

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**El problema de la palabra para grupos virtualmente libres.**

**Leopoldo Lerena.**

**Director: Iván Sadofski Costa ...**

Fecha de Presentación



# Índice general

## 1. Teoría de lenguajes.

- 1.1. Gramáticas. . . . .
- 1.2. Lenguajes regulares. . . . .
- 1.3. Lenguajes independientes de contexto. . . . .
  - 1.3.1. Autómatas de pila. . . . .
  - 1.3.2. Propiedades de los lenguajes independientes de contexto. . . . .
- 1.4. Automátas de pila determinísticos. . . . .
  - 1.4.1. Automátas de pila determinísticos especiales. . . . .
- 1.5. Lenguajes poly independientes de contexto. . . . .
- 1.6. Conos de lenguajes y el problema de la palabra. . . . .
- 1.7. Sistemas de reescritura. . . . .
  - 1.7.1. Sistemas de reescritura de cadenas. . . . .

## 2. Grupos virtualmente libres.

- 2.1. Grupos independientes de contexto. . . . .
- 2.2. Grafos de Cayley. . . . .
  - 2.2.1. Cuasisimetrías. . . . .
- 2.3. Teoría de Bass Serre. . . . .
  - 2.3.1. Árbol de Bass Serre. . . . .
  - 2.3.2. Acciones de grupos sobre árboles. . . . .
  - 2.3.3. Productos semi directos. . . . .
- 2.4. Ends de grupos. . . . .
  - 2.4.1. Accesibilidad en terminos de teoría de grafos. . . . .

## 3. Enumeración de cosets.

## *ÍNDICE GENERAL*

# Capítulo 1

## Teoría de lenguajes.

En esta sección vamos a introducir los elementos básicos de la teoría de lenguajes formales que utilizaremos en este trabajo.

Consideremos un conjunto no vacío  $\Sigma$  que llamaremos el **alfabeto** y  $\Sigma^k$  el conjunto de sucesiones finitas de elementos  $a_1 \dots a_k$  con  $a_i \in \Sigma$ . Los elementos de  $\Sigma$  se llaman **letras** y los elementos de  $\Sigma^k$  serán **palabras** de longitud  $k$  sobre  $\Sigma$ . La **palabra vacía** que corresponde a  $\Sigma^0$  la denotaremos por  $\lambda$ .

Si  $w$  es una palabra sobre el alfabeto  $\Sigma$  luego una subpalabra  $u$  de  $w$  es una palabra  $u \in \Sigma^*$  tal que  $w = vuz$  para algunas  $v, z \in \Sigma^*$ . Si  $w = vu$  entonces  $v$  es un prefijo de  $w$  y  $u$  es un subfijo de  $w$ .

**Definición 1.0.1.** El **monoide libre** sobre un alfabeto  $\Sigma$  es el siguiente conjunto

$$\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

con la operación  $\cdot$  que es la concatenación de palabras. Es decir dadas  $w_1 \in \Sigma^k, w_2 \in \Sigma^l$  luego  $w_1 \cdot w_2 \in \Sigma^{k+l} \subset \Sigma^*$ . El elemento neutro es la palabra vacía que corresponde a la copia de  $\Sigma^0$  que es la única palabra sin letras.

**Observación 1.0.2.** El monoide es libre con la siguiente propiedad: si tenemos una función del alfabeto  $f : \Sigma \rightarrow M$  donde  $M$  es algún monoide entonces existe un único morfismo de monoides  $\bar{f} : \Sigma^* \rightarrow M$  que hace conmutar al siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \Sigma^* & & \end{array}$$

**Definición 1.0.3.** Un **lenguaje** sobre un alfabeto  $\Sigma$  es un subconjunto de  $\Sigma^*$ .

## 1.1. Gramáticas.

Vamos a considerar lenguajes definidos a partir de lo que se conoce como una gramática. Esto es esencialmente un conjunto de reglas que al irse aplicando nos permiten generar todas las palabras del lenguaje.

**Definición 1.1.1.** Una **gramática** es una tupla  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  donde:

- $V$  es un conjunto finito de *variables*;
- $S \in V$  es el *símbolo inicial*;
- $\Sigma$  es un conjunto finito de *símbolos terminales* que lo tomamos disjunto de  $V$ ;
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$  es un conjunto finito de *producciones*.

Dada una gramática  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  a cualquiera de sus producciones  $(\gamma, \nu) \in P$ , la vamos a denotar  $\gamma \rightarrow \nu$ .

A partir de una gramática  $\mathcal{G}$  podemos definirnos una relación sobre las cadenas  $(\Sigma \cup V)^*$ . Dados  $x, y \in (\Sigma \cup V)^*$  diremos que  $x$  *deriva* en  $y$  si existen  $u, v, w, z \in (\Sigma \cup V)^*$  tales que  $x = u w v$  y tenemos una producción  $w \rightarrow z \in P$  de manera que  $y = u z v$ . La notación que usaremos es  $x \Rightarrow_{\mathcal{G}} y$ . Consideremos la clausura transitiva y reflexiva de esta relación que denotaremos por  $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^*$ .

**Definición 1.1.2.** El **lenguaje generado por la gramática** van a ser las palabras en  $\Sigma^*$  que se pueden derivar del símbolo inicial  $S$ . Formalmente esto es

$$L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w\}.$$

**Ejemplo 1.1.3.** Consideremos la siguiente gramática  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  donde  $V = \{S, A\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$  y tenemos las siguientes producciones,

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab \\ A &\rightarrow aA \\ A &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

Veamos como podemos derivar la palabra  $a^2b$  usando las producciones de esta gramática. Esto es que  $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* a^2b$ . Tomamos la siguiente sucesión:

$$S \rightarrow Ab \rightarrow aAb \rightarrow aaAb \rightarrow aab$$

y nos queda tal como queríamos ver.

Más aún probemos que  $L(\mathcal{G}) = \{a^k b : k \geq 0\}$ .

## 1.2. LENGUAJES REGULARES.

Si  $w \in L(\mathcal{G})$  entonces  $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w$  por definición. La única producción que la gramática tiene donde  $S$  está a la izquierda es  $S \rightarrow Ab$ . De esta manera cualquier palabra  $w \in L(\mathcal{G})$  va a tener una  $b$  como postfijo de la palabra. La variable  $A$  vemos que solo puede derivar en  $a^k A$  o  $a^k$  para  $k \geq 0$ . Esto se debe a que podemos aplicar la producción  $A \rightarrow aA$  tantas veces como querramos por lo tanto  $A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* a^k$  para cualquier  $k \geq 0$ . Juntando con lo anterior vemos que  $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* a^k b$  así que terminamos de ver que la gramática genera al lenguaje  $\{a^k b : k \geq 0\}$  tal como queríamos ver.

Es posible clasificar los lenguajes a partir de las características de las gramáticas que los generan.

## 1.2. Lenguajes regulares.

**Definición 1.2.1.** Decimos que una gramática  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  es **regular** si las producciones son del estilo

1.  $A \rightarrow \lambda$
2.  $A \rightarrow a$
3.  $A \rightarrow aB$

donde  $A, B \in V$ ,  $a \in \Sigma$  y  $\lambda$  es la palabra vacía. Si  $L = L(\mathcal{G})$  para alguna gramática regular  $\mathcal{G}$  entonces diremos que  $L$  es un **lenguaje regular**.

En particular la gramática del ejemplo 1.1.3 es regular. De esta manera  $L = \{a^k b : k \geq 0\}$  resulta ser un lenguaje regular.

**Definición 1.2.2.** Un **autómata finito no determinístico** es una tupla  $\mathcal{M} = (Q, \{q_0\}, \Sigma, \delta, F)$  donde:

- $Q$  es el conjunto de los *estados*.
- $q_0 \in Q$  es el *estado inicial*.
- $\Sigma$  es el *alfabeto*.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  es la *función de transición*.
- $F \subseteq Q$  es un subconjunto de estados que llamaremos *finales*.

A los autómatas finitos los interpretamos como grafos con algunas reglas para movernos sobre ellos. Para empezar  $Q$  representan los vértices de nuestro grafo.

**Ejemplo 1.2.3.** Construyamos un automáta  $\mathcal{M}$  tal que acepte al lenguaje  $L = \{a^k b : k \geq 0\}$ .

Como vimos en este ejemplo el lenguaje  $L = \{a^k b : k \geq 0\}$  es aceptado por un automáta no determinístico finito y por lo que sabíamos del ejemplo 1.1.3 es un lenguaje regular. Más aún vale que los lenguajes aceptados por automátas finitos no determinísticos son justamente los regulares.

**Teorema 1.2.4.** *Un lenguaje  $L$  es regular sii es aceptado por un autómata finito no determinístico.*

*Demostración.* Demostración estándar. Ver [HU79]. □

### 1.3. Lenguajes independientes de contexto.

**Definición 1.3.1.** Decimos que una gramática  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  es **independiente de contexto** si las producciones tienen la siguiente forma:

$$A \rightarrow w$$

donde  $A \in V, w \in (\Sigma \cup V)^*$ . Si  $L = L(\mathcal{G})$  para alguna gramática independiente de contexto  $\mathcal{G}$  entonces diremos que  $L$  es un **lenguaje independiente de contexto**.

**Ejemplo 1.3.2.** Sea el alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ . Si  $w = a_1 \dots a_k$  es una palabra sobre  $\Sigma^*$  entonces podemos considerar a  $w^r$  que es la palabra inversa dada por leerla de derecha a izquierda y tiene la siguiente pinta  $w^r = a_k \dots a_1$ . Consideremos sobre  $\Sigma$  el lenguaje  $L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^r\}$  tal que este es el lenguaje de los palíndromos. Construyamos una gramática independiente de contexto para este lenguaje. Sea  $w$  una palabra en  $L$  luego sabemos que si su longitud es mayor que uno entonces debe ser que  $w = aua$  o  $w = bub$  para cierta palabra  $u \in L$  dado que  $u$  necesariamente tiene que ser un palíndromo porque  $w$  lo es. Esto sucede para todas las palabras del lenguaje exceptuando las palabras de longitud uno que son justamente las letras del alfabeto. De esta manera podemos considerar la siguiente gramática  $\mathcal{G} = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  donde las producciones  $P$  están dadas por :

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$S \rightarrow a$$

$$S \rightarrow b$$

$$S \rightarrow aSa$$

$$S \rightarrow bSb.$$



### 1.3. LENGUAJES INDEPENDIENTES DE CONTEXTO.

Para ver que esta gramática genera al lenguaje  $L$  notemos que si tomamos una palabra en el lenguaje  $w \in L$  luego si no es una letra al ser palíndromo sobre el alfabeto  $\Sigma$  necesariamente debe comenzar con  $a$  o con  $b$  y de esta manera tenemos que la primer derivación es  $S \rightarrow aSa$  o  $S \rightarrow bSb$ . Dado que la subpalabra  $w = aua$  que se obtiene de  $w$  sin considerar la primera y última letra es un palíndromo (e incluso podría ser la palabra vacía) luego podemos repetir este proceso para llegar a  $S \xrightarrow{*}_{\mathcal{G}} w$  después de finitos pasos. Por otro lado toda palabra generada por esta gramática es un palíndromo porque todas las reglas son tales que agregan una letra al principio y la misma al final o simplemente agregan letras que también son palíndromos.

Toda gramática independiente de contexto la podemos tomar para que sea de una forma en particular.

**Definición 1.3.3.** Una gramática  $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$  independiente de contexto está en su **forma normal de Chomsky** si las producciones son de este tipo:

1.  $A \rightarrow BC$  donde  $A \in V$  y  $B, C \in V \setminus \{S\}$ .
2.  $A \rightarrow a$  donde  $A \in V, a \in \Sigma$ .
3.  $S \rightarrow \lambda$

#### Ejemplo 1.3.4.

**Proposición 1.3.5.** Para toda gramática  $\mathcal{G}$  independiente de contexto puede tomar otra  $\mathcal{G}'$  tal que esté en forma normal de Chomsky y generen el mismo lenguaje. Esto es que  $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$ ,

*Demostración.* Demostración estándar. Ver [HU79]. □

#### 1.3.1. Autómatas de pila.

Así como las gramáticas nos permiten generar un lenguaje tenemos las máquinas que nos permiten aceptar un lenguaje. En nuestro caso en particular vamos a usar autómatas de pila no determinísticos para aceptar los lenguajes independientes de contexto.

**Definición 1.3.6.** Un **autómata de pila finito no determinístico** es una tupla  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F, Z_0)$  donde:

- $Q$  es un conjunto finito de *estados*;
- $\Sigma$  es un conjunto finito que denotaremos el *alfabeto del lenguaje*;
- $\Gamma$  es un conjunto finito que denotaremos el *alfabeto de la pila*;

## CAPÍTULO 1. TEORÍA DE LENGUAJES.

- $\delta$  es la *función de transición* donde  $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ ;
- $F \subseteq Q$  es el conjunto de *estados finales*;
- $q_0 \in Q$  es el *estado inicial*;
- $Z_0 \in Z$  es el *símbolo inicial* en la pila.

