Material de Introducción

Prof. Stella de Castellet

Entendiendo el tema "Funciones"

En matemática, una **función (f)** es una **relación** entre un conjunto dado **X** (llamado **dominio**) y otro conjunto de elementos **Y** (llamado **codominio**) de forma que a cada elemento **x** del dominio le **corresponde** un único elemento *f(x)* del codominio (los que forman el **recorrido,** también llamado **rango** o **ámbito**).

En lenguaje más simple, las funciones matemáticas son el "depende de".

Las funciones matemáticas pueden referirse a situaciones cotidianas, tales como: el costo de una llamada telefónica que depende de su duración, o el costo de enviar una encomienda que depende de su peso.
A modo de ejemplo, ¿cuál sería la regla que **relaciona** los números de la derecha con los de la izquierda en la siguiente lista?:

1 --------> 1
2 --------> 4
3 --------> 9
4 --------> 16

Los números de la derecha son los cuadrados de los de la izquierda.
La regla es entonces "elevar al cuadrado":

1 --------> 1
2 --------> 4
3 --------> 9
4 --------> 16
x --------> x^2.

Para referirse a esta regla podemos usar un nombre, que por lo general es la letra **f** (de función).
Entonces, **f** es la regla "elevar al cuadrado el número".

Usualmente se emplean dos notaciones:

---

x --------> x^2 o **$f(x) = x^2$** .

Así, f(3) significa aplicar la regla f a 3. Al hacerlo resulta $3^2 = 9$.
Entonces f(3) = 9. De igual modo f(2) = 4, f(4) = 16, $f(a) = a^2$, etc.

Ejemplo 1
Correspondencia entre las personas que trabajan en una oficina y su peso expresado en kilos

Conjunto X	Conjunto Y
Ángela	55
Pedro	88
Manuel	62
Adrián	88
Roberto	90

variable independiente : (perteneciente al conjunto **X** o **dominio**) Cada persona constituye lo que se llama la entrada o variable independiente.

variable dependiente : (perteneciente al conjunto **Y** o **codominio**) Cada peso constituye lo que se llama la salida o variable dependiente.

Notemos que una misma persona no puede tener dos pesos distintos. Notemos también que es posible que dos personas diferentes tengan el mismo peso .

Prof. Stella de Castello

Ejemplo 2

Correspondencia entre el conjunto de los números reales (variable independiente) y el mismo conjunto (variable dependiente), definida por la regla "doble del número más 3".

$$x \dashrightarrow 2x + 3$$

$$f(x) = 2x + 3$$

Algunos pares de números que se corresponden por medio de esta regla son:

pre imagen

Conjunto X	Conjunto Y	Desarrollo
-2	-1	$f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$
-1	1	$f(-1) = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$
0	3	$f(0) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$
1	5	$f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$
2	7	$f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$
3	9	$f(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$
4	11	$f(4) = 2(4) + 3 = 8 + 3 = 11$

imagen

Todos y cada uno de los elementos del 1er conjunto **(X)** están asociados a uno, y sólo a uno, del 2° conjunto **(Y)**.

Todos y cada uno significa que no puede quedar un elemento en **X** sin su correspondiente elemento en **Y**.
A uno y sólo a uno significa que a un mismo elemento en **X** no le pueden corresponder dos elementos distintos en **Y**.

Ahora podemos enunciar una definición más formal:

Una función **(f)** es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto **X (dominio)** exactamente un elemento, llamado **f(x)**, de un conjunto Y **(codominio)**.

Generalizando, si se tiene una función **f**, definida de un conjunto A en un conjunto B, se anota

f : A ------> B (o, usando X por A e Y por B f : X ------> Y) o f(x) = x

dominio : es el primer conjunto (X) (Dom) de la función
codominio: es el conjunto de llegada. (Y)

imagen : f(x) es la imagen de x bajo f.
preimagen: que x es la **preimagen** de f(x)

En el ejemplo 2 :

3 es la **imagen** del número 0 bajo f;
1 es la **preimagen** del número 5.

