形式语言与自动机理论笔记

Leo Lu

2021 年 9 月 27 日

蒋宗礼 信息楼 214 jiangzl@bjut.edu.cn

第一章绪论

1.1 引入：过河问题

人 -> m 狼 -> w 羊 -> g 白菜 -> c 初状态：

```
mwgc -
wc   - mg
mwc  - g
c    - mwg
mgc  - w
g    - mcw
mg   - cw
     - mgcw
```

1.2 重要性

GRE 中 80 道题，其中有 8～15 道形式语言。

1.3 Basic Concepts

1.3.1 Alphabet

An alphabet is a collection of characters.

Product of two alphabets:

$$\{0,1\} \times \{a,b\} = \{0a, 0b, 1a, 1b\}$$

Power of an alphabet:

$$\Sigma^0 = \epsilon, \Sigma^n = \Sigma^{n-1} \times \Sigma$$

Positive closure of an alphabet:

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i$$

Kleene closure of an alphabet:

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i = \{\epsilon\} \cup \Sigma^+$$

1.3.2 Senctence

X is a “Sentence” if:$\forall X \in \Sigma^*$

1.3.3 Empty sentence

An empty sentence, denoted by ϵ or λ, is a string with no characters at all.

1.3.4 “Length” of a “Sentence”

$\forall X \in \Sigma^*$, the count of characters appeared in x is called the length of x, denote by $|x|$
For example: $|ababab| = 6; |\epsilon| = 0$
Note that $\{\epsilon\} \neq \Phi$.

1.3.5 Concatenation of sentences

$\forall x, y \in \Sigma^*$, the concatenation of sentences x, y, denoted by $|xy|$, is the direct join of two strings.

$$|xy| = |x| + |y|$$

1.3.6 N-power of sentences

$\forall x \in \Sigma^*$, the n-power of sentence x:

$$x^n = \begin{cases} \epsilon & \text{n=0} \\ x^{n-1}x & \text{Other} \end{cases}$$

1.3.7 Prefix and Suffix

$\forall x, y, z, w, v \in \Sigma^*$, given that $x = yz, w = yv$, then:

1. y is the Prefix of x
2. z is the Suffix of x
3. if $z \neq \epsilon$, y is ”Proper Prefix” of x
4. if $y \neq \epsilon$, z is ”Proper Suffix” of x
5. y is the ”Common Suffix” of x and w

For example, if $x = 0110$:

- Prefix of x is $\epsilon, 0, 01, 011, 0110$
- Proper prefix of x is $\epsilon, 0, 01, 011$
- Suffix of x is $\epsilon, 0, 10, 110, 0110$
- Proper suffix of x is $\epsilon, 0, 10, 110$

1.3.8 Reverse of a sentence

The reverse of sentence x is denoted by x^R or x^T.

1.3.9 Language on Alphabet Σ

$\forall L \subseteq \Sigma^*$, L is called a Language on alphabet Σ
$\forall x \in L$, x is called *a sentence of* L
For example: let $\Sigma = \{0, 1\}$, we have

1. $L_1 = \{0, 1\}$
2. $L_2 = \{00, 01, 10, 11\}$
3. $L_3 = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\} = \Sigma^+$
4. $L_4 = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\} = \Sigma^*$
5. $L_5 = \{0^n | n \geq 1\}$
6. $L_6 = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$
7. $L_7 = \{1^n | n \geq 1\}$
8. $L_8 = \{0^n 1^m | n, m \geq 1\}$
9. $L_9 = \{0^n 1^n 0^n | n \geq 1\}$
10. $L_{10} = \left\{0^n 1^m 0^k | n, m, l \geq 1\right\}$
11. $L_{11} = \{x | x \in \Sigma^+ \text{and the number of 0 and 1 of x are same}\}$

1.3.10 Operation of Language

All operatio on Sets also works on Language.
Note that $\cup, \cap, -, \_$ *are closure*（封闭的）.
Product of Languages:
Given $L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, the product of L_1 and L_2 is a Language on alphabet $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

$$L_1 L_2 = \{xy | x \in L_1, y \in L_2\}$$

Power of Languages:
Given a language L, we have:

$$L^n = \begin{cases} \epsilon & n = 0 \\ L^{n-1} L & Other \end{cases}$$

Positive closure of a language:

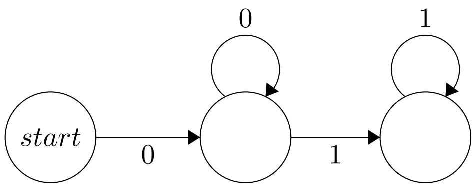
$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

