Segunda entrega.

Leopoldo Lerena

Septiembre 2018

Clasificación de cuádricas en el espacio proyectivo.

Un conjunto $Q \subset \mathbb{P}^n(k)$ se llama cuádrica proyectiva si existe F polinomio homogéneo de grado 2 en $n+1$ variables tal que

$$Q = \{[v] \in \mathbb{P}^n(k) : F(v) = 0\}$$

(a) Si $k = \mathbb{R}$, probar que existe un isomorfismo proyectivo T tal que $T(Q) = \mathcal{C}(G_{p,r})$ con $G_{p,r}$ de la siguiente forma

$$G_{p,r} = \sum_{i=0}^{p} {X_i}^2 - \sum_{i=p+1}^{r} {X_i}^2, \qquad 0 \leq p \leq r \leq n, \qquad r \leq 2p+1.$$

Probar que el par (p, r) no depende de la elección de T.

Solución. Como la cuádrica está dada por un polinomio homogéneo de grado 2 en n+1 variables se corresponde a

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{ii}{X_i}^2 + \sum_{i,j} 2a_{ij}X_iX_j = 0.$$

Esto lo puedo pensar de la siguiente manera, si defino la matriz simétrica $A = (a_{ij})_{ij}$ que tiene como entradas los coeficientes de la cuádrica

$$0 = F(x)$$
$$0 = x^t Ax.$$

Dado que es simétrica y sobre los reales, puedo encontrar una matriz ortogonal B tal que la diagonaliza. En particular por ser ortogonal, es inversible y por lo tanto pertenece a $Gl_{n+1}(k)$, pero tendría que ver que no es una homotecia para que sea un isomorfismo proyectivo. Las únicas homotecias ortogonales son la identidad y (-1) por la identidad. En ambos casos me diría que la matriz A ya estaba diagonalizada. Por lo tanto una vez diagonalizada, si D es la matriz diagonal con los elementos $d_{ii} \in \mathbb{R}$, pude reescribirlo como

$$0 = F(x)$$
$$0 = x^t B^t ABx$$
$$0 = x^t Dx.$$

Lo que acabo de hacer se puede hace idénticamente para cuádricas homogeneas (de tipo A) en el plano afín que ya sabemos que son de la forma $G_{p,r}$ por lo tanto esto me dice que la tengo escrita así

$$G = \sum_{i=0}^{p} d_{ii}{X_i}^2 - \sum_{i=p+1}^{r} d_{ii}{X_i}^2, \qquad 0 \leq p \leq r \leq n, \qquad r \leq 2p+1.$$

Faltaría que los d_{ii} sean $+1$ o -1. Para eso necesito unas transformaciones proyectivas con matrices asociadas S_i para $0 \leq i \leq r$ tales que

$$\sum_{i=0}^{p} {X_i}^2 - \sum_{i=p+1}^{r} {X_i}^2 = x^t {S_r}^{-1} \dots {S_0}^{-1} D S_0 \dots S_r x.$$

Puedo tomar como S_i la transformación proyectiva con matriz asociada diagonal definida como $s_{jj} = 1$ para $j \neq i$ y $s_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ [1]. Es una transformación proyectiva porque en particular no es una homotecia y es inversible. □

(b) Sea $Q = \mathcal{C}(F)$ una cuádrica, donde

$$F = x^2 + y^2 - z^2.$$

Mostrar que la parábola, la hipérbola y la elipse son secciones de Q por planos afines.

Solución. Busco planos afines tales que al intersecarlos con Q obtenga una parábola, una hipérbola y una elipse.

Para obtener una elipse considero el plano afín que tiene los puntos con coordenada z igual a 1, lo defino como $\mathbb{A}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{P}^n(k) : z = 1\}$. En tal caso la intersección $Q \cap \mathbb{A}_1$ consiste en

$$F(x) = x^2 + y^2 - 1^2 = x^2 + y^2 - 1.$$

La cuádrica que define es una elipse.

Para obtener una hipérbola considero el plano afín que tiene los puntos con coordenada y igual a 1, de manera similar defino $\mathbb{A}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{P}^n(k) : y = 1\}$. Tal que la intersección $Q \cap \mathbb{A}_2$ consiste en

$$F(x) = x^2 + 1^2 - z^2 = x^2 + 1^2 - z^2.$$

La cuádrica que queda definida es una hipérbola.

Para obtener una parábola voy a tener que considerar el plano afín dado por los puntos que tienen coordenada z igual a $1 + y$. Lo defino como $\mathbb{A}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{P}^n(k) : z = 1 + y\}$. La intersección $Q \cap \mathbb{A}_2$ consiste en

$$F(x) = x^2 + y^2 - (1+y)^2 = x^2 + y^2 - y^2 + 2y - 1.$$
$$F(X) = x^2 + 2y - 1.$$

La cuádrica que quedó definida es una parábola. □

[1]Esto nos dice que sobre el cuerpo de los complejos todas las cuádricas proyectivas son definidas positivas.