Dominio:

Ejemplo 1: $f(x) = 3x^2 - 5x$ está definida para todo número real (x puede ser cualquier número real).
por lo tanto el dominio de esta función = conjunto de todos los números reales.

Ejemplo 2:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 2}, \quad -1 < x < 2$$

dominio todos los valores de x para los cuales $-1 < x < 2$
porque aunque pueda tomar cualquier valor real diferente de -2,
en su definición determina en qué intervalo está comprendida.

Si el dominio no se específica, debe entenderse que el dominio incluye a todos los números reales para los cuales la función tiene sentido.

Prof. Stella de Castelli

El **rango** (Rg) o **recorrido** (Rec) o **ámbito** (A) es el conjunto de todos los valores posibles de **f(x)** que se obtienen cuando **x** varía en todo el dominio de la función.

Ejemplo:

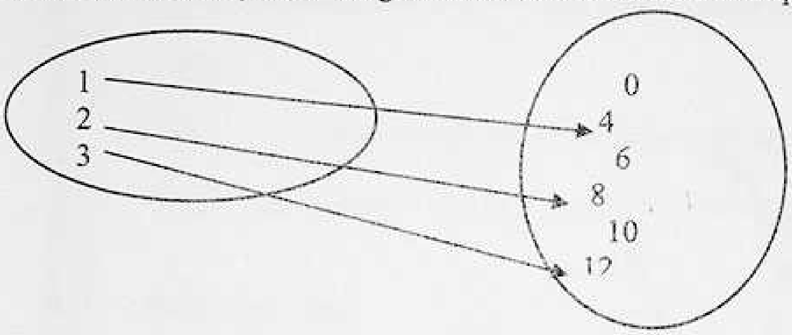
Identificar dominio y rango de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$

Como la función tiene raiz cuadrada, el dominio = todos los valores para los cuales $x - 2 \geq 0$.
dominio = todos los reales que son mayores o iguales a 2.
rango = al conjunto de los números reales positivos incluyendo el cero; puesto que al reemplazar los valores del dominio se obtienen únicamente valores positivos bajo la función *f*.

El **rango** (**recorrido** o **ámbito**) es el conjunto formado por todas las imágenes; es decir, es el conjunto conformado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente; estos valores están determinados además, por el dominio de la función

Rango o recorrido es un subconjunto del codominio B = {0, **4**, 6, **8**, 10, **12**}

Ejemplo 3
A = {1, 2, 3} (conjunto de salida)
B = {0, 4, 6, 8, 10, 12} (conjunto de llegada)
Relación entre A y B es "asignar a cada elemento su cuádruplo".



Dominio = {1, 2, 3} es la x
Codominio = {0, **4**, 6, **8**, 10, **12**}
Recorrido = {4, 8, 12}

Como a cada elemento de A le corresponde un único elemento de Y, la relación de dependencia es una función (función de A en B).

Aquí debemos recordar que toda función es una **relación**, pero no todas las relaciones son funciones.

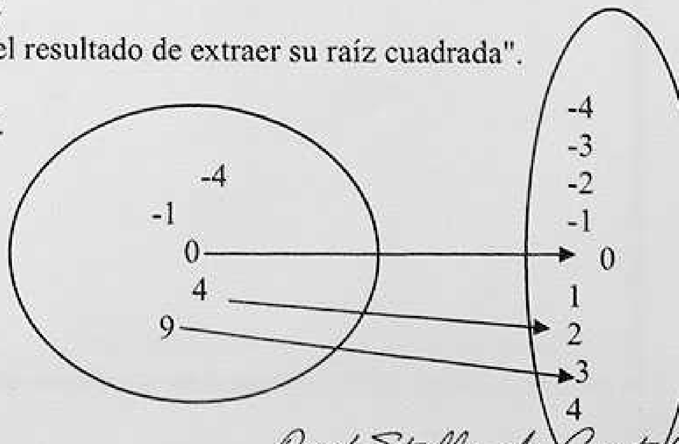
Ejemplos: Si tenemos los conjuntos
$A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Podemos establecer las relaciones
$f = \{ (1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 5) \}$
$g = \{ (1; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 5) \}$
$h = \{ (1; 1); (2; 2); (3; 3) \}$:

Sólo *f* es una función (todos los elementos de A tiene su correspondiente elemento en B);
g no es función ya que (1; 2) y (1; 3) repiten un elemento del dominio (el 1).
h no es una función ya que $Dom(h) = \{1; 2; 3\} \neq A$ (falta el 4).

