IN700 - Matemáticas para Economistas

Leonel Huerta
Piero Zanocco

Febrero, 2023

Índice general

Capítulo 1

Introducción al cálculo y al álgebra

1.1. Lógica

1.1.1. Elementos preliminares

La lógica le proporciona a las matemáticas un lenguaje claro y un método preciso para demostrar nuevas afirmaciones a partir de otras ya establecidas o dadas. A las afirmaciones previamente aceptadas las denominamos **Axiomas**. A aquellas que se construyen mediante la lógica las denominamos **Teoremas**.
Referencia: Apunte Introducción al Álgebra, semanas 1 y 2.

Definición 1.1. *Una* ***proposición lógica*** *es una afirmación que siempre toma uno de los dos valores de verdad posibles: verdadero (V) o falso (F).*

Ejemplo 1.1. Son proposiciones lógicas:

- $2 + 1 = 5$.
- $1 \geq 0$.
- Hoy está lloviendo.
- Todo juego en forma normal admite al menos un Equilibrio de Nash.
- Un monopolio perfectamente discriminador extrae todo el excedente del consumidor.

Los conectivos lógicos permiten crear nuevas proposiciones a partir de otras ya conocidas. El valor de verdad de la nueva proposición dependerá de los valores de verdad de sus componentes.

Definición 1.2. ***(Negación)*** *Sea p una proposición lógica. La proposición $\overline{p}$ (también denotada $\sim p$) se lee "no p" y es aquella cuyo valor de verdad siempre es distinto al de p.*

Definición 1.3. ***(O lógico)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \vee q$ se lee "p o q" y es verdadera cuando al menos una de las proposiciones p o q es verdadera.*

Definición 1.4. ***(Y lógico)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \wedge q$ se lee "p y q" y es verdadera cuando tanto p y q son verdaderas.*

Definición 1.5. ***(Implicancia)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \Rightarrow q$ se lee "p implica q" o "si p, entonces q". Es falsa solo cuando p es verdadera y q es falsa. En cualquier otro caso, es verdadera.*
*A p se le llama la **hipótesis** y a q la **conclusión** de la proposición $p \Rightarrow q$.*

Definición 1.6. ***(Equivalencia)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \Leftrightarrow q$ se lee "p es equivalente a q" o "p si y solo si q". Es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad y falsa cuando estos valores difieren.*

Ejemplo 1.2. Algunos ejemplos de las definiciones anteriores son:

- La negación de la proposición "estoy poniendo atención" es "no estoy poniendo atención".
- La proposición lógica "mañana lloverá o mañana no lloverá" es verdadera.
- La proposición lógica "mañana lloverá y mañana no lloverá" es falsa.
- La proposición lógica "si estoy en Santiago, entonces estoy en Chile" es verdadera.
- Si a y b son números reales, la proposición $a \geq b \iff 2a \geq 2b$ es verdadera.

Definición 1.7. *Una **tautología** es una proposición que, sin importar el valor de verdad de las proposiciones que la constituyen, es siempre verdadera.*
*Un argumento que permite saber que una proposición es una tautología se llama una **demostración**.*

Proposición 1.1. *Son tautologías:*

- $p \vee V \iff V, \quad p \wedge F \iff F.$
- $p \wedge V \iff p, \quad p \vee F \iff p.$
- $p \wedge p \iff p, \quad p \vee p \iff p.$

- $\sim(\sim p) \iff p$.
- $p \vee \sim p \iff V$.
- $p \wedge \sim p \iff F$.
- $(p \Rightarrow q) \iff \sim p \vee q$.

Proposición 1.2. *Las siguientes son tautologías:*

- *Leyes de Morgan:*
$$\overline{p \wedge q} \iff \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \iff \overline{p} \wedge \overline{q}$$
- *Conmutatividad:*
$$p \vee q \iff q \vee p, \quad p \wedge q \iff q \wedge p$$
- *Transitividad:*
$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$
$$[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \Rightarrow (p \iff r)$$
- *Equivalencia dividida:*
$$(p \iff q) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$
- *Demostración por casos:*
$$(p \vee q \Rightarrow r) \iff (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$
- *Demostración por contradicción:*
$$(p \Rightarrow q) \iff (p \wedge \sim q \Rightarrow F)$$
- *Contrarrecíproca:*
$$(p \Rightarrow q) \iff (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Ejemplo 1.3. Sabemos que a es un número racional si puede escribirse como $a = m/n$ con m y n números enteros y $n \neq 0$.
Veamos que:
$$3a \text{ no es racional} \Rightarrow a \text{ no es racional}$$
Por contrarrecíproca, sabemos que lo anterior es equivalente a probar que:
$$a \text{ es racional } \Rightarrow 3a \text{ es racional}$$
Veamos que esto último es cierto:

