UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA SELVA

CARRERA: Ingeniería en Desarrollo y Gestión de Software

NOMBRE DE LA ASIGNATURA: Matemáticas para ingeniería I

UNIDAD TEMÁTICA: II.- DERIVADAS PARCIALES

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN: TEÓRICA

INTEGRANTES DEL EQUIPO:

Matrícula	Nombre	Correo
091910039	Leonardo Antonio Guillén Navarro	guillennavarroleonardoantonio@gmail.com

GRADO: 7° **GRUPO:** “A”

NOMBRE DEL PROFESOR: Fernando E. Constantino González

FECHA DE ENTREGA: 08/10/2021

La derivada Parcial.

La derivada Parcial de una función de varias Variables es la derivada con respecto a Cada una de esas variables manteniendo las otras como constantes. Las derivadas parciales son usadas en calculo vectorial y geometría diferencial.

La derivada parcial de una función $f(x, y...)$ con respecto a la variable x se puede denotar en distintas manera:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} f, D_1 f, \partial_x f, f'_x \text{ o } f_x$$

Donde ∂ es la letra 'd' redondeada, conocida como la 'd de Jacobi'. Tambien se Puede representar como $D_1 f(x_1, x_2, ..., x_n)$ que es la primera derivada respecto a la variable x_1 y asi Sucesivamente.

Ejemplo

Para la función $f(x, y) = 6x^2 + 5x^3y^4 - 10y^5$

determinar las primeras y segundas Derivadas Parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 12x + 5y^4 3x^2 - 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 + 5x^3 4y^3 - 50y^4$$

1.1 $\boxed{f_x = 12x + 15x^2y^4}$ $\qquad$ $\boxed{f_y = 20x^3y^3 - 50y^4}$ 2.1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} = 12 + 15y^4 2x$$

1.2 $\boxed{f_{xx} = 12 + 30xy^4}$

1.3

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = 0 + 15x^2 4y^3 = f_{xy} = \boxed{60x^2y^3}$$

$f_x = 12x + 15x^2y^4$ $f_{xx} = 12 + 30xy^4$ $f_{xy} = 60x^2y^3$

$f_y = 20x^3y^3 - 50y^4$ $f_{yx} = 60x^2y^3$ $f_{yy} = 60x^3y^2 - 200y^2$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = 20y^3 3x^2 - 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y^2} = f_{yy} = 20x^3 3y^2 - 200y^3$$

Vector gradiente.

se llama gradiente en un punto de una función real de varias variables reales al conjunto ordenado de las derivadas parciales de esa función en ese punto

Por tanto, el gradiente de una función $f(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}, \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}, \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}\right)$$

Derivada direccional

Cada vector del espacio ordinario tiene un módulo y una dirección. Cuando se fija un vector $dr = (dx, dy, dz) = dxi, dyj, dzk$ dando valores concretos a dx, dy, dz, se fija su módulo y dirección. Cada valor de la diferencial de la función f en un punto (x, y, z) es el producto escalar de su gradiente en ese punto por un vector dr, es decir,

$$\nabla f \cdot d_r = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df.$$

Ejemplo

Sea $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2}$

a) Encontrar el vector gradiante de f en el punto $P(4,-3)$
b) Calcular la derivada direccional de F en la dirección del vector de punto $P(4,-3)$ al punto $Q(1,0)$

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f_x(P) = \frac{4}{5}$

$f_y(P) = \frac{-3}{5}$

$f_x(P) = \frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(0+2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Vector Gradiante.

$f_y(P) = \frac{3}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{-3}{5}$

$\vec{\nabla} f(P) = \langle f_x(P), f_y(P) \rangle$

$\vec{\nabla} f(P) = \langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \rangle = \frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}$

$\vec{PQ} = Q(1,0) - P(4,-3)$

$\vec{PQ} = \langle -3 \;\; 3 \rangle$

$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(-3)^2+(3)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 9} = 3\sqrt{2}$

Duf = derivada de la dirección de la función

$\vec{U} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{\langle -3, 3 \rangle}{3\sqrt{2}} = \vec{U}\langle \frac{-3}{3\sqrt{2}}, \frac{3}{3\sqrt{2}} \rangle = \langle \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

Derivada Direccional.

$D_U f = \vec{\nabla f}(P) \cdot \vec{U}$

$= \langle \frac{4}{5}, \frac{-3}{5} \rangle \cdot \langle \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$D_U f = \frac{-4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{-7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-7\sqrt{2}}{10}$

$D_U f = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$

Características del vector gradiente.

El gradiente verifica que:

- $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
- $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$, Con estas dos propiedades, el gradiente es un operador lineal
- Es ortogonal a las superficies equiescalares definidas por $\phi = cte.$
- Apunta en la dirección en que la derivada direccional es máxima.
- Su norma es igual a esta derivada direccional máxima.
- Se anula en los puntos estacionarios (máximos, mínimos y puntos de silla).
- El campo formado por el gradiente en cada punto es siempre irrotacional, esto es, $\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$

Valores críticos (funciones multivariable)

Los puntos críticos son aquellos en los que las derivadas parciales valen cero, o al menos una de ellas no existe.

Ejemplo:

Hallar los puntos críticos de la siguiente ecuación

$$f(x,y) = xy - x^3 - y^2$$

Calculamos las derivadas parciales de F y las igualamos a cero, tal como lo hacíamos con las funciones de 1 variable. La diferencia es que ahora tenemos varias derivadas parciales.