Ejemplo 4
Sea X = {−4, −1, 0, 4, 9}, Y = {−4,−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}
la regla de correspondencia es " asignar a cada elemento de X el resultado de extraer su raíz cuadrada".

Vamos a determinar si esta regla constituye función de X en Y.

Los números 0, 4, 9 tienen imagen en Y
($\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$)
pero a −4 y −1 no les corresponden elementos en Y.
Como existen elementos de X que no se corresponden con elementos de Y, **esta relación no es función** de X en Y.



Prof. Stella de Castelle

Repartido Teórico de Introducción

RELACIONES

Definición de Relación

El concepto de relación surge de manera natural en el análisis de un sistema. Un ejemplo, en los números Naturales se establece la relación "... es menor que ...".

Bajo esta relación R el número 2 se relaciona con el 3: 2 es menor que 3, pero no así al contrario (3 no es menor que 2).

Una *relación es binaria* cuando se establece entre dos objetos. Un ejemplo: R: $x < y$.

Una relación *es un conjunto de pares ordenados. Un par ordenado* (también llamada pareja ordenada) consta de dos elementos: (a, b) en donde el orden en que aparece (primero a, después b) indica la relación: aRb de a con b. Una relación asocia un elemento de un conjunto A con un elemento de otro conjunto B o con un elemento del mismo conjunto A

Ejemplos:

* Para A= {a, b, c} *R1= {(a, a) (a, b) (a, c) (b, a) (b, b) (b, c) (c, a) (c, b) (c, c)}* $\Rightarrow R1 = A \times A$

* Para A = {España, Inglaterra, Italia} B= {Paris, Roma, Madrid} *R2: (España, Paris) (Inglaterra, Roma) (Italia, Madrid)*

R3: (Pepe, María) (Pepe, Laura) (Pepe, Tere)

Producto cartesiano

Considere dos conjuntos arbitrarios A y B. El conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) en donde $a \in A$ y $b \in B$ se llama producto o producto cartesiano de A y B. La definición de producto cartesiano puede extenderse fácilmente al caso de más de dos conjuntos. Se llama producto cartesiano de dos conjuntos A y B y se representa A x B, al conjunto de pares ordenados (a, b), tales primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto. Es decir:

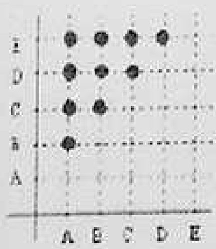
$A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$

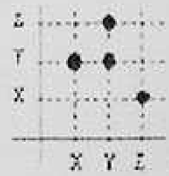
El producto cartesiano, en general, no es conmutativo. Es decir: $A \times B \neq B \times A$.

Representaciones gráficas de relaciones

Gráfica de relaciones no numéricas

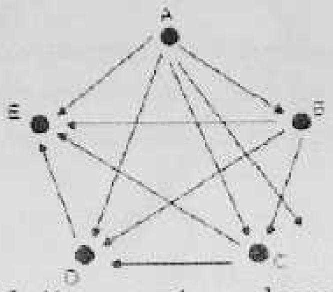
También llamadas ejes cartesianos



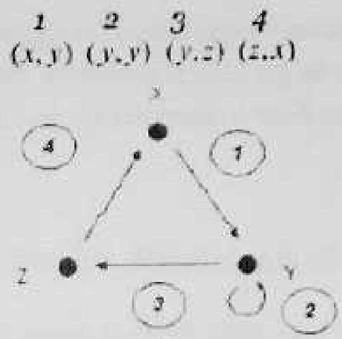


Repartido Teórico de Introducción

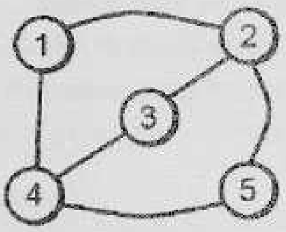
Grafo



Relación: ...es más grande que...

