Primer entrega.

Leopoldo Lerena

Septiembre 2018

Ejercicio 1

(a)

Sean U un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, b una forma bilineal simétrica en U y Q la forma cuadrática asociada a b. Decimos que U es un espacio hiperbólico si b es no degenerada y si signatura tiene igual cantidad de 1 que de -1. En particular, esto implica que dim(U) $= 2p$ y que la signatura de b es $(2p, p)$. Si la dimensión de U es 2, decimos que U es un plano hiperbólico.

Quiero descomponer un espacio hiperbólico en una suma de planos hiperbólicos ortogonales entre sí. Acá voy a usar que b es una forma bilineal simétrica no degenerada. Por lo tanto existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_{2p}\}$ de $\mathcal{U}$ tal que la matriz asociada a b es de la siguiente manera.

$$[b]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como los autovectores son ortogonales entre sí, los espacios generados por ellos mismos también van a ser ortogonales entre sí y de esa manera descomponen al espacio hiperbólico en una suma ortogonal.

$$\mathcal{U} = \langle x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_{2p} \rangle.$$

Afirmo que sabiendo esto puedo juntar de a pares los espacios generados por los autovectores, ya que la cantidad de autovectores es $2p$. Los pares los elijo de manera que un autovector le corresponda el autovalor $+1$ y al otro autovector le corresponda el autovalor -1. Tomo como candidato $H_i = \langle x_i \rangle \oplus \langle x_{i+p} \rangle$. Veamos que éste es un plano hiperbólico.

Para eso tendría que ver que la forma bilineal b al restringirse es no degenerada y en la signatura tiene la misma cantidad de $+1$ que de -1.

$$[b]|_{H_i} = \begin{bmatrix} b(x_i, x_i) & \dfrac{b(x_{p+i}, x_i)}{2} \\ \dfrac{b(x_{p+i}, x_i)}{2} & b(x_{p+i}, x_{p+i}) \end{bmatrix}.$$

Y dado que por cómo los elegí antes de manera que $b(v, w) = 0$ para todo $v \in H_i$,$w \in H_j$ con $j \neq i$, la matriz asociada resulta ser

$$[b]|_{H_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tenemos finalmente una descomposición de $\mathcal{U}$ en suma directa de planos hiperbólicos de la siguiente manera

$$\mathcal{U} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_p.$$

(b)

Un vector v en U se dice isotrópico si es ortogonal a si mismo, es decir, si $b(v, v) = 0$. Probar que en un plano hiperbólico los vectores isotrópicos son la unión de dos rectas que pasan por el origen.

Queremos caracterizar a los vectores isotrópicos de los planos hiperbólicos. Sea H un plano hiperbólico. Considero la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ que hace que la matriz asociada a la forma bilineal b sea de la siguiente forma

$$[b]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Un vector $v \in H$ genérico se escribe como $v = rv_1 + sv_2$. Por definición de isotrópico cumple que

$$b(v, v) = 0 \quad \text{sí y solo si} \quad v_{\mathcal{B}}^t [b]_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} = 0.$$

Expandiendo esto es lo mismo que ver que

$$r^2 - s^2 = 0.$$

Esto dice que los módulos deben ser iguales, es decir que $|r| = |s|$. Nos definidas dos rectas L_1, L_2 que son

$$\begin{aligned} L_1 &= \{u \in \mathcal{U} : u = \lambda(v_1 + v_2), \lambda \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &= \{u \in \mathcal{U} : u = \lambda(v_1 - v_2), \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(c)

Un subespacio S se dice isotrópico si está formado por vectores isotrópicos. Probar que en todo espacio hiperbólico de dimensión $2p$ existen subespacios isotrópicos de dimensión p.

