Primer entrega.

Leopoldo Lerena

Septiembre 2018

Ejercicio 1

(a)

Quiero descomponer un espacio hiperbólico en una suma de planos hiperbólicos ortogonales entre sí. Acá voy a usar que b es una forma bilineal simétrica. Por lo tanto por el teorema espectral sé que existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_{2p}\}$ tal que diagonaliza a b de la siguiente manera.

$$[b]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como los autovectores se pueden elegir de manera que sean ortogonales entre sí, los espacios generados por ellos mismos también van a ser ortogonales entre sí y de esa manera descomponen al espacio hiperbólico en una suma ortogonal.

$$\mathcal{U} = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_{2p} \rangle$$

Afirmo que sabiendo esto puedo juntar de a pares los espacios generados por los autovectores, ya que la cantidad de autovectores es $2p$. Los pares los elijo de manera que un autovector le corresponda el autovalor $+1$ y al otro autovector le corresponda el autovalor -1. Tomo como candidato $H_i = \langle x_i \rangle \oplus \langle x_{i+p} \rangle$. Veamos que éste es un plano hiperbólico.

Para eso tendría que ver que la forma bilineal b al restringirse es no degenerada y en la signatura tiene la misma cantidad de $+1$ que de -1. Pero esto es claro por como elegí a este subespacio. Si considero la matriz con respecto a la base dada por los generadores x_i y x_{i+p}

$$[b]|_{H_i} = \begin{bmatrix} b(x_i, x_i) & \dfrac{b(x_{p+i}, x_i)}{2} \\ \dfrac{b(x_{p+i}, x_i)}{2} & b(x_{p+i}, x_{p+i}) \end{bmatrix}$$

Y por ser los autovectores de una base ortogonal, lo que obtengo es que la matriz que me queda es la siguiente.

$$[b]|_{H_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se puede ver en esta matriz que la forma bilineal es simétrica y no degenerada dado que 0 no aparece en la diagonal. De manera similar su signatura tiene la misma cantidad de $+1$ que de -1. Esto me dice que es un plano hiperbólico. Por lo tanto basta con tomar la siguiente suma de planos hiperbólicos.

$$\mathcal{U} = H_1 \oplus \dots \oplus H_p$$

(b)

Queremos caracterizar a los vectores isotrópicos de los planos hiperbólicos. Dado que es un espacio vectorial de dimensión 2 existe una base *canónica* que llamaremos E. Para eso voy a volver a usar el teorema espectral para encontrarme la base que diagonaliza

$$D := [b]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sea S la matriz de autovectores que diagonaliza a la forma bilineal. Lo que tenemos es que otra manera de decir que un vector v es isotrópico es la siguiente.

$$b(v,v) = 0 \iff v^t S^t D S v = 0$$

Sea $w = (x, y)$ un vector genérico, veamos cuándo se anula en la forma bilineal.

$$w^t D w = 0 \iff x^2 - y^2 = 0$$

Y esto sucede cuando $x = y$ o bien $x = -y$. Es decir $w \in \langle (1,1) \rangle$ y $w \in \langle (-1,1) \rangle$ Esto nos define ambas rectas pero recordemos que estamos pensandolo en la base ortonormal. Por lo tanto para despejar el vector v tengo que hacer lo siguiente.

$$Sv = w \implies v = S^t w$$

Por lo tanto las rectas que me quedan definidas son las siguientes dos.

$$L_1 := \left\langle S^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$L_2 := \left\langle S^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(c)

Buscamos un subespacio de dimensión p tal que esté formado por vectores isotrópicos. Para eso voy a construir explicitamente este subespacio usando del resultado anterior que puedo descomponer al espacio como una suma directa de planos hiperbólicos.

$$\mathcal{U} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_p$$

De cada plano hiperbólico puedo obtener una recta isotrópica que es un subespacio vectorial de dimensión 1. Si tomo la suma de todas estas rectas obtengo un subespacio de $\mathcal{U}$ de dimensión p. Tendría que chequear que realmente es un subespacio de vectores isotrópicos (dado que claramente es un subespacio). Para eso si defino como $\langle v_i \rangle \subset H_i$ la recta de vectores isotrópicos dentro del i-ésimo espacio hiperbólico. Lo que afirmaba antes es que el siguiente subespacio S cumple lo pedido.

