

Capítulo 1

Teoría de Bass–Serre.

La mayoría de las construcciones de esta sección siguen la exposición de [?] aunque la notación no es exactamente la misma sino que es similar a la utilizada en el trabajo [?]

§1.1. Definiciones básicas.

DEFINICIÓN 1.1.1. Un *grafo dirigido* es un par ordenado $Y = (V, E)$ tal que al conjunto V lo llamaremos los *vértices* y al conjunto E las *aristas*. Para cada arista $y \in E$ tendremos unas asignaciones $s(y) = P \in V, t(y) = Q \in V$. A su vez para cada $y \in E$ existe una única arista $\bar{y} \in E$ que cumple que $s(\bar{y}) = Q, t(\bar{y}) = P$.

Si queremos referirnos a los vértices de un grafo Y en particular notaremos $V(Y)$ a sus vértices y similarmente $E(Y)$ a sus aristas. Dos vértices $P, Q \in V$ están unidos por una arista y si $s(y) = P, t(y) = Q$ o bien $s(y) = Q, t(y) = P$.

DEFINICIÓN 1.1.2. Sea Y un grafo dirigido. Una *orientación* de las aristas de Y es un subconjunto $A \subset E$ que cumple que para cada par de vértices unido por una arista y tenemos que $y \in A \iff \bar{y} \notin A$.

DEFINICIÓN 1.1.3. Dado un grafo dirigido Y y dos vértices $P, Q \in V$ un *camino* entre P y Q es una sucesión finita de aristas y_0, \dots, y_k de manera que $s(y_0) = P, t(y_k) = Q$ y tal que para todo $0 \leq i \leq k$ vale que $y_i \in E$ y que $t(y_i) = s(y_{i+1})$.

Un grafo es *conexo* si para todo par de vértices $P, Q \in V$ existe un camino entre ellos. Un *ciclo* es un camino de aristas y_0, y_1, \dots, y_k de manera que $s(y_0) = t(y_k)$. Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.

Dado un grafo Y conexo diremos que T es un *árbol generador* de Y si $V(T) = V(Y)$ y $E(T) \subseteq E(Y)$.

|| **PROPOSICIÓN 1.1.4.** Dado un grafo conexo Y existe un árbol generador T de Y .

Demostración. Ver [?].

■

DEFINICIÓN 1.1.5. Sean Y, Y' grafos dirigidos. Un par de funciones $\phi_V : V(Y) \rightarrow V(Y')$ y $\phi_E : E(Y) \rightarrow E(Y')$ que denotaremos $\phi : Y \rightarrow Y'$ es un *morfismo de grafos* si:

- Para todo $y \in E(Y)$ vale que $\overline{\phi(y)} = \phi(\bar{y})$;
- Para todo $y \in E(Y)$ vale que $\phi(s(y)) = s(\phi(y))$;
- Para toda $y \in E(Y)$ vale que $\phi(t(y)) = t(\phi(y))$.

Un *automorfismo* de grafos dirigidos va a ser un morfismo que tenga una inversa. Los automorfismos de un grafo dirigido Y forman un grupo con la composición que denotaremos $\text{Aut}(Y)$.

Como tenemos automorfismos de grafos podemos definir una acción de un grupo sobre un grafo dirigido.

DEFINICIÓN 1.1.6. Sea G un grupo y sea Y un grafo dirigido luego G actúa sobre Y si existe un morfismo de grupos $\psi : G \rightarrow \text{Aut}(Y)$. Diremos que una acción *no tiene inversiones* si para todo $g \in G$ y para toda $y \in E$ tenemos que $\psi(g)(y) \neq \bar{y}$.

Utilizaremos la notación estándar $g \cdot y$ para refererinos a $\psi(g)(y)$. Ahora podemos definir los objetos centrales a la teoría de Bass-Serre.

DEFINICIÓN 1.1.7. Dado un grafo dirigido Y . Un *grafo de grupos* \mathcal{G} sobre Y está definido por lo siguiente:

1. Para cada vértice $P \in V$ tenemos un grupo G_P .
2. Para cada arista $y \in E$ tenemos un subgrupo G_y de $G_{s(y)}$.
3. Para todo $y \in E$ tenemos un isomorfismo de G_y a $G_{\bar{y}}$ que denotaremos por $a \mapsto a^{\bar{y}}$ tal que $(a^{\bar{y}})^y = a$ para todo $a \in G_y$.

Dado un grafo $Y = (V, E)$ sea F_E el grupo libre generado por las aristas del grafo.

DEFINICIÓN 1.1.8. Dado un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo $Y = (V, E)$ consideremos el siguiente grupo:

$$F(\mathcal{G}) = \left(\ast_{P \in V} G_P \ast F_E \right) / \langle\langle R \rangle\rangle$$

donde el conjunto de relaciones por las que dividimos es

$$R = \{ \bar{y} a^y y = a^{\bar{y}} \text{ para toda } y \in E \text{ y todo } a \in G_y \}$$

DEFINICIÓN 1.1.9. Sea un grafo de grupos \mathcal{G} sobre Y . Consideremos T un árbol de expansión del grafo Y . El *grupo fundamental del grafo de grupos* es

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = F(\mathcal{G}) / \{ y \mid y \in E(T) \}.$$

OBSERVACIÓN 1.1.10. Para cada arista $y \in E(Y)$ notaremos por g_y a la imagen de $y \in F_E$ en el cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

EJEMPLO 1.1.11. Sea un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo Y tal que $G_y = \{1\}$ para todo $y \in E(Y)$. Consideremos una orientación A para las aristas del grafo. El grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ está generado por los elementos $g \in G_P$ donde $P \in V(Y)$ y los elementos $g_y \in A \setminus (T \cap A)$. Por lo tanto obtenemos que el grupo fundamental de este grafo de grupos resulta ser

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = \ast_{P \in V(Y)} G_P \ast F_{A \setminus (T \cap A)}$$

Si reescribimos esto recordando que el grupo fundamental de un grafo como espacio topológico es isomorfo al grupo libre en el conjunto de sus aristas que no pertenecen a un árbol de expansión nos queda que

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \ast_{P \in V(Y)} G_P \ast \pi_1(Y)$$

EJEMPLO 1.1.12. Si el grafo Y es un segmento en particular él mismo es el árbol de expansión puesto que es un árbol. De esta manera si Y es el siguiente segmento de grupos,

$$G_P \bullet \xrightarrow{G_y} \bullet G_Q$$

entonces el grupo fundamental de este grafo de grupos resulta ser el producto amalgamado

$$\pi_1(\mathcal{G}, Y) = G_P \ast_{G_y} G_Q.$$

donde acá estamos abusando levemente la notación para decir que G_y es subgrupo de G_Q cuando realmente es subgrupo de G_P . Dado que $G_y \simeq G_{\bar{y}}$ por ser un grafo de grupos entonces podemos escribirlo de esta manera.

Nuestro foco ahora es dar una definición equivalente de grupo fundamental pero esta vez usando caminos así como lo hacemos para el grupo fundamental usual de un espacio topológico.

Dados dos vértices $P, Q \in V(Y)$ denotaremos por $\Pi(P, Q)$ el conjunto de caminos de P a Q . De esta manera nos queda definido

$$\Pi(P, Q) = \{y_1, \dots, y_k \mid s(y_1) = P, t(y_k) = Q, t(y_i) = s(y_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$$

Todo camino $y_1, \dots, y_k \in \Pi(P, Q)$ lo podemos pensar como la palabra $y_1 \dots y_k$ en el grupo libre F_E y similarmente podemos mirar la clase de $y_1 \dots y_k$ en el cociente $F(\mathcal{G})$.

DEFINICIÓN 1.1.13. Dado \mathcal{G} grafo de grupos sobre Y grafo conexo y $P, Q \in V$ dos vértices de Y definimos el siguiente subconjunto de $F(\mathcal{G})$,

$$\pi(\mathcal{G}, P, Q) = \{g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k : y_1, \dots, y_k \in \Pi(P, Q), \forall i, 1 \leq i < k, g_i \in G_{s(y_{i+1})}, g_k \in G_Q\}$$

|| **PROPOSICIÓN 1.1.14.** Para todo $P \in V$ tenemos que $\pi(\mathcal{G}, P, P)$ es un subgrupo de $F(\mathcal{G})$.

Demostración. Debemos ver que tiene a la identidad del grupo, que es cerrado por el producto y que todo elemento tiene un inverso.

Si consideramos el camino vacío y $g_0 = 1$ luego obtenemos que $1 \in \pi(\mathcal{G}, P, P)$. Para ver que es cerrado por el producto notemos que

$$(g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k) \circ (g'_0 y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k) = g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k (g_k g'_0) y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k$$

donde $g_k g'_0 \in G_P$ por lo tanto su producto está bien definido y en definitiva nos queda otro elemento de $\pi(\mathcal{G}, P, P)$ tal como queríamos ver. Finalmente vemos que es cerrado por inversos porque si tomamos el elemento $g_0 y_1 \dots y_k g_k$ su inverso resulta ser $g_k^{-1} \bar{y}_k \dots \bar{y}_1 g_0^{-1} \in \pi(\mathcal{G}, P, P)$. ■

DEFINICIÓN 1.1.15. El grupo fundamental de \mathcal{G} respecto a un punto base P se define como $\pi_1(\mathcal{G}, P) = \pi(\mathcal{G}, P, P)$.

