IN700 - Matemáticas para Economistas

Leonel Huerta
Piero Zanocco

Junio, 2023

Índice general

Capítulo 1

Elementos preliminares

1.1. Lógica

La lógica proporciona a las matemáticas un lenguaje claro y un método preciso para demostrar nuevas afirmaciones a partir de otras ya establecidas o dadas. A las afirmaciones previamente aceptadas las denominamos **Axiomas**, mientras que a aquellas que se construyen mediante la lógica las denominamos **Teoremas**.

1.1.1. Conectores lógicos

Definición 1.1. ***(Proposición lógica)*** *Una* ***proposición lógica*** *es una afirmación que siempre toma uno de los dos valores de verdad posibles: verdadero (V) o falso (F).*

Ejemplo 1.1. Son proposiciones lógicas:

- $2 + 1 = 5$.
- $1 \geq 0$.
- Hoy está lloviendo.
- Todo juego en forma normal admite al menos un Equilibrio de Nash.
- Un monopolio perfectamente discriminador extrae todo el excedente del consumidor.

Los conectivos lógicos permiten crear nuevas proposiciones a partir de otras ya conocidas. El valor de verdad de la nueva proposición dependerá de los valores de verdad de sus componentes.

Definición 1.2. ***(Negación)*** *Sea p una proposición lógica. La proposición $\overline{p}$ (también denotada $\sim p$) se lee "no p" y es aquella cuyo valor de verdad siempre es distinto al de p.*

Definición 1.3. ***(O lógico)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \vee q$ se lee "p o q" y es verdadera cuando al menos una de las proposiciones p o q es verdadera.*

Definición 1.4. ***(Y lógico)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \wedge q$ se lee "p y q" y es verdadera cuando tanto p y q son verdaderas.*

Definición 1.5. ***(Implicancia)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \Rightarrow q$ se lee "p implica q" o "si p, entonces q". Es falsa solo cuando p es verdadera y q es falsa. En cualquier otro caso, es verdadera.*
*A p se le llama la **hipótesis** y a q la **conclusión** de la proposición $p \Rightarrow q$.*

Definición 1.6. ***(Equivalencia)*** *Sean p y q proposiciones lógicas. La proposición $p \Leftrightarrow q$ se lee "p es equivalente a q" o "p si y solo si q". Es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad y falsa cuando estos valores difieren.*

Ejemplo 1.2. Algunos ejemplos de las definiciones anteriores son:

- La negación de la proposición "estoy poniendo atención" es "no estoy poniendo atención".
- La proposición lógica "mañana lloverá o mañana no lloverá" es verdadera.
- La proposición lógica "mañana lloverá y mañana no lloverá" es falsa.
- La proposición lógica "si estoy en Santiago, entonces estoy en Chile" es verdadera.
- Si a y b son números reales, la proposición $a \geq b \iff 2a \geq 2b$ es verdadera.

Definición 1.7. ***(Tautología)*** *Una **tautología** es una proposición que, sin importar el valor de verdad de las proposiciones que la constituyen, es siempre verdadera.*
*Un argumento que permite saber que una proposición es una tautología se llama una **demostración**.*

Proposición 1.1. *Son tautologías:*

- $p \vee V \iff V, \quad p \wedge F \iff F.$
- $p \wedge V \iff p, \quad p \vee F \iff p.$
- $p \wedge p \iff p, \quad p \vee p \iff p.$

- $\sim(\sim p) \iff p$.
- $p \vee \sim p \iff V$.
- $p \wedge \sim p \iff F$.
- $(p \Rightarrow q) \iff \sim p \vee q$.

Proposición 1.2. *Las siguientes son tautologías:*

- *Leyes de Morgan:*
$$\overline{p \wedge q} \iff \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \iff \overline{p} \wedge \overline{q}$$
- *Conmutatividad:*
$$p \vee q \iff q \vee p, \quad p \wedge q \iff q \wedge p$$
- *Transitividad:*
$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$
$$[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \Rightarrow (p \iff r)$$
- *Equivalencia dividida:*
$$(p \iff q) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$
- *Demostración por casos:*
$$(p \vee q \Rightarrow r) \iff (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$
- *Demostración por contradicción:*
$$(p \Rightarrow q) \iff (p \wedge \sim q \Rightarrow F)$$
- *Contrarrecíproca:*
$$(p \Rightarrow q) \iff (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Ejemplo 1.3. Sabemos que a es un número racional si puede escribirse como $a = m/n$ con m y n números enteros y $n \neq 0$.
Veamos que:
$$3a \text{ no es racional} \Rightarrow a \text{ no es racional}$$
Por contrarrecíproca, sabemos que lo anterior es equivalente a probar que:
$$a \text{ es racional } \Rightarrow 3a \text{ es racional}$$
Veamos que esto último es cierto:

- Supongamos que a es racional (recordar que $p \Rightarrow q$ es falso solo cuando p es verdadero y q es falso).
- Luego, $a = m/n$ con m y n enteros con $n \neq 0$.
- Por lo tanto, $3a = 3m/n$.
- Y como $3a = m'/n$ con m' y n enteros con $n \neq 0$, se concluye que $3a$ es un número racional. $\blacksquare$

Ejemplo 1.4. Mostraremos que si el producto de dos números a y b es $1/3$, entonces ambos son racionales o ninguno lo es.
Razonando por contradicción, supongamos que:

$$a \cdot b = 1/3$$

Y que a es racional, pero b no lo es (notar que esto es **sin pérdida de generalidad**).
Como a es racional, entonces existen m, n números enteros con $n \neq 0$ tales que:

$$a = m/n$$

Entonces:

$$\frac{m}{n} \cdot b = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{n}{3m}$$

Pero esto significa que b es un número racional (n, $3m$ enteros con $3m \neq 0$), lo que es una contradicción y con lo que se concluye lo pedido. $\blacksquare$
¿Porqué $3m \neq 0$?

1.1.2. Cuantificadores proposicionales

La lógica proposicional que hemos visto nos permite hacer deducciones y construir propiedades. Más aún, nos permite deducir que si $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ es una proposición verdadera, entonces debe ocurrir que $p_1, p_2, ..., p_n$ son proposiciones verdaderas. Notar que la afirmación anterior es una tautología. ¿Cuál es la demostración? Sin embargo, no tenemos el lenguaje matemático para explicitar que todas las proposiciones p_i son verdaderas.

Definición 1.8. *Una **función proposicional (o predicado)** $P(x, y, z, ...)$ es una expresión que depende de cero o más variables $x, y, z, ...$ que al ser reemplazadas por elementos de un conjunto de referencia E hacen que P se transforme en una proposición lógica. Es decir, que sea verdadera o falsa.*

Ejemplo 1.5. Algunos ejemplos de funciones proposicionales son:

- $P(x)$: "x es futbolista" es un predicado sobre el conjunto de referencia de personas. Notar que P(Christiane Endler) es verdadera y que P(Nicolás Massu) es falsa.
- $P(a,b,c) : 2a+b \geq c$ es un predicado sobre el conjunto de números reales.

Definición 1.9. ***(Cuantificador universal)*** *La expresión $\forall x \in E, P(x)$, que se lee "para todo x en E, $p(x)$" es una proposición verdadera si al reemplazar x por cualquier elemento de E se verifica que $P(x)$ es verdadera.*

Definición 1.10. ***(Cuantificador existencial)*** *La expresión $\exists x \in E, P(x)$, que se lee "existe x en E tal que $P(x)$", es una proposición que es verdadera si y solo si $\forall x \in E, \sim P(x)$ es falsa.*
En otras palabras, $\exists x \in E, P(x)$ será verdadera si es que algún elemento e de E hace que $P(e)$ sea verdadera.

Definición 1.11. ***(Existencia y Unicidad)*** *La expresión $\exists! x \in E, P(x)$ que se lee "existe un único x en E tal que $P(x)$", es una proposición que es verdadera si y solo si existe un e en E tal que $P(e)$ es verdadera y para todo $x \neq e$, $P(x)$ es falsa.*

Proposición 1.3. *Sea $P(x,y)$ un predicado con conjunto de referencia E. Se cumplen las siguientes tautologías:*

- $\forall x \in E, \forall y \in E, P(x,y) \iff \forall y \in E, \forall x \in E, P(x,y)$.
- $\exists x \in E, \exists y \in E, P(x,y) \iff \exists y \in E, \exists x \in E, P(x,y)$
- $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y) \Longrightarrow \forall y \in E, \exists x \in E, P(x,y)$.

Nota 1.1. *Notar que:*

- *Las afirmaciones de la proposición anterior son válidas para cualquier predicado P!*
- *La recíproca de la última implicancia no es cierta: basta tomar $E = \mathbb{N}$ y $P(x,y) : x > y$ para tener el contraejemplo.*

1.1.3. Referencias

- Apunte Introducción al Álgebra, semanas 1 y 2.

1.2. Conjuntos

En la sección anterior, hemos definido la noción de predicado como una expresión que depende de variables que al ser reemplazadas por **elementos** de un **conjunto** de referencia lo transforman en una proposición lógica. Sin embargo, no hemos definido formalmente la noción de *conjunto*.
En este curso, no veremos teoría axiomática de conjuntos, si no que entenderemos un conjunto como una *colección de cosas*, sus elementos. Más bien, estudiaremos como obtener nuevos conjuntos a partir de otros dados o conocidos.

1.2.1. Definiciones preliminares

Definición 1.12. ***(Universo)*** *Asumiremos la existencia de un conjunto de referencia que usualmente denotaremos E y al que pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. A este conjunto lo llamamos* ***universo*** *y asumiremos que siempre contiene al menos un elemento.*
Formalmente, E es tal que la función proposicional $e \in E$ es siempre verdadera. Muchas veces, $E = \mathbb{N}$ o $E = \mathbb{R}$.

