

Capítulo 1

Teoría de Bass–Serre.

La mayoría de las construcciones de esta sección siguen la exposición de [?] aunque empleamos una notación diferente. También se usó como referencia a los trabajos [?], [?] y [?].

En la primera sección damos varias definiciones básicas que emplearemos en el capítulo. Muchas se corresponden con las vistas en la sección ?? sobre grafos no dirigidos. Introduciremos el objeto central de la teoría de Bass–Serre que son los grafos de grupos y los resultados estándares de los grupos fundamentales de estos objetos.

En la sección 1.2 generalizaremos la noción de palabras reducidas que vimos para grupos libres al contexto más general de los grupos fundamentales de grafos de grupos.

En la sección 1.3 daremos la construcción del árbol de Bass–Serre que en cierta manera generaliza la idea del revestimiento de un grafo en este contexto. Para su construcción emplearemos fuertemente las propiedades sintácticas de los grupos fundamentales de grafos de grupos probados en la sección anterior.

Finalmente en la sección 1.4 mostraremos cómo se consigue un grafo de grupos a partir de una acción de un grupo sobre un árbol. En esta sección probaremos el teorema central de Serre 1.4.10 que nos caracteriza a los grupos que son grupos fundamentales de grafos de grupos como grupos que actúan en árboles de cierta manera. En especial nos va a interesar un teorema que se desprende de este resultado que nos dice que los grupos fundamentales de grafos de grupos finitos resultan ser virtualmente libres.

§1.1. Definiciones básicas.

DEFINICIÓN 1.1.1. Un *grafo dirigido* es un par ordenado $Y = (V, E)$ junto con unas funciones $s : E \rightarrow V$, $t : E \rightarrow V$ y $\bar{(\cdot)} : E \rightarrow E$ tales para toda $y \in E$ vale que $s(\bar{y}) = t(y)$, $t(\bar{y}) = s(y)$ y que $\bar{\bar{y}} = y$.

Al conjunto V lo llamaremos los *vértices* y al conjunto E las *aristas* del grafo. Dada una arista y diremos que $s(y)$ es el *comienzo* de la arista mientras que $t(y)$ es el *fin* de la arista. Si queremos referirnos a los vértices de un grafo Y en particular notaremos $V(Y)$ a sus vértices y similarmente $E(Y)$ a sus aristas.

A continuación varias definiciones estándares de teoría de grafos bajo esta definición de un grafo dirigido.

- Dado un grafo dirigido $Y = (V, E)$ con funciones $s, t, \overline{(\cdot)}$ diremos que $Y' = (V', E')$ con funciones $s', t', \overline{(\cdot)'}$ es un *subgrafo* de Y si $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ y si $s' = s|_{E'}, t' = t|_{E'}$ y $\overline{(\cdot)'} = \overline{(\cdot)}|_{E'}$.
- Decimos que Y es *finito* si $|V| < \infty$ y $|E| < \infty$.
- Dado un grafo dirigido Y una *orientación* de sus aristas es un subconjunto $A \subset E$ que cumple que para cada arista $y \in E$ tenemos que $y \in A \iff \bar{y} \notin A$.
- Dado un vértice $P \in V(Y)$ podemos definir su *star* como el siguiente conjunto de aristas,

$$st(P) = \{y \in E(Y) : s(y) = P\}$$

- Dado un grafo dirigido Y y dos vértices $P, Q \in V$ un *camino* entre P y Q es una sucesión finita de aristas $c = (y_0, \dots, y_k)$ de manera que $s(y_0) = P, t(y_k) = Q$ y tal que para todo $0 \leq i \leq k$ vale que $y_i \in E$ y que $t(y_i) = s(y_{i+1})$. Por cada camino $c = (y_0, \dots, y_k)$ podemos tomarnos una sucesión de vértices $(s(y_0), \dots, s(y_n))$, que observamos que no determinan al camino. Un camino es *cerrado* si $P = Q$. La *longitud* del camino $l(c) = k$ es la cantidad de aristas que lo componen.
- Dado un grafo dirigido Y y un vértice $P \in V$ notaremos $()$ al *camino constante* en P . En particular los caminos constantes son los únicos caminos que cumplen que tienen longitud igual a 0.
- Un camino $c = (y_0, \dots, y_n)$ tiene *backtracking* si existe $0 < i \leq n$ tal que $y_i = \overline{y_{i-1}}$.
- Dado un grafo dirigido Y una *geodésica* es un camino $c = (y_0, \dots, y_n)$ tal que si $s(y_0) = P$ y $t(y_n) = Q$ luego para todo camino $d = (z_0, \dots, z_m)$ tal que $s(z_0) = P$ y $t(z_m) = Q$ resulta que $l(d) \geq l(c)$. Un grafo Y dirigido que cumple que para todo par de vértices P, Q exista una única geodésica (y_0, \dots, y_k) tal que $s(y_0) = P$ y tal que $t(y_k) = Q$ diremos que es *únicamente geodésico*.
- Un grafo es *conexo* si para todo par de vértices $P, Q \in V$ existe un camino entre ellos.
- Un *ciclo* en un grafo dirigido es un camino cerrado $c = (y_0, y_1, \dots, y_k)$ tal que si consideramos todas las aristas que recorre $(s(y_0), s(y_1), \dots, s(y_k))$ luego esta sucesión de vértices no tiene repeticiones.
- Un grafo T es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. Dado Y un grafo dirigido, diremos que T es un *subárbol* de Y si T es un subgrafo y es un árbol.
- Dado Y un grafo dirigido, un *árbol generador* T de Y es un subárbol de Y que cumple que $V(T) = V(Y)$ y que T es un árbol.

En particular bajo esta definición tenemos que los grafos dirigidos a diferencia de los no dirigidos pueden tener más de una arista entre dos vértices y pueden tener bucles. Dado un grafo no dirigido Γ lo podemos considerar como un grafo dirigido Y por medio de la siguiente construcción. Definimos

$$V(Y) = V(\Gamma), \quad E(Y) = E(\Gamma) \times \{-1, 1\}.$$

de manera tal que $s(\{x, y\}, 1) = x$, $t(\{x, y\}, -1) = y$ y tal que $\overline{(\{x, y\}, 1)} = (\{x, y\}, -1)$.

Podemos ver que si Γ cumplía cierta propiedad como grafo no dirigido también la va a seguir cumpliendo el grafo dirigido Y . En nuestro caso en particular nos va a interesar el caso de la definición del grafo de Cayley dada en ??, que bajo esta traducción lo podemos ver como un grafo dirigido también que sigue manteniendo las mismas propiedades. Más aún si G es un grupo libre entonces podemos tomar su grafo de Cayley dirigido para que sea un árbol.

Por otro lado si Y es un grafo dirigido tal que no tiene bucles y dado dos vértices distintos existe una única arista que los une (salvo orientación) entonces podemos considerar a Γ un grafo no dirigido tal que representa a Y de la siguiente manera:

$$V(\Gamma) = V(Y), \quad E(\Gamma) = \{s(y), t(y)\} \mid y \in A\}.$$

donde A es una orientación de las aristas de Y .

Estas dos construcciones son inversas y así podemos ver que valen los resultados enunciados para árboles no dirigidos en el contexto de los grafos dirigidos.

DEFINICIÓN 1.1.2. Sean Y, Y' grafos dirigidos. Un par de funciones $\phi_V : V(Y) \rightarrow V(Y')$ y $\phi_E : E(Y) \rightarrow E(Y')$ que denotaremos $\phi : Y \rightarrow Y'$ es un *morfismo de grafos* si:

- Para toda $y \in E(Y)$ vale que $\overline{\phi_E(y)} = \phi_E(\bar{y})$;
- Para toda $y \in E(Y)$ vale que $\phi_V(s(y)) = s(\phi_E(y))$;

En particular de esta definición que dimos se desprende que para toda $y \in E(Y)$ vale que $\phi(t(y)) = t(\phi(y))$ usando que $s(\bar{y}) = t(y)$.

Dados grafos dirigidos X, Y, Z y morfismos de grafos $\phi : X \rightarrow Y$ y $\rho : Y \rightarrow Z$ podemos definir la composición $\rho \circ \phi : X \rightarrow Z$ de la siguiente manera y para todo vértice $P \in V(X)$:

$$\begin{aligned} (\rho \circ \phi)(y) &= \rho_E(\phi_E(y)) \quad \text{para toda arista } y \in E(X) \\ (\rho \circ \phi)(P) &= \rho_V(\phi_V(P)) \quad \text{para todo vértice } P \in V(X). \end{aligned}$$

En el caso especial de los morfismos de grafos $\phi : Y \rightarrow Y$ consideramos la identidad $I : Y \rightarrow Y$ como el morfismo que manda toda arista a sí misma y todo vértice a sí mismo. Un *automorfismo* de grafos dirigidos es un morfismo $\phi : Y \rightarrow Y$ tal que tiene una inversa $\phi^{-1} : Y \rightarrow Y$, esto es que $\phi \circ \phi^{-1} = I$ y $\phi^{-1} \circ \phi = I$. Los automorfismos de un grafo dirigido Y forman un grupo con la composición que denotaremos $\text{Aut}(Y)$ donde la identidad I es el elemento neutro.

Como tenemos automorfismos de grafos podemos definir una acción de un grupo sobre un grafo dirigido.

DEFINICIÓN 1.1.3. Sea G un grupo y sea Y un grafo dirigido una *acción* de G sobre Y es un morfismo de grupos $\psi : G \rightarrow \text{Aut}(Y)$. Una acción de un grupo G sobre un grafo dirigido Y *no tiene inversiones* si para todo $g \in G$ y para toda $y \in E$ tenemos que $\psi(g)(y) \neq \bar{y}$.

Dada una acción de G sobre un grafo Y , $g \in G$ y $x \in Y$, donde x podría ser bien una arista o un vértice, utilizaremos la notación estándar $g \cdot x$ para referirnos a $\psi(g)(x)$.

Ahora podemos definir los objetos centrales a la teoría de Bass-Serre.

DEFINICIÓN 1.1.4. Dado un grafo dirigido Y . Un *grafo de grupos* \mathcal{G} sobre Y está definido por lo siguiente:

1. Para cada vértice $P \in V$ tenemos un grupo G_P .
2. Para cada arista $y \in E$ tenemos un subgrupo G_y de $G_{s(y)}$.
3. Para todo $y \in E$ tenemos un isomorfismo de G_y a $G_{\bar{y}}$ que denotaremos por $a \mapsto a^{\bar{y}}$ tal que $(a^{\bar{y}})^y = a$ para todo $a \in G_y$.

Dado un grafo $Y = (V, E)$ sea F_E el grupo libre generado por los elementos del conjunto de aristas del grafo.

DEFINICIÓN 1.1.5. Dado un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo $Y = (V, E)$ consideremos el siguiente grupo:

$$F(\mathcal{G}) = \left(\bigast_{P \in V} G_P \ast F_E \right) / \langle\langle R \rangle\rangle$$

donde el conjunto de relaciones por las que dividimos es

$$R = \{ \bar{y} a y = a^{\bar{y}} \text{ para toda } y \in E \text{ y todo } a \in G_y \}$$

A este grupo lo denotaremos el *grupo universal* del grafo de grupos \mathcal{G} .

En particular el grupo que más nos va a interesar es un cociente de $F(\mathcal{G})$ que llamaremos el grupo fundamental del grafo de grupos.

DEFINICIÓN 1.1.6. Sea un grafo de grupos \mathcal{G} sobre Y . Consideremos T un árbol generador del grafo Y . El *grupo fundamental del grafo de grupos* es

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = F(\mathcal{G}) / \{ y \mid y \in E(T) \}.$$

OBSERVACIÓN 1.1.7. Para cada arista $y \in E(Y)$ notaremos por g_y a la imagen de $y \in F(\mathcal{G})$ en el cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Veamos en el siguiente ejemplo que nuestra construcción de un grupo fundamental generaliza la definición topológica del grupo fundamental.

EJEMPLO 1.1.8. Sea un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo Y tal que $G_y = \{1\}$ para todo $y \in E(Y)$. En este caso en particular tenemos que $F(\mathcal{G}) \simeq \left(\bigast_{P \in V} G_P \ast F_E \right) / \langle\langle R \rangle\rangle$ donde $R = \{ \bar{y} y = 1 \text{ para toda } y \in E \}$.

$E\}$. Consideremos una orientación A para las aristas del grafo. Dado que las relaciones R involucran exclusivamente a los generadores de F_E podemos ver que $F(\mathcal{G}) \simeq \ast_{P \in V} G_P \ast F_{E \cap A}$ donde usamos que $F_E / \langle\langle R \rangle\rangle \simeq F_{E \cap A}$.

