

## §0.1. Teoría de Bass Serre.

La mayoría de las construcciones de esta sección siguen la exposición de [?].

### §0.1.1. Definiciones básicas.

Un *grafo dirigido* es un par de conjuntos  $Y = (V(Y), E(Y))$ . Al conjunto  $V(Y)$  lo llamaremos los vértices del grafo y al conjunto  $E(Y)$  las aristas del grafo. Para cada arista  $y \in E(Y)$  tendremos una designación  $s(y) = P \in V(Y), t(y) = Q \in V(Y)$ . Para cada  $y \in E(Y)$  tendremos  $\bar{y} \in E(Y)$  la arista con *asignación opuesta*, esto es que  $s(\bar{y}) = Q, t(\bar{y}) = P$ . Una *orientación* de las aristas es una función  $o : E(Y) \rightarrow \{0, 1\}$  tal que si  $o(y) = 1$  luego  $o(\bar{y}) = 0$ .

Para esta sección nos interesa que los grafos sean *conexos*. Esto es que dado dos vértices  $P, P' \in V(Y)$  existe una sucesión de aristas

$$(y_0, y_1, \dots, y_k) \text{ tal que } y_i \in E(Y) \text{ para } i = 0 \dots k$$

de modo que  $s(y_0) = P$  y  $t(y_k) = P'$ .

Un *ciclo* es un camino de aristas  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  de manera que  $s(y_0) = t(y_n)$ . Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. Dado un grafo cualquiera  $Y$  conexo podemos construirnos un árbol  $T$  tal que  $V(T) = V(Y)$  y  $E(T) \subseteq E(Y)$ . A este grafo lo llamaremos un *árbol de expansión* de  $Y$ .

En este contexto los morfismos que nos van a interesar van a respetar las propiedades de los grafos dirigidos.

**DEFINICIÓN 0.1.1.** Sean  $Y, Y'$  grafos dirigidos. Una función  $\phi : Y \rightarrow Y'$  es un *morfismo de grafos* si:

- $\phi(V(Y)) \subseteq (V(Y'))$ ;
- $\phi(E(Y)) \subseteq (E(Y'))$ ;
- Si  $y \in E(Y)$  entonces  $\overline{\phi(y)} = \phi(\bar{y})$ ;
- Si  $y \in E(Y)$  entonces  $\phi(s(y)) = s(\phi(y))$

Notemos que de esta definición no hace falta pedir que respete el vértice en el cual termina una arista porque justamente para toda arista  $y \in E(Y)$  vale que  $t(y) = s(\bar{y})$ .

Como tenemos morfismos de grafos podemos definir una acción de un grupo sobre un grafo dirigido.

**DEFINICIÓN 0.1.2.** Dado un grupo  $G$  diremos que  $G$  actúa sobre un grafo dirigido  $Y$  si se cumplen las siguientes condiciones,

- a. Para cada  $g \in G$  tenemos un morfismo de grafos  $g \cdot : Y \rightarrow Y$ ;
- b.  $1 \cdot x = x$  para todo  $x \in Y$ ;

c.  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$  para todo  $x \in Y$  y todos  $g, h \in G$ .

Las acciones que nos van a interesar las vamos a tomar para que *no tengan inversiones* esto es que  $g \cdot y \neq \bar{y}$  para toda arista  $y \in E(Y)$  y para todo  $g \in G$ .

Ahora podemos definir los objetos centrales a la teoría de Bass Serre.

**DEFINICIÓN 0.1.3.** Dado un grafo dirigido  $Y$ . Un *grafo de grupos*  $\mathcal{G}$  sobre  $Y$  está definido por lo siguiente:

1. Para cada vértice  $P \in V(Y)$  tenemos un grupo  $G_P$ .
2. Para cada arista  $y \in E(Y)$  tenemos un grupo  $G_y$  tal que  $G_y \leq G_{s(y)}$ .
3. Para todo  $y \in E(Y)$  tenemos un isomorfismo de  $G_y$  a  $G_{\bar{y}}$  que denotaremos por  $a \mapsto a^{\bar{y}}$  tal que  $(a^{\bar{y}})^y = a$  para todo  $a \in G_y$ .

En general para la definición de grafo de grupos no es necesario pedir para la condición 2 que haya una contención sino que alcanza con tomar un monomorfismo. Para facilitar las construcciones más en adelante supondremos que es un subgrupo pero los argumentos se pueden readaptar en el caso de no suponerlo.

Dado un grafo  $Y = (V(Y), E(Y))$  llamaremos  $F_{E(Y)}$  al grupo libre generado por las aristas del grafo.

**DEFINICIÓN 0.1.4.** Dado un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre un grafo  $Y = (V(Y), E(Y))$  podemos armarnos el siguiente grupo

$$F(\mathcal{G}) = *_{P \in V(Y)} G_P * F_{E(Y)} / \langle\langle R \rangle\rangle$$

donde  $R = \{\bar{y} = y^{-1}, ya^y y^{-1} = a^{\bar{y}}\}$  para  $y \in E(Y), a \in G_y$ .

**OBSERVACIÓN 0.1.5.** Las relaciones  $R$  por las que dividimos anteriormente se pueden condensar en

$$R = \{ya^y \bar{y} = a^{\bar{y}}\}.$$

**DEFINICIÓN 0.1.6.** Sea un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre  $Y$ . Consideremos  $T$  un árbol de expansión del grafo  $Y$ .<sup>1</sup> Nos armamos el siguiente **grupo fundamental del grafo de grupos**

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = F(\mathcal{G}) / \{y \mid y \in E(T)\}.$$

Esto es que para todas las aristas que aparecen en el árbol de expansión las identificamos con el 1. Esta definición se puede ver que en el caso particular de un grafo coincide con la definición que tenemos del grupo fundamental de un espacio topológico.

---

<sup>1</sup>Como suponemos que  $Y$  es conexo existen (posiblemente varios) árboles de expansión.

**EJEMPLO 0.1.7.** Sea un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre un grafo  $Y$  tal que  $G_y = \{1\}$  para todo  $y \in E(Y)$ . Consideremos una orientación  $A$  para las aristas del grafo esto es que para cada par de vértices unido por una arista  $y$  tenemos que  $y \in A \iff \bar{y} \notin A$ . El grupo fundamental  $\pi(\mathcal{G}, T)$  está generado por los elementos  $G_P, P \in V(Y)$  y los elementos  $g_y \in A \setminus (T \cap A)$ . Esto es que nos queda el siguiente grupo

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = *_{P \in V(Y)} G_P * F$$

donde  $F$  es el grupo libre con base  $A \setminus (T \cap A)$ . Esto es que nos queda  $\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \pi_1(Y) *_{P \in V(Y)} G_P$ .

**EJEMPLO 0.1.8.** Si el grafo es un segmento en particular él mismo es el árbol de expansión puesto que es un árbol. De esta manera si  $Y$  es el siguiente segmento de grupos,

$$G_P \bullet \xrightarrow{G_y} \bullet G_Q$$

entonces

$$\pi_1(\mathcal{G}, Y) = G_P *_{G_y} G_Q.$$

Podemos dar otra definición de grupo fundamental pero está vez usando caminos así como lo hacemos para el grupo fundamental usual.

Dados dos vértices  $P, Q \in V(Y)$  denotaremos por  $\Pi(P, Q)$  el conjunto de caminos de  $P$  a  $Q$ . De esta manera nos queda definido

$$\Pi(P, Q) = \{y_1 \dots y_k \mid s(y_1) = P, t(y_k) = Q, t(y_i) = s(y_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$$

tal que estos son subconjuntos en  $F(\mathcal{G})$  si miramos a las aristas como elementos del grupo. En particular podemos tomar  $g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k \in F(\mathcal{G})$  tales que

$$g_i \in G_{s(y_i)}, \quad g_k \in G_Q,$$

A estos subconjuntos los denotaremos  $\pi(\mathcal{G}, P, Q)$ . En particular para todo  $P \in V(Y)$  tenemos que  $\pi(\mathcal{G}, P, P)$  es un subgrupo de  $F(\mathcal{G})$  esto porque si hacemos el producto entre dos elementos de este subconjunto tenemos que

$$(g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k) \circ (g'_0 y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k) = g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k (g_k g'_0) y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k$$

donde  $g_k g'_0 \in G_P$  por lo tanto su producto está bien definido y en definitiva nos queda otro elemento de  $\pi(\mathcal{G}, P, P)$  tal como queríamos ver.

**DEFINICIÓN 0.1.9.** El grupo fundamental de  $\mathcal{G}$  respecto a un punto de base  $P$  se define como  $\pi_1(\mathcal{G}, P) = \pi(\mathcal{G}, P, P)$ .

