

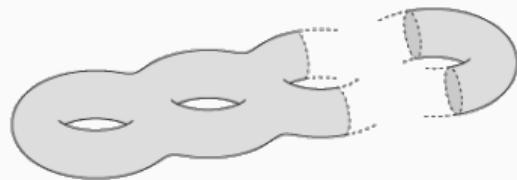
Die Euler-Charakteristik

Von unplättbaren Graphen und anderen Welten

Leonie Kayser

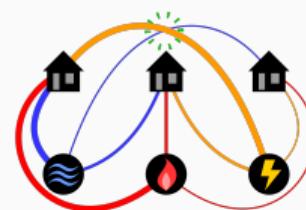
kayser@mis.mpg.de

28. September 2023



MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR MATHEMATIK
IN DEN NATURWISSENSCHAFTEN

$$\chi = E - K + F$$



Zur Person

- ▷ Masterstudien in Mathematik und Informatik in Hannover
- ▷ Doktorandin in der *Nonlinear Algebra Group* seit Januar 2023
- ▷ Forschung zu *Projektiver Algebraischer Geometrie*
- ▷ Homepage leokayser.github.io



Abbildung 1: Ich mit Doktorvater Simon Telen (rechts) und Mentor Fulvio Gesmundo (mittig).

Graphen in der Kombinatorik

- ▷ Ein *Graph* ist eine Menge von Knoten/*Ecken* E , die mittels einer Menge von *Kanten* K verbunden sind
- ▷ **Abstrakt:** Liste von Ecken $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Kanten $\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- ▷ **Konkret:** Zeichne die Ecken E in die Ebene und zeichne alle Kanten K ein
- ▷ Vielfältige Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik, wann immer Netzwerke oder Abhängigkeiten modelliert werden müssen

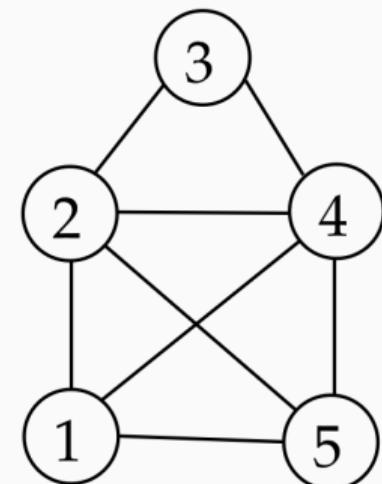


Abbildung 2: Ein Graph mit 5 Ecken und 8 Kanten.

Planare Graphen und die Euler-Charakteristik

- ▷ Ein Graph heißt *planar*, wenn er in die Ebene gezeichnet werden kann, ohne dass sich zwei Kanten überkreuzen
- ▷ Die von einem planaren Graphen abgegrenzten Gebiete (inklusive des äußeren) heißen *Flächen*
- ▷ Die Anzahl der Flächen notieren wir mit F , die *Euler-Charakteristik* der des planaren Graphens ist

$$\chi = Ecken - Kanten + Flächen$$

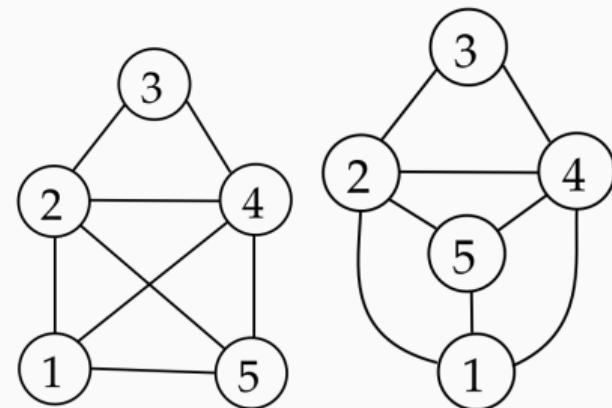


Abbildung 3: Derselbe Graph in einer planaren Darstellung

Rätselrunde die erste!

$$\chi = \text{Ecken} - \text{Kanten} + \text{Flächen}$$

- ▷ Welche der folgenden Graphen sind planar?
- ▷ Falls ja, was ist die Euler-Charakteristik?
- ▷ Falls nein, warum nicht?