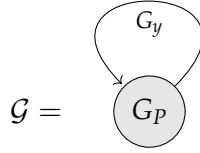
Vamos a calcular el grupo fundamental de este grafo de grupos. Por definición este resulta ser $F(\mathcal{G}) / \{y : y \in E(T)\}$. Por el mismo razonamiento que usamos para calcular el grupo $F(\mathcal{G})$ obtenemos el siguiente isomorfismo

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \ast_{P \in V(Y)} G_P \ast F_{A \setminus (T \cap A)}$$

Si reescribimos esto recordando que el grupo fundamental de un grafo como espacio topológico $\pi_1(Y)$ es isomorfo al grupo libre generado por las aristas que no pertenecen a un árbol generador nos queda que:

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \ast_{P \in V(Y)} G_P \ast \pi_1(Y).$$

EJEMPLO 1.1.9. Si Y es un bucle. Es decir si $Y = (\{P\}, \{y, \bar{y}\})$ de manera que $s(y) = P = s(\bar{y})$ y $t(y) = P = t(\bar{y})$ entonces este grafo tiene como único árbol generador al vértice P . Consideremos \mathcal{G} un grafo de grupos sobre este grafo.



Por la definición del grupo fundamental del grafo de grupos obtenemos el siguiente isomorfismo.

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq F(\mathcal{G}).$$

Si a es algún elemento de G_y entonces notaremos por $a^{\bar{y}}$ a la imagen de a por el isomorfismo con el grupo $G_{\bar{y}}$. Sea y el generador de F_E correspondiente a la arista y .

En este caso las relaciones que tenemos en nuestro grupo son las siguientes

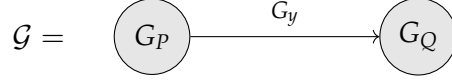
$$y^{-1}ay = a^{\bar{y}} \text{ para todo } a \in G_y.$$

De esta manera tenemos que una presentación de nuestro grupo fundamental es la siguiente

$$\pi_1(\mathcal{G}) = \langle G_P, y \mid y^{-1}ay = \bar{a}, \forall a \in G_y \rangle$$

es decir el grupo fundamental de este grafo de grupos resulta ser una extensión HNN del grupo correspondiente al vértice que denotaremos $G_P^{*G_y}$. Notemos que esta extensión depende de la elección del isomorfismo entre los grupos de las aristas aunque en el caso de este capítulo siempre va a quedar claro a qué isomorfismo nos referimos.

EJEMPLO 1.1.10. Si el grafo Y es un segmento entonces $Y = (\{P, Q\}, \{y, \bar{y}\})$ tal que $s(y) = P$ y $t(y) = Q$. El árbol generador resulta ser el mismo grafo Y en este caso. Consideremos \mathcal{G} un grafo de grupos sobre este grafo.



Dado $a \in G_Y$ denotaremos $a^{\bar{Y}}$ la imagen por el isomorfismo entre G_Y y $G_{\bar{Y}}$ de a .

Entonces el grupo fundamental de este grafo de grupos resulta ser

$$\pi_1(\mathcal{G}, Y) = F(\mathcal{G}) / \langle a = a^{\bar{Y}}, \quad \forall a \in G_Y \rangle$$

Esto por definición el grupo que buscábamos resulta ser el producto amalgamado

$$\pi_1(\mathcal{G}, Y) = G_P \underset{G_Y}{*} G_Q.$$

Nuestro foco ahora es dar una definición equivalente de grupo fundamental pero esta vez usando caminos así como lo hacemos para el grupo fundamental usual de un espacio topológico.

Dados dos vértices $P, Q \in V$ denotaremos por $\Pi(P, Q)$ el conjunto de caminos de P a Q . De esta manera nos queda definido

$$\Pi(P, Q) = \{(y_1, \dots, y_k) \mid y_i \in E, s(y_1) = P, t(y_k) = Q, t(y_i) = s(y_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$$

Todo camino $(y_1, \dots, y_k) \in \Pi(P, Q)$ lo podemos pensar como la palabra $y_1 \dots y_k$ en el grupo libre F_E y similarmente podemos mirar la clase de $y_1 \dots y_k$ en el cociente $F(\mathcal{G})$.

DEFINICIÓN 1.1.11. Dado \mathcal{G} grafo de grupos sobre Y grafo conexo y $P, Q \in V$ dos vértices de Y definimos el siguiente subconjunto de $F(\mathcal{G})$,

$$\pi(\mathcal{G}, P, Q) = \{g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k : (y_1, \dots, y_k) \in \Pi(P, Q), \quad \forall i, 1 \leq i < k, g_i \in G_{s(y_{i+1})}, \quad g_k \in G_Q\}$$

|| **PROPOSICIÓN 1.1.12.** Para todo $P \in V$ tenemos que $\pi(\mathcal{G}, P, P)$ es un subgrupo de $F(\mathcal{G})$.

Demostración. Debemos ver que tiene a la identidad del grupo, que es cerrado por el producto y que todo elemento tiene un inverso.

Si consideramos el constante en P y $g_0 = 1$ luego obtenemos que $1 \in \pi(\mathcal{G}, P, P)$. Para ver que es cerrado por el producto notemos que

$$(g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k) \circ (g'_0 y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k) = g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k (g_k g'_0) y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k$$

donde $g_k g'_0 \in G_P$ por lo tanto su producto está bien definido y en definitiva nos queda otro elemento de $\pi(\mathcal{G}, P, P)$ tal como queríamos ver. Finalmente vemos que es cerrado por inversos porque si tomamos el elemento $g_0 y_1 \dots y_k g_k$ su inverso resulta ser $g_k^{-1} \bar{y}_k \dots \bar{y}_1 g_0^{-1} \in \pi(\mathcal{G}, P, P)$. ■

DEFINICIÓN 1.1.13. El grupo fundamental de \mathcal{G} respecto a un punto base P se define como $\pi_1(\mathcal{G}, P) = \pi(\mathcal{G}, P, P)$.

Notemos que en particular para esta construcción obtuvimos un subgrupo del grupo $F(\mathcal{G})$ mientras que en el caso de la definición anterior del grupo fundamental 1.1.6 obtuvimos un cociente. Podemos ver que ambas definiciones son equivalentes porque tenemos un isomorfismo como grupos.

TEOREMA 1.1.14. Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo conexo finito $Y = (V, E)$, sea $P \in V$ un vértice y sea T un árbol generador de Y entonces $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Demostración. Dados $P, Q \in V$ consideremos la geodésica α que los une sobre T . Si leemos la sucesión de aristas que recorre esta geodésica tenemos una palabra $T[P, Q] \in F_E$. Consideramos a $T[P, Q]$ como un elemento en el grupo $F(\mathcal{G})$. Observemos que $T[P, Q] = T[Q, P]^{-1}$ porque el árbol es únicamente geodésico.

Ahora definamos el siguiente morfismo (que depende del árbol de expansión que tomamos) sobre los generadores del producto libre:

$$\begin{aligned} \tau : \ast_{P \in V} G_P \ast F_E &\rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P) \\ \tau(y) &= T[P, s(y)]yT[t(y), P] \text{ para } y \in E(Y) \\ \tau(g) &= T[P, Q]gT[Q, P] \text{ para } Q \in V(Y), g \in G_Q \end{aligned}$$

Notemos que por como definimos a este morfismo tenemos que $\tau(y) \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$ y que similarmente $\tau(g) \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$.

Veamos que a partir de τ nos podemos definir un morfismo sobre $F(\mathcal{G})$. Debemos ver que cumple la relación $\tau(\bar{y}ay) = \tau(a^{\bar{y}})$ para toda arista $y \in E(Y)$ y todo $a \in G_y$. Esto vale porque justamente

$$\begin{aligned} \tau(\bar{y}ay) &= T[P, s(\bar{y})]\bar{y}T[t(\bar{y}), P]T[P, s(y)]aT[t(y), P]T[P, s(\bar{y})]\bar{y}T[t(y), P] \\ &= T[P, s(\bar{y})]\bar{y}ayT[t(y), P] \\ &= \tau(a^{\bar{y}}). \end{aligned}$$

donde usamos que $\bar{y}ay = a^{\bar{y}}$ en $\pi_1(\mathcal{G}, P)$. Sea $\tau : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P)$ este morfismo que definimos. Por como está definido τ tenemos que si lo restringimos al subgrupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ resulta ser la identidad y en particular tenemos que τ es un epimorfismo.

Veamos que τ baja al cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ y luego que este es el isomorfismo que buscamos para terminar de probar el teorema. Sea $y \in E(T)$ luego $\tau(y) = T[P, s(y)]yT[t(y), P]$ donde $T[t(y), P] = \bar{y}T[s(y), P]$ y de esta manera $\tau(y) = 1$ para todo $y \in E(T)$. Por esta razón τ pasa al cociente y existe $\bar{\tau} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P)$ epimorfismo tal que hace conmutar el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tau} & \pi_1(\mathcal{G}, P) \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\tau} & \\ \pi_1(\mathcal{G}, T) & & \end{array}$$

Para terminar la demostración probemos que $\bar{\tau}$ es un monomorfismo. Para eso consideramos $\nu = \pi \circ \iota$ donde $\iota : \pi_1(\mathcal{G}, P) \rightarrow F(\mathcal{G})$ es la inclusión como subgrupo y probemos que $\nu \circ \bar{\tau}$ nos

queda la identidad. Si hacemos $\nu \circ \bar{\tau}$ notemos que si $g \in G_Q$ con $Q \in V$ luego

$$\begin{aligned} \nu \circ \bar{\tau}(\pi(g)) &= \nu(T[P, Q]gT[Q, P]) \\ &= \pi(T[P, Q]gT[Q, P]) \\ &= \pi(T[P, Q])\pi(g)\pi(T[Q, P]) \\ &= \pi(g). \end{aligned}$$

Donde usamos que $T[P, Q]$ es un camino de aristas en el árbol de expansión por lo tanto $\pi(T[P, Q]) = 1$. Similarmente podemos ver que para toda $y \in E$ tenemos que $\nu \circ \bar{\tau}(\pi(y)) = \pi(y)$. De esta manera vimos que $\bar{\tau} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P)$ es un isomorfismo de grupos. ■

|| **COROLARIO 1.1.15.** Sea \mathcal{G} grafo de grupos sobre un grafo conexo y finito Y . Sean T, T' árboles generadores de Y luego tenemos que $\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T')$.

Demostración. Sea $P \in V$ caso contrario es trivial. Fijado este vértice tenemos que por el resultado anterior 1.1.14 que $\pi_1(\mathcal{G}, P) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T)$ para cualquier T árbol generador por lo tanto obtenemos que $\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T')$ volviendo a usar este resultado para T' . ■

§1.2. Palabras reducidas.

En esta sección probaremos que todo elemento del grupo fundamental de un grafo de grupos puede ser llevado a una forma reducida.

§1.2.1. Casos particulares.

En esta subsección vamos a caracterizar las palabras reducidas de los grupos fundamentales de algunos grafos de grupos donde los grafos resultan ser más sencillos. El objetivo aparte de ejemplificar en unos casos en particular, es que más adelante nos va a servir para reducir proposiciones sobre grafos de grupos arbitrarios a grafos de grupos donde sus grafos sean de estas formas.

1.2.1.1. Bucles.

Por lo visto en el ejemplo 1.1.9 tenemos que dado $Y = (\{P\}, \{y, \bar{y}\})$ un bucle, entonces entonces toda estructura de grafo de grupos \mathcal{G} que le demos a este segmento hace que el grupo fundamental sea isomorfo a un producto HNN, es decir que $\pi_1(\mathcal{G}) = G_P^{*G_y}$.

DEFINICIÓN 1.2.1. Dado $G_P^{*G_y}$ extensión HNN diremos que una sucesión

$$(x_0, y^{\epsilon_0}, x_1, y^{\epsilon_1}, \dots, x_n, y^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

donde para todo $0 \leq i \leq n$ tenemos que $x_i \in G_P$ y $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ es una *sucesión reducida* si no tiene subsucesiones $y^{-1}x_iy$ con $x_i \in G_y$ o bien yx_iy^{-1} con $x_i \in G_{\bar{y}}$.

En particular nos interesan las sucesiones reducidas porque es una manera fácil de chequear cuándo algún elemento no es la identidad en el grupo.

PROPOSICIÓN 1.2.2 (Britton). Sea $G_P^{*G_y}$ una extensión HNN. Para toda sucesión reducida

$$(x_0, y^{\epsilon_0}, x_1, y^{\epsilon_1}, \dots, x_n, y^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

vale que $x_0 y^{\epsilon_0} x_1 y^{\epsilon_1} \dots x_n y^{\epsilon_n} x_{n+1} \neq 1$.

Demostración. Ver [?, p.182]. ■

Dentro de las sucesiones reducidas podemos quedarnos con algunas que llamamos las formas normales. Estas caracterizan unívocamente a los elementos de una extensión HNN.

DEFINICIÓN 1.2.3. Sea $G_P^{*G_y}$ una extensión HNN y sean S conjunto transversal a izquierda de G_y en G_P y sea T conjunto transversal de $G_{\bar{y}}$ en G_P . Una *forma normal para una extensión HNN* va a ser una sucesión reducida

$$(x_0, y^{\epsilon_0}, x_1, g^{\epsilon_1}, \dots, x_n, y^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

donde para todo $0 \leq i \leq n$ tenemos que $x_i \in G_P$ y $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ y cumple las siguientes propiedades:

1. $x_0 \in G_P$.
2. En el caso que $\epsilon_i = 1$ entonces $x_i \in S \setminus \{1\}$ mientras que en el caso que $\epsilon_i = -1$ tenemos que $x_i \in T \setminus \{1\}$.

