形式语言与自动机理论笔记

Leo Lu

2021 年 9 月 30 日

蒋宗礼 信息楼 214 jiangzl@bjut.edu.cn

第一章　第一章绪论

1.1　引入：过河问题

人 -> m 狼 -> w 羊 -> g 白菜 -> c 初状态：

```
mwgc -
wc   - mg
mwc  - g
c    - mwg
mgc  - w
g    - mcw
mg   - cw
     - mgcw
```

1.2　重要性

GRE 中 80 道题，其中有 8～15 道形式语言。

1.3　Basic Concepts

1.3.1　Alphabet

An alphabet is a collection of characters.

Product of two alphabets:

$$\{0,1\} \times \{a,b\} = \{0a, 0b, 1a, 1b\}$$

Power of an alphabet:

$$\Sigma^0 = \epsilon, \Sigma^n = \Sigma^{n-1} \times \Sigma$$

Positive closure of an alphabet:

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i$$

Kleene closure of an alphabet:

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i = \{\epsilon\} \cup \Sigma^+$$

1.3.2 Senctence

X is a “Sentence” if:$\forall X \in \Sigma^*$

1.3.3 Empty sentence

An empty sentence, denoted by ϵ or λ, is a string with no characters at all.

1.3.4 “Length” of a “Sentence”

$\forall X \in \Sigma^*$, the count of characters appeared in x is called the length of x, denote by $|x|$
For example: $|ababab| = 6; |\epsilon| = 0$
Note that $\{\epsilon\} \neq \Phi$.

1.3.5 Concatenation of sentences

$\forall x, y \in \Sigma^*$, the concatenation of sentences x, y, denoted by $|xy|$, is the direct join of two strings.

$$|xy| = |x| + |y|$$

1.3.6 N-power of sentences

$\forall x \in \Sigma^*$, the n-power of sentence x:

$$x^n = \begin{cases} \epsilon & \text{n=0} \\ x^{n-1}x & \text{Other} \end{cases}$$

1.3.7 Prefix and Suffix

$\forall x, y, z, w, v \in \Sigma^*$, given that $x = yz, w = yv$, then:

1. y is the Prefix of x
2. z is the Suffix of x
3. if $z \neq \epsilon$, y is ”Proper Prefix” of x
4. if $y \neq \epsilon$, z is ”Proper Suffix” of x
5. y is the ”Common Suffix” of x and w

For example, if $x = 0110$:

- Prefix of x is $\epsilon, 0, 01, 011, 0110$
- Proper prefix of x is $\epsilon, 0, 01, 011$
- Suffix of x is $\epsilon, 0, 10, 110, 0110$
- Proper suffix of x is $\epsilon, 0, 10, 110$

1.3.8 Reverse of a sentence

The reverse of sentence x is denoted by x^R or x^T.

1.3.9 Language on Alphabet Σ

$\forall L \subseteq \Sigma^*$, L is called a Language on alphabet Σ

$\forall x \in L$, x is called *a sentence of* L

For example: let $\Sigma = \{0, 1\}$, we have

1. $L_1 = \{0, 1\}$
2. $L_2 = \{00, 01, 10, 11\}$
3. $L_3 = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\} = \Sigma^+$
4. $L_4 = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\} = \Sigma^*$
5. $L_5 = \{0^n | n \geq 1\}$
6. $L_6 = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$
7. $L_7 = \{1^n | n \geq 1\}$
8. $L_8 = \{0^n 1^m | n, m \geq 1\}$
9. $L_9 = \{0^n 1^n 0^n | n \geq 1\}$
10. $L_{10} = \left\{0^n 1^m 0^k | n, m, l \geq 1\right\}$
11. $L_{11} = \{x | x \in \Sigma^+$and the number of 0 and 1 of x are same$\}$

1.3.10 Operation of Language

All operatio on Sets also works on Language.

Note that $\cup, \cap, -, \text{-}$ *are closure*（封闭的）.