**Funcionamiento del autómeta.** El autómeta de pila finito funciona de la siguiente manera. Dada una palabra  $w \in \Sigma$  queremos saber si es aceptada por el autómeta de pila o no. Para eso vamos a ir leyendo esta palabra de izquierda a derecha. Al comenzar a leer esta palabra estamos en el estado  $q_0$  que distinguimos como el estado inicial de nuestro autómeta. Nos fijamos en la función de transición que es una función parcial cuánto nos da evaluada  $\delta(\lambda, q_0, \gamma)$  para algún  $\gamma$  prefijo de  $w$  y donde estamos mirando a  $\lambda \in Z^*$  el elemento neutro de este monoide. Esto se corresponde a la idea de que al comenzar nuestra pila está vacía. En tal caso nuestra función de transición nos da un resultado que es un par  $(z, q)$  donde  $z \in Z^*$  es lo que nos va a quedar en la pila y  $q$  es el nuevo estado al cual nos movimos. Notemos que nuestra función de transición no tiene porqué tener un  $(z, q)$  tal que podamos movernos o podría ser bien que tenga más de uno. En este caso diremos que nuestro autómeta es **no determinístico** dado que en algunos casos existe más de una opción.

En general estamos en la siguiente situación en el proceso de aceptar la palabra  $w$ . Tenemos algún  $z \in Z$  en el tope de la pila que al ser una pila lo leeremos de derecha a izquierda, estamos en algún estado  $q \in Q$  y nos quedará una subpalabra  $\gamma$  de  $w$  para leer. Una **configuración** de nuestro autómeta entonces es una manera de describir en que situación de aceptar o no aceptar una palabra y la denotamos  $(z, q, \gamma)$ .

Cuando hayamos visto toda la palabra o no tengamos manera de movernos de estado nos fijamos si el estado  $p$  en el que estamos es final, es decir si  $p \in F$ . En tal caso la palabra  $w$  es aceptada por el autómeta. Formalmente estaremos en alguna configuración  $zq$  para  $z \in Z^*$  y  $q \in Q$  y no nos queda nada de la palabra  $w$  porque ya la consumimos toda.

**Observación 1.3.7.** Así como definimos el autómeta de pila no determinístico para que al tener la pila vacía se detenga podríamos haberlo hecho de una manera distinta por ejemplo dejando que la pila sea vacía y así poder transicionar de una configuración a otra. Esta manera es equivalente porque... Más en adelante nos va a resultar conceptualmente más útil para el caso que estemos viendo el problema de la palabra de un grupo mientras que para las demostraciones de esta sección usaremos esta otra definición.

### 1.3. LENGUAJES INDEPENDIENTES DE CONTEXTO.

**Descripción instantánea del autómeta.** Veamos ahora como describir formalmente el funcionamiento de un autómeta a partir de lo que estamos haciendo en cierto instante. Consideremos que estamos en el instante que nuestra subpalabra que nos queda por leer es  $w$ , estamos en un estado  $q$  y en nuestra pila tenemos la palabra  $\gamma$ , entonces vamos a representar al instante por medio de esta tupla  $(q, w, \gamma)$ . Si ahora tenemos la posibilidad de movernos a otro estado  $p$  tal que  $(p, w', \alpha\beta) \in \delta(q, aw', x\beta)$  donde  $aw' = w$  con  $a$  alguna letra posiblemente vacía y similarmente  $x\beta = \gamma$  con  $x \in \Gamma^*$  una letra de  $\Gamma$  posiblemente vacía. Este movimiento lo denotamos como  $(q, aw', x\beta) \vdash (p, w', \alpha\beta)$ . Podemos considerar la clausura transitiva de esta relación sobre los triples  $Z \times Q \times \Sigma^*$  que denotaremos  $\vdash^*$ .

**El lenguaje aceptado por un autómeta de pila.** Notemos que en particular el autómeta de pila nos da un lenguaje que está formado por las palabras  $w$  en el alfabeto de la entrada del autómeta  $\Sigma$  que son aceptadas. En general diremos que un autómeta acepta un lenguaje  $L$  si su lenguaje aceptado es exactamente  $L$ . Este lenguaje aceptado por el autómeta  $\mathcal{M}$  en algunas casos para hacer énfasis en el autómeta lo denotaremos  $L(\mathcal{M})$  y siguiendo la notación formal anterior lo podemos describir de la siguiente manera,

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \gamma), q \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$$

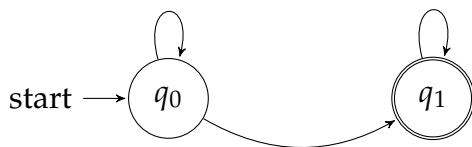
donde  $(q_0, w, Z_0)$  es el instante inicial en el cual tenemos la palabra  $w$  en el estado inicial  $q_0$  con el símbolo  $Z_0$  de la pila. Al finalizar deberíamos estar en un estado  $q$  final y lo que nos queda en la pila  $\gamma$  es totalmente irrelevante en este caso.

**Observación 1.3.8.** Al ser un autómeta de pila no determinístico existen posiblemente más de una manera de consumir alguna palabra en el autómeta. Es así que por la definición que dimos la palabra es aceptada por el autómeta si al menos alguna de estas derivaciones la lleva a ser aceptada. No importa si existen derivaciones que no lo hagan mientras una sí lo haga.

**Ejemplo 1.3.9.** Sea nuestro alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $L$  el lenguaje de los palíndromos sobre este alfabeto. Consideremos el siguiente autómeta de pila

$$M = (Q, \{q_0\}, \{a, b\}, \{a, b, \$\}, \$, \{q_1\})$$

donde nuestra pila tiene el mismo alfabeto que el de entrada con un símbolo extra que es  $\$$  que va a ser nuestro símbolo inicial de la pila.



## CAPÍTULO 1. TEORÍA DE LENGUAJES.

El automáta tiene dos estados, el inicial y el final. La idea es que en el primer estado vamos apilando la palabra y en la segunda vamos desapilando la palabra anteriormente apilada. Nuestra función de transición va a ser la siguiente,

- $\delta(q_0, a, Z) = (q_0, aZ)$
- $\delta(q_0, b, Z) = (q_0, ba)$
- $\delta(q_1, a, a) = (q_0, \lambda).$
- $\delta(q_1, b, b) = (q_0, \lambda).$
- $\delta(q_0, \lambda, Z) = (q_1, Z)$
- $\delta(q_0, X, Z) = (q_1, Z)$

donde  $Z = a, b, \$$  es decir cualquier cosa del alfabeto de la pila y  $X = a, b$  cualquier elemento de nuestro alfabeto de entrada. El automáta en el primer estado apila lo que sea que estemos leyendo sin importar lo que esté en el tope de pila. En el segundo estado desapila cada vez que lo que estemos leyendo coincida con el tope de pila. Finalmente para ir del estado inicial al final tenemos en cuenta dos casos. Nos podemos mover por  $\lambda$  es decir sin consumir ninguna letra de la palabra de la entrada o leyendo alguna de las letras de la palabra. Estos casos se corresponden a que el palíndromo tenga longitud par o tenga longitud impar.

Este ejemplo nos da un indicio que los lenguajes aceptados por automáatas de pila también podrían ser independiente de contexto y esto efectivamente es cierto.

**Teorema 1.3.10.** *Un lenguaje  $L$  es independiente de contexto sii es aceptado por un automáta de pila no determinístico.*

*Demostración.* Ver [HU79]. □

Hasta ahora definimos los automáatas de pila no determinísticos que aceptan por estado final. Otra definición posible de lenguaje aceptado podría ser que acepten por pila vacía. Es decir que una vez que consumimos la palabra  $w$  de entrada llegamos a una configuración  $(q, \lambda, \lambda)$  donde  $\lambda$  es la palabra vacía de ambos alfabetos respectivamente. Formalmente notaremos al lenguaje aceptado por pila vacía por un automáta  $\mathcal{M}$  de la siguiente manera,

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda), q \in Q, u \in \Sigma^*\}$$

donde arrancamos en el estado inicial y llegamos a algún estado  $q$  cualesquiera y nuestra pila está vacía así como lo que nos queda por leer de la palabra. En este

### 1.3. LENGUAJES INDEPENDIENTES DE CONTEXTO.

caso obtenemos que nuestro lenguaje es aceptado por un automáta de pila no determinístico por pila vacía.

El siguiente resultado nos dice que en el caso que nuestro automáta sea no determinístico es equivalente usar una u otra manera de definir a nuestro lenguaje.

**Teorema 1.3.11.** *Un lenguaje  $L$  es aceptado por un automáta de pila no determinístico por estado final sii es aceptado por un automáta de pila no determinístico por pila vacía.*

*Demostración.* Ver [HU79]. □

#### 1.3.2. Propiedades de los lenguajes independientes de contexto.

En esta sección vamos a considerar a los lenguajes independiente de contexto como una clase. Probemos algunas propiedades que cumplen respecto a las operaciones de conjuntos más usuales.

**Proposición 1.3.12.** *Los lenguajes independiente de contexto son cerrados por uniones.*

*Demostración.* Ver [HU79]. □

**Proposición 1.3.13.** *Los lenguajes independientes de contexto no son cerrados por intersecciones.*

*Demostración.* Ver [HU79]. □

Lo que si sucede es que son cerrados con respecto a intersecciones con lenguajes regulares.

**Proposición 1.3.14.** *Los lenguajes independiente de contexto son cerrados por intersecciones con lenguajes regulares.*

*Demostración.* Ver [HU79]. □

Otras propiedades interesantes tienen que ver con su relación con morfismos de monoides.

**Proposición 1.3.15.** *Los lenguajes independiente de contexto son cerrados por:*

1. *Imágenes de morfismos de monoides.*
2. *Preimágenes de morfismos de monoides.*

*Demostración.* Ver [Sip13]. □

Finalmente la herramienta principal que tenemos para ver que cierto lenguaje  $L$  no es independiente de contexto es usar el siguiente lema.

**Lema 1.3.16 (Pumping).** Sea  $L$  un lenguaje independiente de contexto entonces existe una constante  $n \geq 0$  tal que para todas las palabras  $w \in L$  de longitud al menos  $n$  existe una factorización  $w = uvxwy$  con  $|vwx| \leq n$  y  $|vx| > 0$  tal que para todo  $i \in \mathbb{N}$  vale que  $uv^iwx^iy \in L$ .

*Demostración.* Resultado estándar. Ver [HU79]. □

## 1.4. Automátas de pila determinísticos.

Si en la definición anterior del autómeta pedimos que la función de transición de una configuración dada tenga a lo sumo un valor entonces nuestro autómeta lo vamos a llamar determinístico. Formalmente esto es que

$$|\delta(q, a, z)| \leq 1 \quad \forall z \in Z, p \in Q, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}.$$

En cierta manera estamos diciendo que de un instante dado solo tenemos a lo sumo una única posibilidad de movernos a otro estado. A los lenguajes aceptados por un autómeta de pila determinístico los pensamos que son aceptados por un estado final.

Por lo tanto para cada palabra tenemos un único camino en el autómeta para saber si es aceptada o no a diferencia de un autómeta de pila no determinístico que podría tener varios caminos posibles para cada palabra.

**Observación 1.4.1.** Todo autómeta de pila determinístico en particular es no determinístico y por lo tanto la clase de lenguajes aceptados por los primeros están contenidos en la clase de los segundos.

Veamos que esta contención es estricta. Para eso volvamos a considerar el ejemplo del lenguaje de los palíndromos.

**Ejemplo 1.4.2.** El lenguaje  $L = \{w \in \{a, b\}^* : w = w^r\}$  no es aceptado por un autómeta de pila determinístico pero sí por uno no determinístico. Supongamos que  $M$  es un autómeta de pila determinístico que lo acepta. Notemos que para cualquier palabra  $w \in \{a, b\}^*$  debe ser que al consumirla la pila no puede quedar vacía dado que  $ww^r \in L$  y en tal caso no aceptaría a esta palabra. Esto es que la pila nunca está vacía sea cual sea la configuración que lleguemos. Para cada palabra arbitraria  $w$  existe otra  $x_w$  tal que al procesar  $wx_w$  lo que nos queda en la pila es de tamaño mínimo con respecto a todas las palabras  $wx$ . Sea entonces lo que tiene en la pila la palabra  $\alpha_w$  que sabemos es de longitud mínima. Si consideramos palabras del estilo  $wx_wz$  sabemos que la longitud de lo que quede en la pila no puede disminuir. Ahora consideremos dos palabras del estilo  $r = wx_w, s = uy_u$  tales que sus pilas son de longitud mínima al terminar de recorrer las palabras y que resultan tener el mismo tope de pila y terminar en el mismo estado. Podemos asegurar la existencia de estas palabras debido a que tenemos finitos estados y combinaciones de tope de pilas dado

## 1.4. AUTOMÁTAS DE PILA DETERMINÍSTICOS.

que el automáta de pila es finito pero tenemos infinitas palabras que cumplen esta propiedad. Ahora basta con elegir  $z$  de modo que  $tz$  sea palíndromo pero que  $sz$  no lo sea.