Notemos que en particular para esta construcción obtuvimos un subgrupo del grupo  $F(\mathcal{G})$  mientras que en el caso de la definición anterior 0.1.6 obtuvimos un cociente. Podemos ver que ambas definiciones son equivalentes porque son isomorfos como grupos.

|| **TEOREMA 0.1.10.**  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  es isomorfo con  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ .

**Demostración.** Veamos que la composición de la inclusión  $\iota : \pi_1(\mathcal{G}, P) \rightarrow F(\mathcal{G})$  con la proyección  $\pi : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$  es un isomorfismo.

Dados  $P, Q \in V(Y)$  consideremos la geodésica  $\alpha$  que los une sobre  $T$ . Si leemos la sucesión de aristas que recorre esta geodésica tenemos una palabra en  $T(P, Q) \in F_{E(Y)}$  de manera que nos define un elemento en el grupo  $F(\mathcal{G})$ . Ahora definamos el siguiente morfismo (que depende del árbol de expansión que tomamos):

$$\begin{aligned}\tau : F(\mathcal{G}) &\rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P) \\ \tau(y) &= T[P, s(y)]yT[t(y), P] \text{ para } y \in E(Y) \\ \tau(g) &= T[P, Q]gT(Q, P) \text{ para } Q \in V(Y), g \in G_Q\end{aligned}$$

Lo definimos sobre los generadores del producto libre y por como lo tomamos siempre nos devuelve un elemento de  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ . Para ver que está bien definido debemos ver que cumple la relación  $\tau(\bar{y}a^y y) = \tau(a^{\bar{y}})$  para toda arista  $y \in E(Y)$ . Esto vale porque justamente

$$\begin{aligned}\tau(\bar{y}a^y y) &= T[P, s(\bar{y})]\bar{y}T[t(\bar{y}), P]T[P, s(y)]a^yT[t(y), P]T[P, s(\bar{y})]yT[t(y), P] \\ &= T[P, s(\bar{y})]\bar{y}a^y yT[t(y), P] \\ &= \tau(a^{\bar{y}}).\end{aligned}$$

Es un epimorfismo porque en particular todo elemento de  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  es un camino que termina y comienza en  $P$  intercalado con elementos de los estabilizadores de los vértices que aparecen en el camino. De esta manera como  $\tau(y) = 1$  para todo  $y \in E(T)$ , notemos que pasa al cociente y existe  $\bar{\tau} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P)$  epimorfismo.

Para terminar la demostración probemos que componiendo con  $\nu$  nos queda la identidad. Si hacemos  $\nu \circ \bar{\tau}$  notemos que

$$\nu \circ \bar{\tau}(a^y) = a^y, \quad \nu \circ \bar{\tau}(y) = y,$$

para  $y \in E(Y) \setminus E(T)$  porque justamente estamos dividiendo por estas aristas. Esto porque  $T[P, Q]$  es un camino de aristas en el árbol de expansión por lo tanto sobre  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  son la identidad. ■

### §0.1.2. Casos particulares.

En esta sección vamos entender como son los grupos fundamentales de algunos grafos de grupos cuando los grafos tienen algunas formas en particular. La idea, aparte de ejemplificar en unos casos en particular, es que más adelante nos va a servir para reducir proposiciones sobre grafos finitos arbitrarios a grafos de estas formas. Entonces probar resultados sobre otros grafos se va a reducir a la demostraciones que tengamos de estos otros casos bases más comprendidos.

### 0.1.2.1. Segmentos y grupos amalgamados.

Consideremos que nuestro grafo de grupos  $\mathcal{G}$  está dado sobre cierto segmento  $Y$  de la siguiente pinta.

Calculemos el grupo fundamental de este grafo de grupos. Como podemos tomar al árbol de expansión al mismo segmento entonces  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  resulta ser el grupo que tomamos libre sobre  $G_P$  y  $G_Q$  en el que identificamos al subgrupo  $G_y$  de  $G_P$  con el subgrupo isomorfo  $G_{\bar{y}}$  de  $G_Q$ . De esta manera el grupo que conseguimos es el grupo amalgamado  $G_P *_{G_y} G_Q$ .

A continuación veremos un resultado que nos servirá para tener una escritura única y particular de cada palabra sobre los generadores de un grupo amalgamado.

**PROPOSICIÓN 0.1.11.** *Toda palabra sobre el grupo amalgamado  $G_P *_{G_y} G_Q$  se puede escribir de la siguiente forma:*

**Demostración.** sorry ■

Esta forma para cada palabra la llamaremos la forma normal de  $w$ .

### 0.1.2.2. Bucles y grupos HNN.

Si el grafo resulta ser un loop

Agregar grafiquito de un loop.

entonces no tiene árbol de expansión de manera que esto nos dice que  $F(\mathcal{G}) \simeq \pi_1(\mathcal{G})$ . Notaremos por  $a$  a cada elemento de  $G_y$  mientras que notaremos por  $\bar{a}$  a cada elemento del grupo isomorfo  $G_{\bar{y}}$ . Sea  $g$  el generador de  $F_y$ , es decir el correspondiente a la única arista de este grafo. En este caso las relaciones que tenemos en nuestro grupo son las siguientes

$$g^{-1}ag = \bar{a} \quad \text{para todo } a \in G_y.$$

De esta manera tenemos que una presentación de nuestro grupo es la siguiente:

Ahora veamos un resultado análogo al que demostramos anteriormente para grupos amalgamados que nos dirá una manera de escribir las palabras en estos grupos.

**TEOREMA 0.1.12 (Britton).** *Toda palabra  $w$  de un grupo  $G$  de tipo HNN es tal que se puede escribir de la siguiente manera:*

...

donde ...

**Demostración.** . ■

### §0.1.3. Palabras reducidas.

En esta sección vamos a caracterizar los elementos del grupo  $F(\mathcal{G})$ .

Sea  $c = (y_1, \dots, y_n) \in \Pi(P, Q)$  algún camino entre dos aristas  $P, Q \in V(Y)$  y consideremos  $\mu = (r_0, \dots, r_n)$  una sucesión de elementos tomados de manera que  $r_i \in G_{s(y_i)}$  tal como hicimos para la definición de  $\pi(\mathcal{G}, P)$ . Llamaremos al par  $(c, \mu)$  visto como elemento en  $*_{P \in V(Y)} G_P * E(Y)$  a

$$(c, \mu) = r_0 y_0 r_1 y_1 \dots r_n y_n.$$

Nos interesa saber bajo qué condiciones estas palabras son reducidas en el grupo  $F(\mathcal{G})$ . Notaremos  $|c, \mu|$  la imagen de esta palabra en el grupo  $F(\mathcal{G})$ .

**DEFINICIÓN 0.1.13.** Una palabra  $(c, \mu)$  es **reducida** si satisface las siguientes dos propiedades:

**R1.** Si  $n = 0$  entonces  $r_0 \neq 1$ .

**R2.** Si  $n \geq 1$  entonces  $r_i \notin G_{y_i}$  para todo  $i$  tal que  $y_{i+1} = \bar{y}_i$ .

En particular si tomamos una palabra  $(c, \mu)$  tal que el camino  $c$  tiene backtracking por la propiedad **R2** tenemos que esta palabra no va a ser reducida.

Queremos ver que estas condiciones nos alcanzan para probar que estas palabras vistas en  $F(\mathcal{G})$  sean distintas de la identidad. Nuestro objetivo es el siguiente teorema:

|| **TEOREMA 0.1.14.** Toda palabra  $(c, \mu)$  reducida es tal que  $|c, \mu| \neq 1$ .

En particular de este teorema obtenemos los siguientes corolarios de bastante utilidad.

|| **COROLARIO 0.1.15.** Para todo  $P \in V(Y)$  vale que  $G_P \leq F(\mathcal{G})$ .

**Demostración.** Es el caso que  $c$  es el camino constante. ■

|| **COROLARIO 0.1.16.** Si  $(c, \mu)$  es reducida y su longitud es al menos 1 entonces  $|c, \mu| \notin G_{P_0}$  donde  $P_0$  es el origen del camino  $c$ .

**Demostración.** Vamos a suponer que esto no es cierto y contradecir el teorema 0.1.14. Sea  $c = (P_0 y_1 P_1 \dots P_0)$ . Si no fuera cierto tendríamos que  $|c, \mu| = x \in G_P$  y podríamos tomarnos otra palabra reducida  $(c, \mu')$  tal que  $\mu' = (x^{-1} r_0, \dots, r_n)$  de manera que  $|c, \mu'| = 1$ . Sigue siendo una palabra reducida porque justamente por suposición tenemos que la longitud de  $c$  es al menos 1. Esto es una contradicción porque ninguna palabra reducida puede ser la identidad. ■

|| **COROLARIO 0.1.17.** Sea  $T$  un árbol de expansión de  $Y$  luego si  $(c, \mu)$  es una palabra reducida tal que  $c$  es un camino cerrado entonces  $|c, \mu| \neq 1$  en  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ .

**Demostración.** Por el teorema 0.1.14 tenemos que  $|c, \mu| \neq 1$  en el grupo  $F(\mathcal{G})$  y como estos dos grupos son isomorfos por medio de la inclusión y la proyección al cociente, por el teorema 0.1.10, entonces esto termina de probar el resultado. ■

Para esto emplearemos una construcción previa que nos ayude a probarlo recursivamente a partir de grafos cada vez más chicos.

Consideremos un grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre un grafo  $Y$ . Tomemos  $Y'$  un subgrafo conexo de  $Y$  y restrinjamos el grafo de grupos  $\mathcal{G}$  a  $Y'$ . El grupo de este grafo de grupos lo denotaremos  $F(\mathcal{G}|Y')$ . Por inducción supongamos que vale el teorema 0.1.14 para este grafo  $Y'$ .



El subgrafo  $Y'$  conexo lo distinguimos con este color.

Sea  $W = Y/Y'$  el grafo que obtenemos de contraer  $Y'$  a un vértice que llamaremos  $[Y']$ . Como  $Y'$  es conexo también lo es  $W$ . Definamos un grafo de grupos sobre  $W$ .

1. Los vértices son  $V(W) = V(Y) \setminus V(Y') \cup \{[Y']\}$ .
2. Las aristas son  $E(W) = E(Y) \setminus E(Y')$ .

Si las aristas no empiezan ni terminaban en  $Y'$  dentro del grafo  $Y$  al contraer el subgrafo siguen idénticas. En el otro caso las definimos para que terminen (o empiecen) en  $[Y']$ . Sea  $y \in E(W)$  entonces,

$$s(y) = \begin{cases} s(y), & \text{si } s(y) \notin V(Y') \\ [Y'], & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y análogamente,

$$t(y) = \begin{cases} t(y), & \text{si } t(y) \notin V(Y') \\ [Y'], & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces definamos el grafo de grupos  $\mathcal{H}$  sobre el grafo conexo  $W$  de la siguiente manera,

- Si  $P \in V(Y) \setminus V(Y')$ , tomamos  $H_P = G_P$ ;
- Si  $P = [Y']$  entonces tomamos  $H_P = F(\mathcal{G}|Y')$ .
- Si  $y \in E(W)$  ponemos  $H_y = G_y$  tal que como suponemos válido el resultado 0.1.14 para  $Y'$  tenemos que es un subgrupo.

Construyamos un morfismo de grupos  $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$ . Para eso primero lo definimos sobre los generadores. Para todo  $g \in G_P$  con  $P \in V(Y)$  definimos,

$$\beta(g) = \begin{cases} [g] \in H_P & \text{si } P \notin Y' \\ [g] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } P \in Y' \end{cases}$$

y para toda arista  $y \in E(Y)$  definimos,

$$\beta(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \notin E(Y') \\ [y] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } y \in E(Y') \end{cases}$$

De manera que así como está definida cumple las relaciones porque  $F(\mathcal{H})$  también las cumple y así vemos que pasa al cociente y así obtenemos que  $\beta$  está bien definida.

|| **LEMA 0.1.18.** *El morfismo de grupos  $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$  es un isomorfismo.*

**Demostración.** Podemos construirnos un morfismo  $\alpha : F(\mathcal{H}) \rightarrow F(\mathcal{G})$  tal que sea su inversa. La construcción es análoga.

Para todo  $g \in H_P$  con  $P \in V(W) \setminus [Y']$  definimos,

$$\alpha(g) = [g] \in G_P$$

y para toda arista  $y \in E(W)$  tal que no empiece ni termine en  $[Y']$  definimos,

$$\alpha(y) = y$$

Finalmente sobre  $F(\mathcal{G}|Y')$  definimos de manera análoga mandando todo elemento  $g \in G_P$  para  $P \in V(Y')$  a sí mismo en  $F(\mathcal{G})$  e idénticamente para todas las aristas. Es claro que es un morfismo de grupos que a su vez es la inversa de  $\beta$  anteriormente definida. ■

La moraleja de este lema es que podemos tomar el grupo  $F(\mathcal{G}|Y')$  para un subgrafo  $Y'$  conexo y después tomar el grupo  $F(\mathcal{H})$  para el grafo resultante y es exactamente lo mismo que tomar  $F(\mathcal{G})$  en el comienzo.

Para cada palabra  $(c, \mu)$  del grafo de grupos  $F(\mathcal{G})$  le vamos a asociar una palabra  $(c', \mu')$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$ . La idea es reemplazar las partes de la palabra que involucren a  $Y'$  con las respectivas en  $F(\mathcal{G}|Y')$ . Dados  $1 \leq i \leq j \leq n$  llamemos  $c_{ij}$  al camino  $(P_i y_i \dots y_{j-1} P_j)$  y  $\mu_{ij}$  a los elementos  $(r_i, \dots, r_j)$ . Si  $c_{ij}$  está contenida en  $Y'$  denotaremos por  $r_{ij}$  al elemento correspondiente visto en  $F(\mathcal{G}|Y')$ . De esta manera lo que haremos es pensar en todos los subintervalos  $[i_a, j_a]$  tales que el camino  $c$  está dentro del subgrafo  $Y'$ . Así tenemos subdividido al intervalo  $[1, n]$  de la siguiente manera,

$$1 \leq i_1 \leq j_1 < i_2 \leq j_2 < \dots i_m \leq j_m \leq n.$$

Donde en particular si miramos la palabra  $c_{j_{a-1}i_a}$  notemos que es un camino por fuera de  $Y'$  exceptuando su comienzo y su final.

Definimos la palabra  $(c', \mu')$  sobre los generadores de  $F(\mathcal{H})$  como:



- $c' = (c_{j_1 i_2} \dots, c_{j_{a-1} i_a}, c_{j_a i_{a+1}} \dots, c_{j_{m-1} i_m})$
- $\mu' = (\mu_{1 i_1}, r_{i_1 j_2}, \dots, r_{i_m j_m}, \mu_{j_m n})$

donde tomamos la convención que  $\mu_{1 i_1}$  o bien  $\mu_{j_m n}$  pueden ser la identidad si  $i_1 = 1$  o bien si  $j_m = n$ .

Por como las construimos nos queda que  $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$  tal como queríamos ver. Veamos ahora que  $\beta$  preserva las palabras reducidas. Esto nos permitirá trabajar en grafos de grupos cada vez más chicos a medida que vayamos contrayendo subgrafos conexos.

|| **PROPOSICIÓN 0.1.19.** Si  $(c, \mu)$  es una palabra reducida para  $F(\mathcal{G})$  entonces  $(c', \mu')$  es reducida para  $F(\mathcal{H})$ .

**Demostración.** Si la longitud de  $c'$  es exactamente 0 entonces es un camino constante en algún vértice  $P' \in V(W)$ . En tal caso  $\mu = (r_0)$  donde  $r_0 \neq 1$ . Si  $P \in V(W) \setminus [Y']$  entonces como  $H_P = G_P$  obtenemos que  $r_0 \neq 1$  visto en  $H_P$ . En el otro caso usamos inducción pues nos queda que  $r_0 \in F(\mathcal{G}|Y')$  y por lo tanto es reducida usando el teorema 0.1.14.

Supongamos ahora que la longitud de  $c'$  es al menos 1. Sea  $c' = (P'_1 w_1 \dots w_{n-1} P'_n)$  queremos ver que si  $w_{k+1} = \overline{w_k}$  entonces  $r_i \notin H_{y_k}$ . Sea  $P' = t(w_k)$  entonces si  $P' \neq [Y']$  esto vale porque justamente  $(c, \mu)$  es reducida. Distinguimos dos casos si  $P' = [Y']$ :

- I) En el primer caso  $(w_k, r'_k, w_{k+1})$  es tal que  $w_k = y_i, w_{k+1} = \overline{y_i}$  para cierto  $y_i$  que aparece en  $c$ . Viéndolo en  $F(\mathcal{G})$  tenemos que  $r_k \notin G_{t(y_i)}$  porque la palabra  $(c, \mu)$  es reducida por suposición. Como  $G_{t(y_i)}$  es un subgrupo de  $H_{[Y']} = F(\mathcal{G}|Y')$  aplicando el corolario 0.1.15 entonces la imagen de  $r'_k$  no está en  $H_{[Y']}$ .
- II) En el otro caso tenemos que se corresponde a un camino dentro de  $Y'$ . Si  $(w_k, r'_k, w_{k+1})$  tiene la forma  $(y_{i_a}, r_{i_a j_a}, y_{j_a+1})$  donde  $r_{i_a j_a} = |c_{i_a j_a} \mu_{i_a j_a}| \in F(\mathcal{G}|Y')$ . Dado que la longitud del camino  $c_{i_a j_a}$  es al menos 1 aplicando el resultado 0.1.16 al grafo de grupos  $\mathcal{G}$  restringido al subgrafo  $Y'$  vemos que  $r_{i_a j_a} \notin G_Q$  si  $Q = t(y_{i_a})$ . Esto nos dice que en el grupo  $F(\mathcal{H})$  tenemos que  $r_{i_a j_a} \notin H_{t(w_k)} = F(\mathcal{G}|Y')$ .

