AGO/23

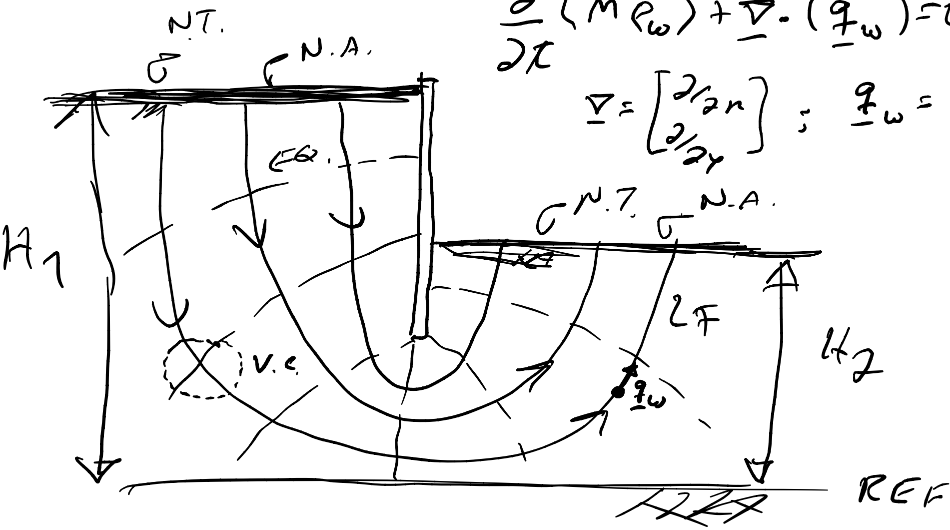
INTRODUÇÃO AO MEF

MEF: RESOLVE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

$\Rightarrow$ PROBLEMA DE CONSERVAÇÃO

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_w) + \underline{\nabla}\cdot(\underline{q}_w) = 0$$

$$\underline{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \; ; \; \underline{q}_w = k\underline{\nabla}h$$



CONSERVAÇÃO DE ÁGUA:

$$\begin{bmatrix} \text{VARIAÇÃO DA} \\ \text{QTD. DE ÁGUA NO V.C.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ENTRA} - \\ \text{SAI} \end{bmatrix}$$

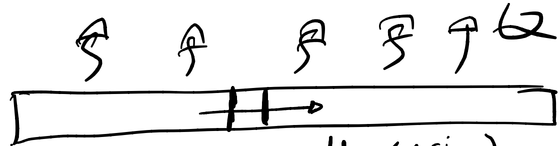
TERMO DE FLUXO

ARMAZENAMENTO

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_w) + \underline{\nabla}\cdot(\rho_w\underline{q}_w) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(M \rho_w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w q_w) = 0$$

- CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA:



$\phi = \bar{\phi}$ $\quad q = -\lambda \frac{dh}{dx}$ (LEI FOURIER) $\quad q = \bar{q}$

λ: COND. TÉRMICA

$$\begin{bmatrix} \text{VARIAÇÃO} \\ \text{DA QTD DE} \\ \text{ENERGIA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ENTRA} \\ \text{- SAI} \end{bmatrix} + Q$$

Q: PERDA DE CALOR P/ O MEIO

$$c\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{d\phi}{dx}\right) = Q$$

EQ. DIFERENCIAIS ELÍPTICAS } MEF

PROBLEMA MECÂNICO:

$$\left[\begin{array}{l}\text{VARIAÇÃO} \\ \text{DA QTD.} \\ \text{DE MOVIMENTO}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{ENTRA -} \\ \text{SAI}\end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

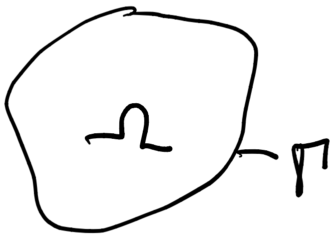
$$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = \underline{0}}$$

$\underline{u}$;

RESOLVER EQUAÇÃO

1. MÉTODO DOS RESÍDUOS

PROBLEMA DE CONTORNO:



Ω : domínio

Γ : fronteira

Eq. do fenômeno: $A(\phi) = \mathcal{L}\phi + p = 0$ em Ω

Condição de contorno: $B(\phi) = \mathcal{M}\phi + v = 0$ em Γ

$\mathcal{L}, \mathcal{M}$: operadores diferenciais lineares

$$\left.\begin{array}{l} p(x,y,z) \\ v(x,y,z) \end{array}\right\} \text{funções conhecidas}$$

Ex:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2} - \phi = -x \,; & 0 \leq x \leq 1 \\ \phi(0) = 0 & \phi(1) = 0 \end{cases}$$

$$A(\phi) = \mathcal{L}\phi + p = 0$$

$$\mathcal{L}\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} - \phi$$

$$p(x) = x$$

Domínio: $\Omega \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

Contorno $\Gamma \Rightarrow x = 0$ e $x = 1$

(Consigo resolver analiticamente)