Veamos que podemos elegir a  $z$  para que una de las concatenaciones  $tz, sz$  sea palíndromo y la otra no. Partamos en distintos casos. Si  $|t| = |s|$  basta con tomar  $z = s^r$ . Si  $|t| \neq |s|$  y supongamos que  $s$  tiene longitud menor y no es prefijo de  $t$  entonces de nuevo podemos tomar el palíndromo  $ss^r$  tal que  $ts^r$  no es un palíndromo. Finalmente queda el caso que una es un prefijo de la otra, supongamos  $t = su$ . Si elegimos  $x = a, b$  tal que  $ux$  no sea un palíndromo luego la palabra  $ss^r$  es un palíndromo pero  $suxs^r$  no lo es.

Esto muestra que si bien  $sz \notin L$  y  $tz \in L$  el automáta de pila determinístico no va a poder diferenciarlas por lo tanto no es posible que este lenguaje sea aceptado por un automáta de pila determinístico tal como queríamos ver.

### 1.4.1. Automátas de pila determinísticos especiales.

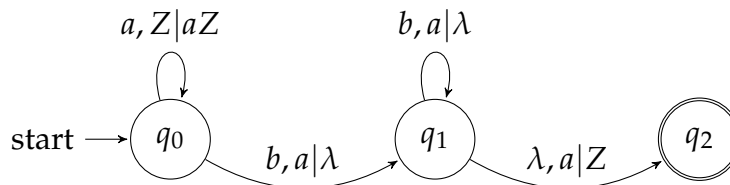
Consideremos ahora un automáta de pila determinístico tal que acepta tanto por estado final como por pila vacía. A estos los llamaremos *automátas de pila determinístico especiales*. Estos automátas son los que nos surgen de la construcción del automáta del problema de la palabra para grupos virtualmente libres.

**Ejemplo 1.4.3.** Sea el lenguaje  $L = \{a^m b^n : m \geq n \geq 1\}$  este no es un lenguaje independiente de contexto determinístico especial pero sí es determinístico.

Construyamos un automáta de pila determinístico que acepte a  $L$ . Sea

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0\}, \{a, b\}, \{a, b, Z_0\}, Z_0, q_2)$$

el siguiente automáta de pila determinístico que representamos así:



donde  $Z$  es cualquier letra del alfabeto de la pila. El automáta en el estado inicial  $q_0$  apila a todas las  $a$  y cambia al estado  $q_1$  cuando lee por primera vez una  $b$  y en ese caso desapila la  $a$  que está en el tope de la pila. En el estado  $q_1$  sigue desapilando cada vez que ve una  $b$ . Finalmente va al estado  $q_2$  cuando en la pila sigue quedando  $a$  y ya leímos toda la palabra y en tal caso la acepta porque significa que vimos como máximo tantas  $b$  como  $a$  y este es el lenguaje que buscábamos generar.

El lenguaje no es aceptado por un automáta de pila determinístico por pila vacía dado que tiene la propiedad de los prefijos. Es decir que existen palabras que están



en el lenguaje tales que alguno de sus prefijos también están. Por ejemplo consideremos  $a^m b^i$  y  $a^m b^j$  para  $m \geq 2$  e  $i < j \leq m$ . Esto es porque si  $M = (Q, \Sigma, Z, Z_0, \delta, q_0, F)$  fuera un automáta de pila determinístico que acepta por pila vacía a este lenguaje tendríamos que  $(q_0, a^m b^i, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)$  con  $q$  un estado final pero como tiene la pila vacía no podemos continuar aceptando a la palabra  $a^m b^j$  ya que por la definición que empleamos el autómata necesita leer algún elemento de la pila. De esta manera vemos que este lenguaje no puede ser aceptado por pila vacía y estado final por un automáta de pila determinístico concluyendo que los lenguajes determinísticos especiales forman un subfamilia propia de los independientes de contexto determinísticos.

## 1.5. Lenguajes poly independientes de contexto.

En esta sección vamos a introducir otra familia de lenguajes que generalizan levemente a los lenguajes independientes de contexto. La bibliografía fundamental es [Bro].

## 1.6. Conos de lenguajes y el problema de la palabra.

En esta sección consideraremos un grupo  $G$  finitamente generado por algún alfabeto  $\Sigma$  finito donde lo vemos como un conjunto de generadores como monoide dado que en particular todos los grupos son monoides. De esta manera tenemos un epimorfismo de monoides  $\pi : \Sigma^* \twoheadrightarrow G$ .

El problema de la palabra es uno de los problemas de teoría de grupos más centrales al área. Explícitamente el problema consiste en dada una palabra  $\omega \in \Sigma^*$  en los generadores del grupo encontrar un algoritmo para decidir si esta palabra es la identidad del grupo o no. Notemos que para poder pensar este problema estamos fijando de antemano algún conjunto de generadores posible del grupo.

Dado un grupo finitamente presentado consideramos el siguiente lenguaje

$$WP(G, \Sigma) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \stackrel{G}{=} 1\}$$

que llamaremos el **problema de la palabra de  $G$  para los generadores  $\Sigma$** .

Queremos ver sobre qué clases de lenguajes el problema de la palabra queda bien definido y no depende de los generadores elegidos.

Así como definimos los lenguajes regulares vamos a preocuparnos por otros tipos siempre y cuando cumplan las siguientes condiciones.

**Definición 1.6.1.** Una clase de lenguajes  $\mathcal{C}$  es un **cono** si para todo  $L \in \mathcal{C}$  resulta que:



## 1.6. CONOS DE LENGUAJES Y EL PROBLEMA DE LA PALABRA.

- Es cerrado por imágenes de morfismos de monoides. Sea  $L \subset \Sigma^*$  luego si existe  $\phi : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$  morfismo de monoides debe ser que  $\phi(L) \in \mathbb{C}$ .
- Es cerrado por preimágenes de morfismos de monoides. Sea  $L \subset \Sigma^*$  luego si existe  $\phi : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$  morfismo de monoides debe ser que  $\phi^{-1}(L) \in \mathbb{C}$ .
- Es cerrado por intersecciones con lenguajes regulares. Si  $R$  es un lenguaje regular sobre  $\Sigma^*$  entonces  $L \cap R \in \mathbb{C}$  también resulta serlo.

**Ejemplo 1.6.2.** Los lenguajes independientes de contexto forman un cono. Esto se puede ver a partir de las proposiciones 1.3.14 y 1.3.15.

Los conos de lenguajes cumplen la siguiente propiedad de gran importancia para el estudio del problema de la palabra.

**Proposición 1.6.3.** Sea  $WP(G, \Sigma)$  el lenguaje del problema de la palabra de cierto grupo  $G$  para algunos generadores  $\Sigma$  y  $\mathbb{C}$  cono de lenguajes. Si  $WP(G, \Sigma) \in \mathbb{C}$  luego valen las siguientes afirmaciones:

- $WP(G, \Delta) \in \mathbb{C}$  para cualquier conjunto de generadores  $\Delta$ .
- $WP(H) \in \mathbb{C}$  para todo subgrupo  $H$  grupo finitamente generado de  $G$ .

*Demostración.* ■ Formamos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^* & \xrightarrow{\delta} & G \\ f \downarrow & \nearrow \pi & \\ \Sigma^* & & \end{array}$$

donde  $f$  es algún morfismo de monoides y donde usamos la propiedad universal de los monoides libres. Notemos que  $WP(G, \Delta) = \delta^{-1}(1)$  y como el diagrama conmuta tenemos que

$$f^{-1}(\delta^{-1}(1)) = f^{-1}(WP(G, \Sigma)) = WP(G, \Delta).$$

Dado que esto es un cono obtenemos lo que queríamos ver puesto que es cerrado por preimágenes de morfismos de monoides.

- Sea  $\Sigma'$  conjunto de generadores de  $H$ . Siempre podemos extenderlo a  $\Sigma$  tal que  $\Sigma$  genere a  $G$ . De esta manera

$$WP(H, \Sigma') = WP(H, \Sigma) \cap \Sigma'^*$$

y de vuelta como es un cono la intersección con lenguajes regulares nos da un lenguaje en el cono.

□

Esto nos dice que es interesante estudiar el problema de la palabra justamente sobre conos.

## 1.7. Sistemas de reescritura.

Un *sistema de reescritura* podemos pensarlo como un grafo en el sentido de Serre. En este caso los vértices son los *objetos* mientras que las aristas las llamamos *movimientos*. Si nuestro sistema de reescritura  $\Gamma$  tiene un movimiento de un objeto  $a$  en otro objeto  $b$  diremos que  $a$  puede ser *reescrito* a  $b$  y lo denotaremos  $a \rightarrow_{\Gamma} b$ , omitiendo aclarar que estamos considerando el sistema  $\Gamma$  en todo caso que no sea ambiguo. Un camino en el grafo lo llamaremos una *derivación*.

Nosotros queremos que estos sistemas de reescritura sean tales que si tomamos una sucesión de movimientos en algún momento se estabilice y en tal caso llamaremos *terminante*. A su vez los objetos tales que no puedan ser modificados por ningún movimiento llamaremos objetos *terminales*.

Dado un sistema de reescritura  $\Gamma$  por medio de la clausura transitiva que denotaremos  $\rightarrow_{\Gamma}^*$  obtenemos una relación transitiva sobre los objetos. Nuestro interés justamente va a estar en estudiar las relaciones de equivalencia que surgen de sistemas de reescritura particulares.

**Ejemplo 1.7.1.** Considerar como objetos los enteros y como movimiento dividir al número por dos si es posible. Este sistema de reescritura tiene como objetos terminales los números impares.

Otra característica que le vamos a pedir a los sistema de reescritura es que sean *confluentes*. Informalmente esto es que a partir de un objeto, si usamos dos derivaciones distintas entonces eventualmente estas derivaciones se encuentran en algún objeto independientemente de qué derivaciones tomemos. Esto es que dadas derivaciones  $a \xrightarrow{*} b, a \xrightarrow{*} c$  existe un objeto  $d$  tal que  $b \xrightarrow{*} d$  y  $c \xrightarrow{*} d$ .

En particular los sistemas que nos van a interesar en este trabajo son sistemas tales que son confluentes y terminantes que son conocidos como *Church-Rosser*.

### 1.7.1. Sistemas de reescritura de cadenas.

En nuestro caso en particular vamos a trabajar con sistemas de reescritura donde los objetos son palabras sobre algún alfabeto  $\Sigma$  y los movimientos son reglas del estilo  $w \rightarrow v$  que interpretamos de la siguiente manera. Si tenemos alguna palabra que tenga como subpalabra a  $w$  podemos modificarla por  $v$ . Esto lo representamos por el triple  $(p, w \rightarrow v, q)$  donde  $p, q$  son las subpalabras que vienen antes de  $w$  tales que pueden ser vacías.

### 1.7. SISTEMAS DE REESCRITURA.

Al sistema de reescritura  $\Gamma$  con alfabeto  $\Sigma$  y las reglas  $\mathcal{R}$  lo vamos a denotar por  $\text{sr}\langle \Sigma, \mathcal{R} \rangle$ . Estos sistemas también son llamados *sistemas de Thue*.

## *CAPÍTULO 1. TEORÍA DE LENGUAJES.*

## Capítulo 2

### Grupos virtualmente libres.

**Definición 2.0.1.** Un grupo  $G$  grupo finitamente generado es **virtualmente libre** si existe un subgrupo  $F$  libre tal que su índice en  $G$  es finito.

**Observación 2.0.2.** Al subgrupo libre siempre lo podemos tomar normal. Para eso si  $G$  es un grupo grupo finitamente generado virtualmente libre entonces existe  $F$  subgrupo libre de índice finito. Si consideramos

$$F' = \bigcap_{g \in G} g^{-1} F g$$

es un subgrupo normal de  $G$  tal que tiene índice finito en  $F$  de manera que también lo tiene en  $G$ . Usando el teorema de Nielsen-Schreier vemos que este subgrupo también es libre.