Notemos que en particular para esta construcción obtuvimos un subgrupo del grupo $F(\mathcal{G})$ mientras que en el caso de la definición anterior del grupo fundamental 1.1.9 obtuvimos un cociente. Podemos ver que ambas definiciones son equivalentes porque tenemos un isomorfismo como grupos.

|| **TEOREMA 1.1.16.** $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Demostración. Veamos que la composición de la inclusión $\iota : \pi_1(\mathcal{G}, P) \rightarrow F(\mathcal{G})$ con la proyección $\pi : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$ es un isomorfismo.

Dados $P, Q \in V(Y)$ consideremos la geodésica α que los une sobre T . Si leemos la sucesión de aristas que recorre esta geodésica tenemos una palabra en $T[P, Q] \in F_{E(Y)}$ de manera que nos define un elemento en el grupo $F(\mathcal{G})$. Ahora definamos el siguiente morfismo (que depende del árbol de expansión que tomamos):

$$\begin{aligned} \tau : \bigstar_{P \in V} G_P \ast F_E &\rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P) \\ \tau(y) &= T[P, s(y)] y T[t(y), P] \text{ para } y \in E(Y) \\ \tau(g) &= T[P, Q] g T(Q, P) \text{ para } Q \in V(Y), g \in G_Q \end{aligned}$$

Lo definimos sobre los generadores del producto libre. Notemos que $T[P, s(y)] y T[t(y), P) \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$ porque $T[P, s(y)] y T[t(y), P]$ es un camino en $\Pi(P, P)$. Similarmente vemos que $\tau(g) \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$.

Veamos que esto nos define un morfismo sobre $F(\mathcal{G})$. Debemos ver que cumple la relación $\tau(\bar{y} a^y y) = \tau(a^{\bar{y}})$ para toda arista $y \in E(Y)$. Esto vale porque justamente

$$\begin{aligned} \tau(\bar{y} a^y y) &= T[P, s(\bar{y})] \bar{y} T[t(\bar{y}), P] T[P, s(y)] a^y T[t(y), P] T[P, s(\bar{y})] y T[t(y), P] \\ &= T[P, s(\bar{y})] \bar{y} a^y y T[t(y), P] \\ &= \tau(a^{\bar{y}}). \end{aligned}$$

Es un epimorfismo porque en particular todo elemento de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es un camino que termina y comienza en P intercalado con elementos de los estabilizadores de los vértices que aparecen en el camino. De esta manera como $\tau(y) = 1$ para todo $y \in E(T)$, notemos que pasa al cociente y existe $\bar{\tau} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P)$ epimorfismo.

Para terminar la demostración probemos que componiendo con ν nos queda la identidad. Si hacemos $\nu \circ \bar{\tau}$ notemos que

$$\nu \circ \bar{\tau}(a^y) = a^y, \quad \nu \circ \bar{\tau}(y) = y,$$

para $y \in E(Y) \setminus E(T)$ porque justamente estamos dividiendo por estas aristas. Esto porque $T[P, Q]$ es un camino de aristas en el árbol de expansión por lo tanto sobre $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ son la identidad. ■

Como corolario de este resultado vimos que el grupo fundamental de un grafo no depende del árbol de expansión que tomemos porque siempre va a resultar isomorfo al grupo fundamental a partir de un vértice arbitrario del grafo.

§1.2. Casos particulares.

En esta sección vamos entender como podemos escribir los elementos de los grupos fundamentales de algunos grafos de grupos más elementales. La idea, aparte de ejemplificar en unos casos en particular, es que más adelante nos va a servir para reducir proposiciones sobre grafos finitos arbitrarios a grafos de estas formas. Entonces probar resultados sobre otros grafos se va a reducir a la demostraciones que tengamos de estos otros casos bases más comprendidos.

1.2.0.1. Segmentos y grupos amalgamados.

Consideremos que nuestro grafo de grupos \mathcal{G} está dado sobre cierto segmento Y de la siguiente pinta,

$$P \bullet \xrightarrow{y} \bullet Q$$

Por lo visto en la sección anterior sabemos que su grupo fundamental el producto amalgamado $G_P *_{G_y} G_Q$. Vamos a construir una manera de escribir a los elementos de este producto amalgamado.

Para eso sean S transversal a izquierda de G_y en G_P y T transversal a izquierda de G_y en G_Q . Las *formas normales* van a ser sucesiones (x_0, x_1, \dots, a) tales que $a \in G_y$ y $x_i \in S \setminus \{1\}$ o bien $x_i \in T \setminus \{1\}$ y no hay elementos consecutivos x_i, x_{i+1} en el mismo conjunto de representantes.

A continuación veremos un resultado que nos servirá para tener una escritura única y particular de cada palabra sobre los generadores de un grupo amalgamado.

|| **PROPOSICIÓN 1.2.1.** *Para todo elemento g de un grupo amalgamado $G_P *_{G_y} G_Q$ existe una única forma normal (x_0, x_1, \dots, a) tal que $g = x_0 x_1 \dots a$.*

Demostración. Ver [?] ■

1.2.0.2. Bucles y grupos HNN.

Si el grafo Y resulta ser un bucle tiene la siguiente pinta:



entonces no tiene árbol de expansión de manera que esto nos dice que $F(\mathcal{G}) \simeq \pi_1(\mathcal{G})$. Notaremos por a a cada elemento de G_y mientras que notaremos por \bar{a} a la imagen por el isomorfismo de a en el grupo $G_{\bar{y}}$. Sea g el generador de F_y , es decir el correspondiente a la única arista de este grafo. En este caso las relaciones que tenemos en nuestro grupo son las siguientes

$$g^{-1}ag = \bar{a} \quad \text{para todo } a \in G_y.$$

De esta manera tenemos que una presentación de nuestro grupo es la siguiente

$$\pi_1(\mathcal{G}) = \langle G_P, g \mid g^{-1}ag = \bar{a}, a \in G_y \rangle$$

es decir el grupo fundamental de este grafo de grupos resulta ser una extensión HNN del estabilizador del vértice que denotaremos $G_P^{*G_y}$.

Así como hicimos en los grupos amalgamados podemos considerar formas normales en estos grupos. Sea S conjunto transversal a izquierda de G_y en G_P y sea T conjunto transversal de $G_{\bar{y}}$ en G_P . Una *forma normal para una extensión HNN* va a ser una sucesión

$$(x_0, g^{\epsilon_0}, x_1, g^{\epsilon_1}, \dots, x_n, g^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

donde $x_0 \in G_P$ es algún elemento arbitrario de este grupo. Donde $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$. En el caso que $\epsilon_i = 1$ entonces $x_i \in S \setminus \{1\}$ mientras que en el caso que $\epsilon_i = -1$ tenemos que $x_i \in T \setminus \{1\}$.

Ahora veamos un resultado análogo al que demostramos anteriormente para grupos amalgamados que nos dirá una manera de escribir las palabras en estos grupos.

PROPOSICIÓN 1.2.2. *Para todo elemento $g \in G_P^{*G_y}$ existe una única forma normal*

$$(x_0, g^{\epsilon_0}, x_1, g^{\epsilon_1}, \dots, x_n, g^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

tal que $g = x_0 g^{\epsilon_0} x_1 g^{\epsilon_1} \dots x_n g^{\epsilon_n} h$.

Demostración. Ver [?] ■

Un refinamiento de esta proposición nos dice una condición necesaria para que una forma normal no represente el neutro del grupo. Consideremos una sucesión

$$(x_0, g^{\epsilon_0}, x_1, g^{\epsilon_1}, \dots, x_n, g^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

no necesariamente en forma normal. Esto es que supongamos que $x_i \in G_P$ para todo i . Diremos que esta sucesión es *reducida* si no tiene subsucesiones t^{-1}, x_i, t con $x_i \in A$ o bien tal que t, x_i, t^{-1} con $x_i \in B$. Esto es que no nos aparezcan como subpalabras relaciones del grupo.

TEOREMA 1.2.3 (Britton). Si $x_0 g^{\epsilon_0} x_1 g^{\epsilon_1} \dots x_n g^{\epsilon_n} x_{n+1} = 1$ entonces la sucesión

$$(x_0, g^{\epsilon_0}, x_1, g^{\epsilon_1}, \dots, x_n, g^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

no está reducida.

Demostración. Ver [?]. ■

§1.3. Palabras reducidas.

Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo conexo Y . En esta sección vamos a caracterizar los elementos del grupo $F(\mathcal{G})$ a partir de sucesiones reducidas tal como hicimos en el caso particular de los productos amalgamados y las extensiones HNN en la última sección.

Primero que nada vamos a definir una sucesión sobre este grupo. Para eso consideremos:

- $c = (y_1, \dots, y_n) \in \Pi(P, Q)$ algún camino entre dos aristas $P, Q \in V(Y)$;
- $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ una sucesión de elementos tomados de manera que $r_i \in G_{s(y_i)}$ tal como hicimos para la definición de $\pi(\mathcal{G}, P)$.

De esta manera consideraremos al par (c, μ) visto como una palabra en el grupo $\ast_{P \in V(Y)} G_P \ast E(Y)$ como la siguiente palabra:

$$(c, \mu) = r_0 y_0 r_1 y_1 \dots r_n y_n.$$

Notaremos $|c, \mu|$ la imagen de esta palabra en el grupo $F(\mathcal{G})$ que recordemos es un cociente del producto libre de los estabilizadores de los vértices con el libre generado por las aristas.