Buscamos un subespacio de dimensión p tal que esté formado por vectores isotrópicos. Para eso voy a construir explicitamente este subespacio usando del resultado anterior que puedo descomponer al espacio como una suma directa de planos hiperbólicos.

$$\mathcal{U} = H_1 \oplus \cdots \oplus H_p$$

De cada plano hiperbólico puedo obtener una recta isotrópica que es un subespacio vectorial de dimensión 1. Si tomo la suma de todas estas rectas obtengo un subespacio de $\mathcal{U}$ de dimensión p. Tendría que chequear que realmente es un subespacio de vectores isotrópicos (dado que claramente es un subespacio). Para eso si defino como $\langle v_i \rangle \subset H_i$ la recta de vectores isotrópicos dentro del i-ésimo espacio hiperbólico. Lo que afirmaba antes es que el siguiente subespacio S cumple lo pedido.

$$S \coloneqq \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_p \rangle$$

Sea $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ un vector genérico del subespacio S en la escritura de la suma directa. Veamos que $b(v, v) = 0$.

$$\begin{aligned} b(v, v) &= b\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 b(v_i, v_i) + \sum_{i<j, i=1}^{j=p} \lambda_i \lambda_j b(v_j, v_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Porque los vectores v_i son isotrópicos y son ortogonales con los v_j por estar en distintos planos hiperbólicos que ya son ortogonales entre sí. Por lo tanto el subespacio S es un subespacio isotrópico de dimensión p.

Ejercicio 2

Determinar la ecuación normal euclídea de la siguiente cuádrica en $\mathbb{R}^3$, especificando la transformación ortogonal afín que actúa sobre ella para obtenerla.

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 1 = 0. \tag{1}$$

Busco la ecuación normal euclídea de la siguiente cuádrica de $\mathbb{R}^3$.

$$F(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 1 = 0$$

La matriz asociada a la forma bilineal β_f es la siguiente.

$$\beta_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tal que si calculo sus autovalores factorizando el polinomio característico de la matriz $XI - \beta_f$ y los autovectores calculando el núcleo de $\lambda I - \beta_f$, donde λ es un autovalor, obtengo los siguientes resultados

- $\lambda_1 = 2$, $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$
- $\lambda_2 = -1$, $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$
- $\lambda_3 = 0$, $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$.

Llamaré O a la matriz ortonormal que tiene como columnas a los autovectores de la forma bilineal y D la matriz diagonal que tiene los autovalores λ_i. Entonces la forma cuadrática la puedo escribir de la siguiente manera.

$$F(x) = x^tODO^tx + b^tOO^tx - 1 \tag{2}$$

Calculo $\tilde{x} = O^tx$ que me va a dar mis nuevas coordenadas. En este caso me queda,

$$O^tx = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2x_1 + x_2 + x_3\right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-x_1 + x_2 + x_3\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2 - x_3\right) \end{bmatrix}$$

En este caso la parte lineal de la cuádrica nos queda lo siguiente.

$$b^tO(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})^t = \left(\frac{22}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{2}}\right)(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})^t$$

Desarrollando y completando cuadrados nos queda la expresión

$$\begin{aligned} F(x) = x^t ODO^t x + b^t OO^t x - 1 = 2x_1^2 - x_2^2 + \frac{22}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{4}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{6}{\sqrt{2}}x_3 - 1 = \\ = (\sqrt{2}x_1 + \frac{11}{2\sqrt{3}})^2 - (x_2 + \frac{2}{\sqrt{3}})^2 - 3\sqrt{2}(x_3 + \frac{13}{4\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

En este caso se corresponde a una $C_{(2,-1,0),3\sqrt{2}}$.

$$F \sim 2x_1^2 - x_2^2 - 3\sqrt{2}x_3$$

Definimos la transformación ortogonal afín f que manda la base que hace que la cuádrica esté en su forma canónica a la base estándar de $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} f(\tilde{x_1}) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 + x_2 + x_3) - \frac{11}{\sqrt{6}} \\ f(\tilde{x_2}) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-x_1 + x_2 + x_3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ f(\tilde{x_3}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2 - x_3 - \frac{13}{4\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Ésta nos va a mandar la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base tal que la cuádrica tiene la forma canónica. Esta transformación afín ortogonal f es la que hace que nos quede

$$G(x) \coloneqq F(f(x)) \sim 2x_1^2 - x_2^2 + x_3$$