Definición 1.13. ***(Vacío)*** *Existe un conjunto, el* ***conjunto vacío*** *(denotado por ϕ) que no contiene elementos. Es decir, $\forall x \in E, x \in \phi \iff F$.*

Definición 1.14. ***(Igualdad)*** *Diremos que los conjuntos A y B son* ***iguales****, denotado $A = B$, si A y B tienen exactamente los mismos elementos. Es decir:*

$$A = B \iff \forall x \in E, (x \in A \iff x \in B)$$

Definición 1.15. ***(Inclusión)*** *Se dice que A es subconjunto de B (o que A está contenido en B), denotado $A \subseteq B$, si todos los elementos de A están también en B. Es decir:*

$$A \subseteq B \iff \forall x \in E, (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

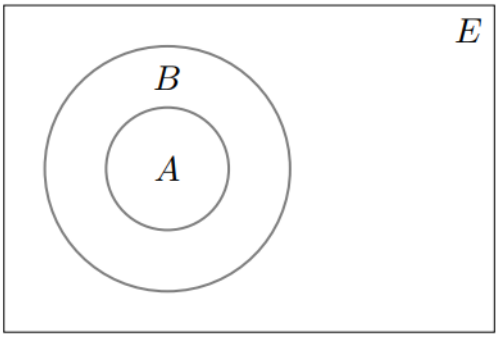


Figura 1.1: $A \subseteq B$

Proposición 1.4. ***(Propiedades de la igualdad)*** *Para $A, B, C \subseteq E$ se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Reflexividad:* $A = A$.
- *Simetría:* $A = B \iff B = A$.
- *Transitividad:* $A = B \wedge B = C \Longrightarrow A = C$.

Proposición 1.5. ***(Propiedades de la inclusión)*** *Para $A, B, C \subseteq E$ se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Reflexividad:* $A \subseteq A$.
- *Antisimetría:* $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
- *Transitividad:* $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$.

Proposición 1.6. *Para cualquier conjunto A se tiene que:*

$$\phi \subseteq A \subseteq E$$

1.2.2. Álgebra de conjuntos

Definición 1.16. ***(Unión)*** *Sean A y B conjuntos. La* ***unión*** *de A y B, denotada $A \cup B$, es el conjunto que reúne a todos los elementos que están en A y a todos los elementos que están en B. Formalmente,*

$$\forall x \in E, x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

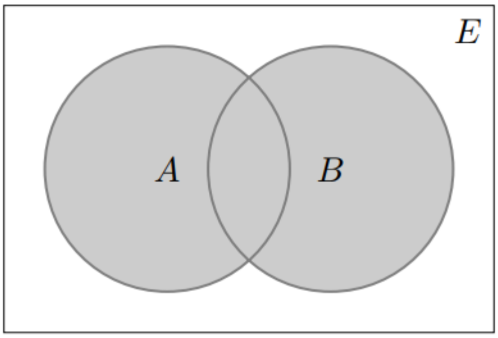


Figura 1.2: $A \cup B$

Definición 1.17. ***(Intersección)*** *Sean A y B conjuntos. La* ***intersección*** *de A y B, denotada $A \cap B$, es el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B.*

$$\forall x \in E, x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

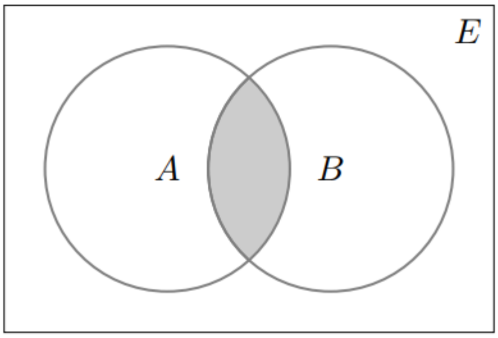


Figura 1.3: $A \cap B$

Proposición 1.7. *Sean A, B, C conjuntos. Se tiene que:*

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
- $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$.
- $A \subseteq B \wedge C \subseteq B \Longrightarrow A \cup C \subseteq B$.

Demostración. Mostraremos cada proposición por separado:

- Veamos que:

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

En efecto, si $x \in A \cap B$, por definición:

$$x \in A \wedge x \in B$$

Si $x \in A$, entonces la proposición

$$x \in A \vee x \in B$$

Es verdadera. Como esto último equivale a $A \subseteq A \cup B$ se obtiene la propiedad.

- Veamos ahora que:

$$A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$$

Sea $x \in A$. Debemos mostrar que $x \in B \cap C$.

En efecto, como $x \in A$ y $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. De manera análoga $x \in C$. Es decir:

$$x \in B \wedge x \in C$$

Equivalentemente:

$$x \in B \cap C$$

Se concluye entonces que:

$$A \subseteq B \cap C$$

- La tercera parte de la demostración queda propuesta.

■

Proposición 1.8. *Sean A, B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$. Entonces:*

$$A \cup B = B \quad \wedge \quad A \cap B = A$$

Demostración. Veremos que $A \subseteq B$ implica que $A \cup B = B$. En efecto:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \subseteq B \wedge B \subseteq B \\ &\Longrightarrow \quad A \cup B \subseteq B \\ &\Longrightarrow \quad A \cup B = B \end{aligned}$$

El resto de la demostración se construye de manera similar. ■

Proposición 1.9. *Sean A, B, C conjuntos. Se tienen las siguientes igualdades:*

- $A \cup A = A, \quad A \cup A = A.$
- $A \cup \phi = A.$
- $A \cap \phi = \phi.$
- $A \cap E = A.$
- $A \cup E = E.$
- $A \cup B = B \cup A.$
- $A \cap B = B \cap A.$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup C.$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

Demostración. to be added.. ■

Definición 1.18. *(Conjunto complemento) El complemento de un conjunto A (con respecto a E), denotado A^c es el conjunto de todos los elementos que están en E, pero no están en A. Formalmente:*

$$\forall x \in E, x \in A^c \quad \iff \quad x \notin A$$

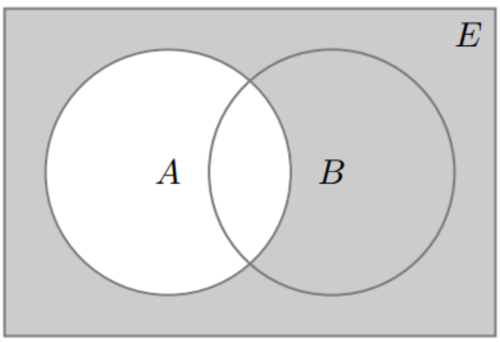


Figura 1.4: A^c

Proposición 1.10. *Se tiene que:*

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $A \cap A^c = \phi$
- $A \cup A^c = E$.

Definición 1.19. ***(Diferencia)*** *La diferencia de A con B, que notamos $A \setminus B$, es el conjunto formado por elementos que están en A y que no están en B. Formalmente:*

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

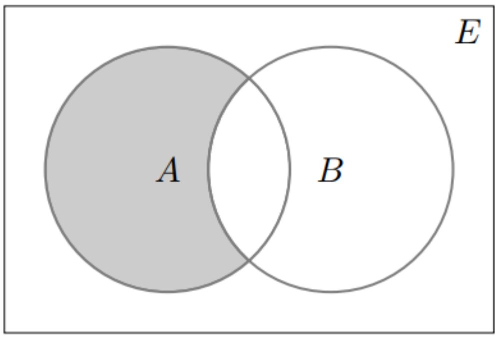


Figura 1.5: $A \setminus B$

Definición 1.20. ***(Unión sobre conjuntos de índices)*** *Sea Λ un conjunto de índices y, $\forall \lambda \in \Lambda$, sea $A_\lambda \subseteq E$ un conjunto. Se define la unión de los A_λ con $\lambda \in \Lambda$, denotado $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, como el conjunto de los x tal que $x \in A_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Formalmente:*

$$\forall x \in E, x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda$$

Definición 1.21. ***(Intersección sobre conjuntos de índices)*** *Sea Λ un conjunto de índices y, $\forall \lambda en \Lambda$, sea $A_\lambda \subseteq E$ un conjunto. Se define la intersección de los A_λ con $\lambda \in \Lambda$, denotado $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, como el conjunto de los x tal que $x \in A_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Formalmente:*

$$\forall x \in E, x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda$$

1.2.3. Referencias

Apunte Introducción al Álgebra, semana 3.

1.3. Teoría de Funciones

En esta sección estudiamos uno de los conceptos más relevantes en matemática: el de *función*. De manera intuitiva, este objeto denominado función, corresponde a una *correspondencia o relación* entre elementos de un determinado conjunto con los de otro conjunto. Esta noción resulta fundamental para el planteamiento de modelos matemáticos, económicos, físicos y prácticamente para cualquier otra ciencia que utilice matemáticas.

1.3.1. Definiciones preliminares

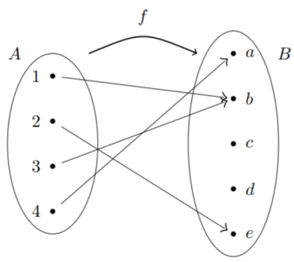


Figura 1.6: Función de A en B

Definición 1.22. ***(Función)*** *Sean A y B dos conjuntos no vacíos de naturaleza arbitraria. Una* ***función*** *f de A en B es una correspondencia entre los elementos de A y los elementos de B de modo tal que a cada $x \in A$ se le hace corresponder un y solo un elemento $y \in B$. Escribimos:*

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

Muchas veces supondremos que $A \subseteq \mathbb{R}$ y que $B = \mathbb{R}$. A estas funciones las llamamos reales de variable real.

Notación:

- Al conjunto A se le llama **dominio** de f.
- Al conjunto B se le llama **codominio** de f.
- Al elemento $y = f(x) \in B$ se le llama **imagen** de x por f.

Definición 1.23. ***(Ceros de una función)*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos* ***ceros*** *de f a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta al eje OX.*

Definición 1.24. ***(Conjunto imagen)*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos* ***conjunto imagen*** *de f al conjunto definido por: $Im(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A; y = f(x)\}$*

Definición 1.25. ***(Función par)*** *Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* ***función par*** *si y solo si:*

- $\forall x \in A, -x \in A$.
- $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$.

Definición 1.26. *Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* ***función impar*** *si y solo si:*

- $\forall x \in A, -x \in A$.
- $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.

Ejemplo 1.6. La función $f(x) = x^2$ es una función par, mientras que la función $g(x) = x^3$ es una función impar.