**Ejemplo 2.0.3.** El grupo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  no es virtualmente libre. Como es un grupo conmutativo no puede tener a ningún  $F_n$  con  $n \geq 2$  como subgrupo. Para que sea virtualmente libre no queda otra que el libre sea isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Veamos que esto es imposible. Sea  $H$  este subgrupo y sea  $K \simeq G/H$  el cociente finito que necesariamente tiene que ser abeliano. Como el subgrupo  $H$  tiene índice finito tenemos bien definido el morfismo del transfer  $\phi$ . Para definirlo necesitamos tomar  $\{x_i\}_{i=1 \dots n}$  representantes de  $G/H$  a izquierda en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que sabemos son finitos porque  $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : H] < \infty$ . Luego todo elemento  $x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  lo podemos escribir como

$$x = \prod_{i=1}^n h_i x_i$$

donde  $h_i \in H$ . El transfer es el siguiente morfismo  $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  dado por  $\phi(g) = \prod_{i=1}^n h_i$ . En particular notemos que es un epimorfismo. Como  $\mathbb{Z}$  es libre todo epimorfismo se parte. Esto es que  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \times K$  donde  $K$  ya sabemos que es un grupo finito abeliano. Por el teorema de la clasificación de los grupos abelianos llegamos a una contradicción porque el grupo  $\mathbb{Z} \times K$  sin importar qué grupo finito tomemos tiene torsión mientras que  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  no tiene.

## 2.1. Grupos independientes de contexto.

Como corolario de la proposición 1.6.3 y de saber que los lenguajes independiente de contexto forman un cono 1.6.2 podemos dar la siguiente definición.

**Definición 2.1.1.** Si  $G$  es un grupo finitamente generado tal que para ciertos generadores  $\Sigma$  resulta que  $WP(G, \Sigma)$  es independiente de contexto entonces diremos que  $G$  es un **grupo independiente de contexto**.

**Ejemplo 2.1.2.**  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  no es un grupo independiente de contexto. Si tomamos los siguientes generadores  $\Sigma = \{a, b, c\}$  tal que tenemos un morfismo de monoides  $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dado por  $\pi(a) = (1, 0), \pi(b) = (0, 1), \pi(c) = (-1, -1)$ . Bajo esta presentación

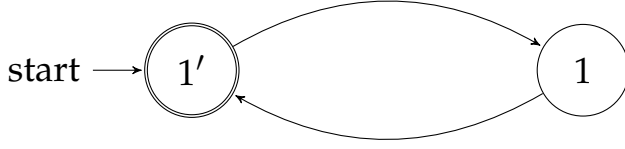
$$WP(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \Sigma) = \{w \in \Sigma^* : \exists n \in \mathbb{N}, |w|_a = |w|_b = |w|_c = n\}.$$

Este lenguaje no es independiente de contexto. Para eso usemos el lema del pumping 1.3.16 para probarlo por contradicción. Si fuera independiente de contexto debería existir una constante  $n \geq 0$  tal que hace valer las hipótesis del lema. Consideremos la palabra  $w = a^n b^n c^n \in WP(G, \Sigma)$ . Si tenemos una factorización  $uvwxy = a^n b^n c^n$ , que  $|vwx| \leq n$  implica que no todas las letras aparecen en  $vwx$ . Supongamos que la letra que no aparece es  $c$ . Por otro lado como  $|vx| \leq n$  esto nos dice que al menos una letra aparece en la subpalabra  $vx$ . Si tomamos  $i = 0$  notemos que la palabra  $uwy \in WP(G, \Sigma)$  pero esto es una contradicción porque la cantidad de  $c$  en esta palabra es mayor que de  $a$  o  $b$ .

Una pregunta natural es intentar entender la relación entre la clasificación del lenguaje del problema de la palabra de un grupo dado y las distintas familias de grupos que le corresponden.

**Ejemplo 2.1.3 (Automáta para grupos libres.).** Dado un grupo libre  $F_\Sigma$  veamos cómo construir un automáta  $\mathcal{M}$  tal que acepta su problema de la palabra. Pensemos un automáta de pila no determinístico que tenga dos estados. Uno inicial que también va a ser final para poder aceptar la palabra vacía que corresponde al elemento 1 de nuestro grupo y otro estado para las palabras que no están en el problema de la palabra. Para eso la idea es tener en la pila lo que fuimos leyendo de nuestra palabra hasta el momento visto como un elemento en el grupo. Esto es, cada vez que leemos una letra de la palabra ver de multiplicarla como un elemento en el grupo con lo que tenemos en el tope de la pila. Eventualmente cuando hayamos recorrido la palabra entera debería quedarnos una palabra en la pila que queremos que sea exactamente 1 y esto es lo mismo que pedir que sea aceptada por pila vacía. Entonces este automáta lo podemos representar de la siguiente manera:

## 2.1. GRUPOS INDEPENDIENTES DE CONTEXTO.



Donde las transiciones del estado 1' a 1 son todas las transiciones en las cuales la letra que estamos por leer no es la inversa de lo que esté al tope de la pila. Por otro lado las transiciones del estado 1 al estado 1' son todas las que lo que leemos es justamente el inverso de lo que está al tope de la pila.

Esta idea que usamos para los grupos libres se puede extender más en general para grupos virtualmente libres con algunas modificaciones. Esta es la primera de las equivalencias que vamos a ver.

**Teorema 2.1.4.** *Todo grupo virtualmente libre es tal que su problema de la palabra es aceptado por un autómata determinístico especial de pila finito.*

*Demostración.* Para demostrar este teorema necesitamos construirnos al autómata para una presentación fijada de un grupo virtualmente libre.

Fijemos entonces el subgrupo libre de índice finito  $F_\Sigma$ . Sea  $R$  representantes de coclases a derecha de  $G/F_\Sigma$  que sabemos son finitos. De esta manera podemos considerar al conjunto  $\Delta = \Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup R$  de generadores de nuestro grupo tal que nos da una presentación.

Recordemos por ?? que para todo grupo virtualmente libre tenemos un sistema de reescritura convergente dado por

$$S = \{ab \rightarrow w(a,b)r\}$$

donde  $w(a,b) \in F_\Sigma$  es una palabra reducida y  $r \in R$  tal que  $ab = w(a,b)r$ . Vamos a usar este sistema para construirnos la función de transición de nuestro autómata.

Nuestro autómata lo definimos así

$$\mathcal{M} = (Q, \Delta, Z, \delta, q_0, F)$$

donde los estados  $Q$  se corresponden a  $R \cup R'$  siendo  $R'$  una copia de  $R$ . Para el alfabeto de la pila consideramos solamente el alfabeto del subgrupo libre y otra vez agregamos otras copias de manera que nuestro alfabeto para la pila es  $Z = \Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup (\Sigma \cup \Sigma^{-1})'$ . Nuestro estado inicial es  $q_0 = 1' \in R'$  es decir el 1 de la copia. Nuestro conjunto de estados finales contiene solamente al estado inicial  $F = q_0$ . No tenemos a su vez a  $m = \max |w(r,a)|$  para  $r \in R, a \in \Delta$  que es finito porque es el máximo de longitudes de finitas palabras. Cuando tengamos una ecuación en término de las copias la vamos a considerar como el elemento que representa en el grupo. La

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

utilidad radica en poder tener un automáta más declarativo en cuanto a los nombres de los estados. Nuestra función de transición entonces funciona de la siguiente manera si no tenemos nada en la pila

$$\begin{aligned} (r'a, w(r'a)s) \in \delta \quad \text{para } s \in R \text{ tal que } r'a = w(r', a)s \text{ y } w(r', a) \neq 1 \\ (r'a, s') \in \delta \quad \text{para } s \in R \text{ tal que } r'a = s. \end{aligned}$$

Si la palabra reducida  $w(r', a)$  es distinta de la identidad entonces pasamos a los estados que le corresponden a  $R$  mientras que en el otro caso nos quedamos en los estados de la copia  $R'$ . En particular como el estado inicial es  $1' \in R'$  luego siempre que tengamos la pila no vacía vamos a estar en algún estado  $r \in R$ . Repliquemos esta idea también para el caso que que tengamos algo en la pila,

$$\begin{aligned} (xra, ys) \in \delta \quad \text{para } s \in R, x, y \in (\Sigma \cup \Sigma^{-1})^m \text{ tal que } ra = w(r, a)s \\ \text{e } y \text{ es la forma reducida de } xw(r, a) \\ (xra, s') \in \delta \quad \text{para } s' \in R', x, y \in (\Sigma \cup \Sigma^{-1})^m \text{ tal que } ra = w(r, a)s' \\ \text{e } xw(r, a) \text{ se reduce a } 1. \end{aligned}$$

En este caso la función de transición cuando tenemos algo en la pila lo que va haciendo es lo mismo que antes y solo pasa a los estados que corresponden a  $R'$  cuando la palabra que nos queda la pila vacía.

De esta manera notemos que en particular es un automáta especial determinístico considerando que la transición es determinística porque el sistema de reescritura es convergente por lo que hay una única palabra reducida. Por otro lado como el único estado que acepta es el estado inicial y la única manera de llegar a cualquier estado en  $R'$  es con la pila vacía luego el automáta acepta por pila vacía y estado final a la vez.  $\square$

*Observación 2.1.5.* En particular los grupos virtualmente libres son independiente de contexto usando la equivalencia 1.3.10. Más aún su problema de la palabra es un lenguaje independiente de contexto determinístico y como tal tiene las siguientes buenas propiedades algorítmicas ??.

## 2.2. Grafos de Cayley.

Un grafo en esta sección va a estar definido por su conjunto de vértices  $V(X)$  y por uno de aristas  $E(X) \subseteq V(X) \times V(X)$ . En particular las aristas no van a estar dirigidas y no tomaremos a  $(v, v)$  como una arista para ningún  $v \in V(X)$ .



## 2.2. GRAFOS DE CAYLEY.

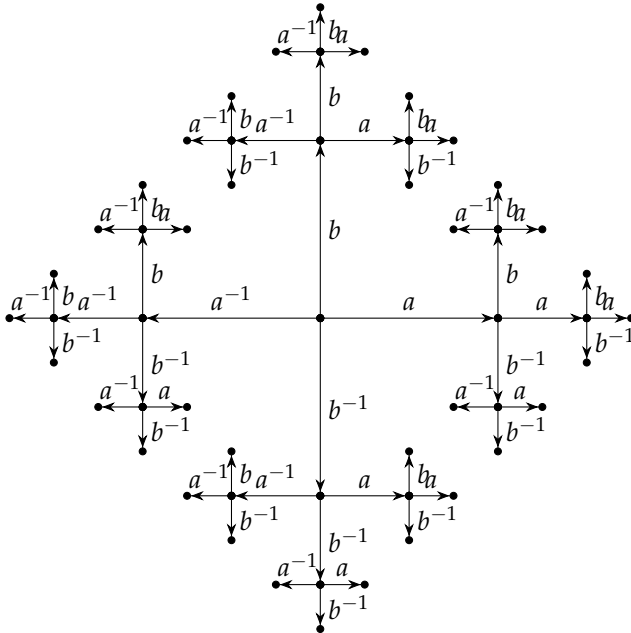
**Definición 2.2.1.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $\Sigma$  un conjunto de generadores como grupo. Supongamos que  $1 \notin \Sigma$ . Definimos el **grafo de Cayley**  $\Gamma = \text{Cay}(G, \Sigma)$  como el grafo que tiene como vértices  $V(\Gamma) = G$  y aristas  $(g, h) \in E(\Gamma)$  si  $h = ga$  para ciertos  $g, h \in G$  y  $a \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$ .

Para una arista  $(g, ga)$  llamaremos la *etiqueta* al generador  $a$ . Extendemos esta definición a caminos sobre el grafo para obtener una palabra en el monoide  $\Sigma^*$ . Este grafo por como lo definimos no tiene aristas múltiples ni tampoco tiene bucles. Dado que  $\Sigma$  genera tenemos que el grafo  $\Gamma$  es conexo.

El grafo de Cayley lo podemos ver como un espacio métrico justamente si hacemos que todas las aristas sean isométricas a  $[0, 1]$ . Esto es que  $d(g, ga) = 1$  para todo  $g \in G, a \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$ . Un camino  $\alpha = g_0 \dots g_n$  es una *geodésica* si  $d(g_i, g_j) = j - i$  para todo  $i, j \in [0, n]$ .

Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos. En particular los árboles vistos como espacios métricos resultan ser *únicamente geodésicos*. Esto es que dados  $v, w$  dos vértices existe una única geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow T$  tal que  $\gamma(0) = v$  y  $\gamma(1) = w$ .

**Ejemplo 2.2.2.** Sea  $\mathbb{F}_2$  el grupo libre en dos generadores  $a, b$ . Su grafo de Cayley para estos generadores tiene la siguiente pinta,



Notemos que este grafo resulta ser un árbol y esto es algo que vale en general para todos los grupos libres cuando miramos respecto a sus generadores canónicos.

