Otra forma de visualizar los datos es mediante la confección de una tabla de clasificaciones cruzadas, llamada tabla de contingencias o de probabilidades conjuntas.

Se analiza el siguiente ejemplo:



* Se clasifican los obreros de una planta según su profesión y su categoría, volcándose los resultados en la siguiente tabla:

	Profesional	No Profesional	Total
Categoría I	23	12	35
Categoría II	37	28	65
Total	60	40	100

Los valores de cada celda de la tabla se obtienen dividiendo el espacio muestral en obreros de acuerdo a su profesión y a su categoría dentro de la planta. La tabla obtenida es de 2x2, pues posee dos filas y dos columnas.

Si se desea calcular la probabilidad de que un obrero extraído al azar sea profesional y de categoría I, estamos frente al cálculo de la probabilidad de la intersección de dos eventos.

Llamando Evento A: que el obrero sea profesional

Evento B: que el obrero sea de categoría I

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{23}{100} = 0{,}23 = 23\%$$

De la misma manera se obtienen las probabilidades de la intersección de todos los eventos y la tabla se convierte en:

	Profesional	No Profesional	Total
Categoría I	0,23	0,12	0,35
Categoría II	0,37	0,28	0,65
Total	0,60	0,40	1

Como cada uno de los valores de las celdas expresan la probabilidad de la intersección de los eventos se denominan probabilidades conjuntas.

Los valores que aparecen en los márgenes de la tabla muestran cada uno de ellos la probabilidad de cada evento.

La probabilidad de que sea un profesional es de $P(A) = 0{,}60$, la probabilidad de que no sea un profesional es $P(\overline{A}) = 0{,}40$, la probabilidad de que sea de categoría I es $P(B) = 0{,}35$ y de que no sea de categoría I $P(\overline{B}) = 0{,}65$. Estas probabilidades se llaman probabilidades marginales, por su ubicación en los márgenes de la tabla.

	Busque el la bibliografía ejemplos de tablas de contingencias. Escribas sus enunciados y elabore la tabla.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

En muchas ocasiones la probabilidad de ocurrencia de un evento se ve influida por la ocurrencia de otro evento relacionado con él.

Se define la probabilidad condicional basando nuestro razonamiento en el problema presentado anteriormente:

* Se clasifican los obreros de una planta según su profesión y su categoría, volcándose los resultados en la siguiente tabla:

	Profesional	No Profesional	Total
Categoría I	23	12	35
Categoría II	37	28	65
Total	60	40	100

1) Si se selecciona un obrero al azar, ¿qué probabilidad existe de que sea profesional y de categoría I?

   Se definen:

   Evento A: "que sea profesional" Evento B: "que sea de categoría I"

$$P(A \cap B) = \frac{23}{100}$$

2) Si se selecciona un obrero al azar, ¿qué probabilidad existe de que sea profesional?

$$P(A) = \frac{60}{100}$$

3) Si se selecciona un obrero al azar, ¿qué probabilidad existe de que sea de 1º categoría si se conoce que resultó ser un profesional?

En este caso ya se sabe con anticipación el resultado del primer experimento, por lo tanto el espacio muestral se limita ahora solo a los profesionales (que son los casos posibles) y se denomina **espacio muestral reducido**.

En símbolos. $P(B/A) = \dfrac{23}{60} = \dfrac{23/100}{60/100} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

En general, dados dos eventos A y B, dependiendo la ocurrencia de B del resultado de A, la probabilidad $\boldsymbol{P(B/A)}$ se denomina **probabilidad condicional**.

Definimos:

"Si **A** es un suceso cualquiera de un espacio muestral **E**, entonces la probabilidad de un suceso **B**, una vez que haya sucedido **A**, que se denota $\boldsymbol{P(B/A)}$, se define como el cociente entre la probabilidad de la intersección de los eventos y la probabilidad del que ocurrió primero."

En símbolos: $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Teorema de la multiplicación

Si **A** y **B** son dos sucesos dependientes tales que $\boldsymbol{P(A)}$ y $\boldsymbol{P(B/A)}$ son conocidas, la ocurrencia simultánea de estos eventos $\boldsymbol{P(A \cap B)}$, es igual al producto de la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad condicional del otro, calculada suponiendo que el primer suceso ya ha ocurrido.

En símbolos: $\boxed{P(A \cap B) = P(B/A) \,.\, P(A)}$

Por ejemplo:

Un conjunto de 100 vacunos contiene 20 que pesan menos de 370 kilogramos y 80 que pesan más de 370 kilogramos. Si se seleccionan 2 vacunos al azar de ese lote para efectuar un control sanitario:

a) ¿Qué probabilidad existe de que los dos pesen menos de 370 kilogramos. Si se reponen los ejemplares al lote?

b) ¿Qué probabilidad existe de que los dos pesen menos de 370 kilogramos. Si el experimento se realiza sin reposición?