DEFINICIÓN 1.3.1. Una palabra (c, μ) es *reducida* si satisface las siguientes dos propiedades:

- R1.** Si $n = 0$ entonces $r_0 \neq 1$.
- R2.** Si $n \geq 1$ entonces $r_i \notin G_{y_i}$ para todo i tal que $y_{i+1} = \bar{y}_i$.

En particular si tomamos una palabra (c, μ) tal que el camino c tiene backtracking por la propiedad **R2** tenemos que esta palabra no va a ser reducida. Esto se condice con la idea anterior que teníamos de las palabras reducidas porque en este caso nos va aparecer como subpalabra una de las relaciones del grupos $F(\mathcal{G})$.

Queremos ver que estas condiciones nos alcanzan para probar que estas palabras vistas en $F(\mathcal{G})$ sean distintas de la identidad. Nuestro objetivo es el siguiente teorema:

TEOREMA 1.3.2. Toda palabra (c, μ) reducida es tal que $|c, \mu| \neq 1$.

En particular de este teorema obtenemos los siguientes corolarios de bastante utilidad.

|| **COROLARIO 1.3.3.** Para todo $P \in V(Y)$ vale que G_P es un subgrupo de $F(\mathcal{G})$.

Demostración. Dado $g \in G_P \setminus \{1\}$ notemos que resulta ser la imagen de la palabra reducida $(c, \mu) = g$ donde c es el camino vacío y $\mu = (g)$. Es reducida por cumplir justamente la propiedad **R1**. ■

|| **COROLARIO 1.3.4.** Si (c, μ) es reducida y la longitud de c es al menos 1 entonces $|c, \mu| \notin G_{P_0}$ donde P_0 es el origen del camino c .

Demostración. Vamos a suponer que esto no es cierto y contradecir el teorema 1.3.2. Sea $(c, \mu) = (r_0 y_1 r_1 \dots r_n)$. Si no fuera cierto tendríamos que $|c, \mu| = x \in G_P$ y podríamos tomar-nos otra palabra (c, μ') tal que $\mu' = (x^{-1} r_0, \dots, r_n)$ de manera que $|c, \mu'| = 1$. Sigue siendo una palabra reducida porque por suposición tenemos que la longitud de c es al menos 1 y el camino c sigue siendo el mismo por lo tanto no tiene backtracking. Esto es una contradicción porque ninguna palabra reducida puede ser la identidad. ■

El siguiente corolario va resultarnos el de mayor utilidad porque en general vamos a trabajar con el grupo fundamental de un grafo de grupos.

|| **COROLARIO 1.3.5.** Sea T un árbol de expansión de Y luego si (c, μ) es una palabra reducida tal que c es un camino cerrado entonces $|c, \mu| \neq 1$ en $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Demostración. Por el teorema 1.3.2 tenemos que $|c, \mu| \neq 1$ en el grupo $F(\mathcal{G})$. A su vez por como elegimos a (c, μ) tenemos que es un elemento del grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, P)$. Por el teorema 1.1.16 tenemos que este grupo es isomorfo con el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, T)$, entonces esto termina de probar el resultado. ■

Veamos ahora de trabajar para finalmente demostrar el teorema 1.3.2. Para esto emplearemos una construcción previa que nos ayude a probarlo recursivamente a partir de grafos cada vez más chicos.

Consideremos un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo Y . Tomemos Y' un subgrafo conexo de Y y restrinjamos el grafo de grupos \mathcal{G} a Y' . El grupo de este grafo de grupos lo denotaremos $F(\mathcal{G}|Y')$. Por inducción supongamos que vale el teorema 1.3.2 para este grafo Y' .



El subgrafo Y' conexo lo distinguimos con este color.

Sea $W = Y/Y'$ el grafo que obtenemos de contraer Y' a un vértice que llamaremos $[Y']$. Como Y' es conexo también lo es W . Definamos un grafo de grupos sobre W .

1. Los vértices son $V(W) = V(Y) \setminus V(Y') \cup \{[Y']\}$.
2. Las aristas son $E(W) = E(Y) \setminus E(Y')$.

Si las aristas no empiezan ni terminaban en Y' dentro del grafo Y al contraer el subgrafo siguen idénticas. En el otro caso las definimos para que terminen (o empiecen) en $[Y']$. Sea $y \in E(W)$ entonces,

$$s(y) = \begin{cases} s(y), & \text{si } s(y) \notin V(Y') \\ [Y'], & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y análogamente,

$$t(y) = \begin{cases} t(y), & \text{si } t(y) \notin V(Y') \\ [Y'], & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces definamos el grafo de grupos \mathcal{H} sobre el grafo conexo W de la siguiente manera,

- Si $P \in V(Y) \setminus V(Y')$, tomamos $H_P = G_P$;
- Si $P = [Y']$ entonces tomamos $H_P = F(\mathcal{G}|Y')$.
- Si $y \in E(W)$ ponemos $H_y = G_y$ tal que como suponemos válido el resultado 1.3.2 para Y' tenemos que es un subgrupo.

Construyamos un morfismo de grupos $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$. Para eso primero lo definimos sobre los generadores. Para todo $g \in G_P$ con $P \in V(Y)$ definimos,

$$\beta(g) = \begin{cases} [g] \in H_P & \text{si } P \notin Y' \\ [g] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } P \in Y' \end{cases}$$

y para toda arista $y \in E(Y)$ definimos,

$$\beta(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \notin E(Y') \\ [y] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } y \in E(Y') \end{cases}$$

De manera que así como está definida cumple las relaciones porque $F(\mathcal{H})$ también las cumple y así vemos que pasa al cociente y así obtenemos que β está bien definida.

|| **LEMA 1.3.6.** *El morfismo de grupos $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Podemos construirnos un morfismo $\alpha : F(\mathcal{H}) \rightarrow F(\mathcal{G})$ tal que sea su inversa. La construcción es análoga.

Para todo $g \in H_P$ con $P \in V(W) \setminus [Y']$ definimos,

$$\alpha(g) = [g] \in G_P$$

y para toda arista $y \in E(W)$ tal que no empiece ni termine en $[Y']$ definimos,

$$\alpha(y) = y$$

Finalmente sobre $F(\mathcal{G}|Y')$ definimos de manera análoga mandando todo elemento $g \in G_P$ para $P \in V(Y')$ a sí mismo en $F(\mathcal{G})$ e idénticamente para todas las aristas. Es claro que es un morfismo de grupos que a su vez es la inversa de β anteriormente definida. ■

La moraleja de este lema es que podemos tomar el grupo $F(\mathcal{G}|Y')$ para un subgrafo Y' conexo y después tomar el grupo $F(\mathcal{H})$ para el grafo resultante y es exactamente lo mismo que tomar $F(\mathcal{G})$ en el comienzo.

Para cada palabra (c, μ) del grafo de grupos $F(\mathcal{G})$ le vamos a asociar una palabra (c', μ') de \mathcal{H} tal que $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$. La idea es reemplazar las partes de la palabra que involucren a Y' con las respectivas en $F(\mathcal{G}|Y')$. Dados $1 \leq i \leq j \leq n$ llamemos c_{ij} al camino $(P_i y_i \dots y_{j-1} P_j)$ y μ_{ij} a los elementos (r_i, \dots, r_j) . Si c_{ij} está contenida en Y' denotaremos por r_{ij} al elemento correspondiente visto en $F(\mathcal{G}|Y')$. De esta manera lo que haremos es pensar en todos los subintervalos $[i_a, j_a]$ tales que el camino c está dentro del subgrafo Y' . Así tenemos subdividido al intervalo $[1, n]$ de la siguiente manera,

$$1 \leq i_1 \leq j_1 < i_2 \leq j_2 < \dots i_m \leq j_m \leq n.$$

Donde en particular si miramos la palabra $c_{j_{a-1}i_a}$ notemos que es un camino por fuera de Y' exceptuando su comienzo y su final.

Definimos la palabra (c', μ') sobre los generadores de $F(\mathcal{H})$ como:

- $c' = (c_{j_1 i_2} \dots, c_{j_{a-1} i_a}, c_{j_a i_{a+1}} \dots, c_{j_m i_m})$
- $\mu' = (\mu_{1 i_1}, r_{1 j_2}, \dots, r_{i_m j_m}, \mu_{j_m n})$

donde tomamos la convención que $\mu_{1 i_1}$ o bien $\mu_{j_m n}$ pueden ser la identidad si $i_1 = 1$ o bien si $j_m = n$.

Por como las construimos nos queda que $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$ tal como queríamos ver. Veamos ahora que β preserva las palabras reducidas. Esto nos permitirá trabajar en grafos de grupos cada vez más chicos a medida que vayamos contrayendo subgrafos conexos.

|| **PROPOSICIÓN 1.3.7.** Si (c, μ) es una palabra reducida para $F(\mathcal{G})$ entonces (c', μ') es reducida para $F(\mathcal{H})$.

Demostración. Si la longitud de c' es exactamente 0 entonces es un camino constante en algún vértice $P' \in V(W)$. En tal caso $\mu = (r_0)$ donde $r_0 \neq 1$. Si $P \in V(W) \setminus [Y']$ entonces como $H_P = G_P$ obtenemos que $r_0 \neq 1$ visto en H_P . En el otro caso usamos inducción pues nos queda que $r_0 \in F(\mathcal{G}|Y')$ y por lo tanto es reducida usando el teorema 1.3.2.