Nota 1.2. *Notar que:*

- *El gráfico de una función par es simétrico con respecto al eje OY.*
- *El gráfico de una función impar es simétrico con respecto al origen O del sistema de coordenadas.*

Definición 1.27. ***(Crecimiento de funciones)*** *Sea $f : A \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que:*

- *f es* ***creciente*** *en A ssi $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*
- *f es* ***decreciente*** *en A ssi $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Diremos que el crecimiento o decrecimiento es ***estricto*** *cuando las desigualdades de las definiciones anteriores se satisfacen de forma estricta.*

Definición 1.28. ***(Monotonía)*** *Diremos que f es* ***monótona*** *si es creciente o decreciente.*

Nota 1.3. *Notar que la negación de la frase $f(x)$ es creciente <u>no corresponde</u> a la frase $f(x)$ es decreciente.*

Ejemplo 1.7. Algunos casos particulares que ejemplifican las definiciones anteriores son:

- La función $f(x) = -x$ es una función estrictamente decreciente.
- La función $g(x) = x^2$ no es creciente ni decreciente.
- La función $h(x) = 4$ es una función creciente y decreciente a la vez.

Definición 1.29. ***(Función acotada)*** *Sea $f : A \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que:*

- *f es **acotada inferiormente** si $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, a \leq f(x)$.*
- *f es **acotada superiormente** si $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, f(x) \leq b$.*
- *f es **acotada** si $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in A, a \leq f(x) \leq b$.*

Proposición 1.11. *La función f es acotada ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall x \in A, |f(x)| \leq M$.*

Demostración. To be added.. ■

Definición 1.30. ***(Máximo y mínimo)*** *Sea $f : A \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que:*

- *$x_0 \in A$ es **punto mínimo** de f si $\forall x \in A, f(x_0) \leq f(x)$. Escribimos: $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$.*
- *$x_0 \in A$ es **punto máximo** de f si $\forall x \in A, f(x_0) \geq f(x)$. Escribimos: $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$.*

1.3.2. Álgebra de funciones

En el capítulo anterior, sobre conjuntos, estuvimos interesados en la operatoria que podemos realizar entre pares o grupos de conjuntos para definir conjuntos nuevos. A este tipo de operaciones la llamamos *álgebra de conjuntos*. De manera análoga, estudiaremos el *álgebra de funciones* to be fixed...

Definición 1.31. ***(Suma, diferencia, ponderación, producto y cuociente de funciones)*** *Sean f y g dos funciones de dominio D_f y D_g respectivamente y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante fija. Definimos las **funciones suma, diferencia, ponderación, producto y cuociente** por:*

- *Suma: $f + g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in D_f \cap D_g, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*
- *Diferencia: $f - g = f + (-g)$.*

- *Ponderación:* $\lambda f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in D_f, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- *Producto:* $f \cdot g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in D_f \cap D_g, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- *Cuociente:* $\dfrac{f}{g} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in A, \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *donde* $A = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}$

Definición 1.32. ***(Composición de funciones) Sean*** A, B, C ***conjuntos y*** $f : A \to B$, $g : B \to C$ ***funciones. Se define la composición de*** f ***y*** g ***como la función*** $g \circ f$ ***definida por*** $g \circ f : A \to C$ ***tal que*** $\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

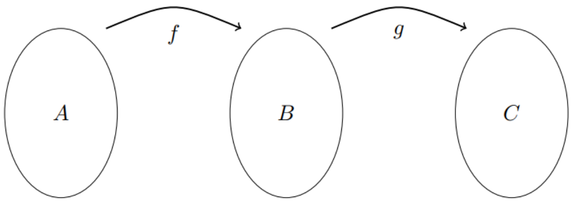


Figura 1.7: Composición de funciones

Nota 1.4. *Notar que no siempre es posible componer funciones. En particular, podría ser que* $g \circ f$ *quedara bien definida, pero no así* $f \circ g$*. ¿En qué caso ocurre algo así?*

Proposición 1.12. *Sean* $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ *y* $h : C \longrightarrow D$ *funciones. Se tiene que:*

- $\circ$ *es asociativa:* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- id_B *es neutro por la izquierda para* $\circ$ *en las funciones de* A *en* B*:* $id_B \circ f = f$
- id_A *es neutro por la derecha para* $\circ$ *en las funciones de* A *en* B*:* $f \circ id_A = f$.

Demostración. To be added.. ■

Nota 1.5. *La composición de funciones no es conmutativa. ¿Cuál es un contraejemplo?*

Definición 1.33. ***(Inyectividad)*** *Diremos que una función* $f : A \to B$ *es* ***inyectiva*** *si se cumple que:*

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

O, equivalentemente, si se cumple que:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Definición 1.34. ***(Sobreyectividad)*** *Diremos que $f : A \to B$ es* ***sobreyectiva*** *(epiyectiva) si se cumple que:*

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

Nota 1.6. *Notar que para que una función* ***no*** *sea biyectiva, basta con encontrar dos elementos distintos de su dominio x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$.*

Nota 1.7. *Para mostrar que una función* ***no*** *es sobreyectiva, basta encontrar un elemento de su codominio que no pertenezca a su imagen. Es decir, basta encontrar y para el que no exista x en el dominio tal que $f(x) = y$.*

Definición 1.35. ***(Biyectividad)*** *Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es* ***biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.*

Proposición 1.13. *$f : A \to B$ es biyectiva $\iff \forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x)$*

Demostración. To be added.. ■

Definición 1.36. ***(Función inversa)*** *Dada $f : A \to B$ biyectiva, se define la* ***función inversa*** *de f, denotada $f^{-1} : B \to A$, como la función de B en A dada por:*

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Proposición 1.14. *Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : B \to A$ es tal que:*

- $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$.
- $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$.

Demostración. To be added.. ■

Proposición 1.15. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Se tiene que:*

- *f y g son inyectivas $\implies g \circ f$ es inyectiva.*
- *f y g son sobreyectivas $\implies g \circ f$ es sobreyectiva.*
- *f y g son biyectivas $\implies g \circ f$ es biyectiva.*
- *$g \circ f$ es inyectiva $\implies f$ es inyectiva (g no necesariamente lo es).*
- *$g \circ f$ es sobreyectiva $\implies g$ es sobreyectiva (f no necesariamente lo es).*

Demostración. Veamos algunas de las demostraciones.

- Supongamos que f y g son sobreyectivas y veamos que $g \circ f$ también lo es.

  Sea $z \in C$. Debemos mostrar que existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$, es decir, tal que $g(f(x)) = z$.

  Como g es sobreyectiva, sabemos que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Del mismo modo, como $f : A \to B$ es sobreyectiva, sabemos que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Luego:

  $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

  Se concluye.

- Supongamos ahora que $g \circ f$ es inyectiva y veamos que f también lo es. Sean $x_1, x_2 \in A$, tales que:

  $$f(x_1) = f(x_2)$$

  Evaluando en g:

  $$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

  Como $g \circ f$ es inyectiva:

  $$x_1 = x_2$$

  Y se concluye que f es inyectiva.

■

Corolario 1.1. *Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces f^{-1} es biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Proposición 1.16. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Demostración. Denotemos $F = g \circ f$ y $G = f^{-1} \circ g^{-1}$. Nos basta verificar que:

$$G \circ F = id_A, \quad F \circ G = id_C$$

En efecto:

$$\begin{aligned} G \circ F &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &= f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) \\ &= f^{-1} \circ (id_B \circ f) \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= id_A \end{aligned}$$

La otra igualdad es análoga. ■

Algunos ejercicios sugeridos para interiorizar los conceptos anteriores se presentan a continuación:

Ejercicio 1.3.1. *Estudie la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la siguiente función.*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & x+y \end{array}$$

Ejercicio 1.3.2. *Considere la función definida por:*

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$$

1. *Determine: $Dom(f)$ y ceros de f.*

2. *Demuestre que f es monótona en $Dom(f) \cap (-1,\infty)$ y en $Dom(f) \cap (-\infty,-1)$.*

Ejercicio 1.3.3. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par. Demuestre que si f es creciente en $A \cap \mathbb{R}^+$, entonces f es decreciente en $A \cap \mathbb{R}^-$.*

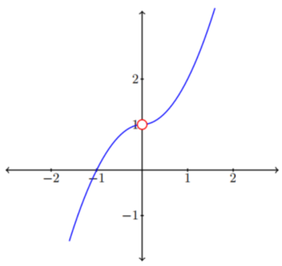
Ejercicio 1.3.4. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2-|x|}{x^2-4}$. Se pide determinar dominio de f, ceros, paridad y crecimiento.*

1.3.3. Referencias

Apunte Introducción al Álgebra, semanas 4 y 5; Apunte Introducción al Cálculo, semana 5.

1.4. Límites

- Consideramos la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $1+x^2$ para $x>0$ y $1-x^2$ para $x<0$.
- El gráfico de la función es como sigue:



- Esta función no está definida en $x=0$, sin embargo, cuando se consideran valores de x no nulos, pero cercanos a 0, los valores de $f(x)$ se aproximan a 1.
- Lo anterior corresponde a la idea intuitiva de que los valores de $f(x)$ tienden a 1 cuando x tiende a 0.
- Lo que queremos hacer es formalizar esta intuición.
- Referencia: Apunte Introducción al Cálculo, semanas 9, 12 y 13.

Antes de definir la noción de límite, necesitaremos hacer uso de otro concepto matemático de relevancia:

Definición 1.37. ***(Sucesión)*** *Una* ***sucesión*** *real es una función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.*

Nota 1.8. ***Notación:*** *En lugar de utilizar la notación habitual de las funciones, las sucesiones se denotan por (s_n) o $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definición 1.38. ***(Convergencia de sucesiones)*** *Diremos que la sucesión (s_n) converge a l o bien que los términos s_n tienden a l, lo que denotamos por $s_n\to l$ si se cumple que:*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\quad s_n\in[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$$

Nota 1.9. *En el concepto de la topología (que veremos más adelante en el curso), el intervalo $[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$ suele llamarse* ***vecindad*** *en torno a l.*

Ejemplo 1.8. Veamos que la sucesión (s_n) definida por $s_n=\frac{1}{n}$ converge a 0.