Como todo grupo libre es tal que sus grafos de Cayley resultan ser árboles por un resultado clásico de Serre, ver []. Es razonable pensar que todo grupo virtualmente libre es tal que su grafo de Cayley se parezca a un árbol. La primera noción que podemos tomar para modelizar esto es el de tener un treewidth finito.

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

**Definición 2.2.3.** Una **descomposición en un árbol** de un grafo  $X$  es un árbol  $T$  y un mapa

$$X : V(T) \rightarrow \mathcal{P}(V(X))$$

que denotaremos  $X_t$  para cada vértice  $t \in V(T)$ . Le vamos a pedir que cumpla las siguientes condiciones:

1. Para todo vértice  $v \in V(X)$  debe existir  $t \in V(T)$  tal que  $x \in X_t$ .
2. Para toda arista  $e$  entre dos vértices  $v, w \in V(X)$  debe existir  $t \in V(T)$  tal que  $v, w \in X_t$ .
3. Si  $v \in V(X)$  es tal que  $v \in X_t \cap X_s$  luego  $v \in X_r$  para todo  $r$  en la geodésica que va desde  $s$  a  $t$  dentro de  $T$ . En otras palabras esto es que  $\{t \in V(T) : v \in X_t\}$  forma un subárbol.

La idea de la descomposición es que los *bolsones*  $X_t \in \mathcal{P}(V(T))$  no tengan muchos vértices si es que queremos modelizar que el grafo se parezca a un árbol. Esto nos conduce a la siguiente definición.

**Definición 2.2.4.** El **bagsize** de una descomposición en un árbol  $T$  de un grafo  $X$  es el siguiente valor:

$$bs(X, T) = \{\sup |X_t|, t \in V(T) : T \text{ descomposición de } X\} - 1$$

Un grafo  $X$  tiene **treewidth finito** si existe una descomposición en un árbol de bagsize finito.

**Observación 2.2.5.** En particular si el grafo  $X$  es un árbol notemos que tiene treewidth exactamente igual a 1. Una manera de probarlo es tomar  $T$  la subdivisión baricéntrica de  $X$ . Este es el siguiente árbol que tiene como vértices a

$$V(T) = \{\{x\} \mid x \in V(X)\} \cup \{\{x, y\} \mid xy \in E(X)\}.$$

Tomamos todos los vértices de  $x$  y los agregamos a los de  $T$  y agregamos un vértice por cada arista del grafo  $X$ . Finalmente las aristas están formadas por

$$E(T) = \{ts \mid t \subset s \vee s \subset t\}$$

agregamos una arista entre cada vértice de  $T$  que se corresponde con un vértice de  $X$  con los que se corresponden con una arista que lo contiene en  $X$ .

La descomposición que tomamos entonces es la siguiente. Por cada  $t \in V(T)$  tenemos ya armados los bolsones por la construcción que hicimos. Esto es que:

- Si  $t$  es un vértice que ya estaba en  $V(X)$  entonces  $X_t = \{t\}$ .

## 2.2. GRAFOS DE CAYLEY.

- Si  $t$  lo agregamos por una arista  $xy \in E(X)$  entonces  $X_t = \{x, y\}$ .

Por como los definimos es evidente que  $|X_t| \leq 2$  para todo  $t \in V(T)$ . De esta manera si vemos que se trata de una descomposición en un árbol tendremos probado que  $bs(X, T) = 1$  tal como queríamos ver.

Finalmente veamos que se trata de una descomposición. Corroboremos que cumple las tres condiciones necesarias.

1. Todo vértice  $v \in V(X)$  lo podemos ver como uno en  $T$ . Su bolsón asociado  $X_v$  lo tiene como único elemento por la construcción de esta descomposición.
2. Si  $xy \in E(X)$  entonces tenemos un vértice  $t \in V(T)$  tal que  $X_t = \{x, y\}$ .
3. Sea  $x \in X_t \cap X_s$ . Por como armamos los bolsones, si estos son distintos no queda más que al menos uno de los dos, por ejemplo  $X_t$  tenga esta pinta,  $X_t = \{x, y\}$  para cierto vértice  $y \in V(X)$  tal que junto con  $x$  forman una arista  $xy \in E(X)$ .

El primer caso es que  $X_s = \{x\}$ . La geodésica que podemos tomar entonces es  $st$  puesto que  $s$  se corresponde con el vértice  $x$  y sabemos que existe una arista  $st \in E(T)$  porque justamente  $t$  se corresponde con una arista en  $X$  que contiene a  $x$ .

En el caso que  $s \in V(T)$  sea tal que el bolsón  $X_s$  se corresponda con los vértices que aparecen en una arista debería ser del tipo  $X_s = \{x, z\}$  para cierto  $z \in V(X)$ . Es decir que la arista debe incluir a  $x$  necesariamente y como vimos los bolsones solo tienen a lo sumo dos elementos. Si miramos la geodésica sobre  $T$  entre ambos vértices no es más que el siguiente camino  $tv s$  donde  $v \in V(T)$  es el vértice que está tanto en el árbol original  $X$  como en la subdivisión baricéntrica  $T$ . Esto es que  $X_v = \{x\}$ . De esta manera  $x$  está en todos los bolsones correspondientes a la geodésica sobre  $T$  tal como queríamos ver.

**Proposición 2.2.6.** *Sea  $\Gamma$  grafo tal que tiene una descomposición en un árbol  $T$ . Sean  $X, Y, Z$  bolsones tales que el vértice correspondiente a  $Z$  en el árbol  $T$  está en la geodésica que va de  $X$  a  $Y$ . Sean  $x \in X, y \in Y$  tales que  $x = x_0 \dots x_n = y$  es algún camino en  $\Gamma$  conectándolos. Entonces debe existir algún  $0 \leq i \leq n$  tal que  $x_i \in Z$ .*

*Demostración.* Vamos a demostrarlo haciendo inducción en la longitud  $n$  del camino. El caso base es que  $n = 0$  por lo tanto  $x = y$ . En este caso por ser una descomposición en un árbol tenemos que usando la tercer propiedad que  $x \in Z$  también.

Para el paso inductivo tomemos  $X'$  bolsón que contiene tanto a  $x$  como a  $x_1$  que sabemos existe por ser una de las propiedades de las descomposiciones en árboles. Si este bolsón  $X'$  es  $Z$  ya está porque nos alcanza con tomar  $i = 1$  de manera que  $x_1 \in Z$ . En el caso que esto no ocurra miramos el camino de longitud  $n - 1$  dado por  $x_1 x_2 \dots x_n = y$  y usando la hipótesis inductiva llegamos al resultado.  $\square$

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

**Definición 2.2.7.** Sea  $\Gamma$  un grafo y  $C \in V(\Gamma)$  un conjunto de vértices entonces definimos los **vecinos de  $C$**  por medio de

$$N(C) = \{v \in V(\Gamma) : \exists w \in C, vw \in E(\Gamma)\}.$$

De esta manera podemos definir recursivamente los  $l$ -ésimos vecinos por medio de  $N^l(C) = N(N^{l-1}(C))$ .

**Observación 2.2.8.** Esta definición la podemos escribir de manera más concisa como  $N^l(C) = \{v \in V(\Gamma) : \exists w \in C, d(v, w) \leq l\}$ .

**Proposición 2.2.9.** Si  $(X_t)_{t \in V(T)}$  es una descomposición en un árbol  $T$  para un grafo  $\Gamma$  entonces si tomamos como bolsones a  $N^l(X_t)$  también tenemos una descomposición en un árbol.

*Demostración.* Veamos este resultado para  $l = 1$  y por inducción lo podemos extender para un  $l$  genérico. En este caso notemos que las dos primeras condiciones de la descomposición en un árbol se siguen cumpliendo porque no hicimos más que agrandar los bolsones. Esto es que si  $X_t$  era un bolsón luego  $X_t \subseteq N(X_t)$ . Debemos ver que cumple la tercer condición. Partamos de un vértice  $x \in V(X)$  tal que  $x \in N(X_s) \cap N(X_t)$  y veamos que si  $r \in V(T)$  está en la geodésica de  $t$  a  $s$  entonces  $x \in N(X_r)$ . Notemos que en este caso debe existir algún  $y \in N(X_s)$  tal que  $xy \in E(X)$ . Análogamente existe  $z \in N(X_t)$  tal que  $xz \in E(X)$ . Si no fuera así tendríamos que  $x \in X_s \cap X_t$  y esta condición ya se cumpliría por ser los bolsones de una descomposición. Entonces si usamos la proposición 2.2.6 tomando el camino  $yxz$  tenemos que alguno de estos tres vértices debe estar en  $X_r$ . De esta manera  $x \in N(X_r)$  tal como queríamos ver.  $\square$

**Definición 2.2.10.** Dado un grafo  $X$ , el **borde** de un conjunto de vértices  $C \subseteq V(X)$  se define como

$$\beta C = \{u \in V(X) : \exists v \in V(X), uv \in E(X), (u \in C \wedge v \in \overline{C}) \vee (u \in \overline{C} \wedge v \in C)\}.$$

**Ejemplo 2.2.11.** Construyamos una descomposición en un árbol que podemos hacer en general para todos los grafos de Cayley de grupos finitamente generados. Consideremos el grafo  $\Gamma = \text{Cay}(G, \Sigma)$  para cierto conjunto de generadores  $\Sigma$  finito.

Sea  $V_n = \Gamma \setminus B_n(1)$  tal que  $V_0 = \Gamma \setminus \{1\}$ . El árbol que vamos a considerar va a tener como vértices a conjuntos de vértices del grafo  $\Gamma$  de manera que resultará evidente los bolsones que vamos a tomar para la descomposición. Los vértices del árbol  $T$  van a estar dados por los siguientes conjuntos,

$$V(T) = \{\beta C : C \subseteq V_n \text{ componente conexa}\}$$

## 2.2. GRAFOS DE CAYLEY.

esto es todas las fronteras de las componentes conexas que nos quedan cuando consideramos algún  $V_n$ . Las aristas entonces van a estar dadas por lo siguiente,

$$E(T) = \{\beta C \beta D : C \subseteq D \subseteq V_n, C \subset V_{n+1}\}$$

esto es que  $C$  es una componente conexa del grafo que queda de sacarla la bola de radio un número mayor que el que está  $D$ .

Notemos en particular que por como definimos este grafo  $T$  resulta que si  $C$  es una componente conexa de  $V_n$  entonces solo existe una única arista  $(\beta C, \beta D)$  tal que  $D \subseteq V_{n-1}$ . Esto se debe a que al ser  $C$  conexo entonces como  $V_{n-1} \subseteq V_n$  en particular  $C \subseteq V_n$  y debe estar contenida en una sola componente conexa  $D \subseteq V_{n-1}$ .

Podemos ver que así como lo construimos tenemos que el grafo  $T$  resulta ser un árbol tal que su raíz es  $B_1(\Gamma)$ .

Para ver que es un árbol veamos primero que es conexo. Dado un vértice  $\beta C \in V(T)$  vamos a armar un camino que lo conecte con la raíz del árbol  $B_1(\Gamma)$ . Usemos inducción en el  $n$  tal que  $C$  es una componente conexa de  $V_n$ . El caso base es algún  $C$  tal que es una componente conexa de  $V_2$  y queremos armarnos un camino que lo una con  $B_1(\Gamma)$ . Dado que  $V_2 \subseteq V_1$  en particular tenemos que  $C \subseteq V_1$ . De esta manera por la definición tenemos que existe una arista  $\beta C B_1(0)$  tal como queríamos ver.

Para el paso inductivo supongamos para cualquier borde de una componente conexa de  $V_{n-1}$  tenemos un camino que lo une con la raíz  $B_1(\Gamma)$  y veamos de construirnos un camino con cualquier borde de una componente conexa  $C \subseteq V_n$ . De esta manera debe existir  $D$  componente conexa de  $V_{n-1}$  tal que  $C \subseteq D$ . Esto es porque  $V_{n-1} \subseteq V_n$  y al ser  $C$  un conexo si interseca alguna de las componentes conexas de  $V_{n-1}$  debe estar contenida en ella. Necesariamente debe intersectar a alguna de estas componentes conexas porque particionan al espacio. Así vimos que existe una arista  $(\beta C, \beta D)$  y ahora usando la hipótesis inductiva obtenemos un camino de  $B_1(\Gamma)$  con  $\beta D$ . Concluimos que el grafo  $T$  es conexo.