■

Como último resultado previo veamos un lema que nos dice qué pasa cuando contraemos un subárbol de un árbol  $Y$ .

|| **LEMA 0.1.20.** Si  $Y$  es un árbol finito e  $Y'$  es un subárbol de  $Y$  entonces  $W = Y/Y'$  es un árbol.

**Demostración.** Debemos ver que  $W$  es un grafo conexo y sin ciclos.

Para ver que es *conexo* tomemos dos vértices  $w_1, w_2 \in V(W)$  y veamos de construir un camino entre ellos. Si ambos vértices se pueden unir por un camino  $c$  en  $Y$  tal que no interseca a  $W$  podemos tomar ese mismo camino. Sino tomemos  $c$  algún camino que los una y notamos que  $c'$  tal como lo construimos anteriormente es un camino que los une en  $W$ .

Para ver que *no tiene ciclos* supongamos que  $\sigma$  es un ciclo de este grafo. Así como en el caso anterior este ciclo necesariamente tiene que ser sobre el vértice contraído  $[Y']$  caso contrario conseguiríamos un ciclo en el grafo  $Y$  pero esto no es posible dado que es un árbol. Si miramos por medio del morfismo  $\alpha$  definido en la proposición ?? obtenemos un camino  $c$  en  $Y$  tal que debe empezar y terminar en  $Y'$ . Como por hipótesis  $Y'$  es conexo existe un camino  $c$  tal que conecta estos dos vértices. Esto es una contradicción porque habríamos conseguido un ciclo sobre el grafo  $Y$ . ■

Finalmente estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección.

**Demostración del teorema 0.1.14.** Vamos a demostrar este resultado viéndolo para distintos casos de grafos.

1. El caso que  $Y$  es un segmento.

$$P_{-1} \bullet \xrightarrow{y} \bullet P_1$$

El elemento  $|c, \mu|$  es de la pinta  $r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n$ . Donde  $e_i = -e_{i+1}$  para todo  $i = 1 \dots n$  y los elementos cumplen que  $r_0 \in G_{P_{-e_i}}$  y  $r_i \in G_{P_{e_i}} \setminus G_{y^{e_i}}$  dado que  $(c, \mu)$  es una palabra reducida. El caso particular que nuestro camino es constante tenemos que  $r_0 \neq 1$  porque vale **R1**. Para el otro caso, es decir el caso que el camino  $c$  no es constante consideremos el morfismo sobreyectivo al cociente

$$\phi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1}$$

donde  $G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1} \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T)$  donde  $T$  es el mismo segmento  $Y$  en este caso. Acá estamos usando que el grupo fundamental de un segmento es un grupo amalgamado. Dado que conocemos como son las palabras reducidas en los grupos amalgamados por ?? entonces vemos que  $(c, \mu)$  no es la identidad porque justamente

$$\phi(|c, \mu|) = r_0 \dots r_n \neq 1$$

por lo tanto como  $\phi(|c, \mu|) \neq 1$  esto implica que  $|c, \mu| \neq 1$  tal como queríamos ver.

2. El caso que  $Y$  es un árbol. Lo probamos usando inducción en la cantidad de vértices del grafo. Tomemos un segmento  $Y'$  dentro del árbol donde ya sabemos que el resultado vale por el caso anterior. Por el lema recientemente probado 0.1.20 vemos que el grafo  $W = Y/Y'$  resulta ser un árbol y más aún podemos aplicarle la hipótesis inductiva dado que tiene menos vértices que  $Y$ . De esta manera aplicando el paso inductivo obtenemos que vale este resultado para el grafo de grupos  $\mathcal{H}$  sobre  $W$  por lo que  $|c', \mu'| \neq 1$  y usando el lema 0.1.19 tenemos que  $|c, \mu| \neq 1$ .
3. El caso que  $Y$  es un bucle. Dado que en este caso el grupo  $F(\mathcal{G})$  resulta ser una extensión de tipo HNN por lo visto en la sección anterior podemos aplicar el lema de Britton ?? que justamente nos muestra que esta palabra es distinta de la identidad en el grupo  $F(\mathcal{G})$ .
4. El caso general. Lo probamos por inducción en la cantidad de vértices. Para eso tomamos  $Y'$  un segmento o bien un loop dentro de  $Y$  y luego aplicamos el resultado a  $Y/Y'$ . Por inducción en este caso vale el resultado y luego volviendo a usar el lema 0.1.19 terminamos de probarlo para un grafo  $Y$  conexo y finito arbitrario.

### §0.1.4. Árbol de Bass Serre.

Reescribir con la notación que uso en la siguiente sección.

Vamos a construirnos un revestimiento para un grafo de grupos arbitrario. Como el revestimiento universal de todo grafo es un árbol obtendremos un resultado similar en este caso.

Dado  $\mathcal{G}$  un grafo de grupos sobre un grafo  $Y$  conexo tomemos un árbol  $T$  de expansión de este grafo. Consideremos también  $A$  una orientación de las aristas del grafo  $Y$  de manera que  $e(y) = 0$  si  $y \in A$  mientras que  $e(y) = 1$  si  $y \notin A$ . Dada una arista  $y \in E(Y)$  denotaremos por  $|y|$  a la arista  $y$  o  $\bar{y}$  tal que está en la orientación  $A$ . Llamaremos  $g_y$  al elemento de  $F(\mathcal{G})$  correspondiente al generador  $y \in E(Y)$  porque vamos a necesitar diferenciar elementos del grupo con las aristas propiamente dichas del grafo.

Queremos construirnos un grafo  $\tilde{X}$  tal que tenga las siguientes propiedades:

1. Una acción de  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  en  $\tilde{X}$ .
2. Un morfismo de grafos sobreyectivo  $p : \tilde{X} \rightarrow Y$ .
3. Unas secciones de los vértices de  $Y$  en los de  $\tilde{X}$  e idénticamente secciones en las aristas.

A nuestras secciones las vamos a denotar de manera que para todo vértice  $P \in Y$  tendremos un  $\tilde{P} \in V(\tilde{X})$ . Mirando la acción de  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  sobre  $\tilde{X}$  nos gustaría que el estabilizador respecto a  $\tilde{P}$  sea el mismo que el estabilizador de  $P$  en el grafo de grupos  $\mathcal{G}$ . Para esto podemos definir directamente para que  $\tilde{P} \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_P$ . Análogamente para todas las aristas de nuestro grafo queremos que el estabilizador sea isomorfo al subgrupo  $G_y$  dentro de  $G_{t(y)}$ . Llamemos a los estabilizadores  $\pi_{\tilde{P}}$  y  $\pi_{\tilde{y}}$  respectivamente para diferenciarlos. A su vez diferenciaremos por  $\tilde{P}$  a la imagen de 1 dentro de los cosets e idénticamente lo haremos para  $\tilde{y}$ .

Usando estas condiciones tenemos que

$$V(\tilde{X}) = \coprod_{P \in V(Y)} \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_P, \quad E(\tilde{X}) = \coprod_{y \in E(Y)} \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_y$$

para obtener un grafo nos queda definir como son los trasladados de aristas por medio de  $g \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$ . Definimos así las siguientes operaciones sobre el grafo  $\tilde{X}$ ,

- (a)  $\overline{g\tilde{y}} = g\tilde{y}$ ;
- (b)  $s(g\tilde{y}) = gg_y^{-e(y)}s(\tilde{y})$
- (c)  $t(g\tilde{y}) = gg_y^{1-e(y)}t(\tilde{y})$

Debemos ver que así como están definidas resultan ser consistentes estas definiciones. En el ítem (a) estamos definiendo como son las aristas con orientación opuesta. Por ahora tenemos definidas las aristas correspondientes a  $\tilde{y}$  de manera disjunta a las que están definidas correspondientes a  $y$ . Para ver la validez de esta definición usamos que si  $h\tilde{y} = g\tilde{y}$  entonces

esto sucede si y solo si  $h\pi_{\tilde{y}} = g\pi_{\tilde{y}}$  pero justamente como  $\pi_{\tilde{y}} = \pi_y$  por como definimos a estos grupos por lo tanto resultaban provenir de la misma arista del grafo  $\tilde{X}$ .