Product of Languages:

Given $L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, the product of L_1 and L_2 is a Language on alphabet $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

$$L_1 L_2 = \{xy | x \in L_1, y \in L_2\}$$

Power of Languages:

Given a language L, we have:

$$L^n = \begin{cases} \epsilon & n = 0 \\ L^{n-1} L & Other \end{cases}$$

Positive closure of a language:

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

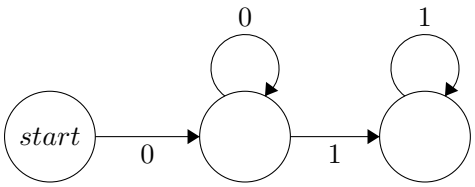
Kleene closure of a language:

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = \{\epsilon\} \cup L^+$$

Note that: $L^+ = L^* \iff \epsilon \in L$

Examples

- 给定 Σ，讨论 Σ 上典型语言的结构特征
  - $\{0^n1^m|n,m\geq 1\}$:



  - $\{0^n1^n0^n|n\geq 1\}$
- 给定 Σ，讨论语言的结构与表示
  - $\{xx|x\in\Sigma^+\}=\{a_1a_2\dots a_na_1a_2\dots a_n|a_1,a_2,\dots,a_n\in\Sigma,n\geq 1\}$
  - $\left\{xx^T|x\in\Sigma^+\right\}$
  - $\left\{xx^Tw|x,w\in\Sigma^+\right\}$
    $=\{a_1a_2\dots a_n\dots a_1b_1\dots b_m|a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m\in\Sigma,n,m\geq 1\}$
  - $\left\{xwx^T|x,w\in\Sigma^+\right\}$
    $=\{a_1\dots a_nb_1b_2\dots b_na_n\dots a_1|a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m\in\Sigma,n,m\geq 1\}$
    $=\{aa_1\dots a_na|a,a_1,a_2,\dots,a_n\in\Sigma,n\geq 1\}$

第二章　第二章 文法

2.1　启示

- 对无穷对象的描述
  - $\{0^n|n\geq 1\}$
    - 0 是 S 的元素
    - $\forall x\in S,x0\in S$
    - $S\to 0$
    - $S\to S0$
  - $\{0^n1^m|n,m\geq 1\}$
    - $0\in S$
      $\forall x\in S,0x,x1\in S$
    - $S\to 01$
      $S\to 0S|S1$
    - $S\to S_1S_2$
      $S_1\to 0$
      $S_1\to S_10$
      $S_2\to 0$
      $S_2\to S_20$
  - $\{0,1\}^*$
    - $\epsilon\in S$
      $\forall x\in S,0x,1x\in S$

    * $S \to \epsilon$
      $S \to 0S$
      $S \to 1S$
  - $\{0,1\}^*\{11\}\{0,1\}^*$
    * $11 \in S$
      $\forall x \in S, 0x, 1x, x0, x1 \in S$
    * $S \to 11$
      $S \to 0S|1S|S0|S1$

- 如何定义中缀表达式：递归
  - 描述：
    * *ident* 是表达式
    * 表达式加表达式是表达式
    * 表达式减表达式是表达式
    * 表达式乘表达式是表达式
    * 表达式除表达式是表达式
    * 表达式加括号是表达式
  - 定义：
    * 表达式**定义为**标识符
    * 表达式**定义为**表达式 + 表达式
    * 表达式**定义为**表达式 − 表达式
    * 表达式**定义为**表达式 × 表达式
    * 表达式**定义为**表达式 ÷ 表达式
    * 表达式**定义为**（表达式）
  - 符号化
    $E \to ident$
    $E \to E + E$
    $E \to E - E$
    $E \to E \times E$
    $E \to E \div E$
    $E \to (E)$
  - 表示优先级
    * 因子是标识符
    * 因子是括号的表达式
    * 项是因子
    * 项是因子 */ 因子
    * 表达式是项
    * 表达式是表达式 +− 表达式
  - 符号化
    * Variables: E, T, F

* Terminals: $+ - \times \div ident()$
* Products:
  $E \to T + T$
  $E \to T - T$
  $E \to T$
  $T \to F \times F$
  $T \to F \div F$
  $T \to F$
  $F \to ident$
  $F \to (E)$
* Start Symbol：E

2.2 形式定义

定义 2.1. 文法（*Grammar*）G 是一个四元组

$$G = (V, T, P, S)$$

其中，

V— 变量（Variable）的非空有穷集。$\forall A \in V$，A 叫做语法变量（*syntactic variable*），也叫非终极符号（*nonterminal*）。