Supongamos ahora que la longitud de c' es al menos 1. Sea $c' = (P'_1 w_1 \dots w_{n-1} P'_n)$ que-remos ver que si $w_{k+1} = \bar{w}_k$ entonces $r_i \notin H_{y_k}$. Sea $P' = t(w_k)$ entonces si $P' \neq [Y']$ esto vale porque justamente (c, μ) es reducida. Distinguimos dos casos si $P' = [Y']$:

- I) En el primer caso (w_k, r'_k, w_{k+1}) es tal que $w_k = y_i, w_{k+1} = \bar{y}_i$ para cierto y_i que aparece en c . Viéndolo en $F(\mathcal{G})$ tenemos que $r_k \notin G_{t(y_i)}$ porque la palabra (c, μ) es reducida por suposición. Como $G_{t(y_i)}$ es un subgrupo de $H_{[Y']} = F(\mathcal{G}|Y')$ aplicando el corolario 1.3.3 entonces la imagen de r'_k no está en $H_{[Y']}$.
- II) En el otro caso tenemos que se corresponde a un camino dentro de Y' . Si (w_k, r'_k, w_{k+1}) tiene la forma $(y_{i_a}, r_{i_a j_a}, y_{j_a+1})$ donde $r_{i_a j_a} = |c_{i_a j_a} \mu_{i_a j_a}| \in F(\mathcal{G}|Y')$. Dado que la longitud del camino $c_{i_a j_a}$ es al menos 1 aplicando el resultado 1.3.4 al grafo de grupos \mathcal{G} restringido al subgrafo Y' vemos que $r_{i_a j_a} \notin G_Q$ si $Q = t(y_{i_a})$. Esto nos dice que en el grupo $F(\mathcal{H})$ tenemos que $r_{i_a j_a} \notin H_{t(w_k)} = F(\mathcal{G}|Y')$.

■

Como último resultado previo veamos un lema que nos dice qué pasa cuando contraemos un subárbol de un árbol Y .

|| **LEMA 1.3.8.** Si Y es un árbol finito e Y' es un subárbol de Y entonces $W = Y/Y'$ es un árbol.

Demostración. Debemos ver que W es un grafo conexo y sin ciclos.

Para ver que es *conexo* tomemos dos vértices $w_1, w_2 \in V(W)$ y veamos de construir un camino entre ellos. Si ambos vértices se pueden unir por un camino c en Y tal que no interseca a W podemos tomar ese mismo camino. Sino tomemos c algún camino que los una y notamos que c' tal como lo construimos anteriormente es un camino que los une en W .

Para ver que *no tiene ciclos* supongamos que σ es un ciclo de este grafo. Así como en el caso anterior este ciclo necesariamente tiene que ser sobre el vértice contraído $[Y']$ caso contrario conseguiríamos un ciclo en el grafo Y pero esto no es posible dado que es un árbol. Si miramos por medio del morfismo α definido en la proposición ?? obtenemos un camino c en Y tal que debe empezar y terminar en Y' . Como por hipótesis Y' es conexo existe un camino c tal que conecta estos dos vértices. Esto es una contradicción porque habríamos conseguido un ciclo sobre el grafo Y . ■

Finalmente estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección.

Demostración del teorema 1.3.2. Vamos a demostrar este resultado viéndolo para distintos casos de grafos.

1. El caso que Y es un segmento.

$$P_{-1} \bullet \xrightarrow{y} \bullet P_1$$

El elemento $|c, \mu|$ es de la pinta $r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n$. Donde $e_i = -e_{i+1}$ para todo $i = 1 \dots n$ y los elementos cumplen que $r_0 \in G_{P_{-e_1}}$ y $r_i \in G_{P_{e_i}} \setminus G_{y^{e_i}}$ dado que (c, μ) es una palabra reducida. El caso particular que nuestro camino es constante tenemos que $r_0 \neq 1$ porque vale **R1**. Para el otro caso, es decir el caso que el camino c no es constante consideremos el morfismo sobreyectivo al cociente

$$\phi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1}$$

donde $G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1} \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T)$ donde T es el mismo segmento Y en este caso. Acá estamos usando que el grupo fundamental de un segmento es un grupo amalgamado. Dado que conocemos como son las palabras reducidas en los grupos amalgamados por 1.2.1 entonces vemos que (c, μ) no es la identidad porque justamente

$$\phi(|c, \mu|) = r_0 \dots r_n \neq 1$$

por lo tanto como $\phi(|c, \mu|) \neq 1$ esto implica que $|c, \mu| \neq 1$ tal como queríamos ver.

2. El caso que Y es un árbol. Lo probamos usando inducción en la cantidad de vértices del grafo. Tomemos un segmento Y' dentro del árbol donde ya sabemos que el resultado vale por el caso anterior. Por el lema recientemente probado 1.3.8 vemos que el grafo $W = Y/Y'$ resulta ser un árbol y más aún podemos aplicarle la hipótesis inductiva dado que tiene menos vértices que Y . De esta manera aplicando el paso inductivo obtenemos que vale este resultado para el grafo de grupos \mathcal{H} sobre W por lo que $|c', \mu'| \neq 1$ y usando el lema 1.3.7 tenemos que $|c, \mu| \neq 1$.
3. El caso que Y es un bucle. Dado que en este caso el grupo $F(\mathcal{G})$ resulta ser una extensión de tipo HNN por lo visto en la sección anterior podemos aplicar el lema de Britton 1.2.3 que justamente nos muestra que esta palabra es distinta de la identidad en el grupo $F(\mathcal{G})$.
4. El caso general. Lo probamos por inducción en la cantidad de vértices. Para eso tomamos Y' un segmento o bien un loop dentro de Y y luego aplicamos el resultado a Y/Y' . Por inducción en este caso vale el resultado y luego volviendo a usar el lema 1.3.7 terminamos de probarlo para un grafo Y conexo y finito arbitrario.

§1.4. Árbol de Bass-Serre.

En esta sección presentamos una construcción del árbol de Bass-Serre un poco más concisa que la que aparece en [?] si bien la idea es prácticamente la misma. En cambio en el paper [?] construyen este árbol de una manera más sintáctica usando sistemas de reescritura.

Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo Y conexo. Sea T un árbol maximal del grafo Y luego llamemos $G = \pi_1(\mathcal{G}, T)$. Queremos construirnos un árbol \tilde{X} tal que G actúe sobre este árbol sin inversiones de aristas y de manera que $Y = \tilde{X}/G$. Llamemos $q : \tilde{X} \rightarrow Y$ a la función cociente. Para construir este árbol vamos a partir de la siguiente observación. Si $\tilde{x} \in \tilde{X}$ luego por el teorema de órbitas estabilizador tenemos un isomorfismo entre la órbita $\tilde{x}G$ y los cosets del estabilizador $G/G_{\tilde{x}}$. De esta manera valiéndonos de esta observación definimos el conjunto de vértices de la siguiente manera,

$$V(\tilde{X}) = \bigsqcup_{v \in V(Y)} G/G_v$$

mientras que las aristas van a ser este otro conjunto

$$E(\tilde{X}) = \bigsqcup_{y \in E(Y)} G/G_y.$$

Para ver que sea un grafo nos falta definir cuales son los inicios y finales de estas aristas. Recordemos que definimos que la imagen de $y \in F(\mathcal{G})$ en el cociente resulta ser $g_y \in \pi(\mathcal{G}, T)$. Esto lo hacemos por medio de las siguientes fórmulas.

$$t(gG_y) = gg_yG_{t(y)}$$

y

$$s(gG_y) = gG_{s(y)}.$$

Probemos primero que estas definiciones no dependen de la elección del representante del coset.

Arrancamos con la definición del inicio de una arista. Si tenemos que $hG_y = gG_y$ luego $hg_yG_{t(y)} = gg_yG_{t(y)}$ si y solo si $g_y^{-1}h^{-1}gg_yG_{t(y)} = G(t(y))$. Usando una de las relaciones del grupo tenemos que $g_y^{-1}G_yg_y \subseteq G_{\bar{y}}$ y como $h^{-1}g \in G_y$ luego obtenemos que $g_y^{-1}h^{-1}gg_y \in G_{\bar{y}}$. Por nuestra construcción el estabilizador de una arista es subgrupo del estabilizador del vértice del cuál sale, de esta manera $g_y^{-1}h^{-1}gg_y \in G_{s(\bar{y})} = G_{t(y)}$ tal como queríamos ver.

Ahora vamos a ver la definición del fin de una arista. Si tenemos que $gG_y = hG_y$ esto nos dice que $h^{-1}gG_y = G_y$. Para esto volvemos a usar que $h^{-1}g \in G_y$ nos dice que $h^{-1}g \in G_{s(y)}$. De esta manera $hG_{s(y)} = gG_{s(y)}$ tal como queríamos ver.

Gracias a las otras dos definiciones la arista con la orientación opuesta nos queda definida de la siguiente manera,

$$\overline{gG_y} = gg_yG_{\bar{y}}.$$

Por la construcción que hicimos nos queda justamente que $\tilde{X}/G \simeq Y$. A su vez tenemos que $q : \tilde{X} \rightarrow Y$ es un epimorfismo de grafos por nuestra construcción.