Entonces para que un punto sea crítico, al menos una de ellas no debe existir, o todas deben ser cero.

Y así obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 3x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 2y = 0 \end{cases}$$

Por último, debemos resolver el sistema y hallar el (los) punto(s) crítico(s)

Resolviendo el sistema tenemos, a partir de la segunda ecuación:

$$x = 2y$$

Sustituyendo en la primera, tenemos:

$$y = 12y^2$$

$$y = 0 \text{ o } y = \frac{1}{12}$$

Si $y = 0$, entonces $x = 0$. y si $y = \frac{1}{12}$, entonces $x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
Por tanto, f tiene 2 puntos críticos, los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$

Ejemplo 2:

$$f(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$$

Derivadas parciales.

$f_x = 28x - 6x^2 + 4y$

$f_y = 4y + 4x$

$f_{xx} = 28 - 12x$

$f_{yy} = 4 \quad f_{xy} = 4 \quad f_{yx} =$

Puntos críticos.

$f_x = 0 \qquad f_y = 0$

$28x - 6x^2 + 4y = 0 \qquad 4y + 4x = 0$

$\div 2 \qquad 4y = -4x$

$14x - 3x^2 + 2y = 0 \; 1 \qquad y = -x \; 2$

2 en 1.

$14x - 3x^2 - 2(-x) = 0$

$14x - 3x^2 - 2x = 0$

$12x - 3x^2 = 0.$

$3x(4x - x) = 0$

$3x = 0 \quad \vee \quad 4 - x = 0$

$x = 0 \qquad x = 4$

$Pc_1 (0,0) \rightarrow f_{xx} = 28 - 12x \quad f_{yy} = 4 \quad D = 96 - 48x$

$Pc_2 (4, -4). \quad f_{xx} = 28 \quad f_{yy} = 4 \quad D = 96$

Discriminante: D $\quad f_{xx} = -20 \quad f_{yy} = 4 \quad D = -96.$

$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$

$D = (28 - 12x) \cdot 4 - (4)^2$

$D = 112 - 48x - 16$

$D = 96 - 48x.$

$Pc_1 = (0,0,0) \qquad z = f(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$

$Pc_2 = (4, -4, -64)$

Máximos y mínimos (funciones multivariable).

Los máximos y mínimos de una función, conocidos colectivamente como extremos de una función, son los valores mas grandes (máximos) o mas pequeños (mínimos), que toma una función en un punto situado ya sea dentro de una región en particular de la curva (extremo local o relativo) o en el dominio de la función en su totalidad (extremo global o absoluto). De mas general, los máximos y mínimos de un conjunto (como se define en teorías de conjuntos) son los elementos mayor y menor en el conjunto, cuando existen.

Ejemplo.

Punto de silla. ps. min. max.

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15 - 12y$ $P_1(1,2)$ $P_2(-1,2)$ $P_3(2,1)$, $P_4(-2,-1)$

① f_x, f_y

$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$ $f_y = 6xy - 12$.

② $f_x = 0$, $f_y = 0$ $6xy = 12$

$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$ $xy = \frac{12}{6}$

$x^2 + y^2 - 5 = 0$

$x^2 + y^2 = 5$ $xy = 2$ $y = \frac{2}{x}$

$$\left[\begin{matrix} x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \\ x^2 + \left(\frac{4}{x^2}\right) = 5 \end{matrix}\right] x^2 \quad x^4 + \frac{4x^2}{x^2} = 5 = x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \qquad \boxed{\begin{matrix} x^2 = 1 & x = \pm 1 \\ x^2 = 4 & x = \pm 2 \end{matrix}}$$

$y = \frac{2}{x}$

$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$

$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$, $f_{xx} = 6x$

$f_y = 6xy - 12 \Rightarrow f_{yy} = 6x$

$f_{xy} = 6y$

$F_{xx} = 6x$

$F_{yy} = 6x$

$F_{xy} = 6y$.

$D(1,2) = 6(1) \cdot 6(1) - [6(2)]^2$

$= 6 \cdot 6 - 144 = 36 - 144 = - < 0$

$D(-1,2) = 6(-1) \cdot 6(-1) - [6\overset{-12}{(2)}]^2$

$= (-6)(-6) - 144 = 36 - 144 = - < 0$

$f_{xx}(x,y) > 0 \rightarrow$ mínimo

" $< 0 \rightarrow$ máximo.

$D(2,1) = 6(2) \cdot 6(2) - [6(1)]^2$

$= 12 \cdot 12 - 36 = 144 - 36 = + > 0$

Referencias Bibliográficas.

- Romero, S., Moreno, F. J. & Rodríguez, I. M (2001) Introducción a las ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's) Universidad de huelva, 4
- Colaboradores de los Proyectos wikimedia (2003, 24 de diciembre). Derivada parcial - Wikipedia, la enciclopedia libre. Wikipedia la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_Parcial#Definición
- Julioprofenet (2012, 11 de febrero). DerivadasParciales [video] YouTube: https://www.youtube.com
- Redondo Melchor, R, C. (2013, 28 de enero). Conceptos de gradiente y de derivada direccional. electricidad.usal.es: https://electricidad.usal.es/principal/circuitos/comentarios/temas/Conceptogradiente.pdf
- Julioprofenet (2012, 25 abril) vector gradiente y derivada direccional [video] YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=Unbi1S7x6Qg
- Julioprofenet (2012, 26 de julio) puntos críticos en una función de dos variables - Ejercicio 1 - [video] Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=dVBwSsob7h8