Podemos probar que todo elemento de una extensión HNN puede ser escrita como el producto de una forma normal y más aún esta escritura es única.

TEOREMA 1.2.4. Para todo $g \in G_P^{*G_y}$ existe una única forma normal

$$(x_0, y^{\epsilon_0}, x_1, y^{\epsilon_1}, \dots, x_n, y^{\epsilon_n}, x_{n+1})$$

tal que $g = x_0 y^{\epsilon_0} x_1 y^{\epsilon_1} \dots x_n y^{\epsilon_n} x_{n+1}$.

Demostración. Ver [?, p.182]. ■

1.2.1.2. Segmentos.

En el ejemplo 1.1.10 vimos que dado un segmento $Y = (\{P, Q\}, \{y, \bar{y}\})$ entonces para toda estructura de grafo de grupos \mathcal{G} que le demos a este segmento resulta que el grupo fundamental es isomorfo a un producto amalgamado, es decir que $\pi_1(\mathcal{G}) = G_P *_{G_y} G_Q$.

En esta subsección vamos a repetir las ideas que vimos para las extensiones HNN y definir sucesiones reducidas y formas normales.

DEFINICIÓN 1.2.5. Dado $G_P *_{G_y} G_Q$ producto amalgamado diremos que una sucesión

$$(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

es una *sucesión reducida* si valen las siguientes condiciones:

1. Para todo $0 \leq i \leq n$ vale que $x_i \in G_P$ o $x_i \in G_Q$
2. Para todo $0 \leq i < n$ no puede valer que $x_i, x_{i+1} \in G_P$ o que $x_i, x_{i+1} \in G_Q$.
3. Si $n > 1$ entonces $x_i \notin G_Y$.
4. Si $n = 1$ entonces $x_0 \neq 1$.

TEOREMA 1.2.6. Sea $G_P *_{G_Y} G_Q$ grupo amalgamado entonces si (x_0, x_1, \dots, x_n) es una sucesión reducida entonces tenemos que $1 \neq x_0 x_1 \dots x_n$.

Demostración. Ver [?, pp.187-188]. ■

Analogamente al caso de las extensiones HNN podemos definir una forma normal para un producto amalgamado.

DEFINICIÓN 1.2.7. Sea $G_P *_{G_Y} G_Q$ un producto amalgamado. Sean S transversal a izquierda de G_Y en G_P y T transversal a izquierda de G_Y en G_Q .

Una forma normal para un producto amalgamado va a ser una sucesión $(a, x_0, x_1, \dots, x_n)$ tal que $a \in G_Y$ y para todo $0 \leq i \leq n$ tenemos que $x_i \in S \setminus \{1\}$ o bien $x_i \in T \setminus \{1\}$ y no existe $0 \leq i < n$ tal que $x_i, x_{i+1} \in T$ o $x_i, x_{i+1} \in S$.

PROPOSICIÓN 1.2.8. Dado un grupo amalgamado $G_P *_{G_Y} G_Q$ vale que para todo $g \in G_P *_{G_Y} G_Q$ existe una única forma normal $(a, x_0, x_1, \dots, x_n)$ de manera que $g = ax_0 x_1 \dots x_n$.

Demostración. Ver [?, p.187]. ■

§1.2.2. Caso general.

En el contexto de esta sección vamos a pensar que \mathcal{G} es un grafo de grupos sobre un grafo conexo y finito Y . Nuestro objetivo es probar que en el grupo universal del grafo de grupos $F(\mathcal{G})$ ciertas sucesiones que resultan asociadas a caminos van a ser reducidas. Más específicamente queremos probar que definen elementos diferentes de la identidad del grupo tal como hicimos en los resultados 1.2.2 y 1.2.6.

DEFINICIÓN 1.2.9. Sea Y grafo conexo y finito, \mathcal{G} un grafo de grupos sobre Y y $F(\mathcal{G})$ el grupo universal de este grafo de grupos. Sean:

- I) $c = (y_1, \dots, y_n) \in \Pi(P, Q)$ algún camino entre dos aristas $P, Q \in V$;
- II) $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ una sucesión tomados de manera que $r_0 \in G_P$ y para todo $1 \leq i \leq n$ vale que $r_i \in G_{t(y_i)}$.

De esta manera denotaremos por el par (c, μ) a la palabra en el grupo $\ast_{P \in V} G_P \ast F_E$:

$$(c, \mu) = r_0 y_1 r_1 y_2 \dots r_n.$$

Diremos que (c, μ) es una *palabra de tipo c* .

Denotaremos por $|c, \mu|$ la imagen de esta palabra en el grupo $F(\mathcal{G})$ esto es que

$$|c, \mu| = [r_0 y_1 r_1 y_2 \dots r_n]_{F(\mathcal{G})}.$$

DEFINICIÓN 1.2.10. Una palabra $(c, \mu) = r_0 y_1 r_1 y_2 \dots r_n$ de tipo c está *reducida* si satisface:

R1. Si la longitud de c es 0 entonces $r_0 \neq 1$.

R2. Si la longitud de c es positiva entonces $r_i \notin G_{\bar{y}_i}$ para todo i tal que $y_{i+1} = \bar{y}_i$.

A partir de esta definición podemos ver inmediatamente las siguientes dos observaciones.

1. Sea $c = (y_1, \dots, y_n)$ un camino que no tiene backtracking: esto es que no existe $1 \leq i < n$ tal que $\overline{y_{i+1}} = y_i$. Entonces toda palabra de tipo c va a estar en forma normal porque cumple **R2**.
2. Esta definición de forma normal generaliza las definiciones que dimos para grafos con una única arista en 1.2.1 y 1.2.5.

|| **TEOREMA 1.2.11.** Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo finito y conexo Y luego toda palabra (c, μ) en forma normal es tal que $|c, \mu| \neq 1$.

En particular de este resultado se desprenden corolarios importantes para entender la estructura de los grupos fundamentales de grafos de grupos finitos.

|| **COROLARIO 1.2.12.** Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo finito y conexo Y luego para todo $P \in V$ vale que G_P es un subgrupo de $F(\mathcal{G})$.

Demostración. Para todo $P \in V$ tenemos que G_P es un subgrupo de $\ast_{P \in V} G_P \ast F_E$. Sea $g \in G_P \setminus \{1\}$ entonces $(c, \mu) = g$ donde $c = ()$ es el camino constante en P y $\mu = (g)$. Es una palabra reducida por cumplir la propiedad **R1**. Por el teorema 1.2.11 tenemos que $|c, \mu| \neq 1$ por lo que la proyección a $F(\mathcal{G})$ nos da un isomorfismo restringida a G_P y así a G_P lo podemos considerar un subgrupo de $F(\mathcal{G})$. ■

|| **COROLARIO 1.2.13.** Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo finito y conexo Y , sea $c = y_0 \dots y_n$ un camino no constante y (c, μ) una palabra reducida entonces $|c, \mu| \notin G_{s(y_0)}$.

Demostración. Vamos a suponer que esto no es cierto y contradecir el teorema 1.2.11. Sea $(c, \mu) = r_0 y_1 r_1 \dots r_n$. Si no fuera cierto tendríamos que $|c, \mu| = x \in G_{s(y_0)}$. Consideremos entonces otra palabra (c, μ') tal que $\mu' = (x^{-1} r_0, \dots, r_n)$ de manera que por como la tomamos $|c, \mu'| = 1$. Es una palabra reducida porque por suposición tenemos que c no es el camino constante y aparte μ' es idéntica a μ salvo en la primera posición que no afecta la condición **R2**. Esto contradice 1.2.11 por lo tanto $|c, \mu| \notin G_{s(y_0)}$. ■

El siguiente corolario va resultarnos el de mayor utilidad porque en general vamos a trabajar con el grupo fundamental de un grafo de grupos. El grupo fundamental de un grafo de grupos con respecto a un árbol generador T es un cociente de $F(\mathcal{G})$. Sea $\pi : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$ la proyección.

|| **COROLARIO 1.2.14.** Sean \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo finito y conexo Y , c un camino cerrado en Y , T un árbol generador de Y y (c, μ) una palabra reducida entonces $\pi(|c, \mu|) \neq 1$ en $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Demostración. Por el teorema 1.2.11 tenemos que $|c, \mu| \neq 1$ en el grupo $F(\mathcal{G})$. A su vez por como elegimos a (c, μ) tenemos que es un elemento del grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, P)$. Por el teorema 1.1.14 tenemos que este grupo es isomorfo con el grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ por medio de la proyección π entonces esto termina de probar el resultado. ■

Primero vamos a dar una definición estándar que es la del cociente de un grafo no dirigido que va a ser la herramienta principal para poder reducir el tamaño de un grafo.

DEFINICIÓN 1.2.15. Sea Y un grafo conexo y sea Y' un subgrafo conexo de Y entonces el grafo dirigido $W = Y/Y'$ cociente de Y por Y' es el grafo dado por los siguientes conjuntos de aristas y vértices:

1. Los vértices son $V(W) = V(Y) \setminus V(Y') \cup \{[Y']\}$.
2. Las aristas son $E(W) = E(Y) \setminus E(Y')$.

Donde el vértice correspondiente a Y' lo denotamos $[Y']$. Sea $y \in E(W)$ entonces:

$$s(y) = \begin{cases} s(y) & \text{si } s(y) \notin V(Y') \\ [Y'] & \text{caso contrario} \end{cases}$$

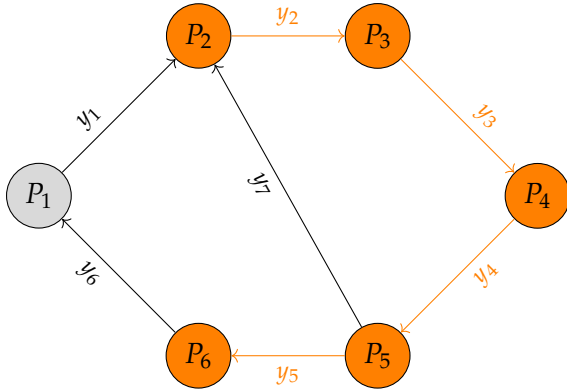
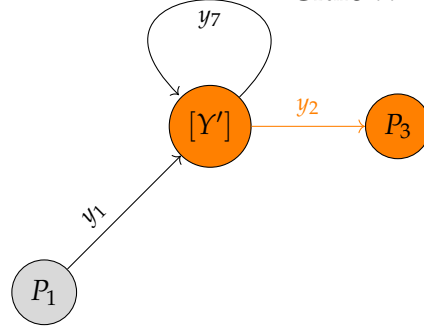
y análogamente,

$$t(y) = \begin{cases} t(y) & \text{si } t(y) \notin V(Y') \\ [Y'] & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Si las aristas no empiezan ni terminaban en Y' dentro del grafo Y al contraer el subgrafo siguen idénticas. En el otro caso las definimos para que terminen (o empiecen) en $[Y']$.

Una observación directa de esta definición es que si los grafos Y y Y' son conexos entonces el grafo W también resulta serlo.

EJEMPLO 1.2.16. Un ejemplo particular de cómo es el grafo cociente

Grafo Y Grafo W 

Donde en este ejemplo distinguimos al subgrafo Y' conexo con este **color**.

1.2.2.1. Argumento dévissage.

Queremos probar que toda palabra de tipo c cumple que es distinta de la identidad en $F(\mathcal{G})$. Para esto siguiendo a Serre en [?] vamos a emplear un argumento de *dévissage* que consiste en reducir el problema que queremos probar para grafos de grupos arbitrarios a casos más pequeños. Más específicamente queremos reducir este problema a los casos que los grafos de grupos están dados sobre grafos con una única arista como ya hicimos anteriormente en las subsecciones 1.2.1.1 y 1.2.1.2.

Consideremos un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo Y finito y conexo. Tomemos Y' un subgrafo conexo de Y y restrinjamos el grafo de grupos \mathcal{G} a Y' . El grupo de este grafo de grupos restringido al subgrafo Y' lo denotaremos $F(\mathcal{G}|Y')$. Supongamos que $F(\mathcal{G}|Y')$ tiene la propiedad del teorema 1.2.11. Entonces definamos el grafo de grupos \mathcal{H} sobre el grafo conexo $W = Y/Y'$ de la siguiente manera.

- Si $P \in V(Y) \setminus V(Y')$, tomamos $H_P = G_P$;
- Si $P = [Y']$ entonces tomamos $H_P = F(\mathcal{G}|Y')$;
- Si $y \in E(W)$ ponemos $H_y = G_y$ tal que como suponemos válido el resultado 1.2.11 para Y' tenemos que es un subgrupo.

Construyamos un morfismo de grupos $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$. Para eso primero lo definimos sobre los generadores. Para todo $g \in G_P$ con $P \in V(Y)$ definimos

$$\beta(g) = \begin{cases} [g] \in H_P & \text{si } P \notin Y' \\ [g] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } P \in Y' \end{cases}$$

y para toda arista $y \in E(Y)$ definimos

$$\beta(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \notin E(Y') \\ [y] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } y \in E(Y'). \end{cases}$$

De manera que así como está definida cumple las relaciones de $F(\mathcal{G})$ porque en particular el grupo $F(\mathcal{H})$ también las cumple. Obtenemos así que β está bien definida.

|| **LEMA 1.2.17.** *El morfismo de grupos $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Podemos construirnos un morfismo $\alpha : F(\mathcal{H}) \rightarrow F(\mathcal{G})$ tal que sea su inversa. La construcción es análoga a la construcción que hicimos para β definiéndola sobre sus generadores.