OBSERVACIÓN 1.4.1. Para todo $y \in E(T)$ tenemos que $g_y = 1$. Esto nos permite definirnos un *levantado* \tilde{T} del árbol T dado por mandar $P \mapsto G_P$ para todo $P \in V(Y)$ y para las aristas mandar $y \mapsto G_y$.

|| **TEOREMA 1.4.2 (Serre).** *El grafo \tilde{X} es un árbol.*

Demostración. Debemos ver dos cosas: que es conexo y que no tiene ciclos.

Empezamos probando que el grafo es conexo. Partamos del árbol \tilde{T} que sabemos que está en biyección con el árbol T . Tomemos a este levantado para que sus vértices sean $V(\tilde{T}) = \bigcup_{P \in E(Y)} G_P$ y para que sus aristas sean $E(\tilde{T}) = \bigcup_{y \in E(T)} G_y$. De esta manera como \tilde{T} es conexo, si a su vez le agregamos las aristas con la orientación opuesta $gG_{\bar{y}}$ para $y \in E(T)$ tenemos que estas aristas intersecan a \tilde{T} . De esta manera conseguimos un grafo conexo W . Dado que toda arista del tipo G_y está en W obtenemos que $G \cdot W = \tilde{X}$.

El grupo G está finitamente generado por el siguiente conjunto

$$S = \bigcup_{P \in V(Y)} G_P \cup \{g_y : y \in E(Y)\}.$$

Como es un conjunto de generadores nos permite escribir de la siguiente manera a \tilde{X} ,

$$\tilde{X} = \bigcup_{g \in G} gW = \bigcup_{g=s_1 \dots s_n} \bigcup_{i=1 \dots n} s_1 \dots s_i W \cup W$$

donde estamos tomando la unión de todos los elementos de G como la unión de palabras indexadas por su longitud n y todos los trasladados de W por medio de prefijos de g . Una primera observación que debemos hacer es que dado $g \in G$ luego el grafo gW resulta conexo por ser el trasladado de un conexo.

Probaremos por inducción en la longitud de $g = s_1 \dots s_n$, visto sobre el conjunto de generadores S , que

$$s_1 \dots s_n W \cap s_1 \dots s_{n-1} W \neq \emptyset$$

por lo tanto la unión

$$W_g = W \cup s_1 W \cup \dots \cup s_1 \dots s_n W$$

sería conexa y de esta manera veríamos que \tilde{X} es conexo tomando la unión sobre todas las palabras del grupo dado que todos los W_g son conexos y todos ellos intersecan a W que también es conexo.

Para el caso base debemos ver dos casos dependiendo como sea el generador que estemos tomando.

1. Si $s = g_y$ para alguna arista $y \in E(Y)$ luego tenemos que $g_y G_y = \bar{G}_y \in V(W)$. De esta manera $g_y W \cap W \neq \emptyset$ y por lo tanto la unión es conexa.
2. Si $g \in G_P$ para algún $P \in V(Y)$ entonces $gG_P = G_P \in V(W)$ por lo tanto $gW \cap W \neq \emptyset$.

Ahora para el paso inductivo sigamos con la suposición de que es válido para palabras de longitud no mayor a $n - 1$. Queremos verlo para $s_1 \dots s_n$ y esto lo podemos hacer notando que

$$s_1(s_2 \dots s_n)W \cap s_2 \dots s_n W \neq \emptyset$$

donde usamos la hipótesis inductiva sobre $s_2 \dots s_n W$ que es una palabra de longitud $n - 1$ y que al trasladar por s_1 lo que está en la intersección está en la intersección de los trasladados. Vimos así que el grafo \tilde{X} es conexo porque lo escribimos como unión de conexos que se intersecan de a pares dado que todos los W_g intersecan a W para todo $g \in G$.

Veamos ahora que no tiene ciclos. Probaremos la proposición equivalente: para todo $n \in \mathbb{N}$ no existe camino cerrado de longitud n sin backtracking. Sea \tilde{c} un camino sobre \tilde{X} con estas propiedades. Queremos llegar a un absurdo. Sean las aristas de este camino $\tilde{c} = (h_1 G_{y_1}, h_2 G_{y_2}, \dots, h_n G_{y_n})$. Si miramos la proyección de los vértices tenemos una sucesión de vértices (P_0, \dots, P_n) donde $P_n = P_0$ dado que el camino \tilde{c} es cerrado por lo tanto su proyección también lo es. Introduzcamos la siguiente notación: sea $g_i = g_{y_i}$. Al ser \tilde{c} un camino cerrado valen las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} t(h_n G_{y_n}) &= h_n g_n G_{P_0} = h_1 G_{P_0} = s(h_1 G_{y_1}) \\ \vdots &= \quad \quad \quad \vdots \\ t(h_{n_1} G_{y_{n-1}}) &= h_{n-1} g_n G_{P_n} = h_n g_n = s(h_n G_{P_n}) \end{aligned}$$

de manera que considerando $r_i \in G_{P_i}$ tal que $h_i g_i r_i = h_{i+1}$ podemos reescribir las igualdades anteriormente obtenidas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} h_1 &= h_n g_n r_n \\ h_2 &= h_1 g_1 r_1 \\ &\vdots \\ h_n &= h_{n-1} g_{n-1} r_{n-1} \end{aligned}$$

Más aún usando cada ecuación para reescribirla en la anterior obtenemos que multiplicando todo de forma telescópica nos termina quedando lo siguiente,

$$g_1 r_1 \dots g_n r_n = 1.$$

Para llegar a la contradicción veamos que esto que obtuvimos viene de una palabra reducida de manera que no podría ser la identidad. Sea la palabra (c, μ) para $F(\mathcal{G})$ dada por el camino c anteriormente definido y la sucesión $\mu = (1, r_1, \dots, r_n)$. Solo nos queda ver que efectivamente es una palabra reducida. Para eso debemos chequear que se cumpla la condición **R2**, de la definición de las palabras reducidas, ya que suponemos que tiene longitud al menos 1.

Supongamos que existe i tal que $y_{i+1} = \overline{y_i}$ por lo que $g_{i+1} = g_i$ y $e_{i+1} = 1 - e_i$. Queremos ver que para ese mismo i vale que $r_i \notin G_{y_i}$ dado que en los otros casos automáticamente tenemos que no vale. Para eso miramos la ecuación que teníamos

$$h_i g_i r_i = h_{i+1}$$

de manera que si desarmamos las definiciones y pasamos de lado obtenemos la siguiente igualdad

$$r_i = g_i^{-1} (h_i^{-1} h_{i+1})$$

esto es lo mismo que ver que

$$h_i g_i G_{y_i} \neq h_{i+1} G_{y_i}.$$

Si esto valiera por como definimos las aristas opuestas del grafo \tilde{X} y por como tomamos a y_i tenemos que

$$h_{i+1} G_{\bar{y}_i} = \overline{h_i G_{y_i}}$$

pero esto es una contradicción porque al camino original \tilde{c} lo habíamos tomado sin backtracking.

Para concluir notemos que la palabra (c, μ) cumple las hipótesis del resultado 1.3.5 dado que es camino cerrado no trivial y es una palabra reducida por lo tanto $|c, \mu| \neq 1$ visto en $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ y esto contradice lo anteriormente obtenido. ■

DEFINICIÓN 1.4.3. El grafo \tilde{X} es el *árbol de Bass-Serre* del grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo conexo Y .

§1.5. Acciones de grupos sobre árboles.

Sea G grupo que actúa sin inversiones de aristas sobre un grafo conexo $X = (V(X), E(X))$. Consideremos $Y = G/X$ el grafo que conseguimos al cocientar por esta acción. Este grafo está dado por los siguientes vértices,

$$V(Y) = \{GP : P \in V(X)\}$$

y las aristas

$$E(Y) = \{Gy : y \in E(X)\}.$$

En particular como el grafo X es conexo tenemos que Y también lo es. Esto nos define un morfismo de grafos que es la proyección $\pi : X \rightarrow Y$ tal que es un epimorfismo de grafos. Consideremos $\iota : Y \rightarrow X$ una sección como conjuntos que la armamos con los siguientes dos pasos.

1. Para cada vértice $P \in V(Y)$ elegimos $\iota(P) = P'$ tal que $\pi(P') = P$.
2. Para cada arista $y \in E(Y)$ elegimos $\iota(y) = y'$ de manera que $s(\iota(y)) = \iota s(y)$. Esto lo podemos hacer para cada arista por separado.

Por como hicimos esta construcción nos garantizamos que el comienzo de cada arista cuando la miramos en X sea uno de los vértices que tomamos como representantes de vértices de Y en X . En principio no sabemos que el vértice del final de la arista de y coincida con el de comienzo de y . Lo que sabemos es que existe $g_y \in G$ tal que

$$g_y \iota(y) = \iota(\bar{y})$$

porque ambas aristas en la misma órbita por la acción de G . Si fijamos una orientación de aristas para el grafo X luego podemos elegir para cada arista de la orientación algún $g_y \in G$

tal que $g_y \iota(\overline{y}) = \iota(\overline{y})$. Para las aristas con la orientación opuesta tendremos algún $g_{\overline{y}} \in G$ tal que

$$g_{\overline{y}} \iota(\overline{y}) = \iota(y).$$

Como la acción de G sobre X es por morfismos de grafos tenemos que $\overline{g\overline{y}} = g\overline{y}$ y así queda claro que podemos elegir a $g_{\overline{y}} = g_y^{-1}$. El caso particular que $\iota(\overline{y}) = \iota(\overline{y})$ definiremos que $g_y = 1 = g_{\overline{y}}$.