Se llama: **A**: que el 1º ejemplar pese menos de 370 kilogramos.

B: que el 2º ejemplar pese menos de 370 kilogramos.

a) $P(A) = \dfrac{20}{100}$ $\qquad P(B) = \dfrac{20}{100}$

$$P(A \cap B) = \frac{20}{100} \;.\; \frac{20}{100} = 0{,}04 = 4 \;\%$$

En este caso las probabilidades de **A** y **B** son iguales pues luego de realizar la primera extracción se repone el ejemplar en el lote, resultando por lo tanto los experimentos no dependientes.

b) $P(A) = \dfrac{20}{100}$ $\qquad$ $P(B) = \dfrac{19}{99}$

$$P(A \cap B) = \frac{20}{100} \ . \ \frac{19}{99} = 0{,}038 = 3{,}8\%$$

En este caso las probabilidades de **A** y **B** difieren pues el espacio muestral y los casos favorables se reducen en un vacuno, ya que el ejemplar no es devuelto al grupo.

Eventos independientes

En el ejemplo anterior se observa que los resultados varían según que el experimento se realice con o son reposición del elemento extraído de la población.

Esto permite definir dos tipos de eventos; los dependientes y los independientes.

En la parte a) del ejemplo los eventos son independientes, pues el resultado del primero no condiciona en nada al segundo, es decir que cuando se realiza la 2º extracción, las condiciones son idénticas que al principio del experimento.

Esto implica que desaparece la probabilidad condicional $\boldsymbol{P(B/A)}$, ya que no interesa para nada el resultado de **A** al realizar **B**; transformándose $\boldsymbol{P(B/A)}$ en $\boldsymbol{P(B)}$.

El teorema de la multiplicación se obtiene mediante la fórmula siguiente:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \ . \ P(B)}$$

Definición:

"Los eventos **A** y **B** son **sucesos independientes** si el hecho de que acontezca uno, no tiene ningún efecto en la probabilidad del otro, es decir, si $\boldsymbol{P(B/A)} = \boldsymbol{P(B)}$; ello equivale a $P(A \cap B) = P(A) \ . \ P(B)$

En la parte b) del ejemplo los eventos son dependientes, pues el resultado del primero condiciona al segundo, es decir que cuando se realiza la 2º extracción, las condiciones difieren con respecto a las dadas al iniciar el experimento.

No se debe confundir el concepto de eventos mutuamente excluyentes con el de eventos independientes. Dos eventos cuyas probabilidades son distintas de cero no pueden ser mutuamente excluyentes y, simultáneamente, independientes. Dos eventos independientes verifican que el producto de sus probabilidades es igual a la probabilidad de la intersección y, en eventos mutuamente excluyentes la probabilidad de la intersección es nula.

ACTIVIDAD 3

1) Una urna contiene bolillas numeradas del 1 al 5. Se sacan dos bolillas al azar y, si la suma es par, calcular la probabilidad de que ambos números sean impares.

2) Una caja contiene 20 cerrojos de los cuales 3 son defectuosos y otra contiene 50 cerrojos de los cuales 7 son defectuosos. Si se saca un cerrojo de cada caja, con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?

3) Se arrojan dos dados. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos sea 10 o mayor, habiendo aparecido en el primer dado el número 5.

4) El personal obrero de cierto establecimiento ha sido clasificado de la siguiente manera:

Coeficiente intelectual	Especializado	No especializado	Total
Superior a 105	720	480	1200
Inferior a 105	240	650	890
Total	960	1130	2090

Se selecciona un obrero al azar, que resultó ser especializado:

4.1* Calcular la probabilidad de que tenga un coeficiente intelectual superior a 105.
4.2* Calcular la probabilidad de que tenga un coeficiente intelectual inferior a 105.

5) De 1000 estudiantes de una Facultad, el 30% aprobó Matemática. El 70% de los alumnos son varones, y además hay 500 varones que no aprobaron Matemática. Seleccionado un estudiante al azar, resultó ser mujer. Hallar la probabilidad de que tenga aprobada Matemática.

6) Una compañía de artículos para computadoras colocará un aviso de su nuevo *módem* en una conocida revista de computación. Según encuestas realizadas a los habitantes de cierta ciudad el 38% lee dicha revista y de ellos, el 2 % estaría dispuesto a comprar dicho *módem*. Hallar la probabilidad de que sea lector y compre el módem.