Para todo $g \in H_P$ con $P \in V(W) \setminus [Y']$ definimos,

$$\alpha(g) = [g]$$

y para toda arista $y \in E(W)$ tal que no empiece ni termine en $[Y']$ definimos,

$$\alpha(y) = [y].$$

En el caso de $F(\mathcal{G}|Y')$ usamos que este grupo está generado por $y \in E(Y')$ y por $g \in G_P$ tales que $P \in Y'$. Sobre $F(\mathcal{G}|Y')$ definimos

$$\alpha([g]) = [g]$$

para $g \in G_P$ si $P \in V(Y')$ e idénticamente para todas las aristas definimos

$$\alpha([y]) = [y]$$

Vemos que bajo esta definición sobre los generadores de $F(\mathcal{H})$ y que respeta las relaciones del grupo entonces tenemos que define un morfismo $\alpha : F(\mathcal{H}) \rightarrow F(\mathcal{G})$ tal que por construcción es la inversa de β . ■

La moraleja de este lema es que podemos tomar el grupo $F(\mathcal{G}|Y')$ para un subgrafo Y' conexo y después tomar el grupo $F(\mathcal{H})$ para el grafo resultante Y/Y' y es exactamente lo mismo que tomar $F(\mathcal{G})$ en el comienzo con la ventaja que el grafo es más chico ahora.

Para cada palabra (c, μ) del grafo de grupos $F(\mathcal{G})$ le vamos a asociar una palabra (c', μ') de \mathcal{H} tal que $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$. La idea es reemplazar las partes de la palabra que involucren a Y' con las respectivas en $F(\mathcal{G}|Y')$. Dados $1 \leq i \leq j \leq n$ llamemos c_{ij} al camino $(y_i \dots y_j)$ y μ_{ij} a los elementos (r_i, \dots, r_j) . Si c_{ij} está contenida en Y' denotaremos por r_{ij} al elemento correspondiente visto en $F(\mathcal{G}|Y')$. De esta manera lo que haremos es pensar en todos los subintervalos $[i_a, j_a]$ tales que el camino c está dentro del subgrafo Y' . Así tenemos subdividido al intervalo $[1, n]$ de la siguiente manera,

$$1 \leq i_1 \leq j_1 < i_2 \leq j_2 < \dots i_m \leq j_m \leq n.$$

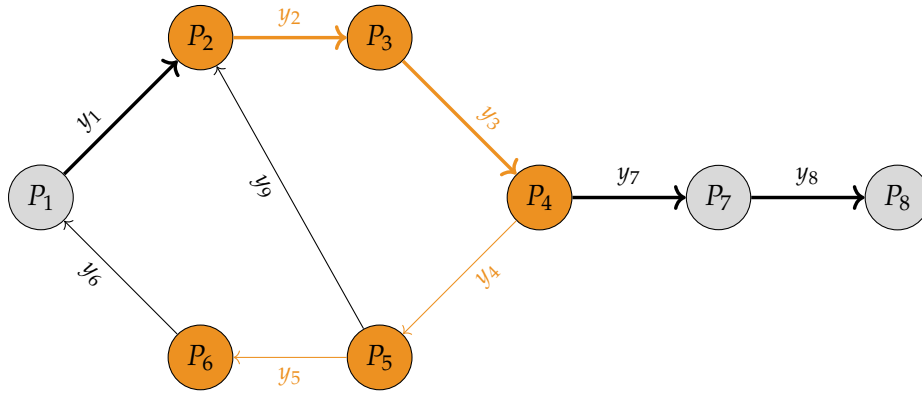
Donde en particular si miramos la palabra $c_{j_{a-1}i_a}$ notemos que es un camino por fuera de Y' exceptuando su comienzo y su final.

Definimos la palabra (c', μ') sobre los generadores de $F(\mathcal{H})$ como:

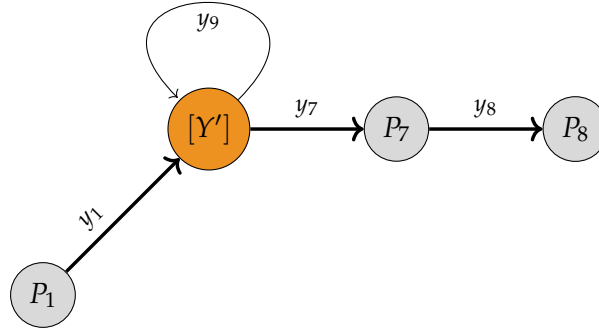
1. $c' = (c_{j_1 i_2} \dots, c_{j_{a-1} i_a}, c_{j_a i_{a+1}} \dots, c_{j_{m-1} i_m})$
2. $\mu' = (\mu_{1 i_1}, r_{i_1 j_2}, \dots, r_{i_m j_m}, \mu_{j_m n})$

donde tomamos la convención que μ_{1i_1} o bien $\mu_{j_m n}$ pueden ser la identidad si $i_1 = 1$ o bien si $j_m = n$.

EJEMPLO 1.2.18. Sea $Y = (V, E)$ grafo finito que representamos de la siguiente manera.



En este caso consideramos que el subgrafo conexo Y' es el que está pintado de color **naranja**. Consideremos \mathcal{G} una estructura de grafo de grupos sobre Y . Sea $c = (y_1, y_2, y_3, y_7, y_8)$ resaltado en **negrita** en la figura un camino en el grafo Y y sea $\mu = (r_0, r_1, \dots, r_8)$ una sucesión de elementos de manera que (c, μ) es una palabra de tipo c . Si contraemos el subgrafo Y' nos queda el grafo $W = Y/Y'$ que representamos de la siguiente manera,



tal que si \mathcal{H} es la estructura de grafo de grupos que construimos sobre el grafo W entonces tenemos definida (c', μ') una palabra de tipo c' donde $c' = (y_1, y_7, y_8)$ y donde $\mu' = (r_0, r_1 y_2 r_2 y_3 r_3, r_7, r_8)$ con $r_1 y_2 r_2 y_3 r_3 \in H_{[Y']} = F(\mathcal{G} \mid Y')$.

Por como las construimos nos queda que $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$ tal como queríamos ver. Veamos ahora que β preserve las palabras reducidas. Esto nos permitirá trabajar en grafos de grupos cada vez más chicos a medida que vayamos contrayendo subgrafos conexos.

PROPOSICIÓN 1.2.19. Si (c, μ) es una palabra reducida para $F(\mathcal{G})$ entonces (c', μ') es reducida para $F(\mathcal{H})$.

Demostración. Dividimos en dos casos dependiendo la longitud de c' .

Si la longitud de c' es 0 entonces es un camino constante en algún vértice $P' \in V(W)$. En tal caso $\mu' = r'_0$. Si $P' \in V(W) \setminus [Y']$ entonces por como construimos al grafo de grupos \mathcal{H} tenemos que $H_P = G_P$ y al ser (c, μ) una palabra reducida para \mathcal{G} obtenemos que $r_0 \neq 1$ visto en H_P . En el caso que $P' = [Y']$ nos queda que $r_0 \in F(\mathcal{G}|Y')$ y por lo tanto es reducida usando el teorema 1.2.11 inductivamente en el grafo Y' .

Supongamos ahora que la longitud de c' es al menos 1, entonces si queremos ver que (c', μ') es reducida debemos garantizar que cumpla **R2**. Sean $c = (y_1 \dots y_m)$, $\mu = (r_0 \dots r_m)$ y sean $c' = (w_1 \dots w_n)$, $\mu' = (r'_0, \dots, r'_n)$. Queremos ver que si existe $1 \leq k \leq n$ tal que $w_{k+1} = \overline{w_k}$ entonces $r'_k \notin H_{w_k}$. El caso particular que $t(w_k) \neq [Y']$ tenemos que (c', μ') es reducida porque justamente (c, μ) lo es y por lo tanto cumple **R2**. Si $t(w_k) = [Y']$ vamos a distinguir dos casos.

- i) En el primer caso tenemos que proviene de backtracking de c . Esto es que para cierto i vale que $w_k = y_i$ y $w_{k+1} = \overline{y_i}$. Por como definimos a (c', μ') tenemos que $r'_k = r_i$ bajo esta hipótesis. Queremos ver que $r'_k \notin H_{\overline{w_k}}$. El grupo $H_{\overline{w_k}}$ es isomorfo a $G_{\overline{y_i}}$ aunque la diferencia es que el primero es un subgrupo de $H_{[Y']}$ mientras que el segundo es un subgrupo de $G_{t(y_i)}$. Por ser (c, μ) reducida tenemos que $r_i \notin G_{\overline{y_i}}$. Por el corolario 1.2.12 tenemos que $G_{\overline{y_i}}$ es un subgrupo de $H_{[Y']} = F(\mathcal{G}|Y')$ entonces $r'_k \notin H_{[Y']}$.
- ii) En el segundo caso tenemos que proviene de un ciclo no constante de c sobre Y' . Siguiendo la notación introducida anteriormente tenemos que para cierto a vale que $w_k = y_{i_a}$, $r'_k = r_{i_a}$ y que $w_{k+1} = y_{j_{a+1}}$ donde bajo nuestras suposiciones tenemos que $w_{k+1} = \overline{w_k}$ por lo tanto $y_{j_{a+1}} = \overline{y_{i_a}}$.

Nuevamente queremos ver que se cumple **R2**. Esto es que $r'_k \notin H_{\overline{w_k}}$. Dado que el camino $c_{i_a j_a}$ no es constante, podemos aplicar el resultado 1.2.13 al grafo de grupos \mathcal{G} restringido al subgrafo Y' y obtenemos así que $r_{i_a} \notin G_{t(y_{i_a})}$. Esto nos dice que en el grupo $F(\mathcal{H})$ tenemos que $r'_k = r_{i_a} \notin H_{\overline{w_k}}$ dado que $H_{\overline{w_k}}$ es un subgrupo de $G_{t(y_{i_a})}$ si lo miramos dentro de $F(\mathcal{G}, Y')$. ■

Como último resultado previo veamos un lema que nos dice qué pasa cuando contraemos un subárbol de un árbol Y .

|| **LEMA 1.2.20.** Si Y es un árbol finito e Y' es un subárbol de Y entonces $W = Y/Y'$ es un árbol.

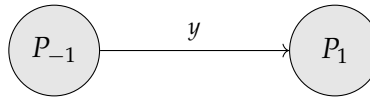
Demostración. Debemos ver que W no tiene ciclos dado que todo cociente de un grafo conexo sigue siendo conexo. Para cada vértice $P' \in V(W)$ consideremos P su levantado en Y tal que para el caso particular de $[Y']$ consideramos algún vértice $P \in V(Y')$ arbitrario. En el caso de las aristas cada arista $w \in E(W)$ se corresponde con una única arista $y \in E(Y)$. Para ver que no tiene ciclos supongamos que c' es un ciclo de W . Este ciclo tiene que pasar por $[Y']$ caso contrario tomando levantados de aristas y vértices conseguiríamos un ciclo en Y , consideremos que este ciclo c' pasa solamente al comienzo y al final por $[Y']$. Si levantamos este ciclo nos queda un camino c en Y tal que comienza y termina en Y' y aparte cumple que ninguna de las aristas está en $E(Y')$. Por hipótesis tenemos que Y' es conexo por lo tanto debe existir un camino d con aristas contenidas

en Y' tal que une los extremos de c . Concatenando c con d obtenemos un ciclo de Y pero esto contradice que Y es un árbol. ■

Finalmente estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección.

Demostración de 1.2.11. Separamos en casos dependiendo cómo es el grafo Y .

1. El caso que Y es un segmento que representaremos de la siguiente manera:



Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre este grafo. Si (c, μ) es una palabra de tipo c entonces el elemento $|c, \mu|$ es de la pinta $r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n$. Donde $e_i = -e_{i+1}$ para todo $i = 1 \dots n$ y los elementos cumplen que $r_0 \in G_{P_{-e_1}}$ y $r_i \in G_{P_{e_i}} \setminus G_{y^{e_i}}$ dado que (c, μ) es una palabra reducida. El caso particular que nuestro camino es constante tenemos que $r_0 \neq 1$ porque vale **R1**.

Para el otro caso en el cual el camino c no es constante consideremos el morfismo sobreyectivo al cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ donde $T = Y$ es el mismo segmento. Por lo visto en el ejemplo 1.1.10 tenemos un isomorfismo $\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1}$.

Consideramos el morfismo sobreyectivo π que es la proyección del grupo universal al grupo fundamental

$$\pi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1}$$

tenemos que

$$\pi(|c, \mu|) = r_0 r_1 \dots r_n$$

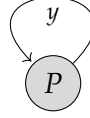
tal que para todo $0 \leq i \leq n$ vale que $r_i \in G_{P_{e_i}} \setminus G_{y^{e_i}}$. Esto es equivalente a que $\phi(|c, \mu|)$ sea reducida para el grupo amalgamado $G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1}$. Por el resultado 1.2.8 tenemos que $\phi(|c, \mu|) \neq 1$ y así concluimos que $|c, \mu| \neq 1$ no es la identidad.