De esta manera nos podemos construir \mathcal{G} un grafo de grupos sobre el grafo Y . Consideremos para $P \in V(Y), y \in E(Y)$ los siguientes grupos,

$$G_P = G_{\iota(P)}, G_y = G_{\iota(y)}$$

donde estamos mirando los estabilizadores de la acción de G sobre X . La primera observación es que la elección de ι no afecta los grupos que tomamos para los vértices y aristas porque de cambiar la elección de ι nos quedarían grupos conjugados porque los vértices o aristas correspondientes están en la misma órbita de la acción de G . Por otro lado notemos que por esta definición tenemos que $G_y \simeq G_{\overline{y}}$. Consideremos el siguiente morfismo de grupos;

$$\begin{aligned} \phi : G_{\overline{y}} &\rightarrow G_y \\ a &\mapsto g_y^{-1} a g_y \end{aligned}$$

que está bien definido porque justamente $g_y \iota(y) = \iota(\overline{y})$ dado que $g_y \iota(\overline{y}) = \iota(\overline{y})$ por como lo elegimos a g_y y porque $\overline{g\overline{w}} = g\overline{w}$ para toda $w \in E(X)$. Ahora usamos que si $a \in G_{\iota(\overline{y})}$ luego $a \in G_{\iota(\overline{y})}$ por lo tanto $a \iota(\overline{y}) = \iota(\overline{y})$. Finalmente como $g_y^{-1} \iota(\overline{y}) = \iota(y)$ tal como queríamos ver.

Definimos el siguiente morfismo del producto libre de los estabilizadores de los vértices y el grupo libre en las aristas del grafo en el grupo G .

$$\begin{aligned} \varphi : *_{P \in V(Y)} G_P * F_{E(Y)} &\rightarrow G \\ g &\mapsto g \\ y &\mapsto g_y \end{aligned}$$

Probemos que este morfismo baja a $F(\mathcal{G})$. Para eso veamos que cumple las relaciones que definen a este cociente.

1. $g_y g_{\overline{y}} = 1$ para todo $y \in E(Y)$ porque justamente elegimos a $g_{\overline{y}}$ de esta manera;
2. $\overline{y} a y = a^{\overline{y}}$ para todo $y \in E(Y), a \in G_y$ porque justamente vimos que

$$\varphi(\overline{y}) \varphi(a) \varphi(y) = g_y^{-1} a g_y = a^{\overline{y}}$$

De esta manera tenemos definido un morfismo de grupos $\varphi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G$. Nuestro objetivo ahora es ver que este morfismo baja al grupo fundamental del grafo de grupos sobre un árbol de expansión.

Recordemos que G_P lo podemos ver como un subgrupo de $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

|| **LEMA 1.5.1.** Para todo $g \in G_P$ tenemos que $\varphi(g) = g$.

Demostración. Dado $g \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$ luego lo podemos representar en el grupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ por medio de la palabra reducida g . Por como está definido φ sabemos que $\varphi(g) = g$. ■

OBSERVACIÓN 1.5.2. En particular si consideramos que para una arista $y \in E(X)$ tenemos que G_y es subgrupo de $G_{s(y)}$ luego la restricción de φ a G_y también resulta ser un isomorfismo de grupos.

|| **PROPOSICIÓN 1.5.3.** El morfismo de grupos $\varphi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G$ restringido al subgrupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es sobreyectivo.

Demostración. Dado $g \in G$ queremos ver que $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$. Sea $P \in \iota(V(Y))$ un vértice. Consideremos $gP \in V(X)$, como el grafo es conexo tenemos un camino que une a P con gP . Sea este camino

$$e_0 P_0 \xrightarrow{e_0 \iota(y_1)} e_1 P_1 \xrightarrow{e_1 \iota(y_2)} \dots \xrightarrow{e_{k-1} \iota(y_k)} e_k P_k$$

de manera que $P_i \in V(\iota(Y))$ y en particular $P_0 = P, P_k = P$ siguiendo nuestra notación anterior y así $s(\iota(y_i)) = P_{i-1}$ por como tomamos las levantadas de las aristas. Los elementos $e_i \in G_{s(\iota(y_i))}$ son tales que $e_i t(\iota(y_{i+1})) = P_{i+1}$ y donde en particular tenemos que $e_k P = gP$.

Una primera observación que podemos hacer es que $ge_k^{-1} \in G_P$ dado que $e_k P = gP$. Por el resultado anterior 1.5.1 tenemos que $\varphi(h) = h$ para todo $h \in G_P$. Esto nos dice que al ser φ un morfismo de grupos luego

$$(ge_k^{-1})e_k = g$$

entonces como $ge_k^{-1} \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$ luego si vemos que $e_k \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ probaríamos que $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ tal como queríamos ver.

Para ver esto lo probaremos por inducción en el camino que tomamos anteriormente. Veamos que $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$ para todo $i = 0 \dots n$.

El caso base consiste en ver que $e_0 \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$. Esto es cierto porque justamente tenemos que $e_0 \in G_P$ y por el lema anterior 1.5.1 tenemos que φ es la identidad cuando la restringimos a G_P .

Para el paso inductivo supongamos que $e_{i-1} \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_{i-1}))$ y queremos ver que $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$. Antes de probar esto veamos de reescribir a e_i en términos de e_{i-1} . Observemos que por como tomamos el camino tenemos que

$$e_{i-1} t(\iota(y_i)) = e_i P_i$$

y de esta manera obtenemos que $t(\iota(y_i)) = e_{i-1}^{-1} e_i P_i$ y como donde termina una arista es donde empieza la arista con orientación opuesta tenemos que $s(\overline{\iota(y_i)}) = e_{i-1}^{-1} e_i P_i$. Por como

definimos al elemento del grupo $g_{y_i} \in G$ tenemos que $g_{y_i}\iota(\bar{y}_i) = \overline{\iota(y_i)}$ por lo tanto obtenemos que

$$s(g_{y_i}\iota(\bar{y}_i)) = g_{y_i}P_i$$

de esta manera obtenemos que $g_{y_i}P_i = e_{i-1}^{-1}e_iP_i$ y por lo tanto llegamos a la siguiente escritura para e_i ,

$$e_{i-1}g_{y_i}h_i = e_i$$

donde $h_i \in G_{P_i}$.

Ahora podemos usar nuestra hipótesis inductiva para obtener un camino

$$h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1} \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$$

de manera que $e_{i-1} = \varphi(h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1})$. Recordemos que $\varphi(y_i) = g_{y_i}$ por la definición de nuestro morfismo φ y por otro lado tenemos que $\varphi(h_i) = h_i$ porque φ fija a los grupos G_{P_i} por definición también. Con esto concluimos la siguiente igualdad,

$$e_i = \varphi(h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1}y_ih_i)$$

y como $h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1}y_ih_i \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$ terminamos de probar que $e_i \in \varphi(\Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$ tal como queríamos ver. En particular con esto probamos que $e_k \in \varphi(\mathcal{G}, P)$ y esto implica que $g \in \varphi(\mathcal{G}, P)$ tal como queríamos ver. De esta manera la restricción de φ al subgrupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es sobreyectiva. ■

Veamos ahora que naturalmente este morfismo se factoriza por el cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$, pero antes debemos ver que podemos levantar al árbol de expansión de un cociente para que sea un subgrafo del grafo del cual tomamos el cociente.

PROPOSICIÓN 1.5.4. *Sea X grafo conexo, G grupo que actúa sin inversiones sobre X . Llamemos $Y = X/G$ y sea $\pi : X \rightarrow Y$ la proyección. Sea T árbol de expansión de Y . Entonces podemos tomar $\iota : V(Y) \rightarrow V(X)$ tal que si nombramos $T' = \iota(T)$ resulta ser un subgrafo de X .*

Demostración. La idea es usar el Lema de Zorn. Sea el siguiente conjunto

$$\Omega = \{(T', \iota) \mid T' \text{ subárbol de } X, \iota \circ \pi(T') = T'\}$$

tal que si consideramos la inclusión para la primer coordenada y que las inclusiones coinciden entonces obtenemos un conjunto parcialmente ordenado.

Podemos ver que Ω es no vacío porque G actúa sin inversiones entonces podemos levantar una arista $Ge = (Gx, Gy) \in E(T)$ a una arista $\iota(Ge) = (x, y) \in V(X)$ tal que este subgrafo y el levantado ι va a estar en Ω .

Similarmente podemos ver que toda cadena $(T'_i)_{i \in I}$ tiene un elemento maximal justamente tomando la unión de todos los subgrafos $T' = \cup_{i \in I} T'_i$ y definiendo $\iota(Gv) = v$ si existe T_i tal que $v \in T_i$.

Sea T' maximal podemos ver que está en biyección con T . Caso contrario podríamos levantar una arista Ge tal que $Ge = (Gv, Gw)$ con $\iota(Gv) \in T'$ pero $Gw \notin T'$ y luego elegimos e tal que $s(e) = v$ y extendiendo a ι contradecimos la maximalidad de T' . ■

|| **COROLARIO 1.5.5.** *La restricción del morfismo $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, P)$ se factoriza por el cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.*

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que al levantado $\iota(Y)$ lo podemos tomar para que sea un subgrafo. Esto nos dice que $\iota(\bar{y}) = \overline{\iota(y)}$, por lo tanto notemos que $\varphi(\iota(y)) = 1$ por como definimos $\varphi(y)$ anteriormente. Esto nos dice que el morfismo se factoriza por el cociente $\bar{\varphi} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$. ■

1.5.0.1. Morfismo de grafos ψ .

Construyamos un morfismo de grafos del árbol de Bass-Serre en el grafo X que vendría a ser el análogo al revestimiento.