- Debemos mostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{n} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

- Notemos que $\frac{1}{n} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ equivale a imponer que:

$$|\frac{1}{n}| < \varepsilon$$

- Como $\frac{1}{n} > 0$, lo anterior es equivalente a que:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \iff \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

- Luego, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ y se tendrá que para todo $n \geq n_0$:

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

La noción de límite en sucesiones será de utilidad para analizar el límite de funciones de variable real.

Sin embargo, para formalizar el concepto necesitamos introducir un concepto más:

Definición 1.39. ***Punto de acumulación*** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. El real $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se dirá* ***punto de acumulación*** *de A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \neq \bar{x}, \forall n \geq n_0$, algún n_0 y $x_n \to \bar{x}$.*

El conjunto de todos los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota por A'.

Observacion 1.1. *En general, A no está contenido en A'. Por ejemplo, para $A = (0,1) \cup \{2\}$, $A' = [0,1]$.*

Definición 1.40. ***(Límite de funciones)*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in A'$, es decir, $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A. Diremos que f tiende a $l \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\bar{x}$ (lo que denotamos $f(x) \to l$ cuando $x \to \bar{x}$) o bien que l es el* ***límite*** *de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ (lo que se anota $l = lim_{x \to \bar{x}} f(x)$) si para toda sucesión (x_n) con valores en A, convergente a $\bar{x}$ y tal que $x_n \neq \bar{x}$, se cumple que la sucesión de las imágenes $(f(x_n))$ es convergente a l.*

Observacion 1.2.

- *Si $\bar{x} \notin A$, entonces no existen sucesiones (x_n) con valores en $A \setminus \{\bar{x}\}$ convergentes a $\bar{x}$, luego no puede estudiarse el límite de la función cuando $x \to \bar{x}$.*

- *Si $\bar{x} \in A'$, entonces el concepto de límite está bien definido, aunque podría no existir.*

Ejemplo 1.9.
- $lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.
- $\lim_{x\to -1}\sqrt{x}$ no existe, ya que $-1 \notin (R^+ \cup \{0\})'$.
- $lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ no existe, ya que por ejemplo $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, pero $\frac{1}{x_n} = n$ no converge.

Teorema 1.1. ***(Unicidad del límite)*** *Si una función f tiene límite cuando $x \to \bar{x}$, entonces dicho límite es único.*

Demostración. Sean l_1 y l_2 límites de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$. Sea entonces (x_n) alguna sucesión con valores en el dominio de la función f y convergente a $\bar{x}$. Entonces, por definición de límite se tiene que la sucesión es convergente a l_1 y a l_2 simultáneamente. Gracias al teorema de unicidad para el límite de sucesiones, se tiene que $l_1 = l_2$. ∎

Teorema 1.2. ***(Álgebra de límites)*** *Sean f y g dos funciones y $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = l_2$. Entonces:*

- *Si $\bar{x} \in (Dom(f))' \cap (Dom(g))'$, se tiene que:*

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f+g)(x) = l_1 + l_2$$

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f-g)(x) = l_1 - l_2$$

$$\lim_{x\to\bar{x}}(fg)(x) = l_1 l_2$$

- *Si $\bar{x} \in (Dom(f/g))'$ y $l_2 \neq 0$, entonces:*

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f/g)(x) = l_1/l_2$$

- *En particular (cuando g es constante), se tiene que, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to\bar{x}}(\alpha f)(x) = \alpha l_1$$

Teorema 1.3. ***(Sandwich)*** *Sean f, g y h funciones y sea $\bar{x} \in (Dom(g))'$. Si $\exists\delta > 0, \forall x \in Dom(g) \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, y además $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{x\to\bar{x}} h(x) = l$, entonces:*

$$\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = l$$

Los siguientes límites se obtienen de manera sencilla y se entenderán como conocidos:

Proposición 1.17. *Son límites conocidos:*

- $\lim_{x\to\bar{x}} c = c$
- $\lim_{x\to\bar{x}} x = \bar{x}$
- $\lim_{x\to\bar{x}}(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0) = (a_n \bar{x}^n + ... + a_1 \bar{x} + a_0)$
- $\lim_{x\to\bar{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\bar{x}}$
- $\lim_{x\to\bar{x}} sen(x) = sen(\bar{x})$
- $\lim_{x\to\bar{x}} cos(x) = cos(\bar{x})$
- $\lim_{x\to\bar{x}} e^x = e^{\bar{x}}$
- $\lim_{x\to\bar{x}} \ln(x) = \ln(\bar{x})$

Por otra parte, usando el teorema del sandwich y desigualdades conocidas para las respectivas funciones, es posible calcular los siguientes límites (que también se entenderán como conocidos):

Proposición 1.18. *Son límites conocidos:*

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln}{x - 1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x_- 1}{x} = 1$

Una técnica muy utilizada para analizar los límites de una función corresponde a la de estudiar los *límites laterales...*

Definición 1.41. ***(Límites laterales)*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\bar{x}, \infty)$ y por $A^- = A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces:*

- *Se llama **límite lateral por la derecha** de la función f en $\bar{x}$ a $\lim_{x\to\bar{x}, x\in A^+} f(x)$. Lo denotamos por $\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x)$.*
- *Se llama **límite lateral por la izquierda** de la función f en $\bar{x}$ a $\lim_{x\to\bar{x}, x\in A^-} f(x)$. Lo denotamos por $\lim_{x\to\bar{x}^-} f(x)$.*

Muchas veces se habla de que el límite de una función existe cuando sus límites laterales existen y son iguales. Lo siguiente proposición enuncia lo anterior:

Proposición 1.19. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se tiene que:*

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = l$$

Proposición 1.20. ***(Caracterización $\varepsilon - \delta$ del límite)***
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x}$ un punto de acumulación de A. Entonces:

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in A([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{x\}), |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Equivalentemente:

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in A, (|x - \bar{x}| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

Por último, introducimos la noción de límites hacia $\pm\infty$. Propiedades como el álgebra de límites, el teorema del sandwich, la unicidad siguen siendo válidas en este contexto y estudiarlas queda de tarea.

Definición 1.42. ***(Límites hacia $\pm\infty$)***
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea l un real fijo.

- *Si A no es acotado superiormente, entonces:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap [m, \infty), |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- *Si A no es acotado inferiormente, entonces:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists m > 0, \forall x \in A \cap (-\infty, m], |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

1.4.1. Continuidad

Definición 1.43. ***(Función continua en un punto)*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\bar{x}$ si:*

$$\forall (x_n)_n \subseteq A, \quad x_n \longrightarrow \bar{x} \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(\bar{x})$$

Nota 1.10. *La definición anterior impone que la propiedad debe ser verificada para toda sucesión convergente a $\bar{x}$ con valores en A.*

Ejemplo 1.10. Las siguientes funciones son continuas:

- $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \cos(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = e^x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \ln(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.21. ***(Álgebra de funciones continuas)*** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cup B$. Las siguientes funciones son continuas en $\bar{x}$:*

- $f + g$.
- $f - g$.
- λf, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $f \cdot g$.
- f/g, *cuando* $g(\bar{x}) \neq 0$.

Demostración. To be added... ■

Teorema 1.4. ***(Composición de funciones continuas)*** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $(g \circ f)$ es continua en $\bar{x}$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con valores en $Dom(g \circ f)$ que converge a $\bar{x}$. Notemos primero que si $x \in Dom(g \circ f)$, entonces $x \in Dom(f)$ y $f(x) \in Dom(g)$. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in Dom(f)$ y $f(x_n) \in Dom(g)$. Ahora, como f es continua en $\bar{x}$ y $x_n \to \bar{x}$, entonces $f(x_n) \to f(\bar{x})$. Como además g es continua en $\bar{x}$, entonces $g(f(x_n)) \to g(f(\bar{x}))$, con lo que se concluye el resultado. ■

Proposición 1.22. ***(Caracterización $\varepsilon - \delta$ de la continuidad)*** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. La función f es continua en $\bar{x}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$:*

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

Demostración. To be added... ■

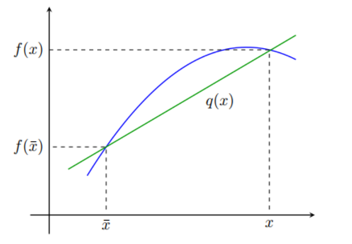
Proposición 1.23. *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. La función f es continua en $\bar{x}$ si y solo si $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$.*

Demostración. To be added... ■

Definición 1.44. ***(Función continua)*** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en $\bar{x}, \forall \bar{x} \in A$, diremos que f es una **función continua**.*

1.5. Derivadas

Consideremos una función f de variable real a valores reales y sea $\bar{x}$ un elemento fijo de su dominio. Si consideramos $x \neq \bar{x}$ en el dominio, entonces la recta secante que une x con $\bar{x}$ podría verse como en la figura:



Estudiaremos el comportamiento de esta recta secante para el caso límite cuando $x \to \bar{x}$. La noción de derivada juega un rol fundamental en economía, pues permite analizar los cambios marginales en los valores de una función.
Referencia: Apunte Introducción al Cálculo, semana 14; Apunte Cálculo Diferencial e Integral, semanas 1, 2 y 3.

1.5.1. Derivadas

Recordemos que, dada una función f y $x, x_0 \in Dom(f)$ la ecuación de la recta secante que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ con $(x_0, f(x_0))$ viene dada por:

$$y - y_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Queremos estudiar la expresión anterior en el caso límite en que $x_1 \to x_0$. Para poder estudiar este límite, necesitamos que $x_0 \in Dom(f)$ y que f esté bien definida en torno a x_0.

Definición 1.45. ***(Interior)*** *Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, diremos que $x \in int(A)$ si $\exists \delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subseteq Dom(f)$.*

Definición 1.46. ***(Derivada)***
*Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es **derivable** o **diferenciable** en $x_0 \in Int(A)$ si y solo si el límite:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Existe.
En tal caso, el valor del límite se denominará derivada de f en x_0 y se denotará por $f'(x_0)$.