Kleene closure of a language:

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = \{\epsilon\} \cup L^+$$

Note that: $L^+ = L^* \iff \epsilon \in L$
Examples

- 给定 Σ，讨论 Σ 上典型语言的结构特征
  - $\{0^n 1^m | n, m \geq 1\}$:



  - $\{0^n 1^n 0^n | n \geq 1\}$
- 给定 Σ，讨论语言的结构与表示
  - $\{xx | x \in \Sigma^+\} = \{a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n | a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma, n \geq 1\}$
  - $\left\{xx^T | x \in \Sigma^+\right\}$
  - $\left\{xx^T w | x, w \in \Sigma^+\right\}$
    $= \{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots a_1 b_1 \ldots b_m | a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Sigma, n, m \geq 1\}$
  - $\left\{xwx^T | x, w \in \Sigma^+\right\}$
    $= \{a_1 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n a_n \ldots a_1 | a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Sigma, n, m \geq 1\}$
    $= \{aa_1 \ldots a_n a | a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma, n \geq 1\}$

第二章 文法

2.1 启示

- 对无穷对象的描述
  - $\{0^n | n \geq 1\}$
    * 0 是 S 的元素
    * $\forall x \in S, x0 \in S$
    * $S \to 0$
    * $S \to S0$
  - $\{0^n 1^m | n, m \geq 1\}$
    * $0 \in S$
      $\forall x \in S, 0x, x1 \in S$
    * $S \to 01$
      $S \to 0S | S1$
    * $S \to S_1 S_2$
      $S_1 \to 0$
      $S_1 \to S_1 0$
      $S_2 \to 0$
      $S_2 \to S_2 0$
  - $\{0, 1\}^*$
    * $\epsilon \in S$
      $\forall x \in S, 0x, 1x \in S$

    - $S \to \epsilon$
      $S \to 0S$
      $S \to 1S$
  - $\{0,1\}^*\{11\}\{0,1\}^*$
    - $11 \in S$
      $\forall x \in S, 0x, 1x, x0, x1 \in S$
    - $S \to 11$
      $S \to 0S|1S|S0|S1$

- 如何定义中缀表达式：递归
  - 描述：
    - $ident$ 是表达式
    - 表达式加表达式是表达式
    - 表达式减表达式是表达式
    - 表达式乘表达式是表达式
    - 表达式除表达式是表达式
    - 表达式加括号是表达式
  - 定义：
    - 表达式定义为标识符
    - 表达式定义为表达式 + 表达式
    - 表达式定义为表达式 − 表达式
    - 表达式定义为表达式 × 表达式
    - 表达式定义为表达式 ÷ 表达式
    - 表达式定义为（表达式）
  - 符号化
    $E \to ident$
    $E \to E + E$
    $E \to E - E$
    $E \to E \times E$
    $E \to E \div E$
    $E \to (E)$
  - 表示优先级
    - 因子是标识符
    - 因子是括号的表达式
    - 项是因子
    - 项是因子 ∗/ 因子
    - 表达式是项
    - 表达式是表达式 +− 表达式
  - 符号化
    - Variables: E, T, F

  * Terminals: $+ - \times \div ident()$
  * Products:
    $E \to T + T$
    $E \to T - T$
    $E \to T$
    $T \to F \times F$
    $T \to F \div F$
    $T \to F$
    $F \to ident$
    $F \to (E)$
  * Start Symbol：E

2.2 形式定义

定义 2.1. 文法（*Grammar*）G 是一个四元组

$$G = (V, T, P, S)$$

其中，

V— 变量（Variable）的非空有穷集。$\forall A \in V$，A 叫做语法变量（*syntactic variable*），也叫非终极符号（*nonterminal*）。

T— 终极符（Terminal）的非空有穷集。$\forall a \in T$，a 叫做终极符。$V \cup T = \Phi$。

P— 产生式（Production）的非空有穷集。对于 $a \to b$，a 是左部，b 是右部。

S— $S \in V$，文法 G 的开始符号（Start symbol）。

约定：

- 只写产生式，第一个产生式的左部为开始符号
- 对一组有相同左部的产生式
  $\alpha \to \beta_1, \alpha \to \beta_2, \alpha \to \beta_3, \ldots$ 可以记为 $\alpha \to \beta_1|\beta_2|\beta_3 \ldots$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 称为候选式（Candidate）
- 形如 $\alpha \to \epsilon$ 的产生式叫做空产生式，也可叫做 ϵ 产生式
- 符号
  - 英文大写字母为语法变量
  - 英文小写字母为终结符号
  - 英文较后的大写字母为语法变量或者终极符号
  - 英文较后的大写字母为终极符号行
  - 希腊字母表示语法变量和终极符号组成的行