Para probar que es válida la definición de **(b)** veamos que si tomamos dos representantes distintos de alguna coclase donde comienza la arista va a ser en el mismo vértice. En definitiva debemos ver para  $h \in G_y$  que valga la siguiente igualdad,

$$hg_y^{-e(y)}s(\tilde{y}) = g_y^{-e(y)}s(\tilde{y})$$

y esto recae en ver la siguiente igualdad que es básicamente la siguiente inclusión que es parecida a la relación que tenemos en este grupo,

$$g_y^{e(y)}\pi_{\tilde{y}}g_y^{-e(y)} \subset G_{s(\tilde{y})}.$$

Pensemos en los dos casos posibles dependiendo de si la arista está en la orientación elegida o no lo está,

- Si  $e(y) = 0$  entonces  $|y| = y$  y por como lo definimos tenemos que  $\pi_{\tilde{y}} = G_y$  es tal que al conjugarlo por  $g_y$  nos queda un elemento de  $G_{\tilde{y}}$  y tenemos que vale la inclusión  $G_{\tilde{y}} \subset G_{s(\tilde{y})}$  dado que  $t(\tilde{y}) = s(y)$  para todo  $y \in E(Y)$ .
- Si  $e(y) = 1$  entonces tenemos la siguiente situación

$$\pi_{\tilde{y}} \subseteq G_{s(\tilde{y})}$$

y para probar esto usamos la definición de estos grupos porque  $\pi_{\tilde{y}} = G_{\tilde{y}}$  dado que esta arista no está en la orientación. Usando nuevamente que  $s(y) = t(\tilde{y})$  obtenemos lo que queríamos probar.

Finalmente la definición **(c)** es válida usando lo anteriormente demostrado y reemplazando  $y$  por  $\tilde{y}$ .

Por la construcción que hicimos nos queda que  $\tilde{X}/\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq Y$ . Por otro lado para todo  $y \in E(T)$  tenemos que  $g_y = 1$  por lo que usando las definiciones de las aristas tenemos que  $s(\tilde{y}) = s(y)$  y similarmente  $t(\tilde{y}) = t(y)$ . Esto nos permite definirnós un *levantado*  $\tilde{T}$  del árbol  $T$  dado por mandar  $P \mapsto \tilde{P}$  para todo  $P \in V(Y)$  y para las aristas mandar  $y \mapsto \tilde{y}$ .

|| **TEOREMA 0.1.21 (Serre).** *El grafo  $\tilde{X}$  es un árbol.*

**Demostración.** Debemos ver dos cosas: que es conexo y que no tiene ciclos.

Empezamos probando que el grafo es conexo. Dada una arista  $\tilde{y}$  notemos que bien  $s(\tilde{y}) = s(y)$  o bien que  $t(\tilde{y}) = t(y)$ . Si tomamos el árbol  $\tilde{T}$  éste va a tener como vértices al comienzo o al final de esta arista  $\tilde{y}$ . De esta manera como  $\tilde{T}$  es conexo y si le agregamos las aristas  $\tilde{y}$  que son conexas e intersecan a  $\tilde{T}$  entonces obtenemos un grafo conexo  $W$ . Dado que toda arista  $\tilde{y}$  está en  $W$  y que  $\pi_1(\mathcal{G})$  actúa sobre este árbol tenemos que  $\pi_1(\mathcal{G}) \cdot W = \tilde{X}$ . El grupo  $\pi_1(\mathcal{G})$  está

finitamente generado por todos los elementos  $g \in G_P$  para todo  $P \in V(Y)$  y por los elementos  $g_y$  para toda arista  $y \in E(Y)$ . Llamemos a este conjunto de generadores  $S$ , luego lo que tenemos es que vale la siguiente igualdad de conjuntos,

$$\tilde{X} = \bigcup_{g \in \pi_1(\mathcal{G})} gW = \bigcup_{g=s_1 \dots s_n} \bigcup_{i=1 \dots n} s_1 \dots s_i W \cup W$$

donde estamos tomando la unión de todos los elementos de  $G$  como la unión de palabras indexadas por su longitud  $n$  y todos los trasladados de  $W$  por medio de subpalabras de  $g$ . Probaremos por inducción en la longitud de  $g = s_1 \dots s_n$ , visto sobre el conjunto de generadores  $S$ , que

$$s_1 \dots s_n W \cap s_1 \dots s_{n-1} W \neq \emptyset$$

por lo tanto la unión

$$W_g = W \cup s_1 W \cup \dots \cup s_1 \dots s_n W$$

sería conexa y de esta manera veríamos que  $\tilde{X}$  es conexo tomando la unión sobre todas las palabras del grupo dado que todos los  $W_g$  son conexos e intersecan a  $W$  un conexo. Para el caso base debemos ver dos casos.

1. Si  $g = g_y$  para alguna arista  $y \in E(Y)$ . En este caso dependiendo si  $y \in A$  o no obtenemos los siguientes dos casos,

$$\begin{aligned} s(g_y \tilde{y}) &= s(\tilde{y}) & \text{si } e(y) = 1 \\ t(g_y \tilde{y}) &= t(\tilde{y}) & \text{si } e(y) = 0 \end{aligned}$$

De esta manera  $g_y W \cap W = \emptyset$ .

2. Si  $g \in G_P$  para algún  $P \in V(Y)$  entonces  $g\tilde{P} = \tilde{P} \in V(W)$  por lo tanto  $gW \cap W \neq \emptyset$ .

Ahora para el paso inductivo sigamos con la suposición de que es válido para palabras de longitud no mayor a  $n - 1$ . Queremos verlo para  $s_1 \dots s_n$  y esto lo podemos hacer notando que

$$s_1(s_2 \dots s_n)W \cap s_2 \dots s_n W \neq \emptyset$$

donde usamos la hipótesis inductiva sobre  $s_2 \dots s_n W$  que es una palabra de longitud  $n - 1$  y que al trasladar por  $s_1$  lo que está en la intersección está en la intersección de los trasladados. Vimos así que el grafo  $\tilde{X}$  es conexo porque lo escribimos como unión de conexos que se intersecan de a pares dado que todos los  $W_g$  intersecan a  $W$  para todo  $g \in \pi_1(\mathcal{G})$ .

Veamos ahora que no tiene ciclos. Probaremos la siguiente proposición equivalente, para todo  $n \in \mathbb{N}$  no existe camino cerrado de longitud  $n$  sin backtracking. Sea  $\tilde{c}$  un camino sobre  $\tilde{X}$  con estas propiedades. Queremos llegar a un absurdo. Sean las aristas de este camino  $\tilde{c} = (s_1 \tilde{y}_1, s_2 \tilde{y}_2, \dots, s_n \tilde{y}_n)$ . Si miramos la proyección de los vértices tenemos una sucesión de vértices  $(P_0, \dots, P_n)$  donde  $P_n = P_0$  dado que el camino es cerrado. Introduzcamos la siguiente notación:

sea  $e_i = e(y_i)$  y sea  $g_i = g_{y_i}$ . Al ser  $\tilde{c}$  un camino cerrado valen las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} t(s_n \tilde{y}_n) &= s_n g_n^{e_n-1} \tilde{P}_0 = s_1 g_1^{-e_1} \tilde{P}_0 = s(s_1 \tilde{y}_1) \\ \vdots &= \quad \quad \quad \vdots \\ t(s_{n_1} \widetilde{y_{n-1}}) &= s_{n-1} g_n^{e_{n-1}-1} \tilde{P}_n = s_n g_n^{-e_n} = s(s_n \tilde{P}_n) \end{aligned}$$

de manera que considerando  $r_i \in G_{p_i} = \pi_{\tilde{p}_i}$  tal que  $r_i = s_i g_i^{e_{i-1}} s_{i+1}^{-1} g_{i+1}^{-e_{i+1}}$  y nombrando a  $q_i = s_i g_i^{-e_i}$  podemos reescribir las igualdades anteriormente obtenidas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} q_1 &= q_n g_n r_n \\ q_2 &= q_1 g_1 r_1 \\ \vdots & \\ q_n &= q_{n_1} g_{n-1} r_{n-1} \end{aligned}$$

Más aún usando cada ecuación para reescribirla en la anterior obtenemos que,

$$g_1 r_1 = q_1^{-1} q_2 = \cdots = q_n^{-1} q_1$$

de modo que multiplicando todo de forma telescópica nos termina quedando lo siguiente cuando se nos cancelan todos los  $q_i$ ,

$$g_1 r_1 \cdots g_n r_n = 1.$$

Para llegar a la contradicción veamos que esto que obtuvimos viene de una palabra reducida de manera que no podría ser la identidad. Sea la palabra  $(c, \mu)$  para  $F(\mathcal{G})$  dada por el camino  $c$  anteriormente definido y la sucesión  $\mu = (1, r_1, \dots, r_n)$ . Solo nos queda ver que efectivamente es una palabra reducida. Para eso debemos chequear que se cumpla la condición **R2** de ?? ya que suponemos que tiene longitud al menos 1.