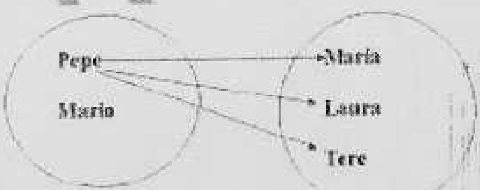


Matrices



M	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

Diagrama de flechas



Por extensión

R3: ... es más grande que ... (A, B) (B, C) (C, D) (D, E), (A, C) (B, D) (C, E), (A, D)(B, E) (A, E)

Propiedades de Relaciones

Repartido Teórico de Introducción

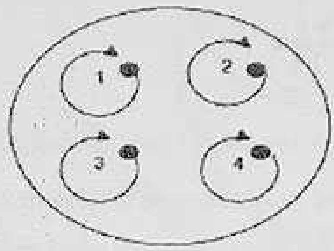
Las principales propiedades que puede presentar una relación binaria R definida en un conjunto A se indican en los siguientes ejemplos.

1. **Reflexiva.** Cada elemento tiene un bucle.

   Ejemplo:

   Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación "ser igual que", se tiene:

   $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$



2. **Anterreflexiva.** Ningún elemento tiene un bucle.

   Ejemplo:

   Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación "ser menor que", se tiene:

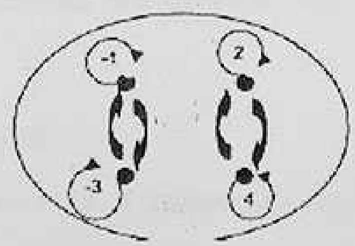
   R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

3. **Simétrica.** Cada flecha de ida tiene otra de vuelta.

   Ejemplo:

   Si A = {-1, 2, -3, 4} y R es tal que $\forall\, a, b \in A,\ a\ R\ b \Leftrightarrow a \cdot b > 0$, se tiene:

   R = {(-1, -1), (-1, -3), (2, 2), (2, 4), (-3, -1), (-3, -3), (4, 2), (4, 4)}



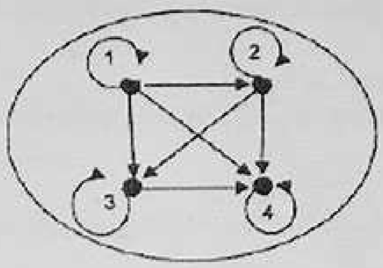
Repartido Teórico de Introducción

4. **Antisimétrica** Ninguna flecha de ida tiene otra de vuelta, salvo en el caso de los bucles, que están permitidos.

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación "ser menor o igual que", se tiene:

R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

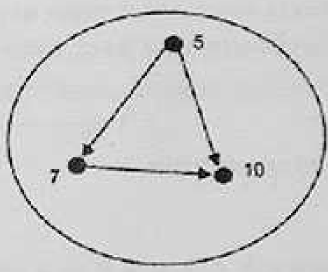


5. **Asimétrica** Ninguna flecha de ida tiene otra de vuelta, y no están permitidos los bucles.