Ejemplo 1.11. Veamos algunos ejemplos:

- Para $f(x) = \sqrt{x}$ se tiene que $f'(4) = \frac{1}{4}$.
- Para $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no existe la derivada en $x_0 = 0$.
- Para la función $f(x) = |x|$, $f'(x_0) = 1$ si $x_0 > 0$, $f'(x_0) = -1$ si $x_0 < 0$ y $f'(x_0)$ no existe para $x_0 = 0$.

Definición 1.47. ***(Función derivada)*** *Sea f una función, entonces la función tal que $x \to f'(x)$ se llama* ***función derivada*** *de f y se denota por f'.*

Nota 1.11. *El dominio de f y f' no necesariamente coincide: tomar por ejemplo $f(x) = |x|$.*

Proposición 1.24. *Algunas derivadas que suponemos conocidas son las siguientes:*

- $f(x) = c,\ f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \sqrt[n]{x},\ f'(x) = \frac{1}{n}a^{1-n}$
- $f(x) = \ln(x),\ f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x$
- $f(x) = x^\alpha,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
- $f(x) = sen(x),\ f'(x) = cos(x)$
- $f(x) = cos(x),\ f'(x) = -sen(x)$

1.5.2. Álgebra de derivadas

Proposición 1.25. *Si f y g son diferenciables en x_0 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $f \pm g$, αf, fg y f/g con $g(x_0) \neq 0$ son también diferenciables y además:*

- $(f \pm g))' = f' \pm g'$
- $(\alpha f)' = \alpha f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Teorema 1.5. ***(Regla de la cadena)*** *Sea f diferenciable en x_0 y sea g diferenciable en $y = f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y además se cumple que:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Proposición 1.26. ***(Derivada de la función inversa)*** *Sea $f : [a, b] \to [c, d]$ una función monótona y biyectiva. Si f es diferenciable en $x_0 \in (a, b)$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ y además:*

$$(f^{-1})'(y_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

1.5.3. Aplicaciones

Definición 1.48. ***(Mínimo local)*** *Diremos que $\bar{x}$ es un **mínimo local** de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que:*

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$$

Y de manera análoga se define la noción de máximo local.

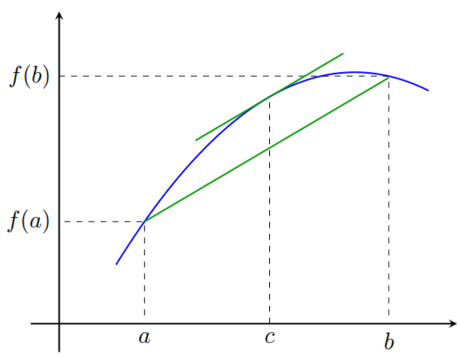
Teorema 1.6. *Si $\bar{x} \in (a, b)$ es un mínimo o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$*

Teorema 1.7. ***(Del valor medio)*** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $\chi \in (a, b)$ tal que:*

$$[f(b) - f(a)]'g(\chi) = [g(b) - g(a)]f'(\chi)$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\chi)$$



Una consecuencia directa del TVM es la llamada **regla de L'Hopital** para el cálculo de límites de la forma 0/0/ o ∞/∞:

Teorema 1.8. ***(Regla de L'Hopital)*** *Sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en (a, b) tales que:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L$$

Con $L = 0$ o $L = \infty$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último límite exista.

Las derivadas nos permiten hacer conclusiones sobre la monotonía de las funciones:

Proposición 1.27. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es estricta.*

1.6. Integrales y Primitivas

Referencia: Diferencial, semanas 5

1.6.1. Primitivas

Definición 1.49. *Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$ se llama* ***primitiva*** *(o* ***integral indefinida****) de una función f sobre I ssi $\forall x \in Int(I)$, $F'(x) = f(x)$.*

Notación:

- *Al conjunto de todas las primitivas de f lo denotamos por $\displaystyle\int f$.*
- *Si F es una primitiva de f, entonces en lugar de escribir $F \in f$, escribiremos $F = \displaystyle\int f$.*
- *Es habitual además utilizar la notación clásica:*

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Donde dx corresponde a un símbolo que identifica la variable.

Nota 1.12. *Notemos que:*

- *Sean F_1 y F_2 dos primitivas de una misma función f sobre I. Entonces:*

$$F_1' = f = F_2' \quad \Longrightarrow \quad (F_1 - F_2)' = 0$$

Luego:

$$F_1 - F_2 = cte$$

Es decir, ***primitivas de una misma función difieren, a lo más, en una constante.***

- *Si F es una primitiva de f, entonces la función $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$, es otra primitiva de f.*

Es decir, ***dada una primitiva de una función, puedo encontrar infinitas primitivas que solo difieren en una constante****.*

Proposición 1.28. *Algunas primitivas que se obtienen fácilmente a partir del conocimiento adquirido en el capítulo de derivadas son las siguientes:*

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $\forall n \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = ln(x) + c$
- $\displaystyle\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
- $\displaystyle\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

Proposición 1.29. *De la definición anterior se obtiene además que:*

- $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\displaystyle\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$
- $\displaystyle\int f' = f + c$
- $\displaystyle\left(\int f\right)' = f$

Proposición 1.30. $\displaystyle\int$ *es un operador lineal, es decir:*

- $\displaystyle\int f \pm g = \int f \pm \int g$
- $\displaystyle\int \alpha f = \alpha \int f$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Demostración. Sean $(F + c) \in \displaystyle\int f$, $(G + k) \in \displaystyle\int g$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

$$F' = f, \quad (\alpha F)' = \alpha f, \quad G' = g$$

Luego:

$$(F \pm G)' = (f \pm g), \quad (\alpha F)' = \alpha f$$

De lo anterior se concluye. ■

Teorema 1.9. ***(Cambio de variable)*** *Si $u = g(x)$, entonces:*

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx$$

O equivalentemente:

$$\int f = \int (f \circ g) \cdot g'$$

Demostración. Sea F una primitiva de f, es decir, $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, entonces $F(u) = (F \circ g)(x)$.
Calculemos:

$$(F \circ g)(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Por lo tanto, $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$. Es decir:

$$F(u) = \int f(u) \quad \wedge \quad (F \circ g) = \int (f \circ g) \cdot g'$$

Pero $F(u) = (F \circ g)(x)$, luego $\displaystyle\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$. ■

Teorema 1.10. ***(Fórmula de integración por partes)*** *Sean u y v dos funciones de x, entonces:*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

O equivalentemente:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u'v$$

Demostración. Recordemos primero que:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

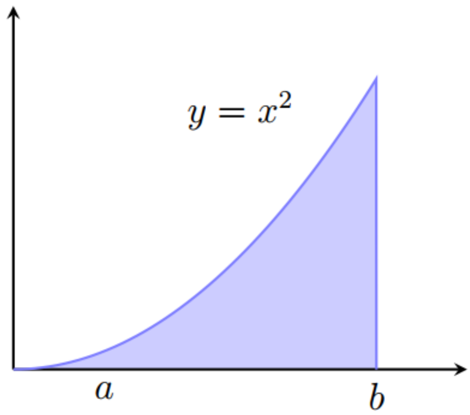
Gracias a que la primitiva es un operador lineal:

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

Reordenando los términos se obtiene la fórmula de integración por partes. ■

1.6.2. Integral de Riemann

A modo de motivación, consideramos la función $f(x) = x^2$. Lo que queremos hacer, es calcular el área bajo la curva que describe la función f, entre $x = a \geq 0$ y $x = b > 0$ para valores fijos de a y b.



Definición 1.50. ***(Partición de un intervalo)*** *El conjunto* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$ *si* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
Si P *es una partición de* $[a, b]$*, denotamos por* $|P|$ *al real:*

$$|P| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1} : i = 1, ..., n\}$$

Definición 1.51. ***(Sumas superiores e inferiores)*** *Sea* f *una función definida y acotada en* $[a, b]$*. Sea* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *una partición de* $[a, b]$*. Como* f *es acotada en* $[a, b]$*, también lo es en cada intervalo* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$*,* $\forall i = 1, ..., n$*. Por lo tanto, podemos definir:*

$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Se definen las sumas:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

Que llamamos ***suma superior*** *y* ***suma inferior*** *de* f *respecto de la partición* P*, respectivamente.*

Nota 1.13. *Es fácil ver que:*

$$m_i(f) \leq M_i(f)$$

Y, por lo tanto:

$$s(f, P) \leq S(f, P)$$

Para cualquier función f *definida, continua y acotada en* $[a, b]$*.*

Definición 1.52. ***(Integrales superiores e inferiores)*** *completar!*

Definición 1.53. *contenidos...*

1.7. Matrices y álgebra lineal

1.8. Problemas Resueltos

1.9. Problemas Propuestos

1.9.1. Tarea 1 - Otoño 2021

Problema 1. Lógica.

(a) **(0.3 pts.)** ¿Es verdadera o falsa la siguiente proposición? Justifique su respuesta.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$$

(b) **(0.3 pts.)** Sean p, q y r proposiciones lógicas. Pruebe que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Longrightarrow \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge r] \Longrightarrow \sim p$$

(c) **(0.4 pts.)** Muestre que la proposición:

$$\forall x, \exists y \text{ tal que } p(x) \Rightarrow p(y)$$

Es verdadera para cada predicado p.

Problema 2. Conjuntos.

(a) **(0.4 pts.)** Dados dos conjuntos A y B se define la **diferencia simétrica**, que denotamos $A \triangle B$, como el conjunto de los elementos que están en B, pero no están en A, o están en A, pero no en B. Más formalmente:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Sean A y B dos conjuntos tales que $A \cap B \neq \phi$. Muestre que:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

(b) **(0.3 pts.)** Sean A, B conjuntos no vacíos. Muestre que:

$$A \cap B = \phi \quad \Longrightarrow \quad A \cup B^c = B^c$$

(c) **(0.3 pts.)** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $x \in A$ es el **mínimo** de, que denotamos $\text{mín}(A) = x$ si y solo si $\forall y \in A \ x \leq y$. Muestre que el mínimo de A es único.

