Lista 3 - MAC0338

Leonardo Lana Violin Oliveira - 9793735

27 de Agosto de 2017

2

A

O número esperado de comparações na linha 6 é $E[X]$, onde X é o número de vezes que o elemento i do vetor não é o maior elemento do subvetor $v[1...i]$, então podemos afirmar que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, onde

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{se o elemento } \textit{i} \text{ do subvetor } \textit{v[1...i]} \text{ não é o maior elemento deste subvetor} \\ 0, cc \end{cases}$$

Já que a probabilidade é uniforme, então temos que a probabilidade de um elemento não ser o maior elemento do subvetor de tamanho i é $Pr\{X_i = 1\} = 1 - \dfrac{1}{i}$, logo:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{n} E[X_i] = \sum_{i=0}^{n} Pr\{X_i = 1\} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} 1 - \frac{1}{i} = \sum_{i=0}^{n} 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i} = \\
&= n - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i} > n - (\ln n) = \mathcal{O}(n)
\end{aligned}$$

OU

$$= n - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i} < n - (\ln n + 1) = \Omega(n)$$

Logo, $E[X] = \Theta(n)$

B

O número esperado de atribuições feitas na linha 7 é $E[Y]$, onde Y é o número de vezes que o elemento i do vetor é o menor elemento do subvetor $v[1...i]$, então podemos afirmar que $Y = \sum_{i=0}^{n} Y_i$, onde

$$Y_i = \begin{cases} 1, \text{se o elemento } i \text{ do vetor é o menor elemento do subvetor } v[1...i] \\ 0, cc \end{cases}$$

Já que a probabilidade é uniforme, então temos que a probabilidade de um elemento ser o menor elemento do subvetor de tamanho i é $Pr\{Y_i = 1\} = \dfrac{1}{i}$, logo:

$$E[Y] = \sum_{i=0}^{n} E[Y_i] = \sum_{i=0}^{n} Pr\{Y_i = 1\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\lg n)$$

Então o valor esperado para o número de atribuições na linha 7 é $\Theta(\lg n)$

8

```
Mediana(V, c, f)
    t <- f - c + 1
    pos <- (f + c)/2
    Se t%2 != 0, então
        Retorna V[⌈pos⌉]
    senão,
        Retorna (V[pos] + V[pos + 1])/2

SAmediana (V1, c1, f1, V2, c2, f2)
    m1 <- Mediana(V1, c1, f1)
    m2 <- Mediana(V2, c2, f2)
    t <- f1 - c1 + 1
    pos <- (f1 + c1)/2

    Se t = 2, então
        Vm = Intercala(V1, c1, f1, V2, c2, f2, 4)
```

```
        Retorna Mediana(Vm, 1, 4)

    senão se m1 > m2, então
        Se t%2 = 0, então
            Retorna (SAmediana(V1, c1, pos+1, V2, pos, f2))
        senão,
            Retorna (SAmediana(V1, c1, ⌈pos⌉, V2, ⌈pos⌉, f2))

    senão se (m1 < m2), então
        Se t%2 = 0, então
            Retorna (SAmediana(V1, pos, f1, V2, c2, pos+1))
        senão,
            Retorna (SAmediana(V1, ⌈pos⌉, f1, V2, c2, ⌈pos⌉))

    senão,
    Retorna m1
```

9

Para entendimento da descrição, vamos chamar a função *caixa-preta* de *mediana*. E usaremos a função *PARTICIONE* do *QUICKSORT*.

Dado um vetor, usaremos a função *mediana* para obter o valor da mediana, e procuraremos a posição deste valor no vetor ($\mathcal{O}(n)$), e chamamos o *PARTICIONE* usando o índice da mediana, para particionar o vetor em duas metades, a primeira metade menor que a mediana e a segunda metade é maior que a mediana.

Comparamos o k com a posição da mediana, se os valores forem iguais, o algoritmo encerra, se k menor que a posição, a função será chamada recursivamente para a primeira metade do vetor, caso k seja o valor maior, a recursão será chamada para o segunda metade do vetor.