Para terminar de ver que es un árbol veamos que es acíclico. Dado un camino cerrado  $\sigma$  en  $T$  probemos que necesariamente tiene que repetirse algún vértice por lo tanto ningún camino cerrado puede ser un ciclo. Vamos a probarlo usando inducción en el máximo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $C \in V_n$  y  $\beta C$  es uno de los vértices en el camino. Para el caso base notemos que si  $\sigma$  es un camino cerrado tal que el máximo  $n$  que aparece es  $n = 1$  entonces necesariamente  $\sigma$  es idéntico al camino constante fijo en  $B_1(0)$ . Para el paso inductivo supongamos que para todo camino cerrado con máximo  $m \in \mathbb{N}$  tal que algún vértice que aparece en este camino es una componente conexa de  $V_m$  resulta ser  $n - 1$  entonces este camino no es un ciclo. Veamos que si  $m = n$  entonces este camino cerrado también resulta ser un ciclo.

Partamos de un camino tal que pasa por  $\beta C$  con  $C \subseteq V_n$ . Como no existe  $\beta C, \beta C' \in E(T)$  tal que  $C, C'$  sean componentes conexas de un mismo  $V_n$  por la definición que dimos de las aristas. Necesariamente tiene que haber una arista con alguna componente conexa  $D \in V_{n-1}$  dado que  $n$  es máximo en este camino cerrado. Como

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

vimos anteriormente solamente hay una única arista que una a  $\beta C$  con alguna  $\beta D$  con  $D \subseteq V_{n-1}$ . Esto nos dice que si el camino cerrado pasa por la arista  $(\beta C, \beta D)$  necesariamente debe volver a pasar por la arista  $(\beta C, \beta D)$  por lo tanto no es un ciclo. Concluimos que el grafo  $T$  es acíclico y por lo tanto como es conexo también resulta que  $T$  es un árbol.

Para ver que es una descomposición de árboles debemos ver que cumple las tres condiciones 2.2.3 de la definición.

1. La primera condición la cumple por como lo definimos porque cualquier vértice del grafo  $g \in V(\Gamma)$  es tal que existe  $n \in \mathbb{N}$  de manera que  $d(1, g) = n$ , por lo que está en alguna componente conexa  $C \subseteq V_{n-1}$ . En particular como la distancia es exactamente  $n$  tiene que existir una arista  $gg' \in E(\Gamma)$  con un vértice  $g' \in V_{n-1}$  y por lo tanto  $g \in \beta C$ .
2. La segunda condición partimos de una arista  $gh \in E(\Gamma)$  luego miramos las distancias que hay al 1 de ambos vértices para conseguirnos el bolsón adecuado. Supongamos que ambas están a la misma distancia del 1. En tal caso sea  $n$  tal que  $d(g, 1) = d(h, 1) = n$  luego si miramos  $V_{n-1}$  notemos que tienen que estar en la misma componente conexa porque existe una arista entre ambos vértices. Sea esta componente  $C$  luego como están a distancia exactamente  $n$  ambas están en el borde, esto es que  $g, h \in \beta C$  tal como queríamos ver. El otro caso es que  $d(g, 1) = n < d(h, 1) = n + 1$  y en este caso como están conectadas resulta que están en  $\beta C$  si  $C$  es la componente conexa que contiene a  $h$  en  $V_n$  por definición del borde de un conjunto de vértices de un grafo.
3. Para la tercera condición supongamos que hay  $g \in V(\Gamma)$  tal que está en la intersección de dos bolsones  $\beta C \cap \beta D$ . Queremos ver que está en todos los bolsones que aparecen en la geodésica de  $\beta C$  a  $\beta D$  en el árbol  $T$ . Si  $d(g, 1) = n$  luego solo puede estar en la frontera de alguna componente conexa  $C$  tal que esté en alguna de estas opciones  $V_{n-1}, V_n, V_{n+1}$ . Supongamos que  $D \subseteq V_n$ , en tal caso vale que  $D \not\subseteq V_n$  porque sino tendríamos que resulta ser la misma componente conexa. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $C \subset V_n$  mientras que  $D \subset V_{n+1}$ . Como ambas son componentes conexas luego si hay una intersección tiene que haber una contención, esto es que  $D \subseteq C$ . De esta manera vemos que  $\beta C, \beta D \in E(T)$  por lo tanto como están unidos por una arista la geodésica es justamente esta arista.

**Observación 2.2.12.** Si tenemos un grupo  $G$  tal que es independiente de contexto consideremos  $\mathcal{G}$  gramática que genera al lenguaje del problema de la palabra,  $WP(G, \Sigma) = L(\mathcal{G})$ . Si  $A$  es una de las variables de esta gramática podemos obtener el lenguaje  $L_A$  de palabras generadas a partir de esta variable, donde

$$L_A = \{w \in \Sigma^* \mid A \Rightarrow_G^* w\}.$$

## 2.2. GRAFOS DE CAYLEY.

Veamos que si  $v, v' \in L_A$  entonces  $v =_G v'$ , es decir son el mismo elemento vistos en el grupo  $G$ . Para eso si tenemos una derivación que en algún momento llega a  $S \xRightarrow{*}_G \beta A \gamma \xRightarrow{*}_G uvw$  también tenemos otra derivación que deriva en  $S \xRightarrow{*}_G \beta A \gamma \xRightarrow{*}_G uv'w$ . Es decir que  $uvw, u'v'w' \in \text{WP}(G, \Sigma)$  por lo tanto

$$uvw =_G 1 =_G uv'w \implies v =_G v'$$

tal como queríamos ver.

El siguiente resultado es un teorema de Muller-Schupp demostrado en [MS85]. La demostración sigue la exposición del paper [ADL<sup>+</sup>17].

**Teorema 2.2.13 (Muller - Schupp 1985).** *Todo grupo independiente de contexto es tal que su grafo de Cayley tiene treewidth finito.*

*Demostración.* La descomposición que hicimos en 2.2.11 es válida para todo grafo de Cayley. Veamos que esta descomposición para un grupo independiente de contexto tiene treewidth finito. Buscamos  $k \in \mathbb{N}$  tal que nos permita acotar  $|\beta C| \leq k$  para todo  $\beta C \in V(T)$ . Alcanza con ver que los diámetros de los bolsones  $\beta C$  están acotados uniformemente, esto es que exista  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{diam}(\beta C) = \sup_{g, h \in \beta C} d(g, h) \leq M$$

para todo  $\beta C$  de la descomposición de árboles. Si esto sucede, al ser el grupo finitamente generado por  $\Sigma$  entonces  $|\beta C| \leq |\Sigma|^M < \infty$ .

Dado que  $G$  es un grupo independiente de contexto entonces el lenguaje del problema de la palabra para estos generadores  $\text{WP}(G, \Sigma)$  tiene una gramática  $\mathcal{G}$  independiente de contexto que lo genera. Consideremos que está en la forma normal de Chomsky.

Para cada variable  $A$  de nuestra gramática podemos considerar el siguiente lenguaje

$$L_A = \{w \in \Sigma^* : A \xRightarrow{*}_G w\}.$$

Para este lenguaje introduzcamos un número natural  $k_A \in \mathbb{N}$  definido por  $k_A = \max_{w \in L_A} |w|$ . Como tenemos finitas variables en nuestra gramática  $\mathcal{G}$  podemos considerar  $k = \max_{A \in V} k_A$ . Veamos que  $\text{diam}(\beta C) \leq 3k$  para todo  $\beta C \in V(T)$ .

Sean  $g, h \in \beta C$  para cierta  $C$  componente conexa de  $V_n$ , acotemos  $d(g, h)$ . Para eso consideremos una geodésica  $\alpha$  que una  $1$  con  $g$  y análogamente otra  $\gamma$  que una  $1$  con  $h$ . Como  $C \cup \beta C$  es conexo podemos tomar un arco  $\tau$  que una  $g$  con  $h$  dentro de  $C \cup \beta C$ . De esta manera tenemos un triángulo tal que si leemos las letras que están en la etiqueta del arco empezando desde  $1$  y moviéndonos por  $\alpha$  leemos la etiqueta  $u$ . Cuando nos movemos por  $\tau$  leemos la etiqueta  $v$ . Consideremos que esta etiqueta



## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

$v$  es tal que  $|v| > 1$  caso contrario ya tenemos la cota probada. Finalmente leemos la etiqueta  $w$  cuando regresamos al 1 por medio de  $\gamma$ . Como  $uvw$  está en un ciclo en el grafo de Cayley entonces  $uvw \in \text{WP}(G, \Sigma)$  y por lo tanto tenemos alguna derivación  $S \Rightarrow_G^* uvw$ .

Ya que tenemos esta derivación  $S \Rightarrow_G^* uvw$  miremos la primer variable que deriva a  $v$  como subpalabra. Esto es que para la subpalabra  $v$  sabemos que existe alguna variable  $A$  tal que  $A \Rightarrow_G^* v'v''$  donde  $v$  es a su vez una subpalabra de  $v'v''$ . Tomamos la última variable que aparece en la derivación. Ésta debe existir porque en particular  $S$  cumple lo pedido de ser una variable que deriva a una palabra que contiene a  $v$  como subpalabra.

Como está en la forma normal de Chomsky sabemos que al ser  $|v| \geq 2$  entonces tenemos que la derivación tiene la siguiente pinta

$$S \Rightarrow_G^* u'Aw' \Rightarrow_G u'BCw' \Rightarrow_G^* u'v'v''w'$$

donde  $B, C$  son otras variables. En particular notemos que  $A \Rightarrow_G^* v'v''$ ,  $B \Rightarrow_G^* v'$  y  $C \Rightarrow_G^* v''$ .

Si miramos la geodésica  $\alpha$  sabemos que cuando leímos  $u'$  habremos llegado a un vértice del grafo  $x$ , y al estar sobre la geodésica misma tenemos la siguiente igualdad,

$$d(x, g) = d(1, g) - d(1, x).$$

Análogamente cuando miramos la geodésica  $\gamma$  en la instancia que ya leímos  $w'$  saliendo desde  $h$  llegamos a cierto vértice  $z$  y por la misma razón que en el caso anterior obtenemos

$$d(z, h) = d(1, h) - d(1, z).$$

Por otro lado si consideramos el vértice  $y$  al que llegamos después de leer  $u'v'$  que sabemos que está en el arco  $\tau$  dado que  $v$  es subpalabra de  $v'v''$ . Usando que  $y \in \tau \subseteq C \cup \beta C$  tenemos que  $d(1, y) \leq n + 1 = d(1, g)$  por ser  $C$  una componente conexa de  $V_n$ , entonces vale la siguiente desigualdad

$$d(x, g) = d(1, g) - d(1, x) \leq d(1, y) - d(1, x) = d(x, y)$$

y análogamente tenemos que  $d(z, h) \leq d(z, y)$ .

Por la observación 2.2.12 notemos que si reemplazamos  $v'$  por la palabra de menor tamaño del lenguaje  $L_B$  seguimos teniendo un ciclo pero de longitud idéntica o más chica. La palabra  $v'$  la leemos justamente cuando vamos del vértice  $x$  al vértice  $y$ , así la distancia  $d(x, y)$  está acotada por la mayor de todas las palabras que puedan derivarse de  $B$ . Idénticamente hacemos esto para las variables  $A$  y  $C$ . Por como definimos a  $k$  tenemos las siguientes cotas  $d(x, y), d(y, z), d(x, z) \leq k$ .



## 2.2. GRAFOS DE CAYLEY.

Ahora estamos listos para ver que  $d(g, h) \leq 3k$ . Usamos la desigualdad triangular tres veces,

$$\begin{aligned} d(g, h) &\leq d(g, x) + d(x, z) + d(h, z) \\ &\leq d(x, y) + d(x, z) + d(y, z) \leq 3k \end{aligned}$$

tal como queríamos ver. □

**Ejemplo 2.2.14.** Ejemplo de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  o de algún otro grupo que sea un producto libre de grupos finitos.

### 2.2.1. Cuasisometrías.

**Definición 2.2.15.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Una **cuasisimetría** es una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que:

- Para todo par de puntos  $x_1, x_2 \in X$  existe constante  $A > 0$  tales que

$$\frac{1}{A}d_X(x_1, x_2) - A \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Ad_X(x_1, x_2) + A$$

- Existe una constante real  $C \geq 0$  tal que para todo punto  $y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que

$$d(y, f(x)) \leq C$$

Dos espacios métricos que se dicen *cuasisométricos* si existe una cuasisimetría entre ellos.