Ecken und Kanten bestimmen die Flächen!

Satz (Eulerformel)

Für jeden zusammenhängenden planaren Graphen gilt

$$\chi = E - K + F = 2,$$

unabhängig von der ebenen Darstellung.

- ▷ Die Formel ist wahr für einen einzelnen Knoten: $E = F = 1, K = 0$
- ▷ Fügt man eine Ecke hinzu und verbindet sie mit einer vorhandenen Ecke, so ist $E_{\text{neu}} = E + 1, K_{\text{neu}} = K + 1, F_{\text{neu}} = F$
- ▷ Fügt man eine Kante zwischen zwei bestehenden Ecken ein, so teilt diese eine vorhandene Fläche in zwei neue: $E_{\text{neu}} = E, K_{\text{neu}} = K + 1, F_{\text{neu}} = F + 1$
- ▷ Diese Operationen lassen die Euler-Charakteristik unverändert
- ▷ Man kann auf diese Weise jeden zusammenhängenden Graphen aufbauen

Das Wasser-Gas-Strom-Rätsel

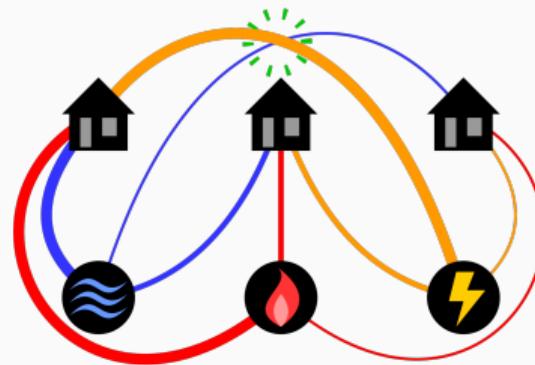


Abbildung 4: Verbinde die Häuser mit den Versorgungsstellen, ohne dass sich Leitungen kreuzen.

Angenommen, es gäbe eine Lösung.

- ▷ Nach der Eulerformel ist $F = K - E + 2 = 5$
- ▷ Jede Fläche grenzt an *mindestens* vier Kanten, jede Kante an genau zwei Flächen
- ▷ Dies bedeutet $5 = F \leq K/2 = 9/2$, ein Widerspruch!

Hindernisse für Planarität

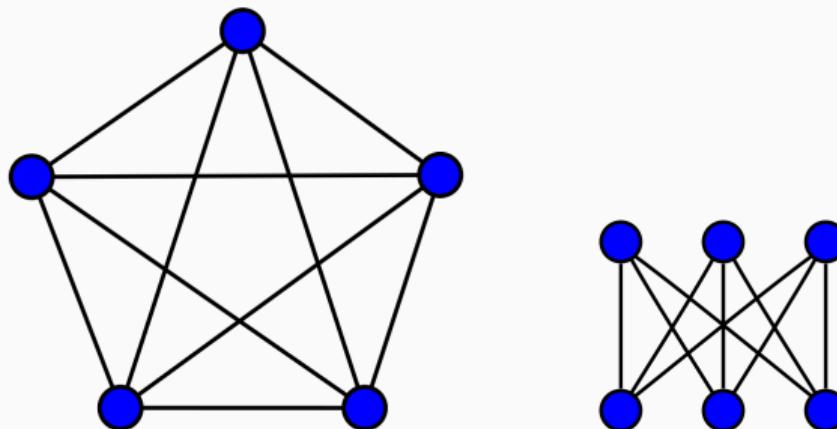


Abbildung 5: Die zwei kleinsten nicht-planaren Graphen K_5 und $K_{3,3}$.

Satz (Kuratowski)

Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung der Graphen K_5 oder $K_{3,3}$ enthält.

Auf in die dritte Dimension!

