Geometría Proyectiva

Primera Entrega

Ron Astorga

4 de septiembre de 2018

Ejercicio 1

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, b una forma bilineal simétrica en $\mathcal{U}$ y Q la forma cuadrática asociada a b. Decimos que $\mathcal{U}$ es un espacio hiperbólico si b es no degenerada y si signatura tiene igual cantidad de 1 que de -1. En particular, esto implica que $\dim(\mathcal{U}) = 2p$ y que la signatura de b es $(2p, p)$. Si la dimensión de $\mathcal{U}$ es 2, decimos que $\mathcal{U}$ es un plano hiperbólico.

(a) Probar que todo espacio hiperbólico se puede descomponer como suma directa ortogonal de planos hiperbólicos.

(b) Un vector v en $\mathcal{U}$ se dice isotrópico si es ortogonal a si mismo, es decir, si $b(v, v) = 0$. Probar que en un plano hiperbólico los vectores isotrópicos son la unión de dos rectas que pasan por el origen.

(c) Un subespacio S se dice isotrópico si está formado por vectores isotrópicos. Probar que en todo espacio hiperbólico de dimensión $2p$ existen subespacios isotrópicos de dimensión p

Solución:

Como b es una forma bilineal no degenerada, existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$, $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_{2p}\}$ tal que la matriz asociada a b es de la forma:

$$[b]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considero ahora para cada $i = 1, ..., p$,

$$H_i := \langle v_i, v_{2p+1-i} \rangle$$

Es claro que cada H_i es subespacio de $\mathcal{U}$ (pues todos forman una base de $\mathcal{U}$), y que cada uno es de dimensión 2. Ademas tomando la restricción de b a cada H_i tenemos que $b|_{H_i}$ es forma bilineal simétrica, no degenerada y de signatura $(2, 1)$, con lo cual cada H_i resulta ser un plano hiperbólico. Ahora bien, por la forma en que elegimos a los H_i resulta:

$$b(v, w) = 0, \forall v \in H_i, w \in H_j, j \neq i$$

Tenemos finalmente una descomposición de $\mathcal{U}$ como

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{i=1}^{p} H_i \tag{1}$$

(b) Dado un plano hiperbólico H, tomo la base $B = \{v_1, v_2\}$ que hace que la matriz asociada a la forma bilineal b sea de la forma::

$$[b]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos que un vector isotrópico $v \in H \iff v = rv_1 + sv_2; r, s \in \mathbb{R}$ cumple:

$$0 = b(v, v) = v_B^t [b]_B v_B \iff 0 = r^2 - s^2 \iff |r| = |s| \iff v \in L_1 \cup L_2$$

donde:

$$\begin{cases} L_1 := \{u \in \mathcal{U} : u = r(v_1 + v_2), r \in \mathbb{R}\} \\ L_2 := \{u \in \mathcal{U} : u = r(v_1 - v_2), r \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

luego esto nos dice que los vectores isotrópicos de un hiperplano son la unión de las rectas L_1 y L_2 que pasan por el origen.

(c) Dado un espacio hiperbólico $\mathcal{U}$ consideremos la descomposición en planos hiperbólicos ortogonales (1). Por el ítem anterior tenemos que en cada plano H_i podemos encontrar un vector isotrópico w_i para cada $i = 1, ..., p$. Tomando $\mathcal{S} := \langle w_1, ..., w_p \rangle$ tenemos que $\mathcal{S}$ es subespacio isotrópico de $\mathcal{U}$ y es de dimensión p pues elegimos a cada w_i en planos distintos y ortogonales dos a dos.

$\square$

Ejercicio 2

Determinar la ecuación normal euclídea de la siguiente cuádrica en $\mathbb{R}^3$, especificando la transformación ortogonal afín que actúa sobre ella para obtenerla.

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 1 = 0$$

Solución: Llamemos C a la cuádrica dada y observemos que:
$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 1 =$
$x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3 + 3) + (x_2 + x_3 + 3)^2 - (x_2 + x_3 + 3)^2 + 2x_2 + 8x_3 - 1 =$
$(x_1 + x_2 + x_3 + 3)^2 - (x_2 + x_3 + 3)^2 + 2x_2 + 8x_3 - 1$

Afirmación: La cuadrica dada C es equivalente a una de la forma $C_{2,1}$
Demostración: Consideremos la transformación:

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{cases} T(x_1 + x_2 + x_3 + 3) = x \\ T(x_2 + x_3 + 3) = y \\ T(-2x_2 - 8x_3 + 1) = z \end{cases}$$

T es transformación afín pues $Tv = Av + b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Para obtener la transformación que actúa sobre la cuádrica $C_{2,1}$ basta observar que: $T^{-1}v = A^{-1}v - (A^{-1}b)$ efectivamente mapea la cuádrica $C_{2,1}$ dada por: $x^2 - y^2 - z = 0$ a la original y esto es claro por la forma en que definimos la transformación T.

Para terminar demos la forma explicita de la transformación afin T^{-1} la cual está determinada por la inversa de la matriz A: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1/6 \\ 0 & -1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$
Luego: $T^{-1}v = A^{-1}v - (A^{-1}b)$ satisface $T^{-1}(C_{2,1}) = C$

□