Sea la asignación $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ dada por

$$\begin{aligned}\psi(gG_P) &= \varphi(g)P \text{ para todo } g \in G, P \in V(Y) \\ \psi(gG_y) &= \varphi(g)\iota(y) \text{ para todo } g \in G, P \in V(Y)\end{aligned}$$

Veamos que es una función. Sean dos representantes g, h del mismo coset de G_P . Queremos ver que $\psi(gG_P) = \psi(hG_P)$. Para esto notemos que por la definición de ψ esto equivale a ver que $\varphi(g) = \varphi(h)$. Dado que $gh^{-1} \in G_P$ luego tenemos que $\varphi(gh^{-1}) = gh^{-1}$ porque φ restringida a G_P es la identidad por el resultado 1.5.1.

|| **LEMA 1.5.6.** *La función $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ resulta ser un morfismo de grafos.*

Demostración. Para ver que es un morfismo de grafos nos basta ver que manda vértices en vértices, aristas en aristas y respeta comienzo de aristas y la asignación de las aristas opuestas. Por como lo definimos está claro que manda vértices en vértices y aristas en aristas.

Veamos que respeta el comienzo de las aristas. Sea una arista $gG_y y \in V(\tilde{X})$ luego tenemos que

$$\begin{aligned}s(\psi(gG_y)) &= s(\varphi(g)y) = \varphi(g)s(y) \\ \psi(s(gG_y)) &= \psi(gG_{s(y)}) = \varphi(g)s(y)\end{aligned}$$

Finalmente veamos que respeta la asignación de las aristas opuestas. Dada una arista $gG_y y$ tenemos que ver que $\psi(\overline{gG_y y}) = \overline{\psi(gG_y y)}$. Para esto recordemos que siguiendo nuestra notación $\overline{gG_y y} = gyG_{\bar{y}}\bar{y}$ por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(\overline{gG_y}) &= \psi(gyG_{\bar{y}}) = \varphi(gy)G_{\bar{y}} = \\ &= \varphi(g)\varphi(y)G_{\bar{y}} = \varphi(g)gy\bar{y} = \varphi(g)\iota(y) \\ \overline{\psi(gG_y)} &= \overline{\varphi(g)\iota(y)} = \varphi(g)\iota(y)\end{aligned}$$

Con esto terminamos de probar que ψ es un morfismo de grafos. ■

Dado un vértice $x \in V(X)$ podemos definir su *star* como el siguiente conjunto de aristas,

$$st(x) = \{y \in E(Y) : s(y) = x\}$$

Como queremos que nuestro morfismo ψ represente un morfismo de revestimientos le vamos a pedir que localmente tenga buenas propiedades. En particular vamos a pedirle que mande un star de un vértice inyectivamente en dentro del star del otro vértice.

DEFINICIÓN 1.5.7. Un morfismo de grafos $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ se dice *localmente inyectivo* si para todo vértice $P \in V(\Gamma)$ resulta que $\psi : st(P) \rightarrow E(\Gamma')$ es inyectiva.

Probemos ahora que nuestro morfismo de grafos ψ cumple esta propiedad.

|| **PROPOSICIÓN 1.5.8.** El morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ es sobreyectivo y localmente inyectivo.

Demostración. Primero veamos que es sobreyectivo. Sabemos que $G \cdot Y = X$ si miramos a Y como subgrafo de X . Consideremos un vértice $gP \in V(X)$. Por el resultado anterior 1.5.3 sabemos que el morfismo de grupos φ resulta ser sobreyectivo. De esta manera tenemos que para g existe $h \in G$ tal que $\varphi(h) = g$. Luego alcanza con tomar como vértice a hG_P de manera que

$$\psi(hG_P) = \varphi(h)P = gP$$

tal como queríamos ver.

Finalmente veamos que es localmente inyectivo. Sea $gG_P \in V(\tilde{X})$ vértice. Sean $aG_y, bG_{y'} \in E(\tilde{X})$ aristas tales que $s(aG_y) = gG_P = s(bG_{y'})$. Consideraremos dos casos dependiendo si las aristas correspondientes en el grafo Y son idénticas o no lo son.

1. Supongamos primero que $y \neq y'$. En este caso tenemos que $\psi(aG_y) = \varphi(a)\iota(y)$ mientras que $\psi(bG_{y'}) = \varphi(b)\iota(y')$. Como son elementos de órbitas distintas no pueden ser el mismo elemento y de esta manera concluimos que $\psi(aG_y) \neq \psi(bG_{y'})$.
2. El otro caso es que $y = y'$. Veamos que por una cadena de equivalencias que la función ψ es coincide en estas aristas si y solo si son idénticas. Esto nos dice que

$$\psi(aG_y) = \psi(bG_y) \iff \varphi(a)\iota(y) = \varphi(b)\iota(y)$$

y esto es equivalente a $\varphi(a^{-1}b) \in G_y$. Por el resultado anterior 1.5.3 tenemos que φ se restringe a un isomorfismo entre los estabilizadores. De esta manera tenemos que $a^{-1}b \in G_y$ y así que equivalentemente $aG_y = bG_y$.

■

El siguiente resultado nos va a garantizar que el morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ sea un isomorfismo de grafos pidiéndole a X ser un árbol.

PROPOSICIÓN 1.5.9. *Sea T un árbol y sea Γ un grafo conexo entonces todo morfismo de grafos $\psi : \Gamma \rightarrow T$ localmente inyectivo es un monomorfismo de grafos.*

Demostración. Como el grafo Γ es conexo debe existir un camino de vértices $P = P_0 \dots P_k = Q$. Consideremos que este camino está reducido. Probemos por inducción en la longitud del camino que para puntos $P, Q \in V(X)$ a distancia menor que n no vale que $\psi(P) = \psi(Q)$.

El caso base es que la longitud del camino sea exactamente 1. En este caso tenemos que $\psi(P) = \psi(Q)$ donde $y \in E(Y)$ tal que $s(y) = P, t(y) = Q$. Al ser ψ un morfismo de grafos tenemos que

$$s(\psi(y)) = \psi(P) = \psi(Q) = t(\psi(y))$$

por lo tanto si $\psi(y)$ fuera una arista sería un bucle. Los grafos los tomamos para que no tengan bucles.

El paso inductivo partimos de un camino de aristas (y_1, \dots, y_n) reducido. Consideremos la imagen del camino por medio del morfismo. Como estamos en un árbol no puede haber ciclos, de esta manera tiene que ser que $\psi(y_k) = \overline{\psi(y_{k+1})}$ para ciertas aristas $y_k, y_{k+1} \in E(\Gamma)$. Como ψ es un morfismo de grafos cumple que $\overline{\psi(y_k)} = \psi(\overline{y_k})$ y así de esta manera obtenemos que $\psi(y_k) = \psi(\overline{y_{k+1}})$. Como el morfismo es localmente inyectivo y ambas aristas parten del mismo vértice tenemos que $y_{k+1} = \overline{y_k}$. Esto es una contradicción porque asumimos que el camino que tomamos es reducido. ■

El siguiente resultado nos da la estructura de un grupo que actúa sobre un grafo conexo sin inversiones de aristas. Es el resultado central de la teoría de Bass-Serre.

TEOREMA 1.5.10 ([?]). *Sea G un grupo que actúa en un grafo conexo X sin inversiones de aristas y sea \mathcal{G} el grafo de grupos asociado sobre $Y = X/G$. Consideremos T un árbol de expansión de Y y los morfismos $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ y $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) *el grafo X es un árbol;*
- (b) *el morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ es un isomorfismo de grafos;*
- (c) *el morfismo $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. La implicación **a** \Rightarrow **b** la hacemos usando la proposición 1.5.9 dado que ψ es localmente inyectivo. Para ver **b** \Rightarrow **a** usamos que \tilde{X} es un árbol por lo tanto X al ser isomorfo también es un árbol.

Probemos **b** \Rightarrow **c**. Para eso notemos que al ser φ sobreyectivo nos alcanza con ver que es inyectivo. Si $g \in \pi_1(\mathcal{G}, T)$ y $g \neq 1$ tal que $\varphi(g) = 1$ entonces necesariamente $g \notin G_P$ por el lema anterior 1.5.1 dado que la restricción a estos subgrupos es la identidad. Esto nos dice que $gG_PP \neq G_PP$ dado que los cosets gG_P y G_P son distintos. Por como definimos a ψ tenemos que

$$\psi(gG_P) = \varphi(g)P = \psi(G_P)$$

pero esto contradice que ψ sea un isomorfismo.