7) A causa de una plaga de langostas que ataca a cuatro grandes zonas agropecuarias, se está estudiando la posibilidad de aplicar fumigación aérea con el objetivo de controlar su natalidad. Se hizo una encuesta a 300 residentes de dichas zonas para determinar si estaba o no de acuerdo con la fumigación. Los datos recolectados se muestran en la siguiente tabla:

	Área I	Área II	Área III	Área IV	Total
A favor	42	54	39	37	172
En contra	13	16	22	25	76
No opinó	16	10	12	14	52
Total	71	80	73	76	300

Se selecciona un residente al azar:

7.1* Si dicho residente es de la zona I, hallar la probabilidad de que esté a favor.

7.2* Si es de la zona II, ¿qué probabilidad hay de que esté en contra?

7.3* ¿Qué probabilidad existe de que sea de la zona III?

7.4* ¿Qué probabilidad hay de que sea de la zona III y esté a favor?

7.5* ¿Qué probabilidad existe de que no haya opinado, si resultó ser de la zona IV?

8) En una clase el 40% de los alumnos aprueba Física y el 50% del total de alumnos aprueba Matemática. Además la probabilidad de aprobar Física habiendo aprobado Matemática es del 80%. Probar que la mitad de la clase tiene aún sin aprobar las dos materias y calcular el porcentaje de alumnos que teniendo aprobada Física aprueben también las Matemáticas.

9) Consideremos una urna que contiene 4 bolillas rojas y 5 blancas. De las 4 bolillas rojas, 2 son lisas y 2 rayadas y de las 5 bolillas blancas, 4 son lisas y una sola es rayada.
Supongamos que se extrae una bolilla y resultó ser roja, ¿cuál es la probabilidad de que la bolilla sea rayada?

10) Dados los eventos A y B con $P(A)=0{,}50$, $P(B)=0{,}4$ y $P(A\cap B)=0{,}30$:

10.1* Calcular $P(A/B)$

10.2* Calcular $P(B/A)$

10.3* Son A y B independientes?

11) En una encuesta a los alumnos que cursan una maestría en Administración, se preguntó el motivo por el cual habían seleccionado la maestría en esa Universidad y si eran estudiantes que cursan sólo la especialidad o si aspiraban a finalizar la maestría completa. Algunos contestaron que se debía a la calidad de enseñanza de la institución, mientras que otros respondieron que se debía a la cercanía a su lugar de domicilio y no debían invertir tanto dinero en viajes.

Los datos se resumen en esta tabla:

Alumnos de	Calidad de la institución	Cercanía a su domicilio	Otros	Total
Especialidad	421	393	76	890
Maestría	400	593	46	1039
	821	986	122	1929

11.1* Elaborar una tabla de probabilidad conjunta para los datos.

11.2* Obtener las probabilidades marginales de la Calidad de la universidad, cercanía a los domicilios y otros y analice el motivo principal para elegir esa carrera en esa universidad.

11.3* Si un alumno es de la Especialidad, ¿cuál es la probabilidad de que la calidad de la institución sea el principal motivo de elección?

Respuestas a ejercicios

ACTIVIDAD 1

A cargo del alumno.

ACTIVIDAD 2

1)
1.1* $\frac{3}{8}$ 1.2* $\frac{7}{8}$ 1.3* $\frac{3}{8}$

2) $p(1)=\frac{1}{2}; p(2)=\frac{1}{3}; p(3)=\frac{1}{6}$

3)
3.1* A cargo del alumno 3.2* $\frac{3}{8}$ 3.3* $\frac{7}{8}$

4) $\frac{1}{6}$

5)
5.1* 0,66 5.2* 0,34 5.3*0,38

6)
6.1* 0,76 6.2* 0,36

7) 0,02 0,98

8)
8.1* 0,53 8.2* 0,66 8.3*0,4 8.4*0,80

9) $\frac{9}{50}$

ACTIVIDAD 3

1) $\frac{3}{4}$ 2) 0,021

3) $\frac{1}{3}$ 4) 4.1* $\frac{720}{960}$ 4.2* $\frac{240}{960}$

5) $\frac{1}{3}$

6) 0,0076

7)
7.1* $\frac{42}{71}$ 7.2* $\frac{16}{80}$ 7.3* $\frac{73}{300}$ 7.4* $\frac{39}{300}$ 7.5* $\frac{14}{76}$

8) A cargo del alumno
100 %

9) $\frac{1}{2}$

10)
10.1* 0,75 10.2* 0,6 10.3* no

11)
11.1* A cargo del alumno 11.2*0,43; 0,51 y 0,06 11.3*0,47