- ▷ Ein *Polyeder* ist ein dreidimensionaler Körper, der von ebenen Flächen begrenzt wird.
- ▷ Ein Polyeder hat ebenfalls Ecken, Kanten und Flächen
- ▷ Die Kanten und Flächen können sich *grundsätzlich* schneiden
- ▷ Die Euler-Charakteristik ist wieder definiert als

$$\chi = E - K + F$$



Abbildung 6: Ein Rhombenkuboktaeder.

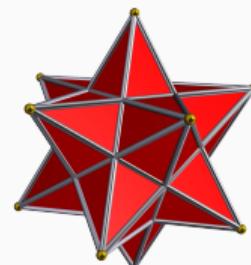


Abbildung 7: Ein Dodekaederstern.

Rätselrunde die zweite!

- ▷ Finde die Euler-Charakteristiken der vorliegenden Körper und des Dodekaedersterns!
- ▷ Gibt es einen Zusammenhang zu planaren Graphen?

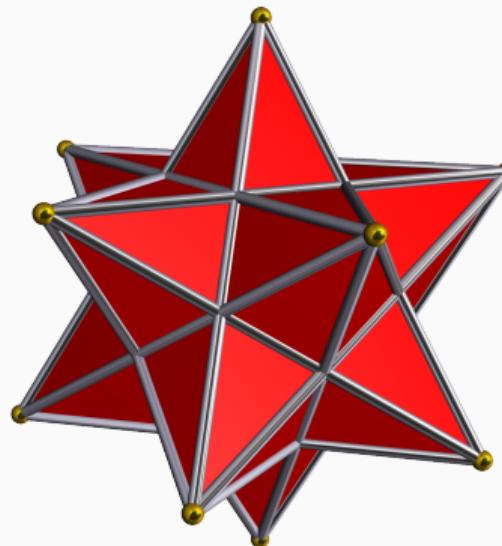


Abbildung 8: Der Dodekaederstern (erneut).

Satz (Eulersche Polyederformel)

Für jeden konvexen Polyeder gilt $\chi = E - K + F = 2$.

- ▷ Öffne den Polyeder in einer Fläche und falte zum *Schlegeldiagramm* in der Ebene auf
- ▷ So entsteht ein planarer Graph, für den die Eulerformel schon gezeigt ist!

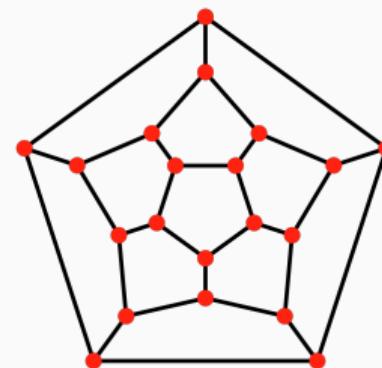
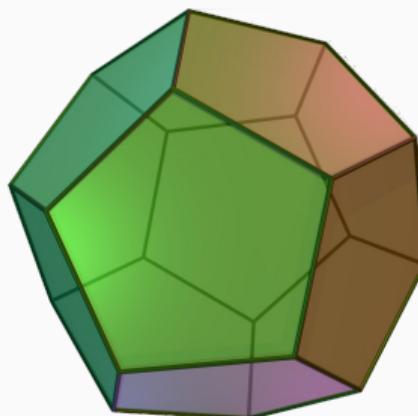


Abbildung 9: Der Dodekaeder und sein Schlegeldiagramm in der Ebene

Anwendung: Warum gibt es eigentlich nur fünf platonische Körper?

- ▷ Ein platonischer Körper bestehe aus p -Ecken, und es treffen sich q an jeder Ecke
- ▷ Für die Ecken gilt $qE = 2K$
- ▷ Für die Flächen gilt $pF = 2K$
- ▷ Einsetzen in die Polyederformel: $\frac{2K}{q} + K + \frac{2K}{p} = 2$
- ▷ Umstellen liefert die Ungleichung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K} > \frac{1}{2}$$

- ▷ Die einzigen ganzzahligen Lösungen der Ungleichung sind die fünf Körper

Name	Tetraeder	Oktaeder	Ikosaeder	Hexaeder	Dodekaeder
p -Ecke	3	3	3	4	5
q an Ecke	3	4	5	3	3
E, K, F	4, 6, 4	6, 12, 8	12, 30, 20	8, 12, 6	20, 30, 12

Genug mit Ecken und Kanten!