Problema 3. Funciones.

(a) **(0.3 pts.)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Pruebe que si la composición $g \circ f$ es una función sobreyectiva, entonces g también lo es. Construya además un contraejemplo que muestre que f no necesariamente es sobreyectiva.

(b) **(0.3 pts.)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Muestre que si f y g son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

(c) Sean A, B conjuntos no vacíos. Considere la función $\psi : A \times B \to A$ definida por:

$$\psi(a, b) = a$$

a) **(0.2 pts.)** Demuestre que ψ es sobreyectiva.

b) **(0.2 pts.)** ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto B la función ψ resulta inyectiva? Justifique su respuesta.

Problema 4. Límites.

(a) Calcule los límites de las siguientes sucesiones:

a) **(0.2 pts.)** (a_n) definida por:

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n - n}$$

b) **(0.2 pts.)** (b_n) definida por:

$$b_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 + n}$$

Podría ser útil recordar que:

$$\forall x > 1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(b) **(0.2 pts.)** Decimos que una sucesión (s_n) es una **sucesión acotada** si $\exists M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$|s_n| < M$$

Sea (u_n) una sucesión convergente. Muestre que (u_n) es una sucesión acotada.

Indicación: Note que para cualquier conjunto finito de números reales $\{p_i\}_{i=1}^{n}$, existe una constante M_p tal que $|p_i| < M_p, \forall i = 1, ..., n$.

(c) **(0.2 pts.)** Estudie el límite cuando x tiende a 0 de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Indicación: Analice los límites laterales.

(d) **(0.2 pts.)** Demuestre, usando la definición de límite de funciones, que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Problema 5. Derivadas.

(a) **(0.2 pts.)** Utilizando la definición de la derivada, pruebe que dadas $f, g : A \to B$, se tiene que:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

(b) Derive las siguientes funciones de variable real a valores reales:

a) **(0.2 pts.)** $f(x) = x^3 - 2xcos(x) + 2 - x^2 sen(x)$.

b) **(0.2 pts.)** $g(x) = x^2 ln(x) + e^{4sen(x)cos(x)}$.

(c) **(0.2 pts.)** Muestre que la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^x}$$

Viene dada por $f'(x) = -f(x)\ln(x)$.

(d) Considere un mercado con función de demanda inversa dada por:

$$P(q) = 100 - q$$

Y una firma con función de costos dada por:

$$C(q) = q^2 + 10q$$

a) **(0.1 pts.)** Suponga que cuando la firma se comporta de manera competitiva, la condición de equilibrio es que $P(q) = C'(q)$. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio. ¿Cuál es la utilidad de la firma?

b) **(0.1 pts.)** Caracterice el equilibrio considerando comportamiento monopólico por parte de la firma. Es decir, cuando ella resuelve:

$$\max_{q \geq 0} P(q) \cdot q - C(q)$$

Compare sus respuestas.

Problema 6. Matrices.

(a) **(0.2 pts.)** Sean $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in M_{nn}$, $A \in M_{np}$ y $B \in M_{mn}$. Demuestre que:

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{1\cdot} \\ \vdots \\ \lambda_n A_{n\cdot} \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{\cdot 1} & \cdots & \lambda_n B_{\cdot n} \end{pmatrix}$$

Recuerde que, dada una matriz $A \in M_{mn}$, $A_{i\cdot}$ denota su i-ésima fila y $A_{\cdot j}$ si j-ésima columna:

$$A_{i\cdot} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad A_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(b) Sea $\mathcal{H} = \{H = (h_{ij}) \in M_{nn} : h_{ij} = 0, \forall i > j + 1\}$.

a) **(0.2 pts.)** Muestre que $\mathcal{H}$ es subespacio vectorial de M_{nn}.

b) **(0.2 pts.)** Demuestre que si $T \in M_{nn}$ es triangular superior, $H \in \mathcal{H}$, entonces $T \cdot H \in \mathcal{H}$.

(c) **(0.2 pts.)** Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$. Muestre que la matriz

$$A = I - 2uu^t$$

es invertible, con $A^{-1} = A$.

(d) **(0.2 pts.)** Sea la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & -1 & p \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine valores de k y p de modo que $(1, 1, 1)^t$ sea vector propio de A.

Capítulo 2

Elementos de análisis

2.1. Conjuntos Convexos

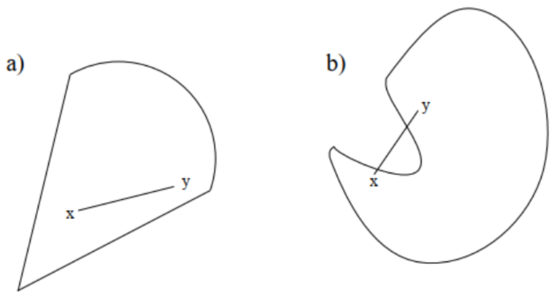
- Los conjuntos convexos se presentan en diversos contextos de la teoría microeconómica.

- En el contexto de la optimización, los conjuntos convexos juegan un rol fundamental para entender cómo plantear y resolver un problema de optimización.

- Referencias: Jehle & Reny, Advanced Microeconomic Theory, capítulo Convex Sets (Appendix), Apunte Optimización capítulo Conjuntos Convexos.

Definición 2.1. ***(Conjunto convexos)*** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \phi$. Se dice que S es* ***convexo*** *si:*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S, \quad \forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1]$$



- El conjunto de la figura a) es convexo.
- El conjunto de la figura b) no lo es.
- Un espacio vectorial es un conjunto convexo.

Ejercicio 2.1.1. *Muestre que $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$ es un conjunto convexo.*

- *Sean $x, y \in S, \lambda \in [0,1]$. Por definición de S:*

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 2$$

Por su parte:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \\ \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \\ \lambda x_3 + (1-\lambda)y_3 \end{pmatrix}$$

Y como:

$$\begin{aligned} & \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 + 2(\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) - (\lambda x_3 + (1-\lambda)y_3) \\ = \; & \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + (1-\lambda)(y_1 + 2y_2 - y_3) \\ = \; & 2\lambda + 2(1-\lambda) \\ = \; & 2 \end{aligned}$$

Se concluye que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ y, por lo tanto, que S es convexo. ■

Definición 2.2. ***(Hiperplano y semiespacio)*** *Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ fijos. Se llama* ***hiperplano*** *al conjunto:*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha\}$$

Un hiperplano H define dos ***semiespacios****:*

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha\}$$

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \alpha\}$$

Proposición 2.1. *Un semiespacio $S \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Consideremos $a \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$, que definen el semiespacio:

$$S = H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha\}$$

Sean $x, y \in S$, $\lambda \in [0,1]$, entonces:

$$\alpha^T[\lambda x + (1-\lambda)y] = \lambda a^T x + (1-\lambda)a^T y \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$$

Luego, $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ y, por lo tanto, S es convexo.
La demostración para H^+ es análoga. ■

Proposición 2.2. *Sean S_1 y S_2 conjuntos convexos. Entonces $S_1 \cap S_2$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in S_1 \cap S_2, \lambda \in [0,1]$. Entonces:

$$x, y \in S_1 \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S_1$$

$$x, y \in S_2 \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S_2$$

Gracias a que S_1 y S_2 son convexos.
Luego, $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_1 \cap S_2$ y, por lo tanto, $S_1 \cap S_2$ es convexo. ■

Discusión:

- Claramente, la propiedad anterior se puede generalizar a una intersección cualquiera de conjuntos convexos. Es decir, si $(S_i)_{i\in I}$ son conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{i\in I} S_i$ es un conjunto convexo.

- ¿Qué se puede decir sobre la unión de convexos?

Sistemas de desigualdades lineales

Ejemplo 2.1. Consideremos un sistema de la forma:

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Con $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$. De forma simplificada, escribimos:

$$Ax \leq b$$

Con $A = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$.
Entonces, el conjunto S dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Es un conjunto convexo.

Definición 2.3. ***(Combinación convexa)*** *Sean $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, ...\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. El vector*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

se dice ***combinación convexa*** *de los k vectores $x_1, ..., x_k$.*

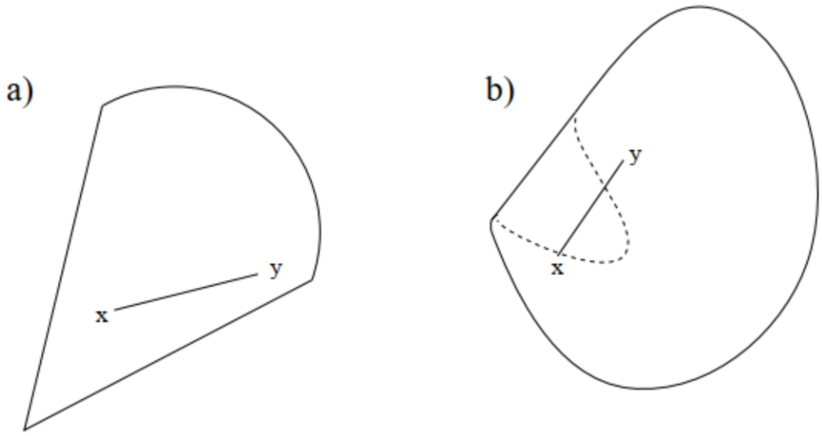
Definición 2.4. ***(Envoltura convexa)*** *Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se define la* ***envoltura convexa*** *de S, de la manera siguiente:*

$$co(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_k \in S, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

Es decir, el conjunto de todas las posibles combinaciones convexas de puntos de S.

Nota 2.1.

- *$S \subseteq co(S)$*
- *S es convexos si y solo si $co(S) = S$*
- *Si $S \subseteq S'$, entonces $co(S) \subseteq co(S')$*



- En la figura a) la envoltura convexa del conjunto es igual a él, pues es convexo.
- En la figura b), la línea sólida corresponde a la envoltura convexa (que contiene al conjunto original).