- Supongamos que a es racional (recordar que $p \Rightarrow q$ es falso solo cuando p es verdadero y q es falso).
- Luego, $a = m/n$ con m y n enteros con $n \neq 0$.
- Por lo tanto, $3a = 3m/n$.
- Y como $3a = m'/n$ con m' y n enteros con $n \neq 0$, se concluye que $3a$ es un número racional. $\blacksquare$

Ejemplo 1.4. Mostraremos que si el producto de dos números a y b es $1/3$, entonces ambos son racionales o ninguno lo es.
Razonando por contradicción, supongamos que:

$$a \cdot b = 1/3$$

Y que a es racional, pero b no lo es (notar que esto es **sin pérdida de generalidad**).
Como a es racional, entonces existen m, n números enteros con $n \neq 0$ tales que:

$$a = m/n$$

Entonces:

$$\frac{m}{n} \cdot b = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{n}{3m}$$

Pero esto significa que b es un número racional (n, $3m$ enteros con $3m \neq 0$), lo que es una contradicción y con lo que se concluye lo pedido. $\blacksquare$
¿Porqué $3m \neq 0$?

1.1.2. Cuantificadores proposicionales

La lógica proposicional que hemos visto nos permite hacer deducciones y construir propiedades. Más aún, nos permite deducir que si $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ es una proposición verdadera, entonces debe ocurrir que $p_1, p_2, ..., p_n$ son proposiciones verdaderas. Notar que la afirmación anterior es una tautología. ¿Cuál es la demostración? Sin embargo, no tenemos el lenguaje matemático para explicitar que todas las proposiciones p_i son verdaderas.

Definición 1.8. *Una **función proposicional (o predicado)** $P(x, y, z, ...)$ es una expresión que depende de cero o más variables $x, y, z, ...$ que al ser reemplazadas por elementos de un conjunto de referencia E hacen que P se transforme en una proposición lógica. Es decir, que sea verdadera o falsa.*

Ejemplo 1.5. Algunos ejemplos de funciones proposicionales son:

- $P(x)$: “x es futbolista” es un predicado sobre el conjunto de referencia de personas. Notar que P(Christiane Endler) es verdadera y que P(Nicolás Massu) es falsa.
- $P(a, b, c) : 2a + b \geq c$ es un predicado sobre el conjunto de números reales.

Definición 1.9. ***(Cuantificador universal)*** *La expresión $\forall x \in E, P(x)$, que se lee “para todo x en E, $p(x)$” es una proposición verdadera si al reemplazar x por cualquier elemento de E se verifica que $P(x)$ es verdadera.*

Definición 1.10. ***(Cuantificador existencial)*** *La expresión $\exists x \in E, P(x)$, que se lee “existe x en E tal que $P(x)$”, es una proposición que es verdadera si y solo si $\forall x \in E, \sim P(x)$ es falsa.*
En otras palabras, $\exists x \in E, P(x)$ será verdadera si es que algún elemento e de E hace que $P(e)$ sea verdadera.

Definición 1.11. ***(Existencia y Unicidad)*** *La expresión $\exists! x \in E, P(x)$ que se lee “existe un único x en E tal que $P(x)$”, es una proposición que es verdadera si y solo si existe un e en E tal que $P(e)$ es verdadera y para todo $x \neq e$, $P(x)$ es falsa.*

Proposición 1.3. *Sea $P(x, y)$ un predicado con conjunto de referencia E. Se cumplen las siguientes tautologías:*

- $\forall x \in E, \forall y \in E, P(x, y) \iff \forall y \in E, \forall x \in E, P(x, y).$
- $\exists x \in E, \exists y \in E, P(x, y) \iff \exists y \in E, \exists x \in E, P(x, y)$
- $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y) \implies \forall y \in E, \exists x \in E, P(x, y).$

Nota 1.1. *Notar que:*

- *Las afirmaciones de la proposición anterior son válidas para cualquier predicado P!*
- *La recíproca de la última implicancia no es cierta: basta tomar $E = \mathbb{N}$ y $P(x, y) : x > y$ para tener el contraejemplo.*

1.2. Conjuntos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

1.3. Teoría de funciones

1.4. Límites y derivadas

1.5. Matrices y álgebra lineal

1.6. Problemas Resueltos

1.7. Problemas Propuestos

1.7.1. Tarea 1 - Otoño 2021

Problema 1. Lógica.