2. El caso que Y es un árbol.

Lo probamos usando inducción en la cantidad de aristas $|E(Y)| = m$. El caso base es $m = 1$ lo que implica que Y es un segmento y esto lo probamos en el caso anterior de la demostración de este teorema. Para el paso inductivo nos basta tomar Y' algún segmento de Y . Por el lema 1.2.20 vemos que el grafo $W = Y/Y'$ resulta ser un árbol y más aún podemos aplicarle la hipótesis inductiva dado que $|E(W)| < m$. De esta manera aplicando el paso inductivo obtenemos que vale este resultado para el grafo de grupos \mathcal{H} sobre W entonces vale que $|c', \mu'| \neq 1$. Por el isomorfismo α definido en 1.2.17 y por el lema 1.2.19 terminamos de ver que $|c, \mu| \neq 1$.

3. El caso que Y es un bucle.

Agregar cita a la definición del grafo de grupos sobre el grafo cociente? No sé como manejarlo en estas demos.



Sea \mathcal{G} una estructura de grafo de grupos sobre entonces en este caso el grupo universal resulta $F(\mathcal{G}) \simeq G_p^{*G_y}$. Por ser (c, μ) una palabra reducida para $F(\mathcal{G})$ vemos que esta condición en este caso coincide con la definición de una palabra reducida para una extensión HNN. Bajo estas condiciones podemos aplicar el lema de Britton 1.2.2 que nos garantiza que $|c, \mu| \neq 1$ en el grupo $F(\mathcal{G})$ tal como queríamos ver.

4. El caso general. Sea $Y = (V, E)$ un grafo finito conexo arbitrario. Lo probamos por inducción en $m = |E|$. El caso base $m = 1$ se corresponde con un bucle o bien con un segmento ambos casos ya probados en la demostración de este teorema. Para el paso inductivo sea Y' subgrafo de Y que podría ser un segmento o bien un bucle. Aplicamos el resultado a $W = Y/Y'$ tal que $|E(W)| < m$. A W le damos la estructura de grafo de grupos \mathcal{H} . Por inducción vale en \mathcal{H} entonces usando el lema 1.2.19 terminamos de probarlo para un grafo Y conexo y finito arbitrario.

§1.3. Árbol de Bass–Serre.

Vamos a definir el árbol de Bass–Serre que resulta ser en nuestro contexto el revestimiento universal de un grafo de grupos. Presentamos una construcción un poco más concisa que la que aparece en [?] si bien la idea es prácticamente la misma. Otra construcción posible del árbol de Bass–Serre se puede ver en el trabajo [?] donde los autores construyen este árbol de una manera sintáctica usando sistemas de reescritura.

§1.3.1. Construcción de \tilde{X} .

Sea Y un grafo dirigido conexo y sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre este grafo. Sea T un árbol generador del grafo Y luego llamemos $G = \pi_1(\mathcal{G}, T)$. Queremos construirnos los siguientes objetos:

1. Un grafo dirigido \tilde{X} .
2. Una acción de G en \tilde{X} sin inversiones de aristas de manera que $\tilde{X}/G \simeq Y$.
3. Una sección $Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que para todo vértice $P \in V(Y)$ denotaremos $\tilde{P} \in V(\tilde{X})$ a su imagen y similarmente para toda arista $y \in E(Y)$ denotaremos $\tilde{y} \in E(\tilde{X})$ a su imagen.

Para construir este grafo vamos a partir de la siguiente observación. Si \tilde{X} fuera un grafo tal que G actúa sobre él e $Y = \tilde{X}/G$ entonces tendríamos que vale lo siguiente: para todo vértice $\tilde{P} \in V(\tilde{X})$ por el teorema de órbitas estabilizador existe una biyección entre la órbita $G\tilde{P}$ y los

cosets del estabilizador $G/G_{\tilde{p}}$. De esta manera vamos a construir a los vértices para que valga esta propiedad:

$$V(\tilde{X}) = \bigsqcup_{v \in V(Y)} G/G_v$$

mientras que para las aristas por un razonamiento idéntico llegamos a que:

$$E(\tilde{X}) = \bigsqcup_{y \in E(Y)} G/G_y.$$

Ya habiendo definido el conjunto de vértices y de aristas del grafo \tilde{X} vamos a definir la arista con orientación opuesta y los inicios y finales de las aristas.

El comienzo de una arista $s : E(\tilde{X}) \rightarrow V(\tilde{X})$ va a estar definida como:

$$s(gG_y) = gG_{s(y)}.$$

Probemos que esta definición no depende de los representantes elegidos. Si tenemos que $gG_y = hG_y$ esto nos dice que $h^{-1}gG_y = G_y$. Como G_y es un subgrupo de $G_{s(y)}$ entonces si $h^{-1}g \in G_y$ esto nos dice que $h^{-1}g \in G_{s(y)}$. De esta manera $hG_{s(y)} = gG_{s(y)}$ tal como queríamos ver y por lo tanto el origen de una arista no depende de la elección del representante.

Ahora vamos a ver la definición del fin de una arista $t : E(\tilde{X}) \rightarrow V(\tilde{X})$ que está dada por:

$$t(gG_y) = gg_yG_{t(y)}$$

Probemos que esta definición no depende de los representantes elegidos. Si tenemos que $hG_y = gG_y$ luego queremos ver que $hg_yG_{t(y)} = gg_yG_{t(y)}$ y esto ocurre si y solo si $g_y^{-1}h^{-1}gg_yG_{t(y)} = G_{t(y)}$. Usando una de las relaciones del grupo tenemos que $g_y^{-1}G_yg_y \subseteq G_{\bar{y}}$ y como $h^{-1}g \in G_y$ luego obtenemos que $g_y^{-1}h^{-1}gg_y \in G_{\bar{y}}$. Por como definimos a los grafos de grupos tenemos que $G_{\bar{y}}$ es un subgrupo $G_{s(\bar{y})}$ y como $s(\bar{y}) = t(y)$ terminamos de probar que $g_y^{-1}h^{-1}gg_y \in G_{t(y)}$ tal como queríamos ver.

Usando estas dos definiciones tenemos que la arista inversa $\overline{(\cdot)} : E(\tilde{X}) \rightarrow E(\tilde{X})$ tiene que ser:

$$\overline{gG_y} = gg_yG_{\bar{y}}.$$

tal que $s(gg_yG_{\bar{y}}) = gg_yG_{t(y)}$ y $t(gg_yG_{\bar{y}}) = gg_yg_{\bar{y}}G_{s(y)}$ y como $g_yg_{\bar{y}} = 1$ obtenemos así que $t(gg_yG_{\bar{y}}) = gG_{s(y)}$. A su vez por una cuenta similar vemos que $\overline{\overline{gG_y}} = gG_y$.

De esta manera ya tenemos definido el grafo dirigido \tilde{X} . Por como construimos a \tilde{X} nos aseguramos que G actúa en \tilde{X} y que $\tilde{X}/G \simeq Y$. A su vez esta acción es sin inversión de aristas por que para todo $g \in G$ y toda arista $hG_y \in E(\tilde{X})$ tenemos que

$$g(hG_y) \neq hg_yG_{\bar{y}}$$

dado que son cosets correspondientes a aristas diferentes.

Quizá podría recordar qué es g_y

§1.3.2. Teorema de Serre.

Hacer lo siguiente: 1) Escribir mejor esto del levantado, quizá agregar un dibujo. 2) Mostrar cómo es el árbol de Bass-Serre localmente. Su star está en biyección con los cosets de GP/Gy .

Llamemos $q : \tilde{X} \rightarrow Y$ a la proyección de \tilde{X} en $\tilde{X}/G \simeq Y$. Este epimorfismo de grafos está definido por $q(gG_P) = P$ para todo $P \in V$ y $q(gG_y) = y$ para toda $y \in E$.

definitivamente
agregar defini-
ción de subgrafo
generado por
unos vértices

OBSERVACIÓN 1.3.1. El subgrafo $W \subseteq \tilde{X}$ generado por el siguiente conjunto de vértices

$$V(W) = \{G_P \mid \forall P \in V(Y)\} \cup \{g_y G_Q : \forall y \in E(Y), Q \in V(Y) / t(y) = Q\}$$

es tal que resulta ser un dominio fundamental de la acción de G en \tilde{X} .

Sea T el árbol generador de Y que fijamos en el comienzo de la sección. Veamos que en estas circunstancias podemos definir un levantado de T en \tilde{X} .

PROPOSICIÓN 1.3.2. Sea X grafo conexo no vacío, G grupo que actúa sin inversiones sobre X . Sea $Y = X/G$ y sea $\pi : X \rightarrow Y$ la proyección. Sea T árbol generador de Y . Entonces podemos tomar $\iota : V(Y) \rightarrow V(X)$ sección a π tal que si nombramos $T' = \iota(T)$ resulta ser un subgrafo de X .

Demostración. Vamos a usar el Lema de Zorn. Sea el siguiente conjunto

$$\Omega = \{(S, \iota) \mid S \text{ subárbol de } T, \iota \text{ es sección de } \pi, \iota(S) \text{ subárbol de } X\}$$

tal que si consideramos el siguiente orden

$$(S, \iota) \leq (S', j) \iff (S \subseteq S' \implies \iota(S) \subseteq j(S') \wedge j|_S = \iota)$$

donde miramos la inclusión como grafos en ambas coordenadas.

Observemos que si tomamos una arista $y \in E(Y)$ luego como G actúa sin inversiones de aristas tenemos que para todo $g, h \in G$ y para toda $y \in E(Y)$ vale lo siguiente $g \cdot y \neq h \cdot \bar{y}$ en X . Esto nos dice que es posible definir secciones a la proyección $\pi : X \rightarrow Y$.

- Veamos que Ω es no vacío. Tomamos $y \in E(T)$ alguna arista de T y tomamos el subárbol $S = (\{s(y), t(y)\}, \{y\})$. Definimos $\iota(y) = 1 \cdot y$ y $\iota(\bar{y}) = g_y \cdot \bar{y}$ que por como la definimos es una sección. De esta manera vemos que $\iota(S)$ es un subárbol de X por lo tanto $(S, \iota) \in \Omega$.
- Probamos ahora que toda cadena $(S_i, \iota_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega$ tiene un supremo en Ω por lo tanto por el lema de Zorn concluiríamos que existe un elemento maximal de Ω . Si tomamos la unión de todos los subgrafos S_i obtenemos el siguiente subgrafo

$$S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i.$$

Similarmente tomamos la unión de todas las secciones,

$$\iota = \bigcup_{i=0}^k \iota_i$$

donde $\iota(y) = g \cdot y$ si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $y \in S_i$ y en ese caso $\iota_i(y) = g \cdot y$. Por esta definición tenemos que ι es una sección de π y por la observación 1.4.3 tenemos que S y $\iota(S)$ resultan ser árboles. El supremo para esta cadena resulta ser $(S, \iota) \in \Omega$.

Por el lema de Zorn tenemos un elemento maximal (M, j) . Veamos que $(\pi \circ j)(M) = T$. Caso contrario como $M \in \Omega$ tenemos que es un subgrafo de T y así como hicimos anteriormente podríamos levantar una arista $y \in E(T) \setminus E(M)$ a $g \cdot y \in E(X)$ de manera que $s(g \cdot y) \in V(j(M))$. Si consideramos $M' = M \cup \{y\}$ luego (M', j') con $j'(y) = g \cdot y$ y $j'(z) = j(z)$ para todo $z \in E(M)$ es tal que $(M', j') \in \Omega$ y $(M, j) \leq (M', j')$ contradiciendo la maximalidad de (M, j) . Concluimos así que $M = T$ tal como queríamos ver. ■

OBSERVACIÓN 1.3.3. En particular podemos definir \tilde{T} subárbol de \tilde{X} de manera que está generado por el siguiente conjunto de vértices:

$$V(\tilde{T}) = \{G_P \mid P \in V(Y)\}$$

y que tiene como aristas a

$$E(\tilde{T}) = \{G_y \mid y \in E(Y)\}.$$

Donde usamos que $g_y = 1$ para toda $y \in E(T)$. De esta manera nuestra sección $\iota : \tilde{T} \rightarrow \tilde{X}$ está definida por $\iota(P) = G_P$ y $\iota(y) = G_y$. Tal que $q \circ \iota : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$ es la identidad.

|| **TEOREMA 1.3.4 (Serre).** *El grafo \tilde{X} es un árbol.*

Demostración. Debemos ver dos cosas: que es conexo y que no tiene ciclos.

- \tilde{X} es conexo.

El subgrafo W definido en la observación 1.3.1 es un dominio fundamental para la acción de G en \tilde{X} esto quiere decir que $G \cdot W = \tilde{X}$ por lo que

$$\tilde{X} = \bigcup_{g \in G} gW$$

donde gW es conexo para todo $g \in G$ dado que W lo es.