- ▷ Eine orientierbare Fläche hat genau zwei Seiten (Gegenbeispiel: Möbiusband)
- ▷ Das *Geschlecht* einer orientierbaren Fläche ist die Anzahl der „Löcher“
- ▷ Eine geschlossene Fläche ist eine Fläche ohne Rand
- ▷ Die *Topologie* geschlossener orientierter Flächen wird bestimmt durch ihr Geschlecht, genauer: Je zwei Flächen gleichen Geschlechts sind *homöomorph* (strukturell gleich)



Abbildung 10: Flächen vom Geschlecht 0 (Sphäre), 1 (Torus) und höher.

Die Euler-Charakteristik geschlossener Flächen

- ▷ Jede glatte Fläche S besitzt eine *Triangulierung*, d.h. eine Überdeckung mit einem Netz aus (gerundeten) Dreiecken
- ▷ Die Euler-Charakteristik der Fläche ist definiert als $\chi(S) = E - K + F$, wobei E, K, F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen in einer Triangulierung ist
- ▷ Dies ist unabhängig von der gewählten Triangulierung (**warum?**)
- ▷ Die Euler-Charakteristik ändert sich nicht, wenn man auch andere Vielecke zulässt

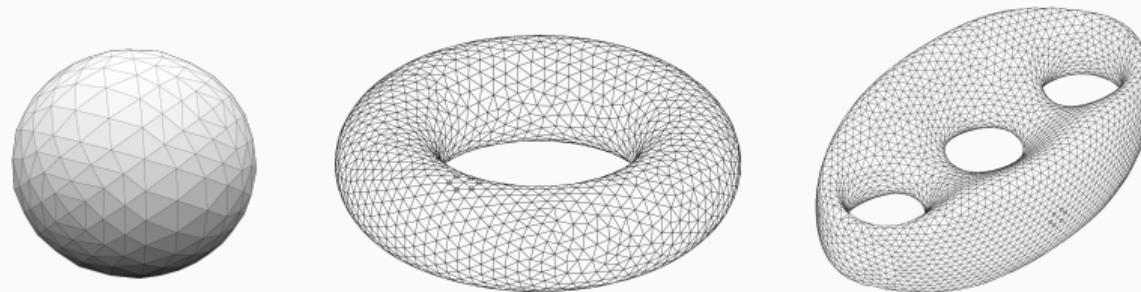


Abbildung 11: Triangulierte Flächen von Geschlecht 0 (Sphäre), 1 (Torus) und 3 (Brezel?).

Rätselrunde die dritte!

- ▷ Die eulersche Polyederformel verrät uns, dass für die Sphäre $\chi(\mathbb{S}) = 2$ gilt
- ▷ Was ist die Euler-Charakteristik des Torus $\chi(\mathbb{T})$?
- ▷ Was ist die Euler-Charakteristik einer Fläche von Geschlecht g ?

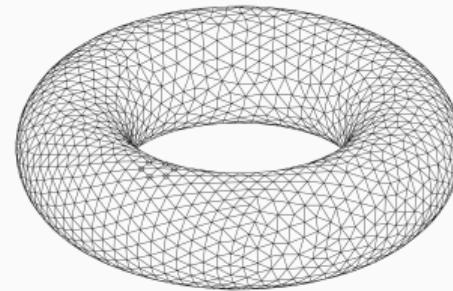


Abbildung 12: Ein Torus \mathbb{T} .

Wenn die Welt doch nur ein Donut wäre...

- ▷ Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar, sie können jedoch kreuzungsfrei auf einen Torus gezeichnet werden
- ▷ Tatsächlich ist dies sogar möglich für K_7 und $K_{4,4}$!