(a) **(0.3 pts.)** ¿Es verdadera o falsa la siguiente proposición? Justifique su respuesta.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$$

(b) **(0.3 pts.)** Sean p, q y r proposiciones lógicas. Pruebe que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Longrightarrow \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge r] \Longrightarrow \sim p$$

(c) **(0.4 pts.)** Muestre que la proposición:

$$\forall x, \exists y \text{ tal que } p(x) \Rightarrow p(y)$$

Es verdadera para cada predicado p.

Problema 2. Conjuntos.

(a) **(0.4 pts.)** Dados dos conjuntos A y B se define la **diferencia simétrica**, que denotamos $A \triangle B$, como el conjunto de los elementos que están en B, pero no están en A, o están en A, pero no en B. Más formalmente:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Sean A y B dos conjuntos tales que $A \cap B \neq \phi$. Muestre que:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

(b) **(0.3 pts.)** Sean A, B conjuntos no vacíos. Muestre que:

$$A \cap B = \phi \quad \Longrightarrow \quad A \cup B^c = B^c$$

(c) **(0.3 pts.)** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $x \in A$ es el **mínimo** de, que denotamos $\text{mín}(A) = x$ si y solo si $\forall y \in A \ x \leq y$. Muestre que el mínimo de A es único.

Problema 3. Funciones.

(a) **(0.3 pts.)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Pruebe que si la composición $g \circ f$ es una función sobreyectiva, entonces g también lo es. Construya además un contraejemplo que muestre que f no necesariamente es sobreyectiva.

(b) **(0.3 pts.)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Muestre que si f y g son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

(c) Sean A, B conjuntos no vacíos. Considere la función $\psi : A \times B \to A$ definida por:

$$\psi(a, b) = a$$

a) **(0.2 pts.)** Demuestre que ψ es sobreyectiva.

b) **(0.2 pts.)** ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto B la función ψ resulta inyectiva? Justifique su respuesta.

Problema 4. Límites.

(a) Calcule los límites de las siguientes sucesiones:

a) **(0.2 pts.)** (a_n) definida por:

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n - n}$$

b) **(0.2 pts.)** (b_n) definida por:

$$b_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 + n}$$

Podría ser útil recordar que:

$$\forall x > 1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(b) **(0.2 pts.)** Decimos que una sucesión (s_n) es una **sucesión acotada** si $\exists M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$|s_n| < M$$

Sea (u_n) una sucesión convergente. Muestre que (u_n) es una sucesión acotada.

Indicación: Note que para cualquier conjunto finito de números reales $\{p_i\}_{i=1}^n$, existe una constante M_p tal que $|p_i| < M_p, \forall i = 1, ..., n$.

(c) **(0.2 pts.)** Estudie el límite cuando x tiende a 0 de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Indicación: Analice los límites laterales.

(d) **(0.2 pts.)** Demuestre, usando la definición de límite de funciones, que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Problema 5. Derivadas.

(a) **(0.2 pts.)** Utilizando la definición de la derivada, pruebe que dadas $f, g : A \to B$, se tiene que:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

(b) Derive las siguientes funciones de variable real a valores reales:

a) **(0.2 pts.)** $f(x) = x^3 - 2xcos(x) + 2 - x^2sen(x)$.

b) **(0.2 pts.)** $g(x) = x^2ln(x) + e^{4sen(x)cos(x)}$.

(c) **(0.2 pts.)** Muestre que la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^x}$$

Viene dada por $f'(x) = -f(x)\ln(x)$.