Supongamos que existe  $i$  tal que  $y_{i+1} = \bar{y}_i$  por lo que  $g_{i+1} = g_i$  y  $e_{i+1} = 1 - e_i$ . Queremos ver que para ese mismo  $i$  vale que  $r_i \notin G_{y_i}$ . Para eso miramos la ecuación que teníamos

$$q_i s_i r_i = q_{i+1}$$

de manera que si desarmamos las definiciones y pasamos de lado obtenemos la siguiente igualdad

$$r_i = g_i^{e_i-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_i^{1-e_i}$$

esto es lo mismo que ver que

$$s_i^{-1} s_{i+1} \notin g_i^{1-e_i} G_{y_i} g_i^{e_i-1}.$$

El grupo de la derecha es justamente lo que definimos como  $\pi_{y_i}$ . Entonces debemos ver que  $s_i \pi_{y_i} \neq s_{i+1} \pi_{y_i}$  pero esto vale porque por como definimos las aristas opuestas del grafo  $\tilde{X}$  y por como tomamos a  $y_i$  tenemos que

$$\overline{s_{i+1} \tilde{y}_{i+1}} = s_{i+1} \tilde{y}_i$$

pero esto es una contradicción porque al camino original  $\tilde{c}$  lo habíamos tomado sin backtracking.

Para concluir notemos que la palabra  $(c, \mu)$  cumple las hipótesis del resultado 0.1.17 dado que es camino cerrado no trivial y es una palabra reducida por lo tanto  $|c, \mu| \neq 1$  visto en  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  y esto contradice lo anteriormente obtenido. ■

**DEFINICIÓN 0.1.22.** El grafo  $\tilde{X}$  es el **árbol de Bass Serre** del grafo de grupos  $\mathcal{G}$  sobre un grafo conexo  $Y$ .

### §0.1.5. Acciones de grupos sobre árboles.

Sea  $G$  grupo que actúa sin inversiones de aristas sobre un grafo conexo  $X = (V(X), E(X))$ . Consideremos  $Y = G/X$  el grafo que conseguimos al cocientar por esta acción. Este grafo está dado por los siguientes vértices,

$$V(Y) = \{GP : P \in V(X)\}$$

y las aristas

$$E(Y) = \{Gy : y \in E(X)\}.$$

En particular como el grafo  $X$  es conexo tenemos que  $Y$  también lo es. Consideremos los siguientes representantes de clase para vértices. Esto nos define un morfismo de grafos que es la proyección  $\pi : X \rightarrow Y$  tal que Consideremos  $\iota : Y \rightarrow X$  una sección como conjuntos que la armamos con los siguientes dos pasos.

1. Para cada vértice  $P \in V(Y)$  elegimos  $\iota(P) = P'$  tal que  $\pi(P') = P$ .
2. Para cada arista  $y \in E(Y)$  elegimos  $\iota(y) = y'$  de manera que  $s(\iota(y)) = \iota s(y)$ . Esto lo podemos hacer para cada arista por separado.

Por como hicimos esta construcción nos garantizamos que el comienzo de cada arista cuando la miramos en  $X$  sea uno de los vértices que tomamos como representantes de vértices de  $Y$  en  $X$ . En principio no sabemos que el vértice del final de la arista de  $y$  coincida con el de comienzo de  $y$ . Lo que sabemos es que existe  $g_y \in G$  tal que

$$g_y \overline{\iota(y)} = \iota(\overline{y})$$

porque ambas aristas en la misma órbita por la acción de  $G$ . Si fijamos una orientación de aristas para el grafo  $X$  luego podemos elegir para cada arista de la orientación algún  $g_y \in G$  tal que  $g_y \overline{\iota(y)} = \iota(\overline{y})$ . Para las aristas con la orientación opuesta tendremos algún  $g_{\overline{y}} \in G$  tal que

$$g_{\overline{y}} \overline{\iota(\overline{y})} = \iota(y).$$

Como la acción de  $G$  sobre  $X$  es por morfismos de grafos tenemos que  $\overline{g\overline{y}} = g\overline{y}$  y así queda claro que podemos elegir a  $g_{\overline{y}} = g_y^{-1}$ . El caso particular que  $\overline{\iota(y)} = \iota(\overline{y})$  definiremos que  $g_y = 1 = g_{\overline{y}}$ .

De esta manera nos podemos construir  $\mathcal{G}$  un grafo de grupos sobre el grafo  $Y$ . Consideremos para  $P \in V(Y)$ ,  $y \in E(Y)$  los siguientes grupos,

$$G_P = G_{\iota(P)}, \quad G_y = G_{\iota(y)}$$

donde estamos mirando los estabilizadores de la acción de  $G$  sobre  $X$ . La primera observación es que la elección de  $\iota$  no afecta los grupos que tomamos para los vértices y aristas porque de cambiar la elección de  $\iota$  nos quedarían grupos conjugados porque los vértices o aristas correspondientes están en la misma órbita de la acción de  $G$ . Por otro lado notemos que por esta definición tenemos que  $G_y \simeq G_{\bar{y}}$ . Consideremos el siguiente morfismo de grupos;

$$\begin{aligned} \phi : G_{\bar{y}} &\rightarrow G_y \\ a &\mapsto g_y^{-1} a g_y \end{aligned}$$

que está bien definido porque justamente  $g_y \iota(y) = \iota(\bar{y})$  dado que  $g_y \iota(\bar{y}) = \iota(\bar{y})$  por como lo elegimos a  $g_y$  y porque  $\overline{g\bar{w}} = g\bar{w}$  para toda  $w \in E(X)$ . Ahora usamos que si  $a \in G_{\iota\bar{y}}$  luego  $a \in G_{\iota(\bar{y})}$  por lo tanto  $a\iota(\bar{y}) = \iota(\bar{y})$ . Finalmente como  $g_y^{-1} \iota(\bar{y}) = \iota(y)$  tal como queríamos ver.

Definimos el siguiente morfismo del producto libre de los estabilizadores de los vértices y el grupo libre en las aristas del grafo en el grupo  $G$ .

$$\begin{aligned} \varphi : *_{P \in V(Y)} G_P * F_{E(Y)} &\rightarrow G \\ g &\mapsto g \\ y &\mapsto g_y \end{aligned}$$

Probemos que este morfismo baja a  $F(\mathcal{G})$ . Para eso veamos que cumple las relaciones que definen a este cociente.

1.  $g_y g_{\bar{y}} = 1$  para todo  $y \in E(Y)$  porque justamente elegimos a  $g_{\bar{y}}$  de esta manera;
2.  $\bar{y} a y = a^{\bar{y}}$  para todo  $y \in E(Y)$ ,  $a \in G_y$  porque justamente vimos que  $\varphi(\bar{y})\varphi(a)\varphi(y) = g_y^{-1} a g_y = a^{\bar{y}}$ .

De esta manera tenemos definido un morfismo de grupos  $\varphi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G$ . Nuestro objetivo ahora es ver que este morfismo baja al grupo fundamental del grafo de grupos sobre un árbol de expansión.

|| **LEMA 0.1.23.** Para todo  $g \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$  tenemos que  $\varphi(g) = g$ .

**Demostración.** Dado  $g \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$  luego lo podemos representar en el grupo  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  por medio de la palabra reducida  $g$ . Por como está definido  $\varphi$  sabemos que  $\varphi(g) = g$ . ■



**PROPOSICIÓN 0.1.24.** El morfismo de grupos restringido al subgrupo  $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, P) \rightarrow G$  es sobreyectivo.

**Demostración.** Dado  $g \in G$  queremos ver que  $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ . Sea  $P \in \iota(V(Y))$  un vértice. Consideremos  $gP \in V(X)$ , como el grafo es conexo tenemos un camino que une a  $P$  con  $gP$ . Sea este camino

$$e_0 P_0 \xrightarrow{e_0 \iota(y_1)} e_1 P_1 \xrightarrow{e_1 \iota(y_2)} \dots \xrightarrow{e_{k-1} \iota(y_k)} e_k P_k$$

de manera que  $P_i \in V(\iota(Y))$  y en particular  $P_0 = P, P_k = P$  siguiendo nuestra notación anterior y así  $s(\iota(y_i)) = P_{i-1}$  por como tomamos las levantadas de las aristas. Los elementos  $e_i \in G_{s(\iota(y_i))}$  son tales que  $e_i t(\iota(y_{i+1})) = P_{i+1}$  y donde en particular tenemos que  $e_k P = gP$ .