**Observación 2.2.16.** Si nos restringimos a que los espacios métricos sean grafos podemos redefinir una cuasisimetría para que sea una función de los vértices de un grafo a los del otro. Esto es si tenemos dos grafos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  entonces son cuasisométricos como espacios métricos si y solo si existe  $f : V(\Gamma_1) \rightarrow V(\Gamma_2)$  tal que

- Para todo  $v, w \in V(\Gamma_1)$  existe constante  $A > 0$  tal que

$$\frac{1}{A}d_X(v, w) - A \leq d_Y(f(v), f(w)) \leq Ad_X(v, w) + A$$

- Existe una constante real  $C \geq 0$  tal que para todo vértice  $y \in V(\Gamma_2)$  existe  $v \in V(\Gamma_1)$  tal que

$$d(y, f(v)) \leq C$$

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

Para esto si tenemos una cuasisimetría  $g$  como espacios métricos definamos una sobre los vértices  $f$  de la siguiente manera. Por cada vértice  $v \in V(\Gamma_1)$  consideremos  $g(v) \in \Gamma_2$ . Si  $g(v) \in V(\Gamma_2)$  tomamos  $f(v) = g(v)$ . El otro caso es que  $g(v)$  cae en el medio de alguna arista  $xy \in E(\Gamma_2)$ . Supongamos que  $d(g(v), x) \leq \frac{1}{2}$  porque la distancia máxima con alguno de los vértices debe ser no más de  $\frac{1}{2}$  porque justamente las aristas son isométricas con el intervalo  $[0, 1]$ . En este caso definamos  $f(v) = x$ . Notemos ahora que la distancia entre dos vértices por medio de  $f$  a lo sumo aumenta. Tenemos que  $d(f(v), f(w)) \leq d(g(v), g(w)) + 1$  para  $v, w \in V(\Gamma_1)$  porque a lo sumo las imágenes por  $g$  están a distancia  $\frac{1}{2}$  de alguno de los vértices. De esta manera notemos que si tomamos la constante  $C + 1$  nos sirve. Para ver que la imagen es cuasidensa idénticamente tomando  $C + 1$  nos sirve. En definitiva  $f$  definida de esta manera es una cuasisimetría con constante  $C + 1$ .

**Proposición 2.2.17.** *Si existe  $f : X \rightarrow Y$  cuasisimetría entonces también debe haber  $g : Y \rightarrow X$  cuasisimetría.*

*Demostración.* Resultado estándar. Ver [BH13]. □

Todo espacio métrico es cuasisométrico consigo mismo por medio de la identidad. La composición de cuasisimetrías también sigue siendo una cuasisimetría. Con esta proposición vemos que ser cuasisométricos es una relación de equivalencia entre los espacios métricos.

Intuitivamente una cuasisimetría entre espacios métricos nos dice que estos resultan ser bastante similares al menos desde cierta distancia.

**Ejemplo 2.2.18.** Ejemplo de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  para ver que no es cuasisométrico con un árbol o bien podría rehacer el ejemplo de la parte anterior.

Todo grafo de Cayley lo podemos pensar como un espacio métrico tal como lo definimos en la sección 2.2. Veamos que esto no depende de los generadores que hayamos elegido.

**Proposición 2.2.19.** *Sea  $G$  grupo finitamente generado por  $\Sigma$  y  $\Delta$  conjuntos finitos entonces  $\text{Cay}(G, \Sigma)$  y  $\text{Cay}(G, \Delta)$  son cuasisométricos entre sí.*

*Demostración.* Resultado estándar. Ver [BH13]. □

Así otra manera de pensar que un grafo de un grupo virtualmente libre es casi un árbol es pedirle que sea cuasisométrico con un árbol. Veamos que esta categorización es equivalente a pedirle que el treewidth sea finito que era la otra caracterización que habíamos obtenido anteriormente.

**Proposición 2.2.20.** *El treewidth finito es un invariante por cuasisimetría para grafos con grado acotado uniformemente.*

## 2.2. GRAFOS DE CAYLEY.

*Demostración.* Si tenemos una cuasisimetría  $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  tal que  $\Gamma_2$  tiene treewidth finito  $k \in \mathbb{N}$ , nos gustaría ver que  $\Gamma_1$  también tiene esta propiedad. Consideremos  $l$  tal que  $d(f(v), f(w)) \leq l$  para vértices  $v, w \in V(\Gamma_1)$  que estén conectados por una arista. Esto lo podemos tomar porque al ser una cuasisimetría

$$d(f(v), f(w)) \leq Cd(v, w) + C \leq 2C$$

entonces basta con tomar  $l \geq C + 1$ .

Veamos de armarnos la descomposición en un árbol  $T$  para  $\Gamma_1$ . Tomaremos como árbol para descomposición al mismo  $T$  que usamos para  $\Gamma_2$ . Sean  $X_t$  los bolsones de esta descomposición. Recordemos que por 2.2.9 si tomamos  $N^l(X_t)$  los vecinos del bolsón  $X_t$  que están a distancia no mayor a  $l$  seguimos teniendo una descomposición. Consideraremos los bolsones  $Y_t = f^{-1}(N^l(X_t))$  de vértices en  $\Gamma_1$ .

Debemos ver que cumplen las tres propiedades.

1. La primera se cumple puesto que los bolsones  $X_t$  cubren  $V(\Gamma_2)$ . De esta manera  $\bigcup_{t \in T} N^l(X_t) = V(\Gamma_2)$  y por lo tanto tomando preimagen tenemos que

$$\bigcup_{t \in V(T)} f^{-1}(N^l(X_t)) = \bigcup_{t \in V(T)} Y_t = f^{-1}(V(\Gamma_2)) = V(\Gamma_1)$$

donde usamos que la preimagen de la unión es la unión de las preimágenes.

2. La segunda condición usamos que si hay una arista  $xy \in E(\Gamma_2)$  luego debe ser que  $d(f(x), f(y)) \leq l$  por como tomamos a  $l$ . De esta manera como  $f(x) \in X_t$  para algún  $t \in V(T)$ , notemos que  $f(y) \in N^l(X_t)$  también. Tomando preimagen tenemos que  $x, y \in f^{-1}(N^l(X_t))$  y esto es que justamente  $x, y \in Y_t$  para un mismo  $t \in V(T)$  tal como queríamos ver.
3. Para la tercera condición si  $x \in Y_t \cap Y_s$  queremos ver que  $x \in Y_r$  para todo  $r \in V(T)$  que aparezca en la geodésica de  $s$  a  $t$ . Como la preimagen de una intersección es lo mismo que la intersección de las preimágenes entonces

$$x \in f^{-1}(N^l(X_t)) \cap f^{-1}(N^l(X_s)) = f^{-1}(N^l(X_t) \cap N^l(X_s))$$

de esta manera debe existir  $v \in V(\Gamma_2)$  tal que  $v \in N^l(X_s) \cap N^l(X_t)$ . Ahora usamos que esta es una descomposición sobre  $\Gamma_2$  para notar que  $v \in N^l(X_r)$ . Tomando preimagen tenemos que  $x \in Y_r$  tal como queríamos ver.

Finalmente debemos ver que el tamaño de los bolsones está acotado uniformemente. Esto es que exista  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $|Y_t| \leq k$  para todo  $t \in V(T)$ . Como  $\Gamma_2$  tiene treewidth finito tenemos que  $|X_t| \leq M$  uniformemente para todo  $y \in V(T)$

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

para cierta  $M$ . Como el grado de los grafos está acotado uniformemente por alguna constante  $d$  tenemos que

$$|N^l(X_t)| \leq d^l |X_t| \leq d^l M.$$

Finalmente notemos que al ser  $f$  una cuasisimetría tenemos que  $|f^{-1}(v)| \leq k$  para todo  $v \in V(\Gamma_2)$ . Esto lo podemos ver porque si  $f(x) = v = f(y)$  entonces

$$\frac{1}{C}d(x, y) - C \leq d(f(x), f(y)) = 0 \implies d(x, y) \leq C^2 < \infty$$

y esta cota es uniforme para todo  $v \in \Gamma_2$ . Así vemos que,

$$|Y_t| = |f^{-1}(N^l(X_t))| \leq C^2 d^l M < \infty$$

y tomamos  $k$  suficientemente grande para que haga valer esto. Concluimos así que la descomposición que nos armamos para  $\Gamma_1$  tiene treewidth finito.  $\square$

A partir de este resultado podemos ver que la otra manera que teníamos de pensar a los grafos que se parecen a árboles resulta ser más débil. El siguiente resultado lo demostramos en el caso general de un grafo tal que los grados de sus vértices están acotados uniformemente. Como caso particular tenemos los grafos de Cayley de grupos finitamente generados.

**Proposición 2.2.21.** *Un grafo  $X$  de grado acotado uniformemente cuasisométrico con un árbol tiene treewidth finito.*

*Demostración.* Dado que el grafo  $X$  es cuasisométrico a un árbol  $T$ , por la observación 2.2.5 este tiene treewidth exactamente 1. Por la proposición anterior 2.2.20 como es un invariante por cuasisimetría vemos que  $X$  debe tener treewidth finito tal como queríamos ver.  $\square$

**Corolario 2.2.22.** *Todo grupo independiente de contexto es tal que su grafo de Cayley es cuasisométrico a un árbol.*

*Demostración.* Por 2.2.13 todo grupo independiente de contexto tiene treewidth finito y usando la proposición recién demostrada concluimos que su grafo de Cayley es cuasisométrico a un árbol.  $\square$

**Proposición 2.2.23.** *Sea  $G$  grupo finitamente generado entonces si  $H$  es un subgrupo de índice finito resulta que son cuasisométricos.*

*Demostración.* Resultado estándar pero no tan elemental de demostrar. Es un corolario de Milnor Schwarz. Ver [Löh17].  $\square$

### 2.3. TEORÍA DE BASS SERRE.

Esto nos dice que todo grupo es cuasisométrico con los subgrupos de índice finito. De esta manera obtenemos el siguiente resultado,

**Proposición 2.2.24.** *Todo grafo de Cayley de un grupo virtualmente libre es cuasisométrico a un árbol.*

*Demostración.* Si  $G$  es virtualmente libre entonces existe  $F \leq G$  grupo libre de índice finito. Por la prop anterior 2.2.23 tenemos que el grafo de Cayley de  $G$  es cuasisométrico con el de  $H$ . Por el resultado ?? sabemos que los grafos de grupos libres son árboles y así queda demostrada la proposición.  $\square$

### 2.3. Teoría de Bass Serre.

Introduciremos los resultados y definiciones más importantes de la teoría de Bass Serre. Las referencias clásicas que seguiremos son [Ser02] y []. En esta sección los grafos serán siempre conexos y dirigidos. La definición que tomaremos, dada originalmente por Gersten, será levemente diferente a la usada en la sección ?. Dado un grafo  $Y = (V(Y), E(Y))$  por cada arista  $y \in E(Y)$  tendremos una designación  $s(y) = P, t(y) = Q$  si la arista comienza en  $P$  y termina en  $Q$ . Dada  $y \in E(Y)$  denotaremos  $\bar{y}$  la arista con designación opuesta.

**Definición 2.3.1.** Un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre  $Y$  está definido por lo siguiente:

1. Para cada vértice  $P \in V(Y)$  tenemos un grupo  $G_P$ .
2. Para cada arista  $y \in E(Y)$  tenemos un grupo  $G_y$  tal que  $G_y \leq G_{s(y)}$ .
3. Para todo  $y \in E(Y)$  tenemos un isomorfismo de  $G_y$  a  $G_{\bar{y}}$  que denotaremos por  $a \mapsto a^{\bar{y}}$  tal que  $(a^{\bar{y}})^y = a$  para todo  $a \in G_y$ .

En general para la definición de grafo de grupos no es necesario pedir que  $G_y \leq G_{s(y)}$  sino que alcanza con tomar un monomorfismo. Para facilitar la construcción más en adelante supondremos que es un subgrupo.

Dado un grafo  $Y = (V(Y), E(Y))$  consideremos el grupo libre  $F_{E(Y)}$  generado por las aristas del grafo.

**Definición 2.3.2.** Dado un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre un grafo  $Y = (V(Y), E(Y))$  podemos armarnos el siguiente grupo

$$F(\mathcal{G}) = *_{P \in V(Y)} G_P * F_{E(Y)} / \langle\langle R \rangle\rangle$$

donde  $R = \{\bar{y} = y^{-1}, ya^y y^{-1} = a^{\bar{y}}\}$  para  $y \in E(Y), a \in G_y$ .

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

**Observación 2.3.3.** Las relaciones  $R$  por las que dividimos anteriormente se pueden condensar en

$$R = \{ya^y\bar{y} = a^{\bar{y}}\}.$$

**Definición 2.3.4.** Sea un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre  $Y$ . Consideremos  $T$  un árbol de expansión del grafo  $Y$ .<sup>1</sup> Nos armamos el siguiente **grupo fundamental del grafo de grupos**

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = F(\mathcal{G}) / \{y \mid y \in E(T)\}.$$

Esto es que para todas las aristas que aparecen en el árbol de expansión las identificamos con el 1. Esta definición se puede ver que en el caso particular de un grafo coincide con la definición que tenemos del grupo fundamental de un espacio topológico.