NÃO SEI/QUERO RESOLVER ANALITICAMENTE

$$\phi_{APROX} = \hat{\phi}(x, y, z) \neq \phi$$

(EXATA)

SURGEM OS RESÍDUOS:

$$R_{\Omega} = A(\hat{\phi}) \neq 0$$

$$R_{\Gamma} = B(\hat{\phi}) \neq 0$$

$\Downarrow$

PEQUENOS: OBJETIVO DO MÉTODO

OPÇÕES
- MÍNIMOS QUADRADOS
- GALERKIN
- COLOCAÇÃO PONTUAL

MÍNIMOS QUADRADOS:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2} - \phi = -x & 0 \leq x \leq 1 \\ \phi(0) = 0 & \phi(1) = 0 \end{cases}$$

1º PASSO: SOLUÇÃO APROX.

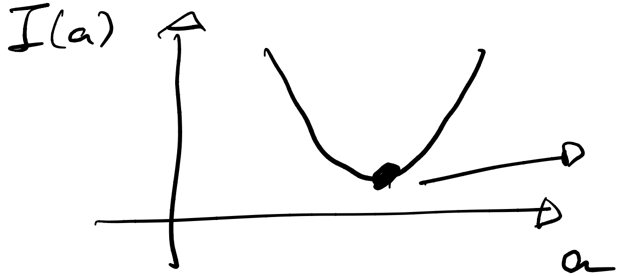
$$\hat{\phi} = \underbrace{a}_{\text{coef. a ser determinado}} x(1-x) \quad \begin{cases} \hat{\phi}(0) = 0 \\ \hat{\phi}(1) = 0 \end{cases}$$

$$R_r = \frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2} - \hat{\phi} + x \neq 0$$

$$R_r = A(\hat{\phi}) = -2a - ax(1-x) + x$$

2º PASSO: SOLUÇÃO PELO MÍNIMOS QUADRADOS:

$$I(a) = \int_0^1 R_\Omega^2 \, dx$$



$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0$$

(mínimo)

$$\frac{\partial I}{a} \Rightarrow \int_\Omega \frac{dR_\Omega}{da} R_\Omega \, d\Omega$$

$$+ \int_\Gamma \frac{dR_\Gamma}{da} \cancelto{0}{R_\Gamma} \, d\Gamma$$

$$R_\Omega = -2a - ax(1-x) + x$$

$$\frac{\partial R_\Omega}{\partial a} = -2 - x(1-x)$$

$$\int_0^1 [-2x - x(1-x)]\,[-2a - a\,x(1-x) + x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0{,}2305}$$

SOLUÇÃO TENTATIVA:

$$\hat{\phi} = 0{,}2305\,x(1-x)$$

P/ $x = 0{,}5$: $\phi(0{,}5) = 0{,}0566$

$\hat{\phi}(0{,}5) = 0{,}0576$

COMO MELHORAR:

MAIS TERMOS A $\hat{\phi}$

$$\hat{\phi} = a_1\,x(1-x) + a_2\,x^2(1-x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \end{cases}$$

FORMA GERAL DA SOLUÇÃO

APROX:

$$\hat{\phi} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

a_m → coef. a ser determinado

N_m → funções forma

- Polinômios
- Funções de Fourier

...

MÍNIMO QUADRADO:

OBTER OS COEF. $a_1, a_2, \dots a_n$

de maneira que o erro global

$$I = \int_\Omega R_\Omega^2 \, d\Omega + \int_\Gamma R_\Gamma^2 \, d\Gamma$$

Seja mínimo:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_\Omega \frac{\partial R_\Omega}{\partial a_i} R_\Omega \, d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial R_\Gamma}{\partial a_i} R_\Gamma \, d\Gamma = 0}$$

$\Rightarrow$ SISTEMA DE EQUAÇÕES

EDP $\rightarrow$ EQUAÇÃO INTEGRAL $\rightarrow$ SISTEMA DE EQ. ALGÉBRICAS

$\Downarrow$ PROBLEMA FÍSICO

$\Downarrow$ ERRO GLOBAL I

$\Downarrow$ MINIMIZAÇÃO DO ERRO GLOBAL

FORMA GERAL DO MRP:

$$\int_\Omega W_i \, R_\Omega \, d\Omega + \int_\Gamma \bar{W}_i \, R_\Gamma \, d\Gamma = 0$$

$$i = 1, \dots, n$$

FUNÇÕES PESO DO MRP

$$\hat{\phi} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

MÍNIMOS QUAD. $\Big\}$ $W_i = \dfrac{\partial R_\Omega}{\partial a_i}$; $\bar{W}_i = \dfrac{\partial R_\Gamma}{\partial a_i}$

GALERKIN $\Big\}$ $W_i = N_i$; $\bar{W}_i = -N_i$

COLOCAÇÃO PONTUAL $\Big\}$ $W_i = \delta_i$; $\bar{W}_i = -\delta_i$

↳ DELTA DE DIRAC.