T— 终极符（Terminal）的非空有穷集。$\forall a \in T$，a 叫做终极符。$V \cup T = \Phi$。

P— 产生式（Production）的非空有穷集。对于 $a \to b$，a 是左部，b 是右部。

S— $S \in V$，文法 G 的开始符号（Start symbol）。

约定：

- 只写产生式，第一个产生式的左部为开始符号
- 对一组有相同左部的产生式
  $\alpha \to \beta_1, \alpha \to \beta_2, \alpha \to \beta_3, \ldots$ 可以记为 $\alpha \to \beta_1 | \beta_2 | \beta_3 \ldots$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 称为候选式（Candidate）
- 形如 $\alpha \to \epsilon$ 的产生式叫做空产生式，也可叫做 ϵ 产生式
- 符号
  - 英文大写字母为语法变量
  - 英文小写字母为终结符号
  - 英文较后的大写字母为语法变量或者终极符号
  - 英文较后的大写字母为终极符号行
  - 希腊字母表示语法变量和终极符号组成的行

定义 2.2. 设 $G = (V, T, P, S)$ 是一个文法，如果 $\alpha \to \beta \in P, \gamma, \delta \in (V \cup T)$，则称 $\gamma\alpha\delta$ 在 G 中直接推导（*Derivation*）出 $\gamma\beta\delta$，记作 $\gamma\alpha\delta \underset{G}{\Rightarrow} \gamma\beta\delta$。

于此相对应，$\gamma\beta\delta$ 归约到 $\gamma\alpha\delta$，简称 β 归约为 α。

$\underset{G}{\Rightarrow}$ 是 $(V \cup T)^*$ 上的二元关系。

定义 2.3. 对于文法 G:

$\overset{n}{\underset{G}{\Longrightarrow}} = \left(\underset{G}{\Rightarrow}\right)^n$

$\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} = \left(\underset{G}{\Rightarrow}\right)^*$

$\overset{=}{\underset{G}{\Longrightarrow}} = \left(\underset{G}{\Rightarrow}\right)^+$

当只有唯一的文法 G 时，可以省略 G: $\overset{n}{\Longrightarrow}, \overset{*}{\Longrightarrow}, \overset{+}{\Longrightarrow}$

定义 2.4. 对于语言 $G = (V, T, P, S)$:

语法范畴 A $L(A) = \left\{w | w \in T^* \text{且} A \overset{*}{\Rightarrow} w\right\}$

语言（*Language*） $L(G) = \left\{w | w \in T^* \text{且} S \overset{*}{\Rightarrow} w\right\}$

句子（*Sentence*） $\forall w \in L(G)$

句型（*Sentential Form*） $\forall \alpha \in (V \cup T)^*$，如果 $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$，则称 α 是 G 产生的一个句型。

定义 2.5. 对于文法 G_1, G_2，如果 $L(G_1) = L(G_2)$，则称 G_1 与 G_2 等价。

2.3 文法的构造

- $L(G) = \{0, 1, 00, 11\}$
  - $G_1 : S \to 0|1|00|11$
  - $G_2 : S \to A|B|AA|BB, A \to 0, B \to 1$
  - $G_3 : S \to 0|1|0A|1B, A \to 0, B \to 1$
  - $G_4 : S \to A|B|AA|BB, A \to 0, B \to 1, C \to 1$
- $\{x | x$是至少 3 个 1 的 0，1 串$\}$
  - $G : S \to A1A1A1A, A \to \epsilon|0A|1A$
  - $G : S \to A1A1A1B, A \to \epsilon|0A, B \to \epsilon|0B|1B$
  - $G : S \to AAAB, A \to 1|0A, B \to \epsilon|0B|1B$

2.4 文法的乔姆斯体系

定义 2.6. 对于文法 $G = (V, T, P, S)$:

G 叫做 *0* 型文法，*Type 0 Grammar*，也叫短语结构文法（*PSG*，*Phrase Structure Grammar*）

$L(G)$ 是 *0* 型语言，也叫短结构语言，可递归枚举集。

定义 2.7. 对于 *0* 型文法文法 $G = (V, T, P, S)$:

如果对于 $\forall \alpha \to \beta \in P$，均有 $|\beta| \geq |\alpha|$，则 G 是 *1* 型文法，或上下文有关文法。

定义 2.8. 对于 *1* 型文法文法 $G = (V, T, P, S)$:

如果对于 $\forall \alpha \to \beta \in P$，均有 $|\beta| \geq |\alpha|$，并且 $\alpha \in V$ 则 G 是 *2* 型文法，或上下文无关文法。

定义 2.9. 对于 *2* 型文法文法 $G = (V, T, P, S)$:

如果对于 $\forall \alpha \to \beta \in P$:

如果形如 $A \to wB$ 和 $A \to w$，其中 $A, B \in V, w \in T^+$: G 是右线性文法。

如果形如 $A \to Bw$ 和 $A \to w$，其中 $A, B \in V, w \in T^+$: G 是左线性文法。

则 G 是 *3* 型文法，或正则文法。

2.5　空产生式

允许在 CSG，CFG，RG 文法中存在空产生式。
允许在 CSL，CFL，RL 语言中存在空语句。
特点：

- 对于 $\forall$ 右线性文法 G_1，$\exists$ 左线性文法 G_2 使得 $L(G_1) = L(G_2)$
- 对于 $\forall$ 左线性文法 G_1，$\exists$ 右线性文法 G_2 使得 $L(G_1) = L(G_2)$
  所以，某种意义上二者等价。其中，左线性文法的表述好。
  左递归? 线性文法不是正则文法!
- $\forall G, \exists G', L(G') = L(G)$，但是 G' 中的开好似符号不出现在任何产生式的右部，且在 $\epsilon \in L(G')$ 时，G' 中只有 $S' \to \epsilon$ 这样一个 ϵ 产生式。

2.5.1　语言运算

给定上下文无关文法 G_1, G_2，构造 G 使得：

1. $L(G) = L(G_1)L(G_2)$
   其中 $V_1 \cup V_2 = \phi$，$S \notin V_1 \cup V_2$
   $G = (V_1 \cup V_2 \cup S, T, P_1 \cup P_2 \cup S \to S_1S_2, S)$
2. $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$
   $G_\cup = (V_1 \cup V_2 \cup S, T, P_1 \cup P_2 \cup P_3, S)$
   $P_3 = \{S \to S_1 | S_2\}$
3. $L(G) = L(G_1)^*$
   $G_* = (V_1 \cup \{S\}, T, P_1 \cup P_2, S)$
   $P_2 = \{S \to \epsilon | SS_1\}$

给定 RG G_1, G_2，构造 RG G 使得：

1. $L(G) = L(G_1)L(G_2)$
   其中 $V_1 \cup V_2 = \phi$，$S \notin V_1 \cup V_2$
   $S_1 \Rightarrow a_1A_1$
   $\Rightarrow a_1a_2 \dots a_{n-1}A_n$ 所以，我们需要改造 P_1。
   $\Rightarrow a_1a_2 \dots a_nS_2$
   $G = (V_1 \cup V_2 \cup S, T, P_1' \cup P_2 \cup P_3, S_1)$
   $P_1' = \{A \to aB | A \to aB \in P_1\}$
   $P_3 = \{A \to aS_2 | A \to a \in P_1\}$
2. $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$
   $G_\cup = (V_1 \cup V_2 \cup S, T, P_1 \cup P_2 \cup P, S)$
   $P = \{S \to \alpha | S_1 \to \alpha \in P_1\}$
   $\cup \{S \to \alpha | S_2 \to \alpha \in P_2\}$
3. $L(G) = L(G_1)^*$
   自己想!

例子：

1. 设 $L=\{x|101 \text{ in } x\}$，构造 $G, L(G)=L$。

朴素构造：$\begin{cases} S \to A101A \\ A \to \epsilon|0A|1A \end{cases}$

正则构造：$\begin{cases} S \to 0S|1A \\ A \to 0B|1A \\ B \to 1C|0S \\ C \to 0C|1C|\epsilon \end{cases}$

2. 构造 G 使 $L(G)=\{x|101 \text{ not in } x\}$

正则构造：$\begin{cases} S \to 0S|1A \\ A \to 0B|1A \\ B \to 0S|\epsilon \end{cases}$

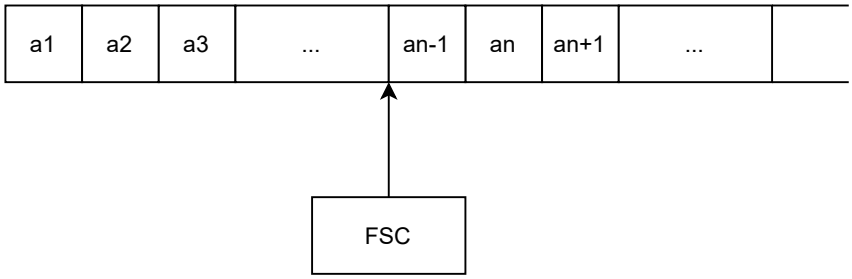
2.6　小结

习题：p67 3，4，8.2，8.6，10.3，11.3

第三章　有穷状态自动机 Finite Automata

3.1　FA 的基本定义

图 1: 有穷状态自动机



定义 3.1. $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，其中：

Q ：状态的有穷集合

Σ ：输入字母表

δ ：状态转义函数

$Q \times \Sigma \to Q$。$\forall (q,a) \in Q \times \Sigma$，$\delta(q,a)=p$ 表示 M 在状态 q 读入一个字符 a，状态改为 p 并指向下一个字符。