Si S es un conjunto finito de generadores de G entonces todo $g \in G$ lo podemos escribir como $g = s_{i_1} \dots s_{i_n}$ para $s_{i_j} \in S$. Si fijamos $g \in G$ podemos definir el siguiente grafo:

$$W_g = W \cup \bigcup_{j=1}^n s_{i_j} \dots s_{i_n} W.$$

Entonces al grafo \tilde{X} lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\tilde{X} = \bigcup_{g \in G} W_g.$$

Agregar que la unión de grafos es un grafo?

Fijamos un conjunto finito de generadores de G :

$$S = \bigcup_{P \in V(Y)} G_P \cup \{g_y : y \in E \setminus E(T)\}.$$

Con este conjunto de generadores vamos a probar que para todo $g \in G$ resulta que W_g es conexo. Si probamos esto como \tilde{X} es unión de W_g y para todo $g, h \in G$ tenemos que $W \subseteq W_g \cap W_h$ con $W \neq \emptyset$ luego tendremos que \tilde{X} es conexo tal como queríamos ver.

Agregar esta proposición de grafos conexos? Es un caso especial de la de conjunto conexos.

Dado $g \in G$ nos alcanza con probar que W_g es conexo. Para esto lo vamos a probar por inducción en la longitud de g visto como palabra en los generadores S .

Para el caso base tenemos que $g = s$ para $s \in S$. Queremos ver que $W_s = W \cup sW$ es conexo. Debemos ver dos casos dependiendo como sea el generador que estemos tomando.

1. Si $s = g_y$ para alguna arista $y \in E(Y)$ luego tenemos que $g_y G_y \in g_y W$. Queremos ver que $g_y G_y \in W$. Para esto debemos ver que el comienzo y el final de la arista pertenecen al grafo W . Por la definición tenemos que $s(gG_y) = G_{s(y)} \in V(W)$ y similarmente $t(gG_y) = g_y G_{t(y)} \in V(W)$. De esta manera $g_y W \cap W \neq \emptyset$ y por lo tanto la unión es conexa.
2. Si $s \in G_P$ para algún $P \in V$ entonces $sG_P = G_P \in V(sW) \cap V(W)$ por lo tanto $sW \cap W \neq \emptyset$ y así la unión es conexa.

Ahora para el paso inductivo supongamos que W_g es conexo para todo g tal que puede ser escrito como una palabra de $n - 1$ letras en S . Queremos verlo para $g = s_1 \dots s_n$ y esto lo podemos hacer notando que

$$s_n W \cup W$$

es conexo por lo tanto si multiplicamos a izquierda por $s_1 \dots s_{n-1}$ va a seguir siendo conexo:

$$s_1 \dots s_{n-1} (W \cup s_n W) = s_1 \dots s_{n-1} W \cup s_1 \dots s_n W \quad (1.1)$$

De esta manera si llamamos $g' = s_1 \dots s_{n-1}$ entonces

$$W_g = W_{g'} \cup s_1 \dots s_n W.$$

Por hipótesis inductiva tenemos que $W_{g'}$ es conexo y como por 1.1 vimos que $s_1 \dots s_{n-1} W \cap s_1 \dots s_n W \neq \emptyset$ y $s_1 \dots s_{n-1} W \subseteq W_{g'}$ entonces probamos que W_g es conexo tal como queríamos ver.

Vimos así que el grafo \tilde{X} es conexo porque lo escribimos como unión de conexos que se intersecan de a pares.

- Veamos ahora que no tiene ciclos. Probaremos la proposición equivalente: para todo $n \in \mathbb{N}$ no existe camino cerrado de longitud n sin backtracking.

El caso que $n = 0, 1$ es claro porque no existen caminos con estas longitudes de manera que tengan backtracking.

Supongamos entonces que $n \geq 2$. Sea \tilde{c} un camino sobre \tilde{X} cerrado de longitud n y sin backtracking. Queremos llegar a un absurdo. Sea este camino $\tilde{c} = (h_1 G_{y_1}, h_2 G_{y_2}, \dots, h_n G_{y_n})$. Introduciremos las siguientes notaciones. Para todo $1 \leq i \leq n$ llamemos $P_i = s(y_i)$ y llamaremos $g_i = g_{y_i}$. Al ser \tilde{c} un camino cerrado valen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} t(h_n G_{y_n}) &= h_n g_n G_{P_0} = h_1 G_{P_0} = s(h_1 G_{y_1}) \\ \vdots &= \vdots \\ t(h_{n-1} G_{y_{n-1}}) &= h_{n-1} g_{n-1} G_{P_{n-1}} = h_n G_{P_{n-1}} = s(h_n G_{y_n}) \end{aligned}$$

de manera que para todo $1 \leq i \leq n$ existe $r_i \in G_{P_i}$ tal que $h_i g_i r_i = h_{i+1}$.

Podemos reescribir las igualdades anteriormente obtenidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_n g_n r_n \\ h_2 &= h_1 g_1 r_1 \\ \vdots & \\ h_n &= h_{n-1} g_{n-1} r_{n-1} \end{aligned}$$

Más aún usando cada ecuación para reescribirla en la anterior obtenemos que multiplicando todo de forma telescópica nos termina quedando lo siguiente,

$$g_1 r_1 \dots g_n r_n = 1. \quad (1.2)$$

Sea la palabra (c, μ) de tipo c dada por el camino $c = q(\tilde{c})$ y la sucesión $\mu = (1, r_1, \dots, r_n)$. Sea $\pi : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$ la proyección al cociente. En la ecuación 1.2 vimos que $\pi(|c, \mu|) = g_1 r_1 \dots g_n r_n = 1$. Veamos que (c, μ) es una palabra reducida. Si probamos esto, entonces (c, μ) cumple las hipótesis del resultado 1.2.14 dado que c es un camino cerrado no trivial y es una palabra reducida por lo tanto $\pi(|c, \mu|) \neq 1$ y así llegaríamos a una contradicción.

Para eso debemos chequear que se cumpla la condición **R2** de la definición de las palabras reducidas, ya que suponemos que \tilde{c} es un camino cerrado con longitud al menos 2.

Para ver que (c, μ) es reducida debemos ver que si existe $1 \leq i \leq n$ tal que $y_{i+1} = \overline{y_i}$ entonces para ese mismo i vale que $r_i \notin G_{\overline{y_i}}$.

Consideramos la ecuación que teníamos anteriormente

$$h_i g_i r_i = h_{i+1}$$

de manera que si despejamos a r_i obtenemos que

$$r_i = g_i^{-1} (h_i^{-1} h_{i+1}).$$

Supongamos que $r_i \in G_{\overline{y_i}}$, en tal caso tendríamos que

$$h_i g_i r_i G_{\overline{y_i}} = h_i g_i G_{\overline{y_i}} = h_{i+1} G_{\overline{y_i}}.$$

Esto nos dice que vale la siguiente igualdad

$$h_{i+1}G_{\bar{y}_i} = \overline{h_i G_{y_i}}$$

pero esto es una contradicción porque al camino original \tilde{c} lo habíamos tomado sin backtracking. Por lo tanto $r_i \notin G_{\bar{y}_i}$ y así vemos que (c, μ) era reducida tal como queríamos ver. ■

DEFINICIÓN 1.3.5. Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo conexo $Y = (V, E)$. El grafo \tilde{X} lo llamamos el *árbol de Bass-Serre* de \mathcal{G} .

§1.4. Acciones de grupos sobre árboles.

Sea X un grafo conexo finito y sea G un grupo finitamente generado que actúa sobre X . Llamemos $Y = G/X$ y T árbol generador de Y . Nuestro objetivo es construir un grafo de grupos \mathcal{G} sobre Y de manera que se corresponda a esta acción y $\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq G$.

Sea la proyección $\pi : X \rightarrow Y$ tal que es un epimorfismo de grafos. Este grafo está dado por los siguientes vértices,

$$V(Y) = \{GP : P \in V(X)\}$$

y las aristas

$$E(Y) = \{Gy : y \in E(X)\}.$$

En particular como el grafo X es conexo tenemos que Y también lo es. Consideremos $\iota : Y \rightarrow X$ una sección como conjuntos que la armamos con los siguientes dos pasos.

1. Para cada vértice $P \in V(Y)$ elegimos $\iota(P) = P' \in V(X)$ tal que $\pi(P') = P$.
2. Para cada arista $y \in E(Y)$ elegimos $\iota(y) = y' \in E(X)$ de manera que $s(\iota(y)) = \iota s(y)$. Esto lo podemos hacer para cada arista por separado.

Por como hicimos esta construcción nos garantizamos que el comienzo de cada arista cuando la miramos en X sea uno de los vértices que tomamos como representantes de vértices de Y en X . En principio no sabemos que el vértice del final de la arista de y coincida con el de comienzo de y . Lo que sabemos es que existe $g_y \in G$ tal que

$$g_y \iota(y) = \iota(\bar{y})$$

porque ambas aristas en la misma órbita por la acción de G . Si fijamos una orientación de aristas para el grafo X luego podemos elegir para cada arista de la orientación algún $g_y \in G$ tal que $g_y \iota(y) = \iota(\bar{y})$. Para las aristas con la orientación opuesta tendremos algún $g_{\bar{y}} \in G$ tal que

$$g_{\bar{y}} \iota(\bar{y}) = \iota(y).$$

Como la acción de G sobre X es por morfismos de grafos tenemos que $\overline{g\bar{y}} = g\bar{y}$ y por lo tanto podemos elegir $g_{\bar{y}} = g_y^{-1}$. El caso particular que $\overline{\iota(y)} = \iota(\bar{y})$ definiremos que $g_y = 1 = g_{\bar{y}}$.

Vamos a construir \mathcal{G} un grafo de grupos sobre el grafo Y . Consideremos para $P \in V(Y), y \in E(Y)$ los siguientes grupos,

$$G_P = G_{\iota(P)}, G_y = G_{\iota(y)}$$

donde estamos mirando los estabilizadores de la acción de G sobre X . Por como elegimos a la sección tenemos que $G_{\iota(y)} \subset G_{s(\iota y)}$. Si hubiéramos tomado otra sección que no sea ι los grupos que nos quedarían serían conjugados a los que obtuvimos tomando a ι como nuestra sección.

Queremos ver que $G_y \simeq G_{\bar{y}}$ para garantizar que \mathcal{G} sea un grafo de grupos. Consideremos el siguiente morfismo de grupos;

$$\begin{aligned} \phi : G_{\bar{y}} &\rightarrow G_y \\ a &\mapsto g_y^{-1} a g_y \end{aligned}$$

Veamos que está bien definido. Para eso veamos que $g_y^{-1} a g_y \iota(y) = \iota(y)$. Como $g_y \iota(y) = \overline{\iota(\bar{y})}$ dado que $g_y \iota(\bar{y}) = \iota(\bar{y})$ por como lo elegimos a g_y y porque $\overline{g\bar{w}} = g\bar{w}$ para toda $w \in E(X)$. Ahora usamos que si $a \in G_{\iota(\bar{y})}$ luego $a \in G_{\iota(\bar{y})}$ por lo tanto $a \iota(\bar{y}) = \iota(\bar{y})$. Finalmente como $g_y^{-1} \iota(\bar{y}) = \iota(y)$ tal como queríamos ver. Este morfismo tiene un inverso $\phi^{-1} : G_y \rightarrow G_{\bar{y}}$ definido por $\phi^{-1}(b) = g_y b g_y^{-1}$ por lo tanto ϕ es un isomorfismo tal como queríamos ver.

Definimos el siguiente morfismo del producto libre de los estabilizadores de los vértices y el grupo libre en las aristas del grafo al grupo G .

$$\begin{aligned} \varphi : \bigstar_{P \in V(Y)} G_P \bigstar_{F_E(Y)} &\rightarrow G \\ g &\mapsto g \\ y &\mapsto g_y \end{aligned}$$

Probemos que este morfismo baja a $F(\mathcal{G})$. Para eso veamos que cumple las relaciones que definen a este cociente.

1. $g_y g_{\bar{y}} = 1$ para todo $y \in E(Y)$ porque justamente elegimos a $g_{\bar{y}}$ de esta manera;
2. $\bar{y} a y = a^{\bar{y}}$ para todo $y \in E(Y), a \in G_y$ porque justamente vimos que

$$\varphi(\bar{y}) \varphi(a) \varphi(y) = g_y^{-1} a g_y = a^{\bar{y}}$$

De esta manera tenemos definido un morfismo de grupos $\varphi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G$. Nuestro objetivo ahora es ver que este morfismo baja al grupo fundamental del grafo de grupos sobre un árbol de expansión.

LEMA 1.4.1. Sea G un grupo que actúa en un grafo conexo X sin inversiones de aristas y sea \mathcal{G} el grafo de grupos asociado sobre $Y = X/G$. El morfismo $\varphi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G$ es tal que $\varphi(g) = g$ para todo $g \in G_P$.

Demostración. Por el corolario 1.2.12 tenemos que G_P es un subgrupo de $F(\mathcal{G})$ por lo tanto por nuestra definición tenemos que $\varphi(g) = g$ para todo $g \in G_P$. ■

En particular si consideramos que para toda arista $y \in E(X)$ el grupo G_y es subgrupo de $G_{s(y)}$ luego $\varphi(a) = a$ para todo $a \in G_y$.