**Ejemplo 2.3.5.** Sea un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre un grafo  $Y$  tal que  $G_y = \{1\}$  para todo  $y \in E(Y)$ . Consideremos una orientación  $A$  para las aristas del grafo esto es que para cada par de vértices unido por una arista  $y$  tenemos que  $y \in A \iff \bar{y} \notin A$ . El grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  está generado por los elementos  $G_P, P \in V(Y)$  y los elementos  $g_y \in A \setminus (T \cap A)$ . Esto es que nos queda el siguiente grupo

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = *_{P \in V(Y)} G_P * F$$

donde  $F$  es el grupo libre con base  $A \setminus (T \cap A)$ . Esto es que nos queda  $\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \pi_1(Y) *_{P \in V(Y)} G_P$ .

**Ejemplo 2.3.6.** Si el grafo es un segmento en particular él mismo es el árbol de expansión puesto que es un árbol. De esta manera si  $Y$  es el siguiente segmento... **agregar gráfico** entonces

$$\pi_1(\mathcal{G}, Y) = G_P *_{G_y} G_Q.$$

Podemos dar otra definición de grupo fundamental pero está vez usando caminos así como lo hacemos para el grupo fundamental usual.

Dados dos vértices  $P, Q \in V(Y)$  denotaremos por  $\Pi(P, Q)$  el conjunto de caminos de  $P$  a  $Q$ . De esta manera nos queda definido

$$\Pi(P, Q) = \{y_1 \dots y_k \mid s(y_1) = P, t(y_k) = Q, t(y_i) = s(y_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$$

tal que estos son subconjuntos en  $F(\mathcal{G})$  si miramos a las aristas como elementos del grupo. En particular podemos tomar  $g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k \in F(\mathcal{G})$  tales que

$$g_i \in G_{s(y_i)}, \quad g_k \in G_Q,$$

---

<sup>1</sup>Como suponemos que  $Y$  es conexo existen (posiblemente varios) árboles de expansión.

### 2.3. TEORÍA DE BASS SERRE.

A estos subconjuntos los denotaremos  $\pi(\mathcal{G}, P, Q)$ . En particular para todo  $P \in V(Y)$  tenemos que  $\pi(\mathcal{G}, P, P)$  es un subgrupo de  $F(\mathcal{G})$  esto porque si hacemos el producto entre dos elementos de este subconjunto tenemos que

$$(g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k) \circ (g'_0 y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k) = g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k (g_k g'_0) y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k$$

donde  $g_k g'_0 \in G_P$  por lo tanto su producto está bien definido y en definitiva nos queda otro elemento de  $\pi(\mathcal{G}, P, P)$  tal como queríamos ver.

**Definición 2.3.7.** El grupo fundamental de  $\mathcal{G}$  respecto a un punto de base  $P$  se define como  $\pi_1(\mathcal{G}, P) = \pi(\mathcal{G}, P, P)$ .

Notemos que en particular para esta construcción obtuvimos un subgrupo del grupo  $F(\mathcal{G})$  mientras que en el caso de la definición anterior 2.3.4 obtuvimos un cociente. Podemos ver que ambas definiciones son equivalentes porque son isomorfos como grupos.

**Teorema 2.3.8.**  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  es isomorfo con  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ .

*Demostración.* Veamos que la composición de la inclusión  $\iota : \pi_1(\mathcal{G}, P) \rightarrow F(\mathcal{G})$  con la proyección  $\pi : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$  es un isomorfismo.

Dados  $P, Q \in V(Y)$  consideremos la geodésica  $\alpha$  que los une sobre  $T$ . Si leemos la sucesión de aristas que recorre esta geodésica tenemos una palabra en  $T(P, Q) \in F_{E(Y)}$  de manera que nos define un elemento en el grupo  $F(\mathcal{G})$ . Ahora definamos el siguiente morfismo (que depende del árbol de expansión que tomamos):

$$\begin{aligned} \tau : F(\mathcal{G}) &\rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P) \\ \tau(y) &= T[P, s(y)] y T[t(y), P] \text{ para } y \in E(Y) \\ \tau(g) &= T[P, Q] g T(Q, P) \text{ para } Q \in V(Y), g \in G_Q \end{aligned}$$

Lo definimos sobre los generadores del producto libre y por como lo tomamos siempre nos devuelve un elemento de  $\pi(\mathcal{G}, P)$ . Para ver que está bien definido debemos ver que cumple la relación  $\tau(\bar{y} a^y y) = \tau(a^{\bar{y}})$  para toda arista  $y \in E(Y)$ . Esto vale porque justamente

$$\begin{aligned} \tau(\bar{y} a^y y) &= T[P, s(\bar{y})] \bar{y} T[t(\bar{y}), P] T[P, s(y)] a^y T[t(y), P] T[P, s(\bar{y})] y T[t(y), P] \\ &= T[P, s(\bar{y})] \bar{y} a^y y T[t(y), P] \\ &= \tau(a^{\bar{y}}). \end{aligned}$$

Es un epimorfismo porque en particular todo elemento de  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  es un camino que termina y comienza en  $P$  intercalado con elementos de los estabilizadores de los

## CAPÍTULO 2. GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES.

vértices que aparecen en el camino. De esta manera como  $\tau(y) = 1$  para todo  $y \in E(T)$ , notemos que pasa al cociente y existe  $\bar{\tau} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P)$  epimorfismo.

Para terminar la demostración probemos que componiendo con  $\nu$  nos queda la identidad. Si hacemos  $\nu \circ \bar{\tau}$  notemos que

$$\nu \circ \bar{\tau}(a^y) = a^y, \quad \nu \circ \bar{\tau}(y) = y,$$

para  $y \in E(Y) \setminus E(T)$  porque justamente estamos dividiendo por estas aristas. Esto porque  $T[P, Q]$  es un camino de aristas en el árbol de expansión por lo tanto sobre  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  son la identidad.  $\square$

**Ejemplo 2.3.9.** Grupo fundamental usando Bass Serre sobre el mapping cylinder de los grupos.

### 2.3.1. Árbol de Bass Serre.

Vamos a construimos un revestimiento para un grafo de grupos arbitrario. Como el revestimiento universal de todo grafo es un árbol obtendremos un resultado similar en este caso.

Dado  $\mathcal{G}$  un grafo de grupos sobre un grafo  $Y$  conexo tomemos un árbol  $T$  de expansión de este grafo. Consideremos también  $A$  una orientación de las aristas del grafo  $Y$ .

Queremos construimos un grafo  $\tilde{X}$  tal que tenga las siguientes propiedades:

1. Una acción de  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  en  $\tilde{X}$ .
2. Un morfismo de grafos sobreyectivo  $p : \tilde{X} \rightarrow Y$ .
3. Unas secciones de los vértices de  $Y$  en los de  $\tilde{X}$  e idénticamente secciones en las aristas.

A nuestras secciones las vamos a denotar de manera que para todo vértice  $P \in Y$  tendremos un  $\tilde{P} \in V(\tilde{X})$ . Mirando la acción de  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  sobre  $\tilde{X}$  nos gustaría que el estabilizador respecto a  $\tilde{P}$  sea el mismo que el estabilizador de  $P$  en el grafo de grupos  $\mathcal{G}$ . Para esto podemos definir directamente para que  $\tilde{P} \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_P$ . Análogamente para todas las aristas de nuestro grafo queremos que el estabilizador sea isomorfo al subgrupo  $G_y^y$  dentro de  $G_{s(y)}$ .

Usando estas condiciones tenemos que

$$V(\tilde{X}) = \coprod_{P \in V(Y)} \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_P, \quad E(\tilde{X}) = \coprod_{y \in E(Y)} \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_y$$

para obtener un grafo nos queda redefinir para tener las aristas con la otra orientación

Por la construcción que hicimos nos queda que  $\tilde{X}/\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq Y$ .



### 2.3. TEORÍA DE BASS SERRE.

**Teorema 2.3.10 (Serre).** El grafo  $\tilde{X}$  anteriormente construido es un árbol.

*Demostración.* Demo no trivial, requiere palabras reducidas. Ver [Ser02].  $\square$

**Definición 2.3.11.** El grafo  $\tilde{X}$  es el **árbol de Bass Serre** del grafo de grupos  $\mathcal{G}$ .

**Ejemplo 2.3.12.** Hacer un ejemplo así como hice antes.

Dar conexión con la idea topológica de un revestimiento de un grafo..

#### 2.3.2. Acciones de grupos sobre árboles.

Dar definiciones de los morfismos que salen del árbol y los que van a parar al grupo libre del grafo de grupos.

**Teorema 2.3.13.** Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de grupos sobre un grafo finito  $Y$  con grupos grupo finitamente generado en los vértices. Entonces  $\pi_1(\mathcal{G})$  es grupo finitamente generado si y solo si todos los grupos de los vértices lo son.

*Demostración.*  $\square$

**Teorema 2.3.14.** Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de grupos sobre un grafo finito  $Y$  con grupos finitos en los vértices. Entonces  $\pi_1(\mathcal{G})$  es un grupo grupo finitamente generado virtualmente libre.

*Demostración.* Sea  $X$  un conjunto finito tal que  $G_P \mid |X|$  para todo  $P \in V(Y)$ , esto lo podemos tomar porque el grafo  $Y$  es finito.

Para cada  $P \in V(Y)$  podemos armarnos una acción libre de  $G_P$  en  $X$ . Esto nos da un monomorfismo  $G_P \rightarrow S(X)$  donde  $S(X)$  es el grupo simétrico de  $X$ . A su vez por cada grupo de una arista  $G_y$  obtenemos dos acciones libres sobre  $X$ . Por el lema ?? podemos elegirnos para cada  $y \in E(Y)$  alguna  $\varphi_y \in S(X)$  tal que haga conmutar a ...

Usando la definición del grupo  $F(\mathcal{G})$  tenemos un morfismo de grupos  $h : F(\mathcal{G}) \rightarrow S(X)$  tal que la restricción a  $G_P$  es inyectiva para todo  $P \in V(Y)$ . Si fijamos  $P \in V(Y)$  y consideramos  $F = \{g \in \pi_1(\mathcal{G}, P) \mid h(g) = 1\}$  entonces obtenemos que  $F \cap G_Q = \{1\}$  para todo  $Q \in V(Y)$ .

Esto nos dice que el grupo  $F$  actúa libremente sobre el árbol de Bass Serre de nuestro grafo de grupos  $\mathcal{G}$ .

Como actúa libremente sobre un árbol por el resultado ?? tenemos que este grupo debe ser libre. Así obtuvimos un subgrupo libre de  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  y queremos ver que tiene índice finito. Para eso notemos que al ser  $|X| < \infty$  entonces...

Finalmente notemos que por ?? el grupo es grupo finitamente generado tal como queríamos ver.  $\square$

### 2.3.3. Productos semi directos.

Ver que todo grupo finitamente generado virtualmente libre es una extensión de un libre por un finito de una manera especial. Con Bass Serre concluir que todo grupo es virtualmente libre si se cumple esto. Poner algún ejemplo interesante.

## 2.4. Ends de grupos.

**Definición 2.4.1.** Ends de grupos

*Observación 2.4.2.* No dependen de las presentaciones.

**Teorema 2.4.3 (Hopf).** *La cantidad de ends de un grupo finitamente generado solo puede ser...*

*Demostración.*

□

**Definición 2.4.4.** Grupo accesible.

### 2.4.1. Accesibilidad en terminos de teoría de grafos.

**Definición 2.4.5.** Def de VK95 usando grafos.

**Teorema 2.4.6.** *Probar que son equivalentes con la otra construcción.*

*Demostración.*

□

**Definición 2.4.7.** Grafos minor excluded

**Teorema 2.4.8 (Khukro).** *Recaracterización de virtualmente libre usando menores de grafos.*

*Demostración.*

□

**Teorema 2.4.9.** *Grupo  $q_1$  a un árbol  $\implies$  minor excluded?*

*Demostración.*

□

## Capítulo 3

### Enumeración de cosets.

### *CAPÍTULO 3. ENUMERACIÓN DE COSETS.*

## Bibliografía

- [ADL<sup>+</sup>17] Javier Aramayona, Volker Diekert, Christopher J Leininger, Pedro V Silva, and Armin Weiß. *Algorithmic and geometric topics around free groups and automorphisms*. Springer, 2017.
- [BH13] Martin R Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Bro] Tara Brough. Groups with poly-context-free word problem. 6(1).
- [HU79] John E. Hopcroft and Jeff D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
- [Löh17] Clara Löh. *Geometric group theory*. Springer, 2017.
- [MS85] David E Muller and Paul E Schupp. The theory of ends, pushdown automata, and second-order logic. *Theoretical Computer Science*, 37:51–75, 1985.
- [Ser02] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [Sip13] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Course Technology, Boston, MA, third edition, 2013.