Proposición 2.3. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^k$. El conjunto $co(S)$ es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in co(S)$, es decir:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$$

donde $x_1, ..., x_n, y_1, ...y_m \in S$ y $\nu_1, ...\nu_n, \mu_1, ..., \mu_m$ son ponderadores de las combinaciones convexas.
Sea $\lambda \in [0, 1]$.
Luego:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = \lambda \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$$

Llamando $z_i = x_i$, $\alpha_i = \lambda \nu_i$ y $z_{n+i} = y_i, \alpha_{n+i} = (1 - \lambda)\mu_i$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda) y = \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i z_i$, con:

$$z_i \in S, \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i = 1$$

Por definición se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in co(S)$ y, por lo tanto, se concluye que $co(S)$ es convexo. ■

Proposición 2.4. *El conjunto $co(S)$ es el convexo más pequeño (en el sentido de la inclusión) que contiene a S, es decir:*

$$co(S) = \bigcap\{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ convexo }, S \subseteq C\}$$

Demostración. Sea $x \in \bigcap\{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ convexo }, S \subseteq C\}$.
Entonces, $x \in C, \forall C$ convexo tal que $S \subseteq C$.
Luego, $x \in co(S)$, que es un convexo particular que contiene a S.
Sean ahora $x \in co(S)$ y C un convexo cualquiera que contiene a S.
Entonces $co(S) \subseteq co(C) = C$, y por lo tanto $x \in C$.
Luego, $x \in \bigcap\{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ convexo }, S \subseteq\}$. ■

Proposición 2.5. *Sean S_1 y S_2 conjuntos convexos y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la suma y ponderación de conjuntos como sigue:*

$$S_1 + S_2 = \{x + y : x \in S_1, y \in S_2\}$$

$$\alpha S_1 = \{\alpha x : x \in S_1\}$$

Se tiene que $S_1 + S_2$ y αS_1 son conjuntos convexos.

Demostración. To be added... ■

2.2. Espacios vectoriales

- Referencias: Apunte Álgebra Lineal, capítulo Espacios vectoriales.

- Produndización sugerida: Apunte Álgebra lineal, capítulo Transformaciones Lineales.

El carácter lineal de $\mathbb{R}^n$ inspira un tipo de estructura algebraica más general: los famosos espacios vectoriales.

Definición 2.5. ***Definición (grupo abeliano)*** *Dado V un conjunto y $+$ una operación, diremos que el par $(V, +)$ es un* ***grupo abeliano*** *si:*

- *$+$ es ley de composición interna: al operar elementos de v mediante la operación $+$ se obtienen elementos de v.*

- *$+$ es asociativa y conmutativa.*

- *Existe un neutro, $0 \in V$, tal que $\forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$.*

- *$\forall x \in V$, existe un inverso aditivo, $-x \in V$ tal que:*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Ejemplo 2.2. **Ejemplo:** $\mathbb{R}^n$ con la suma conforma un grupo abeliano.

Definición 2.6. *Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ con una ley de composición externa (es decir, una función de $K \times V$ en V que a (λ, v) asocia $\lambda v \in V$), diremos que V es un* ***espacio vectorial*** *sobre $\mathbb{K}$ si y solo si la ley de composición externa satisface que $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$:*

1. $(\lambda \ + \beta)x = \lambda x + \beta x$

2. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

3. $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$

4. $1x = x$, *donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.*

En tal caso, los elementos de V se denominan vectores y los de $\mathbb{K}$ escalares.

Nota 2.2.
- *La noción de cuerpo no ha sido estudiada y escapa de los alcances de este curso. Por el momento, se puede pensar que un cuerpo es una estructura similar a los números reales. Esta se compone de un conjunto, una operación llamada suma y una operación llamada* ***multiplicación****.*

- $(\mathbb{R}^n, +)$ *con* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *conforma un espacio vectorial.*
- *Para simplificar la notación omitiremos la dependencia de las operaciones al referirnos al grupo abeliano y al cuerpo.*

Definición 2.7. ***Definición (subespacio vectorial)*** *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \phi$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V si y solo si:*

1. $\forall u, v \in U, u + v \in U.$
2. $\forall \lambda \in K, \forall u \in U, \lambda u \in U.$

Proposición 2.6. *Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo K. $U \neq \phi$ sera subespacio vectorial de V si y solo si:*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall u_1, u_2 \in U, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$$

Demostración. Para la demostración de derecha a izquierda basta tomar $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ para verificar la primera propiedad y $\lambda_2 = 0$ para verificar la segunda.
Para la demostración en el otro sentido, notar que la segunda propiedad implica que $\lambda_1 u_1 \in U$ y $\lambda_2 u_2 \in U$. Usando la propiedad 1 se concluye que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$. ■

Una noción que se utiliza bastante en economía es la siguiente:

Definición 2.8. ***(Combinación lineal)*** *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y una colección de vectores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ y de escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$. Denominamos* ***combinación lineal*** *a la suma ponderada de estos vectores:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \in V$$

Dado un conjunto fijo de vectores $v_1, ..., v_n \in V$, definimos el conjunto de todas sus combinaciones lineales como:

$$\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle = \{v \in V : v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i v_i, \lambda_i \in K\}$$

Proposición 2.7. *Sean V e.v. y $v_1, ..., v_2 \in V$. Entonces, $\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle$ es un subespacio vectorial de V. Más aún, es el s.e.v. más pequeño que contiene los vectores $v_1, ..., v_n$, es decir, si otro s.e.v. U los contiene, entonces $\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle \subseteq U$.*
Por lo anterior, a $\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle$ se le llama ***subespacio vectorial generado*** *por $\{v_i\}_{i=1}^{n}$.*

Definición 2.9. ***Definición (dependencia e independencia lineal)*** *Sea* $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$*, diremos que estos vectores son* ***linealmente dependientes*** *(ld) si y solo si existen escalares* $\{\lambda_1, ...\lambda_n\}$ *no todos nulos, tales que* $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$*. En caso contrario, es decir, cuando* $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ *implica que* $\lambda_i = 0$ *para todo* $i = 1, ..., n$*, diremos que el conjunto de vectores* $\{v_i\}_{i=1}^n$ *es* ***linealmente independiente*** *(li).*

Ejemplo 2.3.

- El conjunto $\{(1,1),(2,2)\}$ es un conjunto linealmente dependiente.
- El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Proposición 2.8. *En* $\mathbb{R}^n$*,* $m > n$ *vectores son siempre linealmente dependientes.*

Definición 2.10. ***(Base)*** *Dado un espacio vectorial* V *sobre* $\mathbb{K}$*, diremos que el conjunto de vectores* $\{v_i\_i = 1^n$ *es una* ***base*** *de* V *si y solo si:*

1. $\{v_i\}_{i=0}^n$ *es un conjunto l.i.*
2. $V = \langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle$*.*

Ejemplo 2.4.

- $\{(1,0),(1,1)\}$ y $\{(1,0),(0,1)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ no es base de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 2.9. *Dado un espacio vectorial* V*,* B *es una base si y solo si* $\forall v \in V, v$ *se escribe de* ***manera única*** *como combinación lineal de los vectores del conjunto* B*.*

Demostración.

- $\Rightarrow$) Como B es base, $\langle B\rangle = V$, luego v se escribe como combinación lineal de los vectores de B. Supongamos que esto puede hacerse de dos maneras:

  $$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

  Luego:

  $$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$$

  Como B es un conjunto li, entonces $\alpha_i - \beta_i = 0$ para todo i.

- $\Leftarrow$) Por hipótesis, cualquier vector $v \in V$ es combinación lineal del conjunto B, luego B es generador. Supongamos que B es ld. Entonces $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ con escalares no todos nulos. Por otra parte:

  $$0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n = 0$$

Por lo que podemos escribir el vector 0 de dos maneras distintas, lo que es una contradicción.

Se sigue que B es base.

$\blacksquare$

Corolario 2.1. *Si* $\{v_i\}_{i=1}^n$ *y* $\{u_i\}_{i=1}^m$ *son bases de un espacio vectorial, entonces* $n = m$.

Definición 2.11. ***(Dimensión)*** *Diremos que un espacio vectorial* V *sobre* K *es de **dimensión*** n *si admite una base de cardinalidad* n. *Cuando no exista una base finita, diremos que el espacio vectorial es de dimensión infinita.*

Teorema 2.1. *Sea* $dim(V) = n$. *Si* $\{v_i\}_{i=1}^n$ *es li, entonces* $\{v_i\}_{i=1}^n$ *es base.*

Demostración. Basta probar que $V = \langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle$. Supongamos que $\exists u \notin \langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle$. Luego, $B = \{u, v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto li y $|B| = n+1 > n$. Esto es una contradicción con el corolario anterior, pues este conjunto tiene cardinal mayor a la dimensión de la base. $\blacksquare$

Definición 2.12. ***(Valores y vectores propios)*** *Dada una matriz* $A \in M_{nn}$, *diremos que* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *es un **vector propio** y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un valor propio asociado a* x *si:*

$$Ax = \lambda x$$

2.3. Espacios vectoriales normados

- En esta clase retomamos el contexto de los espacios vectoriales.
- Estamos interesados en incorporar un concepto más al análisis: el de norma.
- Esta noción será fundamental, pues nos permitirá incorporar la noción de vecindad o de cercanía entre elementos del espacio.
- Referencias: Apunte Cálculo en Varias Variables (Correa).