Una primera observación que podemos hacer es que  $ge_k^{-1} \in G_P$  dado que  $e_k P = gP$ . Por el resultado anterior 0.1.23 tenemos que  $\varphi(h) = h$  para todo  $h \in G_P$ . Esto nos dice que al ser  $\varphi$  un morfismo de grupos luego

$$(ge_k^{-1})e_k = g$$

entonces como  $ge_k^{-1} \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$  luego si vemos que  $e_k \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$  probaríamos que  $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$  tal como queríamos ver.

Para ver esto lo probaremos por inducción en el camino que tomamos anteriormente. Veamos que  $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$  para todo  $i = 0 \dots n$ .

El caso base consiste en ver que  $e_0 \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ . Esto es cierto porque justamente tenemos que  $e_0 \in G_P$  y por el lema anterior 0.1.23 tenemos que  $\varphi$  es la identidad cuando la restringimos a  $G_P$ .

Para el paso inductivo supongamos que  $e_{i-1} \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_{i-1}))$  y queremos ver que  $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$ . Antes de probar esto veamos de reescribir a  $e_i$  en términos de  $e_{i-1}$ . Observemos que por como tomamos el camino tenemos que

$$e_{i-1} t(\iota(y_i)) = e_i P_i$$

y de esta manera obtenemos que  $t(\iota(y_i)) = e_{i-1}^{-1} e_i P_i$  y como donde termina una arista es donde empieza la arista con orientación opuesta tenemos que  $s(\iota(\overline{y_i})) = e_{i-1}^{-1} e_i P_i$ . Por como definimos al elemento del grupo  $g_{y_i} \in G$  tenemos que  $g_{y_i} \iota(\overline{y_i}) = \iota(\overline{y_i})$  por lo tanto obtenemos que

$$s(g_{y_i} \iota(\overline{y_i})) = g_{y_i} P_i$$

de esta manera obtenemos que  $g_{y_i} P_i = e_{i-1}^{-1} e_i P_i$  y por lo tanto llegamos a la siguiente escritura para  $e_i$ ,

$$e_{i-1} g_{y_i} h_i = e_i$$

donde  $h_i \in G_{P_i}$ .

Ahora podemos usar nuestra hipótesis inductiva para obtener un camino

$$h_0 y_0 \dots y_{i-1} h_{i-1} \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$$

de manera que  $e_{i-1} = \varphi(h_0 y_0 \dots y_{i-1} h_{i-1})$ . Recordemos que  $\varphi(y_i) = g_{y_i}$  por la definición de nuestro morfismo  $\varphi$  y por otro lado tenemos que  $\varphi(h_i) = h_i$  porque  $\varphi$  fija a los grupos  $G_{P_i}$  por definición también. Con esto concluimos la siguiente igualdad,

$$e_i = \varphi(h_0 y_0 \dots y_{i-1} h_{i-1} y_i h_i)$$

y como  $h_0 y_0 \dots y_{i-1} h_{i-1} y_i h_i \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$  terminamos de probar que  $e_i \in \varphi(\Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$  tal como queríamos ver. En particular con esto probamos que  $e_k \in \varphi(\mathcal{G}, P)$  y esto implica que  $g \in \varphi(\mathcal{G}, P)$  tal como queríamos ver. De esta manera la restricción de  $\varphi$  al subgrupo  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  es sobreyectiva. ■

|| **COROLARIO 0.1.25.** *La restricción del morfismo  $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, P)$  se factoriza por el cociente  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ .*

#### 0.1.5.1. Morfismo de grafos $\psi$ .

Construyamos un morfismo de grafos del árbol de Bass Serre en el grafo  $X$  que vendría a ser el análogo al revestimiento.

Sea la asignación  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  dada por

$$\begin{aligned} \psi(gG_P P) &= \varphi(g)P \text{ para todo } g \in G, P \in V(Y) \\ \psi(gG_y y) &= \varphi(g)\iota(y) \text{ para todo } g \in G, P \in V(Y) \end{aligned}$$

Veamos que es una función. Sean dos representantes  $g, h$  del mismo coset de  $G_P$ . Queremos ver que  $\psi(gG_P P) = \psi(hG_P P)$ . Para esto notemos que por la definición de  $\psi$  esto equivale a ver que  $\varphi(g) = \varphi(h)$ . Dado que  $gh^{-1} \in G_P$  luego tenemos que  $\varphi(gh^{-1}) = gh^{-1}$  porque  $\varphi$  restringida a  $G_P$  es la identidad por el resultado 0.1.23.

|| **LEMA 0.1.26.** *La función  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  resulta ser un morfismo de grafos.*

**Demostración.** Esta claro por como está definido que cada vértice de  $\tilde{X}$  va a parar a uno de  $X$  y que cada arista va a parar a una de  $X$ .

Veamos ahora que dada una arista  $gG_y y$  tenemos que  $\psi(\overline{gG_y y}) = \overline{\psi(gG_y y)}$ .

Finalmente veamos que respeta los comienzos de aristas. ■

Dado un vértice  $x \in V(X)$  podemos definir su *star* como el siguiente conjunto de aristas,

$$st(x) = \{y \in E(Y) : s(y) = x\}$$

Como queremos que nuestro morfismo  $\psi$  represente un morfismo de revestimientos le vamos a pedir que localmente tenga buenas propiedades. En particular vamos a pedirle que mande un star de un vértice inyectivamente en dentro del star del otro vértice.

**DEFINICIÓN 0.1.27.** Un morfismo de grafos  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  se dice *localmente inyectivo* si para todo vértice  $P \in V(\Gamma)$  resulta que  $\psi : st(P) \rightarrow E(\Gamma')$  es inyectiva.

Probemos ahora que nuestro morfismo de grafos  $\psi$  cumple esta propiedad.

|| **PROPOSICIÓN 0.1.28.** El morfismo  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  es sobreyectivo y localmente inyectivo.

**Demostración.** Primero veamos que es sobreyectivo. Sabemos que  $G \cdot Y = X$  si miramos a  $Y$  como subgrafo de  $X$ . Consideremos un vértice  $\tilde{P} \in V(X)$  que por lo visto lo podemos escribir como  $\tilde{P} = gP$  para cierto  $g \in G$  y para cierto  $P \in V(Y)$ . Por el resultado anterior ?? sabemos que el morfismo de grupos  $\varphi$  resulta ser sobreyectivo. De esta manera tenemos que dado  $g \in G$  existe  $h \in G$  tal que  $\varphi(h) = g$ . Luego alcanza con tomar como vértice a  $hG_P P$  de manera que

$$\psi(hG_P P) = \varphi(h)P = gP = \tilde{P}$$

tal como queríamos ver.

Finalmente veamos que es localmente inyectivo. Sea  $Q \in V(X)$  vértice. Sean  $y, y' \in E(X)$  aristas tales que  $s(y) = Q = s(y')$ . Consideraremos dos casos dependiendo si las aristas están en la misma órbita por la acción de  $G$  o si no lo están.

1. Si  $Gy \neq Gy'$  entonces no están en la misma órbita. En este caso tenemos que  $\psi(y) = \varphi(g)\iota(y)$  mientras que  $\psi(y') = \varphi(g)\iota(y')$ . Como son elementos de órbitas distintas no pueden ser el mismo elemento y de esta manera concluimos que  $\psi(y) \neq \psi(y')$ .
2. El otro caso es que  $Gy = Gy'$ . En este caso lo que hacemos primero es fijar algún vértice  $P \in V(X)$  tal que nos permita escribir a estas aristas como palabras reducidas usando el resultado ?. De esta manera obtenemos la siguiente escritura

$$Q = (c_0 y_1 c_1 y_2 \dots y_k)$$

tal que las aristas van a tener la siguiente pinta

$$\begin{aligned} y &= (c_0 y_1 c_1 y_2 \dots y_k c y) \\ y' &= (c_0 y_1 c_1 y_2 \dots y_k d y) \end{aligned}$$

donde  $c, d$  son representantes de cosets diferentes de la arista  $y$  por medio de la acción de  $G$ . Para terminar la demostración observamos lo siguiente que  $\psi(y) = \psi(y')$  si y solo si  $c\iota(y) = d\iota(y)$  y esto sucede si y solo si  $c = d$ . Pero en este caso obtendríamos que  $y = y'$  por lo tanto el morfismo de grafos  $\psi$  resulta ser localmente inyectivo.

■

El siguiente resultado nos va a garantizar que el morfismo  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  sea un isomorfismo de grafos pidiéndole a  $X$  ser un árbol.

**PROPOSICIÓN 0.1.29.** *Todo morfismo de grafos  $\psi : \Gamma \rightarrow T$  localmente inyectivo tal que  $T$  sea un árbol e  $\Gamma$  sea conexo es un monomorfismo de grafos.*

**Demostración.** Como el grafo  $\Gamma$  es conexo debe existir un camino de vértices  $P = P_0 \dots P_k = Q$ . Consideremos que este camino está reducido. Probemos por inducción en la longitud del camino que para puntos  $P, Q \in V(X)$  a distancia menor que  $n$  no vale que  $\psi(P) = \psi(Q)$ .