PROPOSICIÓN 1.4.2. Sea G un grupo que actúa en un grafo conexo X sin inversiones de aristas y sea \mathcal{G} el grafo de grupos asociado sobre $Y = X/G$. El morfismo de grupos $\varphi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G$ restringido al subgrupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es sobreyectivo.

Demostración. Dado $g \in G$ queremos ver que $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$. Sea $P \in \iota(V(Y))$ un vértice. Consideremos $gP \in V(X)$, como el grafo es conexo tenemos un camino que une a P con gP . Sea este camino $(e_0\iota(y_1), \dots, e_{k-1}\iota(y_k))$ donde $e_i \in G$ para todo $0 \leq i \leq k-1$ y (y_1, \dots, y_k) es un camino en el grafo Y . Si miramos los vértices que aparecen en este camino tenemos:

$$e_0P_0 \xrightarrow{e_0\iota(y_1)} e_1P_1 \xrightarrow{e_1\iota(y_2)} \dots \xrightarrow{e_{k-1}\iota(y_k)} e_kP_k$$

de manera que $P_i \in V(\iota(Y))$. En particular $P_0 = P$ y $P_k = P$ y así $s(\iota(y_i)) = P_{i-1}$ por como tomamos las levantadas de las aristas. Los elementos e_i son tales que $e_i t(\iota(y_{i+1})) = e_{i+1}P_{i+1}$.

Una primera observación que podemos hacer es que $ge_k^{-1} \in G_P$ dado que $e_kP = gP$. Por el lema 1.4.1 tenemos que $\varphi(h) = h$ para todo $h \in G_P$ por lo tanto $\varphi(ge_k^{-1}) = ge_k^{-1}$. Esto nos dice que si escribimos a g de la siguiente manera,

$$g = (ge_k^{-1})e_k$$

entonces como $ge_k^{-1} \in G_P$ tenemos que usando el resultado 1.2.12 que vale lo siguiente: $ge_k^{-1} \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$. Como $\varphi(ge_k^{-1}) = ge_k^{-1}$ obtenemos que $ge_k^{-1} \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$. Si vemos que $e_k \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ probaríamos que $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ tal como queríamos ver.

Probaremos por inducción en el camino que tomamos anteriormente que $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$ para todo $i = 0 \dots n$.

El caso base consiste en ver que $e_0 \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$. Esto es cierto porque justamente tenemos que $e_0 \in G_P$ dado que $e_0P = P$ y por el lema anterior 1.4.1 tenemos que φ es la identidad cuando la restringimos a G_P .

Para el paso inductivo supongamos que $e_{i-1} \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_{i-1}))$ y queremos ver que $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$. Antes de probar esto veamos de reescribir a e_i en términos de e_{i-1} . Observemos que por como tomamos el camino tenemos que

$$e_{i-1}t(\iota(y_i)) = e_iP_i$$

y así $t(\iota(y_i)) = e_{i-1}^{-1}e_i P_i$ y como $t(\iota(y_i)) = s(\overline{\iota(y_i)})$ luego obtenemos que $s(\overline{\iota(y_i)}) = e_{i-1}^{-1}e_i P_i$. Por como definimos al elemento del grupo $g_{y_i} \in G$ tenemos que $g_{y_i}\iota(\overline{y_i}) = \overline{\iota(y_i)}$ por lo tanto obtenemos que

$$s(g_{y_i}\iota(\overline{y_i})) = g_{y_i}P_i = e_{i-1}^{-1}e_i P_i = s(\overline{\iota(y_i)})$$

de esta manera llegamos a la siguiente escritura para e_i ,

$$e_i = e_{i-1}g_{y_i}h_i$$

donde $h_i \in G_{P_i}$.

Ahora podemos usar nuestra hipótesis inductiva para obtener un camino

$$h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1} \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$$

de manera que $e_{i-1} = \varphi(h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1})$. Recordemos que $\varphi(y_i) = g_{y_i}$ por la definición de nuestro morfismo φ y por otro lado tenemos que $\varphi(h_i) = h_i$ porque φ fija a los grupos G_{P_i} por 1.4.1. Con esto concluimos la siguiente igualdad,

$$e_i = \varphi(h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1}y_ih_i)$$

y como $h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1}y_ih_i \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$ terminamos de probar que $e_i \in \varphi(\Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$ tal como queríamos ver. En particular con esto probamos que $e_k \in \varphi(\mathcal{G}, P)$ y esto implica que $g \in \varphi(\mathcal{G}, P)$ tal como queríamos ver. De esta manera la restricción de φ al subgrupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es sobreyectiva. ■

Ahora vamos a probar que este morfismo φ se factoriza por el cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$. Para esto primero vamos a requerir que podamos levantar árboles de acciones de grupos sin inversiones.

OBSERVACIÓN 1.4.3. Dada una sucesión de árboles $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que para todo $i \in \mathbb{N}$ vale que $T_i \subseteq T_{i+1}$ entonces

$$T = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$$

es un árbol. Esto se debe a que la unión de conexos sigue siendo conexo y si tuviera un ciclo entonces existiría N suficientemente grande tal que T_N tendría un ciclo y esto contradice que es un árbol.

Ahora sí veamos que podemos definir un levantado de un árbol.

|| **COROLARIO 1.4.4.** Sea G un grupo que actúa en un grafo conexo X sin inversiones de aristas y sea \mathcal{G} el grafo de grupos asociado sobre $Y = X/G$. Sea T un árbol generador de Y . Entonces la restricción del morfismo $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, P)$ se factoriza por $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Demostración. Por la proposición anterior 1.3.2 tenemos que al levantado $\iota(T) \subseteq X$ lo podemos tomar para que sea un subárbol. Al ser un subgrafo tenemos que $\iota(\overline{y}) = \overline{\iota(y)}$ y equivalentemente que $g_y = 1$ y esto nos dice que $\varphi(\iota(y)) = 1$. Como $\pi_1(\mathcal{G}, T) = F(\mathcal{G})/\langle\langle R \rangle\rangle$ donde $R = \{y \in E(T)\}$ luego tenemos que φ define un morfismo $\overline{\varphi} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$ tal como queríamos ver. ■

1.4.0.1. Morfismo de grafos ψ .

En esta subsección mantenemos los nombres que elegimos en la anterior sección: X es un grafo en el cual actúa un grupo G , $Y = X/G$ es el cociente por esta acción y \mathcal{G} es un grafo de grupos sobre Y construido tal como lo hicimos anteriormente.

Sea \tilde{X} el árbol de Serre del grafo de grupos \mathcal{G} . Nuestro objetivo es dar un epimorfismo de grafos $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ que en nuestro contexto de la teoría de Bass-Serre va a ser equivalente a decir que \tilde{X} junto con este morfismo es un revestimiento de X .

Definimos entonces $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ dada por:

$$\begin{aligned}\psi(gG_P) &= \varphi(g) \cdot P \text{ para todo } g \in G, P \in V(Y) \\ \psi(gG_y) &= \varphi(g) \cdot \iota(y) \text{ para todo } g \in G, y \in V(Y)\end{aligned}$$

Veamos que la definición de ψ no depende del representante y por lo tanto que está bien definida. Sean dos representantes del mismo coset, $gG_P = hG_P$, queremos ver que $\varphi(g) \cdot P = \varphi(h) \cdot P$. Dado que $h^{-1}g \in G_P$ luego tenemos que $\varphi(h^{-1}g) = h^{-1}g$ porque φ restringida a G_P es la identidad por el resultado 1.4.1. Esto nos dice que

$$\begin{aligned}\varphi(h)\varphi(h^{-1}g) &= \varphi(g) \\ \varphi(h)(h^{-1}g) &= \varphi(g) \\ \implies \varphi(h) \cdot P &= \varphi(g) \cdot P.\end{aligned}$$

por lo tanto ψ está bien definida para todo coset de vértices. Similarmente por un razonamiento idéntico podemos ver que ψ está bien definida para todo coset de aristas y así vemos que ψ es una función bien definida.

|| **LEMA 1.4.5.** *La función $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ resulta ser un morfismo de grafos.*

Demostración. Para ver que es un morfismo de grafos nos basta ver que manda vértices en vértices, aristas en aristas y respeta comienzo de aristas y la asignación de las aristas opuestas. Por como lo definimos está claro que manda vértices en vértices y aristas en aristas.

Veamos que respeta el comienzo de las aristas. Sea una arista $gG_y \in V(\tilde{X})$ luego tenemos que:

$$\begin{aligned}s(\psi(gG_y)) &= s(\varphi(g) \cdot \iota(y)) = \varphi(g) \cdot s(\iota(y)) \\ \psi(s(gG_y)) &= \psi(gG_{s(y)}) = \varphi(g) \cdot s(\iota(y))\end{aligned}$$

Finalmente veamos que respeta la asignación de las aristas opuestas. Dada una arista $gG_y \in E(\tilde{X})$ tenemos que ver que $\psi(\overline{gG_y}) = \overline{\psi(gG_y)}$. Primero usamos que $\overline{gG_y} = (gy)G_{\bar{y}}$ por lo tanto tenemos que

$$\psi(\overline{gG_y}) = \psi(gyG_{\bar{y}}) = \varphi(gy) \cdot \iota(\bar{y}) = \varphi(g)\varphi(y) \cdot \iota(\bar{y}) = \varphi(g)\varphi(y) \cdot \iota(\bar{y})$$

por nuestra definición de φ tenemos que $\varphi(y) = g_y$, así obtenemos

$$\psi(\overline{gG_y}) = \varphi(g)g_y \cdot \iota(\bar{y}).$$

Por otro lado tenemos que como $\overline{\iota(y)} = g_y \iota(y)$ entonces

$$\overline{\psi(\overline{gG_y})} = \overline{\varphi(g) \cdot y} = \varphi(g) \cdot \overline{\iota(y)} = \varphi(g)g_y \cdot \iota(\bar{y})$$

Probando así que $\overline{gG_y} = (gy)G_{\bar{y}}$. Con esto terminamos de probar que ψ es un morfismo de grafos. ■

DEFINICIÓN 1.4.6. Un morfismo de grafos $\psi : X \rightarrow Y$ se dice *localmente inyectivo* si para todo vértice $P \in V(X)$ resulta que la restricción $\psi : st(P) \rightarrow E(Y)$ es inyectiva.

Así como el revestimiento de un grafo es un epimorfismo de grafos localmente inyectivo vamos a probar que en el contexto de la teoría de Bass–Serre el morfismo ψ también tiene estas propiedades.

|| **PROPOSICIÓN 1.4.7.** El morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ es sobreyectivo.

Demostración. Sea $g \cdot P \in V(X)$ vértice arbitrario, queremos ver que existe $g'G_Q \in V(\tilde{X})$ de manera que $\psi(g'G_Q) = g \cdot P$.

Por el resultado 1.4.2 el morfismo de grupos φ resulta ser sobreyectivo. De esta manera tenemos que existe $h \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$ tal que $\varphi(h) = g$. Luego alcanza con tomar como vértice a $hG_P \in V(\tilde{X})$ de manera que

$$\psi(hG_P) = \varphi(h) \cdot P = g \cdot P$$

tal como queríamos ver. Una cuenta idéntica prueba que toda arista $g \cdot \iota(y) \in E(X)$ está en la imagen de ψ . ■

|| **PROPOSICIÓN 1.4.8.** El morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ es localmente inyectivo.

Demostración. Sea $gG_P \in V(\tilde{X})$ vértice y sean $aG_y, bG_{y'} \in E(\tilde{X})$ aristas distintas tales que $s(aG_y) = gG_P = s(bG_{y'})$. Queremos probar que $\psi(aG_y) \neq \psi(bG_{y'})$. Consideraremos dos casos dependiendo si las aristas correspondientes en el grafo Y son idénticas o no lo son.

1. Supongamos primero que $y \neq y'$. En este caso tenemos que $\psi(aG_y) = \varphi(a) \cdot \iota(y)$ mientras que $\psi(bG_{y'}) = \varphi(b) \cdot \iota(y')$. Como son elementos de órbitas distintas no pueden ser el mismo elemento y de esta manera concluimos que $\psi(aG_y) \neq \psi(bG_{y'})$.
2. El otro caso es que $y = y'$. Veamos que por una cadena de equivalencias que la función ψ coincide en estas aristas si y solo si son idénticas. Esto nos dice que

$$\psi(aG_y) = \psi(bG_y) \iff \varphi(a) \cdot \iota(y) = \varphi(b) \cdot \iota(y)$$

y esto es equivalente a $\varphi(a^{-1}b) \in G_y$. Por el resultado 1.4.2 tenemos que φ es la identidad restringida a G_y . De esta manera tenemos que

$$\varphi(a) \cdot \iota(y) = \varphi(b) \cdot \iota(y) \iff a^{-1}b \in G_y \iff aG_y = bG_y$$

y así terminamos de probar que ψ es localmente inyectivo. ■

El siguiente resultado nos va a garantizar que el morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ sea un isomorfismo de grafos pidiéndole a X ser un árbol.