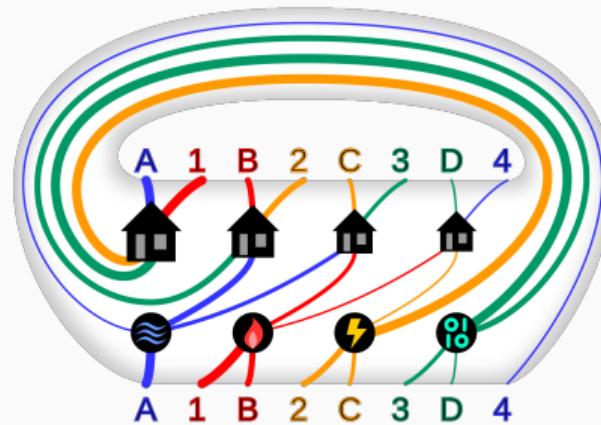


Abbildung 13: Vier Häuser überkreuzungsfrei mit vier Ressourcen versorgt auf einem Torus.

... Landkarten färben wäre schwieriger

Satz (Vierfarbensatz)

Jede Landkarte mit zusammenhängenden Ländern kann mit vier Farben gefärbt werden, sodass benachbarte Länder verschiedene Farben haben.

- ▷ Erster mathematischer Satz, der mit Computerhilfe bewiesen wurde (Appel & Haken 1976)
- ▷ Für Landkarten auf Welten mit höherem Geschlecht können mehr Farben nötig sein, beim Torus bis zu 7
- ▷ Die höchste Mindestanzahl hängt von der Euler-Charakteristik von S ab und beträgt

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(S)}}{2} \right\rfloor$$

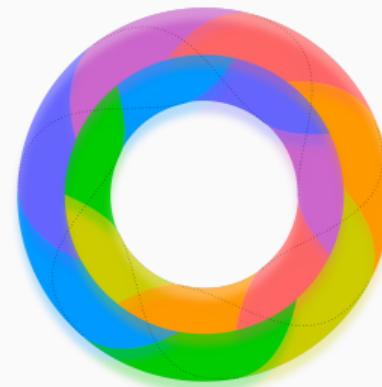


Abbildung 14: 7 Länder auf einem Torus, die alle aneinandergrenzen.

Ausblick

- ▷ Die Geometrie auf einer Fläche hängt wesentlich von der Euler-Charakteristik ab
 - $\chi > 0$: Sphäre, „positive Krümmung“
 - $\chi = 0$: Torus, „keine Krümmung“
 - $\chi < 0$: Hyperboloid/Pringles, „negative Krümmung“
- ▷ Die Euler-Charakteristik erklärt, warum ein Kernfusionsreaktor ein Torus sein *muss*
- ▷ Die Eulerformel ist ein Hilfsmittel in der Computergrafik, um besser mit Triangulierungen rechnen zu können
- ▷ In der Chemie und Biologie kann die Stabilität von Molekülen mittels der Eulerformel untersucht werden

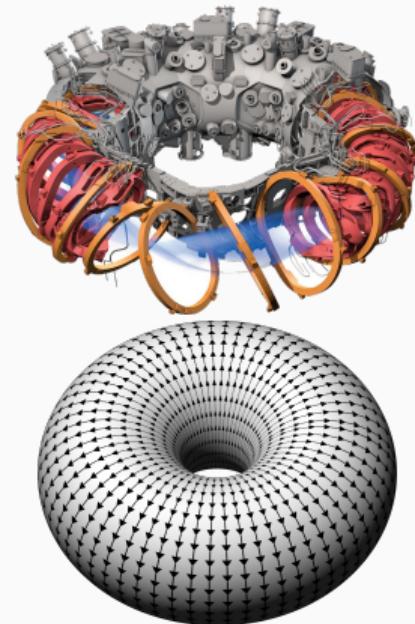


Abbildung 15: Ein Fusionsreaktor und sein Magnetfeld.

Danke! Fragen?