定义 2.2. 设 $G = (V, T, P, S)$ 是一个文法，如果 $\alpha \to \beta \in P, \gamma, \delta \in (V \cup T)$，则称 $\gamma\alpha\delta$ 在 G 中直接推导（*Derivation*）出 $\gamma\beta\delta$，记作 $\gamma\alpha\delta \underset{G}{\Rightarrow} \gamma\beta\delta$。

于此相对应，$\gamma\beta\delta$ 归约到 $\gamma\alpha\delta$，简称 β 归约为 α。

$\underset{G}{\Rightarrow}$ 是 $(V \cup T)^*$ 上的二元关系。

定义 2.3. 对于文法 G:

$\xRightarrow[G]{n} = \left(\underset{G}{\Rightarrow}\right)^n$

$\xRightarrow[G]{*} = \left(\underset{G}{\Rightarrow}\right)^*$

$\xRightarrow[G]{=} = \left(\underset{G}{\Rightarrow}\right)^+$

当只有唯一的文法 G 时，可以省略 G: $\xRightarrow{n}, \xRightarrow{*}, \xRightarrow{+}$

定义 2.4. 对于语言 $G=(V,T,P,S)$:

语法范畴 A $L(A)=\left\{w|w\in T^*\text{且}A\overset{*}{\Rightarrow}w\right\}$

语言（*Language*） $L(G)=\left\{w|w\in T^*\text{且}S\overset{*}{\Rightarrow}w\right\}$

句子（*Sentence*） $\forall w\in L(G)$

句型（*Sentential Form*） $\forall\alpha\in(V\cup T)^*$，如果 $S\overset{*}{\Rightarrow}\alpha$，则称 α 是 G 产生的一个句型。

定义 2.5. 对于文法 G_1,G_2，如果 $L(G_1)=L(G_2)$，则称 G_1 与 G_2 等价。

2.3 文法的构造

- $L(G)=\{0,1,00,11\}$
  - $G_1: S\to 0|1|00|11$
  - $G_2: S\to A|B|AA|BB, A\to 0, B\to 1$
  - $G_3: S\to 0|1|0A|1B, A\to 0, B\to 1$
  - $G_4: S\to A|B|AA|BB, A\to 0, B\to 1, C\to 1$
- $\{x|x\text{是至少 3 个 1 的 0，1 串}\}$
  - $G: S\to A1A1A1A, A\to\epsilon|0A|1A$
  - $G: S\to A1A1A1B, A\to\epsilon|0A, B\to\epsilon|0B|1B$
  - $G: S\to AAAB, A\to 1|0A, B\to\epsilon|0B|1B$

2.4 文法的乔姆斯体系

定义 2.6. 对于文法 $G=(V,T,P,S)$:
G 叫做 *0* 型文法，*Type 0 Grammar*，也叫短语结构文法（*PSG*，*Phrase Structure Grammar*）
$L(G)$ 是 *0* 型语言，也叫短结构语言，可递归枚举集。

定义 2.7. 对于 *0* 型文法文法 $G=(V,T,P,S)$:
如果对于 $\forall\alpha\to\beta\in P$，均有 $|\beta|\geq|\alpha|$，则 G 是 *1* 型文法，或上下文有关文法。

定义 2.8. 对于 *1* 型文法文法 $G=(V,T,P,S)$:
如果对于 $\forall\alpha\to\beta\in P$，均有 $|\beta|\geq|\alpha|$，并且 $\alpha\in V$ 则 G 是 *2* 型文法，或上下文无关文法。

定义 2.9. 对于 *2* 型文法文法 $G=(V,T,P,S)$:
如果对于 $\forall\alpha\to\beta\in P$:
如果形如 $A\to wB$ 和 $A\to w$，其中 $A,B\in V,w\in T+$: G 是右线性文法。
如果形如 $A\to Bw$ 和 $A\to w$，其中 $A,B\in V,w\in T+$: G 是右线性文法。
则 G 是 *3* 型文法，或正则文法。

2.5 空产生式

允许在 CSG，CFG，RG 文法中存在空产生式。
允许在 CSL，CFL，RL 语言中存在空语句。

习题：p67 3，4，8.2，8.6，10.3，11.3