Tercer entrega.

Leopoldo Lerena

Octubre 2018

Plano rectificante.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con curvatura y torsión nunca nulas. Denotamos $\{T, N, B\}$ a su triedro de Frenet y el *plano rectificante* es el plano con normal N que pasa por α.

Supongamos que todos los planos rectificantes de α están a la misma distancia $c \geq 0$ del origen. Probar que, en los puntos $t \in I$ donde $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$ y donde $\langle T(t), \alpha(t)\rangle$ son distintos de 0 vale la siguiente igualdad

$$||\alpha(t)||^2 = \left(\frac{-\tau c - \frac{\kappa^2 c}{\tau} - \frac{\kappa}{\tau}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}\right)^2 + c^2 + \left(\frac{-\tau c - \frac{\kappa^3 c}{\tau^2} - \frac{\kappa^2}{\tau^2}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}\right)^2.$$

Solución.

Lo primero que voy a hacer es reparametrizar la curva por longitud de arco para eventualmente poder usar Frenet-Serret más comodamente. Claramente este resultado no depende de la parametrización de la curva sino más bien de su traza por lo tanto voy a obtener el mismo resultado. Como tanto la curvatura y la torsión son no nulas tengo un triedro de Frenet-Serret.

Si llamo al plano rectificante a α en el momento t a $R(t) = \langle N(t), \alpha(t)\rangle$, donde $N(t)$ es el vector del triedro de Frenet-Serret. Que su distancia al origen sea constante, es decir que $d(R(t), 0) = c$ para algún $c \in \mathbb{R}_{>0}$ es lo mismo que [1]

$$\langle N(t), \alpha(t)\rangle = c, \qquad \text{para todo t} \in \mathbb{R}.$$

Dado que el triedro de Frenet-Serret es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ puedo escribir $\alpha(t) = \langle T(t), \alpha(t)\rangle T(t) + \langle N(t), \alpha(t)\rangle N(t) + \langle B(t), \alpha(t)\rangle B(t)$ entonces para calcular su norma basta con tomar el producto interno contra sí mismo y dado que es una base ortonormal lo único que sobrevive es

$$||\alpha(t)||^2 = \langle T(t), \alpha(t)\rangle^2 + \langle N(t), \alpha(t)\rangle^2 + \langle B(t), \alpha(t)\rangle^2.$$

Por lo tanto me alcanza con calcular $\langle T(t), \alpha(t)\rangle$ y $\langle B(t), \alpha(t)\rangle$. Para eso uso que la distancia al origen de la recta normal es constante y derivando esta igualdad obtengo lo siguiente. Fijado t.

$$\langle N, \alpha\rangle' = (c)'$$
$$\langle N', \alpha\rangle + \langle N, T\rangle = 0.$$

[1] Acá no me queda claro porqué necesariamente es igual a c y no a $-c$, en tal caso los signos me quedan distintos a los pedidos.

Acá utilizo Frenet-Serret para reescribir N' en términos del triedro y que N es ortogonal a T.

$$\begin{aligned}\langle -\tau B - \kappa T, \alpha(t)\rangle &= 0\\ \langle -\tau B, \alpha\rangle &= \langle \kappa T, \alpha\rangle\\ -\tau\langle B, \alpha\rangle &= \kappa\langle T, \alpha\rangle\end{aligned}$$

Con lo cual llego a la siguiente ecuación que me relaciona los coeficientes que busco.

$$\langle B, \alpha\rangle = -\frac{\kappa}{\tau}\langle T, \alpha\rangle. \tag{1}$$

Entonces derivando esta igualdad obtengo lo siguiente.

$$\langle B', \alpha\rangle + \langle B, T\rangle = -\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\langle T, \alpha\rangle + \frac{\kappa}{\tau}\langle T', \alpha\rangle + \frac{\kappa}{\tau}\langle T, T\rangle.$$

Reacomodando y expandiendo con Frenet-Serret y usando que el triedro es una base ortonormal llego a la igualdad que buscaba. Acá utilizo que $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' \neq 0$ para poder dividir por eso.

$$\begin{aligned}-\tau c &= -\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\langle T, \alpha\rangle - \frac{\kappa^2 c}{\tau} - \frac{\kappa}{\tau}.\\ \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\langle T, \alpha\rangle &= -\tau c - \frac{\kappa^2 c}{\tau} - \frac{\kappa}{\tau}.\\ \langle T, \alpha\rangle &= \frac{-\tau c - \frac{\kappa^2 c}{\tau} - \frac{\kappa}{\tau}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}\end{aligned}$$

Volviendo a 1 puedo reemplazar el valor hallado para llegar a que

$$\langle B, \alpha\rangle = \frac{-\tau c - \frac{\kappa^3 c}{\tau^2} - \frac{\kappa^2}{\tau^2}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}.$$

Juntando todo, esto me dice que

$$||\alpha(t)||^2 = \left(\frac{-\tau c - \frac{\kappa^2 c}{\tau} - \frac{\kappa}{\tau}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}\right)^2 + c^2 + \left(\frac{-\tau c - \frac{\kappa^3 c}{\tau^2} - \frac{\kappa^2}{\tau^2}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}\right)^2.$$

□