Ejemplo:

Si A = {5, 7, 10} y *R* es la relación "ser menor que", se tiene:

R = {(5, 7), (5, 10), (7, 10)}



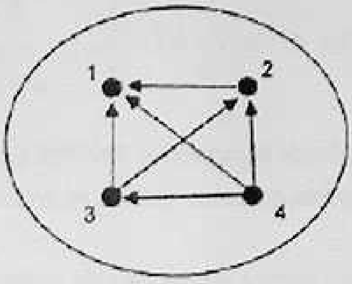
Repartido Teórico de Introducción

6. **Transitiva.** Siempre que haya dos flechas consecutivas, debe haber otra que una el primer elemento con el tercero.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R es la relación "ser mayor que", se tiene:

$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$



Relación de equivalencia

Una relación binaria R es una relación de equivalencia definida en un conjunto A, si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Así, en el plano euclídeo considerando el conjunto de todas las rectas, la relación R "ser paralela a" es una relación de equivalencia. Comprobémoslo:

a) Reflexiva: $a \parallel a$, puesto que cualquier recta es paralela a sí misma.

b) Simétrica: si $a \parallel b$, entonces $b \parallel a$.

c) Transitiva: si $a \parallel b$ y $b \parallel c$, entonces $a \parallel c$.

Luego por cumplir las tres propiedades anteriores es una relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Dada una relación de equivalencia R definida en un conjunto A, si $a \in A$ se llama clase de equivalencia de a y se denota por $[\, a \,]$, al subconjunto formado por todos los elementos de A relacionados con a por la relación de equivalencia R.

$[\, a \,] = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x\, R\, a\}$

Propiedades de las clases de equivalencia

a) Ninguna clase equivalencia es vacia. Porque a cualquier clase [a] pertenece al menos el elemento a. Simbólicamente:
$\forall [\, a \,] \subset A, a \in A \Rightarrow a \in [\, a \,]$
b) Las clases de equivalencias son disjuntas de dos a dos. Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos dos clases no disjuntas y diferentes $[\, a \,]$ y $[\, b \,]$, con lo que:

$$[a]\cap[b]\neq\varnothing\Rightarrow\exists x\in[a]\cap[b]\begin{cases} x\in[a] & xRa \overset{(1)}{\Leftrightarrow} aRx \quad {}^{(2)} \\ & \Rightarrow \qquad \Rightarrow \qquad \Rightarrow aRb\Rightarrow[a]=[b] \\ x\in[b] & xRb \qquad xRb \end{cases}$$

Donde en (1) hemos aplicado la propiedad simétrica y en (2) la propiedad transitiva, ya que es una relación de equivalencia. Y hemos llegado a que ambas clases son iguales, en contra de la hipótesis. Luego han de ser [a] y [b] disjuntas, con [a] ≠ [b]

c) Todo elemento de A pertenece a alguna clase de equivalencia. Esto es porque todo elemento de x de A pertenece al menos a su propia clase. Simbólicamente:

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in[a]$$

d) La unión de todas las clases de equivalencia en un conjunto A es el propio conjunto A: clase1 U clase2 U... U clase n = A

Una relación de equivalencia clasifica al conjunto en el que está definida, en clases de equivalencia.

Práctico a realizar en el mes de Septiembre

1) De un conjunto de 40 alumnos, 18 estudian Inglés, 7 estudian Inglés y Computación y 8 no estudian ni Inglés ni Computación. ¿Cuántos estudian inglés solamente? ¿Cuántos estudian computación solamente?

2) De 100 personas que visitaron la ciudad, 55 un museo, 44 el zoológico y 20 ambas instalaciones. ¿Cuántas personas no visitaron ni el zoo ni el museo?

3) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\varnothing \subseteq \varnothing$
b) $\varnothing \in \varnothing$
c) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
d) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
e) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$
f) $\{\varnothing\} \in \varnothing$
g) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
h) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
i) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c, \{a,b,c\} \}$
j) $\{a,b\} \in \{a,b,c, \{a,b,c\} \}$
k) $\{a,b\} \subseteq \{a,b, \{a,b\} \}$
l) $\{a,b\} \in \{ a,b, \{ \{ a,b \} \} \}$

4) Siendo $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A= \{x/x \in N \wedge 5<= x <=10\}$

$B= \{x/x \in N \wedge 1<= x <=5\}$

Hallar:

a) $(A\cup A) - (B\cap B) =$
b) $(B\cap A)\ \Delta\ (B\cap A) =$

5)

a) Definir Producto Cartesiano. Dar un ejemplo.