$$S := \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_p \rangle$$

Sea $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ un vector genérico del subespacio S en la escritura de la suma directa. Veamos que $b(v,v) = 0$.

$$\begin{aligned} b(v,v) &= b\left(\sum_1^p \lambda_{i=i} v_i, \sum_1^p \lambda_{i=i} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 b(v_i, v_i) + \sum_{i<j, i=1}^{j=p} \lambda_i \lambda_j b(v_j, v_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Porque los vectores v_i son isotrópicos y son ortogonales con los v_j por estar en distintos planos hiperbólicos que ya son ortogonales entre sí. Por lo tanto el subespacio S es un subespacio isotrópico de dimensión p.

Ejercicio 2

Busco la ecuación normal euclídea de la siguiente cuádrica de $\mathbb{R}^3$.

$$F(x) = x_1^2 + 2x_1x_3 + 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 1 = 0$$

La matriz asociada a la forma bilineal β_f es la siguiente.

$$\beta_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tal que si calculo sus autovalores y autovectores obtengo lo siguiente.

- $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $v_1 = (\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), 0, 1)$
- $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, $v_2 = (\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), 0, 1)$
- $\lambda_3 = 0$, $v_3 = (0, 1, 0)$

En este caso los autovectores están sin normalizar por lo tanto los normalizo $v_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ y $v_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$ Llamaré O a la matriz ortonormal que tiene como columnas a los autovectores de la forma bilineal y D la matriz diagonal que tiene los autovalores λ_i. Entonces la forma cuadrática la puedo escribir de la siguiente manera.

$$F(x) = x^t ODO^t x + b^t OO^t x - 1 \tag{1}$$

Calculo $O^t x$ que me va a dar mis nuevas coordenadas. Denotaré al vector como $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})$ En este caso me queda,

$$O^t x = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\|v_1\|}(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x_1 + x_3) \\ \dfrac{1}{\|v_2\|}(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x_1 + x_3) \\ x_2 \end{bmatrix}$$

En este caso la parte lineal de la cuádrica nos queda lo siguiente.

$$b^t O(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})^t = \left(\frac{4+2\sqrt{5}}{\|v_1\|}, \frac{3}{\|v_2\|}, 4 \right) (\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})^t$$

Expandiendo la fórmula 1 nos queda

$$F \sim \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\tilde{x}_2^2 + \frac{4+2\sqrt{5}}{\|v_1\|}\tilde{x}_1 + \frac{3}{\|v_2\|}\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 - 1$$

Completando cuadrados me queda de la siguiente forma canónica. En este corresponde a una $C_{2,1}$ que es un *paraboloide hiperbólico.*

$$F \sim \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x_1^2 + \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x_2^2 - 4x_3$$

Definimos la transformación ortogonal afín f que manda la base que hace que la cuádrica esté en su forma canónica a la base estándar de $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera.

$$f\left(\frac{1}{\|v_1\|}(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x_1+x_3)-\frac{4+2\sqrt{5}}{\|v_1\|}\right)=x_1$$
$$f\left(\frac{1}{\|v_2\|}(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x_1+x_3)-\frac{3}{\|v_2\|}\right)=x_2$$
$$f\left(x_2-\left(\frac{3}{\|v_2\|}\right)^2-\left(\frac{4+2\sqrt{5}}{\|v_1\|}\right)^2\right)=x_3$$

Pero lo que nos piden es hallar la inversa de esta transformación lineal, esto es f^{-1} [1]. Ésta nos va a mandar la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base tal que la cuádrica tiene la forma canónica. Esta transformación afín ortogonal $g := f^{-1}$ hace que nos quede

$$G(x) := F(g(x)) \sim \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x_1^2+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x_2^2-4x_3$$

[1] A la inversa no la escribí explicitamente porque quedaba una expresión muy complicada. Esto me hace sospechar que quizá cometí un error de cuentas que no logré encontrar.