Finalmente probemos $\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b}$. Para esto como ψ es sobreyectivo nos alcanza con ver que es inyectivo. Sean $gG_P, hG_Q \in V(\tilde{X})$ tales que $\psi(gG_P) = \psi(hG_Q)$. Por la definición del morfismo ψ obtenemos que

$$\varphi(g)P = \varphi(h)Q$$

pero esto nos diría que $P = Q$ dado que ambos son representantes de las órbitas de la acción de G sobre el árbol T . Por otro lado obtenemos que $\varphi(gh^{-1})P = P$ y así $\varphi(gh^{-1}) \in G_P$. Como φ es un isomorfismo y en particular es inyectiva restringida al subgrupo G_P por la proposición 1.5.3 deducimos que $gh^{-1} \in G_P$. Por lo tanto vimos que los dos vértices son idénticos $gG_P = hG_Q$ y de esta manera probamos que ψ es inyectiva. ■

Como corolarios obtenemos una caracterización para los grupos libres que usaremos varias veces y que es una herramienta fundamental de la teoría geométrica de grupos.

|| **COROLARIO 1.5.11.** *Un grupo G es libre si y solo si G actúa libremente sobre un árbol sin inversiones de aristas.*

Demostración. Si G es libre entonces su grafo de Cayley lo podemos tomar como un árbol y usamos que actúa libremente sobre él sin invertir aristas.

Para la vuelta usamos 1.5.10 porque en tal caso tenemos que G isomorfo a $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ y este grupo es libre por ser el grupo fundamental de un grafo dado que los estabilizadores son triviales por hipótesis. ■

|| **COROLARIO 1.5.12.** *Dado G un grupo libre todo subgrupo H de G resulta ser libre.*

Demostración. Usando el corolario 1.5.11 tenemos que G actúa libremente sobre un árbol sin inversiones. En particular H actúa sin inversiones y libremente sobre el mismo árbol que actúa G y esto nos dice que es libre. ■

Otra consecuencia de este teorema de Serre es un resultado obtenido por Karass, Pietrowski y Solitar que nos da una cota de qué tan grande puede ser un subgrupo libre dentro de un grupo fundamental de un grafo finito de grupos finitos. Este resultado generaliza la fórmula de Schreier para subgrupos libres.

Primero probamos el siguiente lema sobre grupos libres que nos va a ayudar en la demostración de esta fórmula.

|| **LEMA 1.5.13.** *Todo grupo finitamente generado libre no tiene torsión.*

Demostración. El grafo de Cayley de un grupo libre se puede tomar para que sea un árbol. Si tuviera torsión tendría un ciclo contradiciendo que es un árbol. ■

|| **PROPOSICIÓN 1.5.14.** *[?] Sea \mathcal{G} un grafo de grupos finito tal que los grupos de los vértices y aristas también son finitos. Sea $G = \pi_1(\mathcal{G}, T)$ y sea F un subgrupo libre de G de índice finito con rango finito $r(F)$. Luego la siguiente fórmula vale:*

$$\frac{r(F) - 1}{(G : F)} = \sum_{y \in E(Y)} \frac{1}{2 \cdot |G_y|} - \sum_{P \in V(Y)} \frac{1}{|G_P|}.$$

Demostración. Sea \tilde{X} el árbol de Bass–Serre para este grafo de grupos \mathcal{G} . Notemos que F no interseca a ningún subgrupo de G que sea isomorfo a G_P para ningún $P \in V(Y)$. Esto porque el grupo F es libre y G_P es finito por lo tanto la intersección tendría torsión pero por el lema 1.5.13 ningún grupo libre tiene torsión.

Sea \mathcal{H} el grafo de grupos sobre \tilde{X}/F construido a partir de la acción del subgrupo F . Sea T' un árbol de expansión del grafo \tilde{X}/F . Dado que \tilde{X} es un árbol estamos en las hipótesis para usar 1.5.10 y de esta manera obtenemos que $F \simeq \pi_1(\mathcal{H}, T')$. Usando esto calculemos el rango del grupo libre contando todas las aristas que no pertenezcan al árbol T' . Recordemos que al ser un árbol de expansión tenemos que $\frac{1}{2}|E(T')| = |V(\tilde{X}/F)| - 1$. De esta manera dado que los estabilizadores por la acción de F son triviales tenemos el siguiente isomorfismo $\pi_1(\mathcal{H}, T') \simeq F_\Sigma$ donde Σ es un conjunto finito que resulta tener el siguiente orden

$$|\Sigma| = \frac{|E(\tilde{X}/F) \setminus E(T')|}{2},$$

multiplicamos por $\frac{1}{2}$ porque todas las aristas las contamos una vez por cada una de las dos orientaciones que tienen. Por lo tanto el rango de F lo podemos calcular como el orden del conjunto Σ .

$$\begin{aligned} r(F) &= \frac{1}{2}(|E(\tilde{X}/F)| - |E(T')|) \\ &= \frac{1}{2}|E(\tilde{X}/F)| - |V(\tilde{X}/F)| + 1 \end{aligned}$$

Finalmente para obtener la fórmula que queremos probar tenemos que usar como está construido el árbol de Bass–Serre \tilde{X} .

$$|V(\tilde{X}/F)| = \sum_{P \in V(X)} |(G/G_P)/F|$$

y acá usamos que la cantidad de cosets de $(G/G_P)/F$ es la misma que hay en $(G/F)/G_P$ por lo tanto

$$|V(\tilde{X}/F)| = \sum_{P \in V(X)} \frac{(G : F)}{|G_P|}.$$

Similarmente obtenemos una expresión análoga para las aristas y así terminamos de probar la validez de la fórmula. ■

Finalmente podemos probar que grupo fundamental de un grafo de grupos finito con grupos finitos es virtualmente libre. Antes de probar esto necesitamos un lema sobre acciones en conjuntos finitos.

LEMA 1.5.15. Sea G un grupo que actúa libremente sobre un conjunto finito X de dos maneras distintas $\alpha, \beta : G \rightarrow S(X)$. Entonces debe existir $\varphi \in S(X)$ tal que para todo $g \in G$ valga que

$$\alpha(g) = \varphi^{-1} \circ \beta(g) \circ \varphi.$$

Demostración. Tomamos representantes para cada acción $R, S \subseteq X$ tales que

$$\bigsqcup_{r \in R} \alpha(G)(r) = \bigsqcup_{s \in S} \beta(G)(s)$$

donde la unión es disjunta como órbitas de esta acción. Como ambas acciones son libres resulta que $\alpha(G)(r)$ y $\beta(G)(s)$ tienen cardinal exactamente $|G|$ usando que X también es finito. De esta manera vemos que $|R| = |X|/|G| = |S|$ por lo tanto existe una biyección φ entre ambos conjuntos que la extendemos a todo X de la siguiente manera,

$$\varphi(\alpha(g)r) = \beta(g)s$$

siempre y cuando $\varphi(r) = s$. Esta biyección cumple todo lo que queríamos. ■

TEOREMA 1.5.16. [?] Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo finito Y con grupos finitos en los vértices. Entonces $\pi_1(\mathcal{G})$ es un grupo finitamente generado virtualmente libre.

Demostración. Dado que el grafo Y es finito y para todo $P \in V(Y)$ los grupos G_P también son finitos podemos tomarnos X un conjunto finito de manera que

$$|X| = \prod_{P \in V(X)} |G_P|.$$

Para cada $P \in V(Y)$ podemos armarnos una acción libre de G_P en X . Esto nos da un monomorfismo $G_P \rightarrow S(X)$. A su vez por cada grupo G_y con $y \in E(Y)$ obtenemos dos acciones libres sobre X dependiendo con qué inclusión lo estamos mirando. Por el lema 1.5.15 podemos elegirnos para cada $y \in E(Y)$ alguna $\varphi_y \in S(X)$ tal que haga conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & G_{s(y)} & \xrightarrow{\sigma} S(X) \\ & \nearrow & \downarrow \varphi_y \\ G_y & & \\ & \searrow & \\ & G_{t(y)} & \xrightarrow{\tau} S(X) \end{array}$$

Para la arista con orientación opuesta tomamos $\varphi_{\bar{y}} = \varphi_y^{-1}$. De esta manera tenemos un morfismo de grupos definido sobre el grupo libre $*_{P \in V(Y)} G_P * E(Y)$. Por como tomamos a φ_y y como hace conmutar al diagrama tenemos que

$$\varphi_{\bar{y}} \circ \sigma \circ \varphi_y = \tau.$$

Usando la definición del grupo $F(\mathcal{G})$ tenemos un morfismo de grupos $h : F(\mathcal{G}) \rightarrow S(X)$ tal que la restricción a G_P es inyectiva para todo $P \in V(Y)$. Si fijamos $P \in V(Y)$ y consideramos el subgrupo normal de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$

$$F = \{g \in \pi_1(\mathcal{G}, P) \mid h(g) = 1\}$$

entonces por como lo consideramos tenemos que $F \cap G_Q = \{1\}$ para todo $Q \in V(Y)$. Esto nos dice que el grupo F actúa libremente sobre el árbol de Bass-Serre de nuestro grafo de grupos \mathcal{G} . A su vez como F es un subgrupo de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ tenemos que actúa sin inversiones. Estamos en condiciones de usar el teorema de Serre 1.5.10 y así obtenemos que este grupo debe ser libre.

Tenemos que F es un subgrupo libre de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ y queremos ver que tiene índice finito. Para eso notemos que al ser $|X| < \infty$ entonces $|S(X)| < \infty$ y como $S(X) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, P)/F$, por la propiedad universal del cociente, entonces $(\pi_1(\mathcal{G}, P) : F) < \infty$ tal como queríamos ver.

Finalmente notemos que por 1.5.14 el grupo F es un grupo finitamente generado tal como queríamos ver. ■