b) Definir Relación . Dar un ejemplo. Que difernecia tiene con el Producto Cartesiano?

c) Dado el Producto Cartesiano $A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\}$ construir una Relación R1 conformada por todos los pares que cumplen con que el segundo componente es dos unidades mayor que el primer componente, dicho de otro modo, $R1 = \{(x, y) / y = x + 2\}$

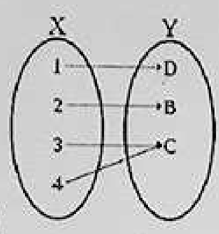
d) Dados: $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{x,y\}$ realizar $(AxB) \cap A$

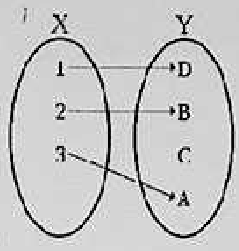
e) Dados los conjuntos anteriores, realizar: (AxB) U A

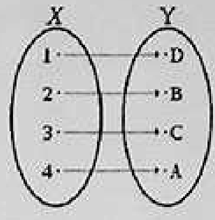
f) Definir Función.
¿Es inyectiva esta función: $f(x) = x^2$ del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$?
¿Es inyectiva la función anterior si es del dominio de los enteros Z?

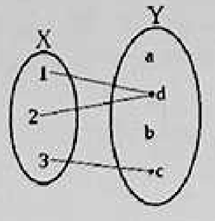
Prof. Stella de Castellet

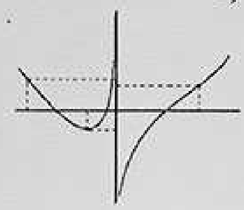
6) Investiga si los siguientes diagramas corresponden a funciones. Para el caso que lo sean escribe los pares ordenados (por extensión), indica dominio y codominio .
Para los casos que sean funciones, clasifícalas (inyectiva, sobreyectiva y biyectiva).

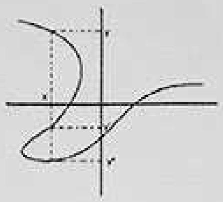
a) 

b) 

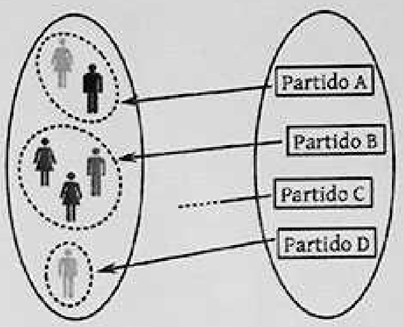
c) 

d) 

e) 

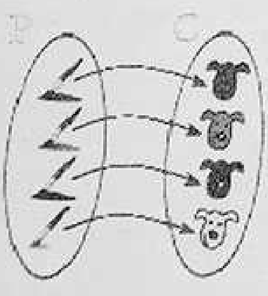
f) 

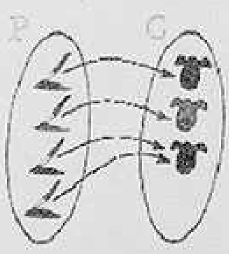
7) Como describirían la imagen inversa usando este diagrama:

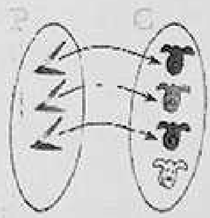


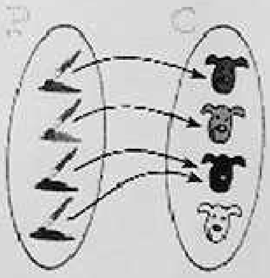
8) Clasificar estas funciones y colocar su número dentro del casillero que le corresponde.

Funciones	Inyectiva	No inyectiva
Sobreyectiva	(biyectiva)	
No sobreyectiva		

1) 

2) 

3) 

4) 

Prof. Stella de Castellet