PROPOSICIÓN 1.4.9. *Sea T un árbol y sea Y un grafo conexo entonces todo morfismo de grafos $\psi : Y \rightarrow T$ localmente inyectivo es un monomorfismo de grafos.*

Demostración. Notemos que el grafo Y es conexo por hipótesis entonces para todo par de vértices existe un camino que los une. Vamos a probar la siguiente afirmación equivalente a que ψ es un monomorfismo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo par de vértices distintos $P, Q \in V(Y)$ tales que existe una geodésica α que une P con Q y que cumple que $l(\alpha) = n$ entonces $\psi(P) \neq \psi(Q)$.

El caso base es que la longitud de la geodésica sea exactamente 1. En este caso nuestra geodésica es el camino $\alpha = (y)$ donde denotamos $s(y) = P$ y $t(y) = Q$. Supongamos que $\psi(P) = \psi(Q)$. Al ser ψ un morfismo de grafos tenemos que $\psi(y) \in E(T)$ y cumple que:

$$s(\psi(y)) = \psi(P) = \psi(Q) = t(\psi(y))$$

por lo tanto $\psi(y)$ es un bucle y esto contradice que T es un árbol por lo tanto $\psi(P) \neq \psi(Q)$ tal como queríamos ver.

El paso inductivo tenemos que existe una geodésica $\alpha = (y_1, \dots, y_n)$ entre P y Q de manera que $l(\alpha) = n$ y suponemos que $\psi(P) = \psi(Q)$. Tenemos que $\psi(\alpha)$ es un camino en T tal que comienza y termina en un mismo vértice. Como estamos en un árbol no puede haber ciclos, de esta manera tiene que ser que $\psi(y_k) = \overline{\psi(y_{k+1})}$ para cierto $1 \leq k \leq n$. Como ψ es un morfismo de grafos cumple que $\overline{\psi(y)} = \psi(\overline{y})$ para todo $y \in E(Y)$ y así de esta manera obtenemos que $\psi(y_k) = \psi(\overline{y_{k+1}})$. Consideremos las aristas $\psi(\overline{y}_k)$ y $\psi(y_{k+1})$ tales que comienzan en el mismo vértice, entonces como el morfismo ψ es localmente inyectivo vale que $y_{k+1} = \overline{y}_k$. Esto es una contradicción porque asumimos que α es una geodésica y como tal no puede tener backtracking. ■

El siguiente resultado nos da la estructura de un grupo que actúa sobre un grafo conexo sin inversiones de aristas. Es el resultado central de la teoría de Bass-Serre.

TEOREMA 1.4.10 ([?]). *Sea G un grupo que actúa en un grafo conexo X sin inversiones de aristas y sea \mathcal{G} el grafo de grupos asociado sobre $Y = X/G$. Consideremos T un árbol generador de Y y los morfismos $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ y $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) *el grafo X es un árbol;*
- (b) *el morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ es un isomorfismo de grafos;*

|| (c) el morfismo $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. La implicación $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$ la hacemos usando la proposición 1.4.9 dado que ψ es localmente inyectivo por la proposición 1.4.8. Para ver $\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}$ usamos que \tilde{X} es un árbol por lo tanto X al ser isomorfo también es un árbol.

Probemos $\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c}$. Para eso notemos que al ser φ sobreyectivo por la proposición 1.4.2 nos alcanza con ver que es inyectivo. Si $g \in \pi_1(\mathcal{G}, T)$ y $g \neq 1$ tal que $\varphi(g) = 1$ entonces necesariamente $g \notin G_P$ por el lema 1.4.1 dado que la restricción a estos subgrupos es la identidad. Esto nos dice que $gG_P \neq G_P$. Por como definimos a ψ tenemos que

$$\psi(gG_P) = \varphi(g) \cdot P = P = \psi(G_P)$$

pero esto contradice que ψ sea un isomorfismo.

Finalmente probemos $\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b}$. Para esto como ψ es sobreyectivo por 1.4.7 nos alcanza con ver que es inyectivo. Sean $gG_P, hG_Q \in V(\tilde{X})$ tales que $\psi(gG_P) = \psi(hG_Q)$. Por la definición del morfismo ψ obtenemos que

$$\varphi(g) \cdot P = \varphi(h) \cdot Q$$

pero esto nos diría que $P = Q$ caso contrario estarían en órbitas distintas. Por otro lado obtenemos que $\varphi(gh^{-1}) \cdot P = P$ y así $\varphi(gh^{-1}) \in G_P$. Usando que φ es un isomorfismo y la proposición 1.4.2 deducimos que $\varphi^{-1}(\varphi gh^{-1}) = gh^{-1} \in G_P$. Por lo tanto $gG_P = hG_Q$ y de esta manera probamos que ψ es inyectiva. ■

De este teorema se desprende una caracterización importante que es que dado un grupo G si encontramos un árbol X donde actúe sin inversiones obtenemos que este grupo es el grupo fundamental del grafo de grupos que armamos sobre el grafo X/G . Como corolario directo obtenemos una caracterización para los grupos libres.

|| **COROLARIO 1.4.11.** *Un grupo G es libre si y solo si G actúa libremente sobre un árbol sin inversiones de aristas.*

Demostración. Si G es libre y generado por un conjunto finito A entonces $\text{Cay}(G, A)$ es un árbol y G actúa libremente sobre su grafo de Cayley y sin invertir aristas.

Si G actúa libremente sobre un árbol sin inversiones entonces usando 1.4.10 obtenemos que G es isomorfo a $\pi_1(\mathcal{G}, T)$. Este grupo es libre por ser el grupo fundamental de un grafo en el cual los grupos correspondientes a las aristas y a los vértices son triviales dado que la acción de G es libre. ■

El siguiente resultado conocido como teorema de Nielsen–Schreier fue originalmente probado por Nielsen en 1932. Esa demostración utilizaba la acción de H sobre el grafo de Cayley de G y es de carácter combinatorio. La demostración que damos es una demostración alternativa que fue pensada por Serre en [?].

|| **COROLARIO 1.4.12 (Nielsen–Schreier).** *Sea G un grupo libre entonces todo subgrupo H de G resulta ser libre.*

Demostración. Veamos que H actúa libremente y sin inversiones de aristas sobre un árbol por lo tanto por el corolario 1.4.11 tendríamos que H es libre. Como G es libre entonces por este mismo corolario tenemos que G actúa libremente sobre un árbol sin inversiones de aristas. En particular si restringimos esta acción de G a una del subgrupo H obtenemos que H actúa sobre este mismo árbol libremente y sin inversiones de aristas. ■

Estamos en condiciones de probar el resultado central del capítulo, que es que todo grupo fundamental de un grafo de grupos finito es un grupo virtualmente libre. Primero debemos ver unos lemas de acciones de grupos finitos.

LEMA 1.4.13. *Sea G un grupo finito y X conjunto finito tal que $|G| \mid |X|$ luego existe $\alpha : G \rightarrow S(X)$ acción libre de G en X .*

Demostración. Sea $|G| = k$ y sea $|X| = mk$ luego como queremos que la acción de G sea libre designamos nuestros candidatos a órbitas X_i $i = 1, \dots, k$ donde $X_i \subseteq \mathcal{P}(X)$, $|X_i| = m$ y $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Les asignamos índices a todos los elementos de X_i para todo $1 \leq i \leq k$ y los denotamos x_i^j para el j -ésimo elemento de X_i donde $1 \leq j \leq m$. Similarmente como G es finito luego $G = \{g_1, \dots, g_k\}$. Luego definimos $\alpha : G \rightarrow S(X)$ de la siguiente manera si $g_l g_i = g_h$ entonces

$$\alpha(g_l)(x_i^j) = x_h^j.$$

Chequeamos que es una acción y a su vez $\alpha(g)(x_i^j) = x_i^j$ si y solamente si $g g_i = g_i$ lo que implica que $g = 1$ y así vemos que la acción α resulta ser libre tal como buscábamos. ■

LEMA 1.4.14. *Sea G un grupo finito y X un conjunto finito tal que $\alpha, \beta : G \rightarrow S(X)$ son dos acciones libres de G sobre X . Entonces debe existir $\varphi \in S(X)$ tal que para todo $g \in G$ valga que*

$$\alpha(g) = \varphi^{-1} \circ \beta(g) \circ \varphi.$$

Demostración. Denotaremos a la órbita de un elemento $x \in X$ por medio de la acción $\alpha : G \rightarrow S(X)$ de la siguiente manera:

$$\alpha(G)(x) = \bigcup_{g \in G} \alpha(g)(x).$$

Sean ahora $R \subseteq X$ conjunto de representantes para la acción α y $S \subseteq X$ para la acción β , entonces tenemos que

$$X = \bigsqcup_{r \in R} \alpha(G)(r) = \bigsqcup_{s \in S} \beta(G)(s)$$

donde la unión es disjunta porque son órbitas. Como ambas acciones son libres resulta que $\alpha(G)(r)$ y $\beta(G)(s)$ tienen cardinal exactamente $|G|$. Como X es finito si usamos el teorema de órbitas y estabilizadores vemos que $|R| = |X|/|G| = |S|$ por lo tanto existe una biyección $\varphi : R \rightarrow S$ entre ambos conjuntos. Si $\varphi(r) = s$ entonces la extendemos a todo X de la siguiente manera,

$$\varphi(\alpha(g)r) = \beta(g)s$$

Esta biyección cumple todo lo que queríamos. ■

TEOREMA 1.4.15. [?] Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo Y finito y conexo tal que para todo $P \in V$ vale que $|G_P| < \infty$. Entonces $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es un grupo virtualmente libre.

Demostración. Dado que el grafo Y es finito y para todo $P \in V$ los grupos G_P también son finitos entonces podemos tomarnos X un conjunto finito de manera que

$$|X| = \prod_{P \in V} |G_P|.$$

Para cada $P \in V$ podemos construir una acción libre de G_P en X usando el lema 1.4.13. Al ser acciones libres obtenemos monomorfismos $\tau : G_P \rightarrow S(X)$ para cada $P \in V$. Para cada arista $y \in E$ obtenemos una acción libre de G_y sobre X restringiendo la acción que conseguimos para $G_{s(y)}$. Por otro lado G_y es isomorfo como grupo a $G_{\bar{y}}$ y este es un subgrupo de $G_{t(y)}$ por lo tanto obtenemos otra acción libre de G_y sobre X si identificamos a G_y con $G_{\bar{y}}$ y después restringimos la acción que conseguimos para $G_{t(y)}$. Como tenemos dos acciones libres de G_y sobre un conjunto finito podemos usar el lema 1.4.14 de manera que existe $\phi_y : S(X) \rightarrow S(X)$ tal que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & G_{s(y)} & \xrightarrow{\sigma} S(X) \\ & \nearrow & \downarrow \phi_y \\ G_y & & \\ & \searrow & \\ & G_{t(y)} & \xrightarrow{\tau} S(X) \end{array}$$

y está definida como $\phi_y(\psi) = \varphi_y^{-1} \circ \psi \circ \varphi_y$ donde $\varphi_y \in S(X)$ que existe por el lema. Para la arista con orientación opuesta tenemos un diagrama casi idéntico y notamos que si definimos $\phi_{\bar{y}}(\psi) = \varphi_y \circ \psi \circ \varphi_y^{-1}$ luego ese diagrama conmuta.

Definimos un morfismo de grupos $h : \ast_{P \in V} G_P \ast F_E \rightarrow S(X)$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} h(g) &= \tau(g) & \text{si } g \in G_P, \tau : G_P \rightarrow S(X) \text{ acción libre} \\ h(y) &= \varphi_y & \text{si } y \in F_E \end{aligned}$$

Por como tomamos a $\varphi_{\bar{y}}$ tenemos que h respeta las relaciones de $F(\mathcal{G})$ y así tenemos un morfismo $h : F(\mathcal{G}) \rightarrow S(X)$. Si fijamos $P \in V$, como $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es un subgrupo de $F(\mathcal{G})$ podemos restringir h y así considerar el subgrupo normal de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$

$$F = \{g \in \pi_1(\mathcal{G}, P) \mid h(g) = 1\}$$

entonces por como lo consideramos tenemos que $F \cap G_Q = \{1\}$ para todo $Q \in V(Y)$ porque la restricción de h a G_Q es inyectiva para todo $Q \in V$.

Recordemos que dado T árbol generador de Y tenemos que $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ actúa sin inversiones de aristas sobre \tilde{X} el árbol de Bass–Serre de \mathcal{G} . Por el teorema 1.1.14 tenemos que podemos identificar $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ con $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ y de esta manera como $F \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$ luego tenemos que F actúa sobre \tilde{X} . Como los estabilizadores de la acción sobre \tilde{X} son los grupos G_P para todo $P \in V$, esto nos dice que el grupo F actúa libremente sobre el árbol de Bass–Serre de nuestro grafo de grupos \mathcal{G} . Estamos en condiciones de usar el teorema de Serre 1.4.10 dado F actúa libremente sobre el árbol \tilde{X} por lo tanto F debe ser un grupo libre.

Tenemos que F es un subgrupo libre de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$, que es un grupo finitamente generado, y queremos ver que F tiene índice finito para probar que $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es virtualmente libre. Para eso notemos que al ser $|X| < \infty$ entonces $|S(X)| < \infty$ y como $S(X) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, P)/F$, por la propiedad universal del cociente, entonces $(\pi_1(\mathcal{G}, P) : F) < \infty$ tal como queríamos ver. ■