q_0 ：开始状态

F ：终止状态

定义 3.2. 有穷状态自动机 $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$：

状态转移图是满足如下条件的有向图。

1. 对于 $q \in Q$，q 是一个顶点

2. $\forall (q,a) \in \delta$, q 到 p 有一条标记为 a 的弧。

3. 标有 S 的箭头所指的状态为开始状态。

4. 用双圈标记结束状态。

扩展 δ 为 $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$

1. $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$

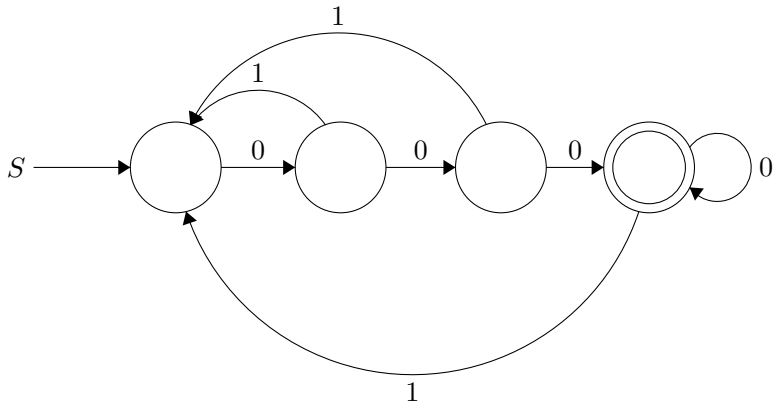
2. $\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$

注意到 $Q \subset Q \times \Sigma^*$，且对 $\forall (q,a) \in Q \times \Sigma^*$，$\hat{\delta}(q,a) = \delta(q,a)$ 所以，不用区分 δ 与 $\hat{\delta}$

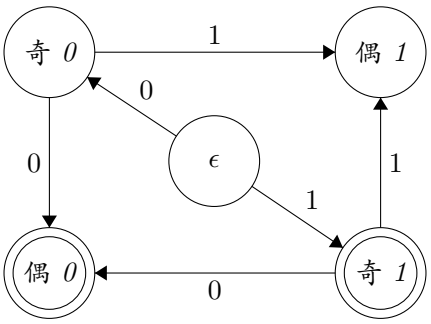
定义 3.3. 有穷状态自动机 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 识别的语言：$L(M) = \{x | \delta(q_0, x) \in F\}$

定义 3.4. 对于有穷状态自动机 M_1, M_2：若有 $L(M_1) = L(M_2)$，则称二者等价。

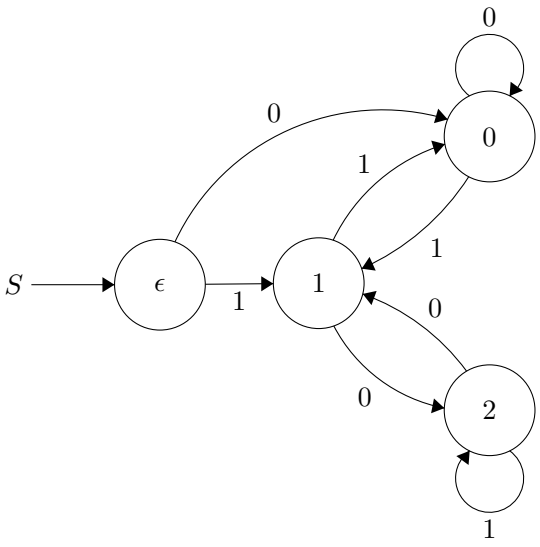
例 3.1. 构造 M，使得 $L(M) = \left\{x000 | x \in \{0,1\}^*\right\}$。



例 3.2. 构造 M，使得 $L(M) = \left\{0x0 | x \in \{0,1\}^*\right\}$。



例 3.3. 构造 M，使得 $L(M) = \{0x0 | x$ 看作二进制时，$x \mod 3 = 1\}$。


0
0
0
1
1
S
ϵ
1
1
0
0
2
1