2.3.1. Conceptos preliminares

Definición 2.13. ***(Espacio Vectorial Normado)*** *Un* ***espacio vectorial normado (evn)*** *es un espacio vectorial E sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ dotado de una aplicación de E en $\mathbb{R}$, llamada norma y que denotamos $||\cdot||$, con las siguientes tres propiedades: $\forall a, b \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:*

- $||a|| = 0 \iff a = 0$.
- $||\lambda a|| = |\lambda| ||a||$
- $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$

Ejemplo 2.5. Son normas para $\mathbb{R}^n$:

- $||a||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$
- $||a||_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$
- $||a||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}$
- $||a||_\infty = \text{máx}_{i=1,\ldots n} |a_i|$

Definición 2.14. ***(Distancia)*** *Dados dos elementos a, b de un evn E, se llama* ***distancia*** *de a a b a la cantidad $||a - b||$. De este modo, la cantidad $||a||$ corresponde a la distancia de a al origen 0.*

Definición 2.15. ***(Bola abierta/cerrada)*** *Dado un elemento c en un evn E y un real $r > 0$:*

- *Se llama* ***bola cerrada*** *de centro c y radio r al conjunto:*

$$B(c, r) = \{x \in E : ||c - x|| \leq r\}$$

- *Se llama* ***bola abierta*** *de centro c y radio r al conjunto:*

$$B'(c, r) = \{x \in E : ||c - x|| < r\}$$

Nota 2.3. ***Pregunta:*** *Considere $c = 0$ y $r = 1$. ¿Cómo cambian las bolas de $\mathbb{R}^n$ cuando cambia la norma?*

Definición 2.16. ***(Conjunto acotado)*** *Un conjunto A de un evn E se dirá* ***acotado*** *si existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B(0, r)$, es decir, tal que $||x|| \leq r$, para todo $x \in A$.*

Definición 2.17. ***(Normas equivalentes)*** *Dos normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$, definidas en un ev E se dirán* ***equivalentes*** *si existen dos constantes L_1 y L_2 tales que:*

$$||\cdot||_2 \leq L_1||\cdot||_1, \quad ||\cdot||_1 \leq L_2||\cdot||_2$$

Nota 2.4.

- *Las desigualdades de la desigualdad anterior se pueden escribir de manera equivalente como: para toda bola $B_2(0,\varepsilon)$ existe una bola $B_1(0,\delta) \subseteq B_2(0,\varepsilon)$ y para toda bola $B_1(0,\varepsilon)$ existe una bola $B_2(0,\delta) \subseteq B_1(0,\varepsilon)$, respectivamente.*
- *Es posible demostrar que en un espacio de dimensión finita (como $\mathbb{R}^n$), todas las normas son equivalentes.*

2.3.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 2.18. ***(Conjunto abierto/cerrado)*** *Diremos que un conjunto A de un evn E es* ***abierto*** *si para todo A existe una bola $B(a,\delta) \subseteq A$. Un conjunto A de un evn E se dirá* ***cerrado*** *si su complemento A^c es abierto.*

Nota 2.5.

- *En general, los conjuntos abiertos dependen de la norma con que se dote al ev E.*
- *Cuando las normas son equivalentes, los conjuntos abiertos son los mismos.*
- *En consecuencia, cuando las normas son equivalentes, los conjuntos cerrados también son los mismos.*

Ejemplo 2.6. Veamos que en un evn E toda bola abierta $B'(c,r)$ es un conjunto abierto. En efecto, sea $a \in B'(c,r)$. Luego, $||c-a|| < r$. Escojamos $\delta > 0$ tal que $\delta < r - ||c-a||$ y veamos que:

$$B(a,\delta) \subseteq B'(c,r)$$

Si $x \in B(a,\delta)$, entonces:

$$||a-x|| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad ||a-x|| < r - ||c-a||$$

Y esto lo podemos reescribir como:

$$||a-x|| + ||c-a|| < r$$

Como $||a-x|| > 0$, entonces:

$$||c-x|| < r||$$

Y se concluye que:

$$x \in B'(c,r)$$

Lo que prueba que $B'(c,r)$ es un conjunto abierto.

Teorema 2.2. *Si denotamos por τ a la familia de todos los subconjuntos abiertos de un evn E, se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$E \in \mathcal{T}$ y $\phi \in \mathcal{T}$.*

2. *Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{T}$, entonces:*

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

3. *Si $\{A_t\}_{t\in T}$ es una familia cualquiera de elementos de $\mathcal{T}$, entonces:*

$$\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathcal{T}$$

Demostración. 1. Probar que $E \in \mathcal{T}$ es directo. La demostración de que $\phi \in \mathcal{T}$ se sigue de que ϕ no tiene elementos.

2. Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de abiertos. Debemos ver que:

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

es un conjunto abierto.

Si $A = \phi$, el resultado se tiene por la parte anterior.

Si $A \neq \phi$, dado $a \in A$, se tendrá que $a \in A_i, \forall i = 1, ..., n$ y, como los A_i son abiertos, existen $\delta_1, ..., \delta_n > 0$ tales que:

$$B(a, \delta_i) \subseteq A_i, \forall i = 1, ..., n$$

Definiendo $\delta = \min\{\delta_i, i = 1, ..., n\} > 0$ se tendrá que:

$$B(a, \delta) \subseteq B(a, \delta_i) \subseteq A_i, \forall i = 1, ..., n$$

Lo que implica que $B(a, \delta) \subseteq A$ y prueba que A es abierto.

3. Sean $\{A_t\}_{t\in T}$ conjuntos abiertos. Veamos por último que el conjunto:

$$A = \bigcup_{t\in T} A_t$$

es abierto.

Sea $a \in A$, entonces $a \in A_t$ para algún $t \in T$.

Como A_t es abierto, existirá $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subseteq A_t$.

Esto implica que $B(a,\delta) \subseteq A$, con lo que hemos demostrado que A es abierto.

■

Definición 2.19. ***(Interior)*** *Se llama interior de un conjunto A en un evn E al conjunto:*

$$int(A) = \{x \in A : \exists B(x,\delta) \subseteq A\}$$

Definición 2.20. ***(Adherencia)*** *Se llama* ***adherencia*** *de un conjunto A en un evn E al conjunto:*

$$\overline{A} = \{x \in E : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \phi, \forall \varepsilon > 0\}$$

Nota 2.6. *De las definiciones anteriores se deduce que:*

- *El interior de A es un conjunto abierto. Más aún, es el mayor abierto contenido en A, esto es, la unión de todos los abiertos contenidos en A.*
- *De lo anterior se sigue que un conjunto A será abierto ssi $A = int(A)$.*
- *La adherencia de A es un conjunto cerrado. Más aún, es el menor cerrado que contiene a A, esto es, la intersección de todos los cerrados que contienen a A.*
- *Luego, un conjunto A será cerrado ssi $A = \overline{A}$.*
- *Notar que, tanto el interior como la adherencia dependen de la norma con que se dote al ev E. Sin embargo, serán los mismos para normas equivalentes.*

Definición 2.21. ***(Convergencia de sucesiones)*** *Diremos que una sucesión (a_n) en un evn E converge a un elemento $a \in E$ si para toda bola $B(a,\varepsilon)$ existe un entero n_0 tal que $a_n \in B(a,\varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Al elemento a se le llama* ***limite*** *de la sucesión y escribimos:*

$$\lim_n a_n = a \text{ o } a_n \to a$$

Lema 2.1. *Se tiene que:*

$$\lim_n a_n = a \iff \lim_k ||a_n - a|| = 0$$

Demostración. Se tiene que:

$$\lim_n a_n = n \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, ||a_n - a|| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Pero esto último equivale a que $\lim_n ||a_n - a|| = 0$, de acuerdo a la definición de convergencia a 0 de una sucesión en $\mathbb{R}_+$. ■

El lema anterior será de utilidad para la prueba del siguiente resultado:

Teorema 2.3. *Un conjunto A de un evn E es cerrado si y solo si toda sucesión convergente de elementos de A tiene su límite en A.*

Demostración.

- Supongamos que A es un conjunto cerrado y que (a_n) es una sucesión de elementos de A convergente a un elemento $a \in A$. Debemos ver que $a \in A$. En efecto, de la definición de convergencia se tiene que:

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, a_{n_0} \in B(a, \varepsilon)$$

  Luego:

  $$\forall \varepsilon > 0 \cap A \neq \phi$$

  Lo que implica que $a \in \overline{A}$ y como A es cerrado (y por lo tanto igual a su adherencia), se deduce que $a \in A$.

- La demostración de derecha a izquierda queda propuesta.

■

2.4. Problemas Resueltos

2.5. Problemas Propuestos

2.5.1. Tarea 2 - Otoño 2021

Problema 1. Conjuntos convexos. (1 pto.) Sean $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la suma y la ponderación de conjuntos como sigue:

$$S_1 + S_2 = \{x + y : x \in S_1, y \in S_2\}$$

$$\alpha S_1 = \{\alpha x : x \in S_1\}$$

Muestre que $S_1 + S_2$ y αS_1 son conjuntos convexos.

Problema 2. Espacios Vectoriales Normados

(a) **(0.5 pts.)** Demuestre que en un espacio vectorial normado los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo, son el conjunto vacío y el espacio.

(b) **(0.5 pts.)** Considere el espacio vectorial l_1 de las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican "$\sum_{n\in\mathbb{N}} |s_n|$ es convergente". Pruebe que la función $||(s_n)_{n\in\mathbb{N}}||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |s_n|$ define una norma en l_1.

Problema 3. Espacios métricos. Sabemos que la desigualdad triangular es válida en un espacio métrico (X, d). Más formalmente, $\forall x, y, z \in X$ se tiene que:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Una pregunta que surge naturalmente es la siguiente ¿Qué condiciones deben satisfacer x, y, z para que la desigualdad se tenga con igualdad? Es decir, para que se satisfaga que:

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$$

Conteste esta interrogante para los siguientes espacios métricos:

(a) **(0.5 pts.)** $X = \mathbb{R}$ dotado de la métrica: $d(x, y) = |x - y|$.

(b) **(0.5 pts.)** $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la métrica: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

(c) **(0.5 pts.)** $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la métrica: $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Problema 4. Funciones de varias variables. (1 pto.) Sean f y g dos funciones cóncavas definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Muestre que si f es no decreciente, entonces $f \circ g$ es cóncava. ¿Es realmente necesario que f sea no decreciente?

Problema 5. Diferenciabilidad de funciones de varias variables. Determine el gradiente, la matriz Hessiana y la concavidad en el punto indicado para las siguientes funciones:

(a) **(0.5 pts.)** $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 - 2x_2$ en el punto $(1, -2)$.

(b) **(0.5 pts.)** $g(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ en el punto $(0, 4)$.

(c) **(0.5 pts.)** $h(x, y, z) = \ln(x^2 - yz - z^2)$ en el punto $(1, 1)$.

Capítulo 3

Optimización

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis

eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.
Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Capítulo 4

Extensiones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis

eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.
Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.