(d) Considere un mercado con función de demanda inversa dada por:

$$P(q) = 100 - q$$

Y una firma con función de costos dada por:

$$C(q) = q^2 + 10q$$

a) **(0.1 pts.)** Suponga que cuando la firma se comporta de manera competitiva, la condición de equilibrio es que $P(q) = C'(q)$. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio. ¿Cuál es la utilidad de la firma?

b) **(0.1 pts.)** Caracterice el equilibrio considerando comportamiento monopólico por parte de la firma. Es decir, cuando ella resuelve:

$$\max_{q\geq 0} P(q)\cdot q - C(q)$$

Compare sus respuestas.

Problema 6. Matrices.

(a) **(0.2 pts.)** Sean $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in M_{nn}$, $A \in M_{np}$ y $B \in M_{mn}$. Demuestre que:

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{1\cdot} \\ \vdots \\ \lambda_n A_{n\cdot} \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{\cdot 1} & \cdots & \lambda_n B_{\cdot n} \end{pmatrix}$$

Recuerde que, dada una matriz $A \in M_{mn}$, $A_{i\cdot}$ denota su i-ésima fila y $A_{\cdot j}$ si j-ésima columna:

$$A_{i\cdot} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad A_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(b) Sea $\mathcal{H} = \{H = (h_{ij}) \in M_{nn} : h_{ij} = 0, \forall i > j+1\}$.

a) **(0.2 pts.)** Muestre que $\mathcal{H}$ es subespacio vectorial de M_{nn}.

b) **(0.2 pts.)** Demuestre que si $T \in M_{nn}$ es triangular superior, $H \in \mathcal{H}$, entonces $T \cdot H \in \mathcal{H}$.

(c) **(0.2 pts.)** Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$. Muestre que la matriz

$$A = I - 2uu^t$$

es invertible, con $A^{-1} = A$.

(d) **(0.2 pts.)** Sea la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & -1 & p \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine valores de k y p de modo que $(1,1,1)^t$ sea vector propio de A.

Capítulo 2

Elementos de análisis

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar

lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis

eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

2.1. Problemas Resueltos

2.2. Problemas Propuestos

2.2.1. Tarea 2 - Otoño 2021

Problema 1. Conjuntos convexos. (1 pto.) Sean $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la suma y la ponderación de conjuntos como sigue:

$$S_1 + S_2 = \{x + y : x \in S_1, y \in S_2\}$$

$$\alpha S_1 = \{\alpha x : x \in S_1\}$$

Muestre que $S_1 + S_2$ y αS_1 son conjuntos convexos.

Problema 2. Espacios Vectoriales Normados

(a) **(0.5 pts.)** Demuestre que en un espacio vectorial normado los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo, son el conjunto vacío y el espacio.

(b) **(0.5 pts.)** Considere el espacio vectorial l_1 de las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican "$\sum_{n\in\mathbb{N}} |s_n|$ es convergente". Pruebe que la función $||(s_n)_{n\in\mathbb{N}}||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |s_n|$ define una norma en l_1.

Problema 3. Espacios métricos. Sabemos que la desigualdad triangular es válida en un espacio métrico (X, d). Más formalmente, $\forall x, y, z \in X$ se tiene que:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Una pregunta que surge naturalmente es la siguiente ¿Qué condiciones deben satisfacer x, y, z para que la desigualdad se tenga con igualdad? Es decir, para que se satisfaga que:

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$$

Conteste esta interrogante para los siguientes espacios métricos:

(a) **(0.5 pts.)** $X = \mathbb{R}$ dotado de la métrica: $d(x, y) = |x - y|$.

(b) **(0.5 pts.)** $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la métrica: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

(c) **(0.5 pts.)** $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la métrica: $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Problema 4. Funciones de varias variables. (1 pto.) Sean f y g dos funciones cóncavas definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Muestre que si f es no decreciente, entonces $f \circ g$ es cóncava. ¿Es realmente necesario que f sea no decreciente?

Problema 5. Diferenciabilidad de funciones de varias variables. Determine el gradiente, la matriz Hessiana y la concavidad en el punto indicado para las siguientes funciones:

(a) **(0.5 pts.)** $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 - 2x_2$ en el punto $(1, -2)$.

(b) **(0.5 pts.)** $g(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ en el punto $(0, 4)$.

(c) **(0.5 pts.)** $h(x, y, z) = \ln(x^2 - yz - z^2)$ en el punto $(1, 1)$.

Capítulo 3

Optimización

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar

lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis

eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.
Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Capítulo 4

Extensiones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar

lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis

eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.
Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.