El caso base es que la longitud del camino sea exactamente 1. En este caso tenemos que  $\psi(P) = \psi(Q)$  donde  $y \in E(Y)$  tal que  $s(y) = P, t(y) = Q$ . Al ser  $\psi$  un morfismo de grafos tenemos que

$$s(\psi(y)) = \psi(P) = \psi(Q) = t(\psi(y))$$

por lo tanto si  $\psi(y)$  fuera una arista sería un bucle. Los grafos los tomamos para que no tengan bucles.

El paso inductivo partimos de un camino de aristas  $(y_1, \dots, y_n)$  reducido. Consideremos la imagen del camino por medio del morfismo. Como estamos en un árbol no puede haber ciclos, de esta manera tiene que ser que  $\psi(y_k) = \overline{\psi(y_{k+1})}$  para ciertas aristas  $y_k, y_{k+1} \in E(\Gamma)$ . Como  $\psi$  es un morfismo de grafos cumple que  $\psi(y_k) = \psi(\overline{y_k})$  y así de esta manera obtenemos que  $\psi(y_k) = \psi(\overline{y_{k+1}})$ . Como el morfismo es localmente inyectivo y ambas aristas parten del mismo vértice tenemos que  $y_{k+1} = \overline{y_k}$ . Esto es una contradicción porque asumimos que el camino que tomamos es reducido. ■

El siguiente resultado nos da la estructura de un grupo que actúa sobre un grafo conexo sin inversiones de aristas. Es el resultado central de la teoría de Bass Serre.

**TEOREMA 0.1.30 ([?]).** *Sea  $G$  un grupo actuando en grafo conexo  $X$  sin inversiones de aristas y sea  $\mathcal{G}$  el grafo de grupos asociado sobre  $Y = X/G$ . Consideremos  $T$  un árbol de expansión de  $Y$ ,  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  y  $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$  luego las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) *el grafo  $X$  es un árbol;*
- (b) *el morfismo  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  es un isomorfismo de grafos;*
- (c) *el morfismo  $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$  es un isomorfismo de grupos.*

**Demostración.** La implicación **a**  $\Rightarrow$  **b** la hacemos usando la proposición 0.1.29 dado que  $\psi$  es localmente inyectivo. Para ver **b**  $\Rightarrow$  **a** usamos que  $\tilde{X}$  es un árbol por lo tanto  $X$  al ser isomorfo también es un árbol.

Probemos **b**  $\Rightarrow$  **c**. Para eso notemos que al ser  $\varphi$  sobreyectivo nos alcanza con ver que es inyectivo. Si  $g \in \pi_1(\mathcal{G}, T)$  y  $g \neq 1$  tal que  $\varphi(g) = 1$  entonces necesariamente  $g \notin G_P$  por el lema anterior 0.1.23 dado que la restricción a estos subgrupos es la identidad. Esto nos dice que  $gG_PP \neq G_PP$  dado que los cosets  $gG_P$  y  $G_P$  son distintos. Por como definimos a  $\psi$  tenemos que

$$\psi(gG_PP) = \varphi(g)P = \psi(G_PP)$$

pero esto contradice que  $\psi$  sea un isomorfismo.

Finalmente probemos  $\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b}$ . Para esto como  $\psi$  es sobreyectivo nos alcanza con ver que es inyectivo. Sean  $gG_P P, hG_Q Q \in V(\tilde{X})$  tales que  $\psi(gG_P P) = \psi(hG_Q Q)$ . Por la definición del morfismo  $\psi$  obtenemos que

$$\varphi(g)P = \varphi(h)Q$$

pero esto nos diría que  $P = Q$  dado que ambos son representantes de las órbitas de la acción de  $G$  sobre el árbol  $T$ . Por otro lado obtenemos que  $\varphi(gh^{-1})P = P$  y así  $\varphi(gh^{-1}) \in G_P$ . Como  $\varphi$  es un isomorfismo y en particular es inyectiva restringida al subgrupo  $G_P$  por el lema ?? deducimos que  $gh^{-1} \in G_P$ . Así ambos cosets son idénticos  $gG_P = hG_Q$  y por lo tanto vimos que los dos vértices son idénticos  $gG_P P = hG_Q Q$  y de esta manera probamos que  $\psi$  es inyectiva. ■

Como corolarios obtenemos una caracterización para los grupos libres que usaremos varias veces y que es una herramienta fundamental de la teoría geométrica de grupos.

|| **COROLARIO 0.1.31.** *Un grupo  $G$  es libre si y solo si  $G$  actúa libremente sobre un árbol sin inversiones de aristas.*

**Demostración.** Si  $G$  es libre entonces su grafo de Cayley lo podemos tomar como un árbol y usamos que actúa libremente sobre él sin invertir aristas.

Para la vuelta usamos 0.1.30 porque es isomorfo a  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  y este grupo es libre por ser el grupo fundamental de un grafo dado que los estabilizadores son triviales por hipótesis. ■

|| **COROLARIO 0.1.32.** *Dado  $G$  un grupo libre todo subgrupo  $H \leq G$  resulta ser libre.*

**Demostración.**  $H$  actúa sin inversiones y libremente sobre el mismo árbol que actúa  $G$ . ■

Otra consecuencia de este teorema de Serre es un resultado obtenido por Karass, Pietrowski y Solitar que nos da una cota de qué tan grande puede ser un subgrupo libre dentro de un grupo fundamental de un grafo finito de grupos finitos. Este resultado generaliza la fórmula de Schreier para subgrupos libres.

Primero probamos el siguiente lema sobre grupos libres que nos va a ayudar en la demostración de esta fórmula.

|| **LEMA 0.1.33.** *Todo grupo libre finitamente generado no tiene torsión.*

**Demostración.** El grafo de Cayley de un grupo libre se puede tomar para que sea un árbol. Si tuviera torsión tendría un ciclo contradiciendo que es un árbol. ■

|| **PROPOSICIÓN 0.1.34.** *[?] Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de grupos finito con grupos sobre los vértices finitos. Sea  $G = \pi_1(\mathcal{G}, T)$  y sea  $F$  un subgrupo libre de  $G$  de índice finito con rango  $r(F)$ . Luego la siguiente fórmula vale:*

$$\frac{r(F) - 1}{(G : F)} = \sum_{y \in E(Y)} \frac{1}{2 \cdot |G_y|} - \sum_{P \in V(Y)} \frac{1}{|G_P|}.$$

**Demostración.** Sea  $\tilde{X}$  el árbol de Bass Serre para este grafo de grupos  $\mathcal{G}$ . Notemos que  $F$  no interseca a ningún subgrupo de  $G$  que sea isomorfo a  $G_P$  para ningún  $P \in V(Y)$ . Esto porque el grupo  $F$  es libre y  $G_P$  es finito por lo tanto la intersección tendría torsión pero por el lema 0.1.33 ningún grupo libre tiene torsión. De esta manera  $F$  es isomorfo al grupo fundamental de  $\tilde{X}/F$  con todos los grupos de los vértices triviales justamente porque los estabilizadores lo son.

Dado que  $\tilde{X}$  es un árbol estamos en las hipótesis para usar 0.1.30 y de esta manera obtenemos que  $F \simeq \pi_1(\tilde{X}/F)$ . Usando esto calculemos el rango del grupo libre contando todas las aristas que no pertenezcan a un árbol de expansión  $T'$  del grafo  $\tilde{X}/F$ . Recordemos que al ser un árbol de expansión tenemos que  $\frac{1}{2}|E(T')| = |V(\tilde{X}/F)| - 1$ .

$$\begin{aligned} r(F) &= \frac{1}{2}(|E(\tilde{X}/F)| - |E(T')|) \\ &= \frac{1}{2}|E(\tilde{X}/F)| - |V(\tilde{X}/F)| + 1 \end{aligned}$$

donde multiplicamos por  $\frac{1}{2}$  porque todas las aristas las contamos una vez por cada una de las dos orientaciones que tienen.

Finalmente para obtener la fórmula que queremos probar tenemos que usar como está construido el árbol de Bass Serre  $\tilde{X}$ .

$$|V(\tilde{X}/F)| = \sum_{P \in V(X)} |(G/G_P)/F|$$

y acá usamos que la cantidad de cosets de  $(G/G_y)/F$  es la misma que hay en  $(F/G)/G_y$  por lo tanto

$$|V(\tilde{X}/F)| = \sum_{P \in V(X)} \frac{(G : F)}{|G_y|}$$

Obtenemos una expresión análoga para las aristas y así terminamos de probar la validez de la fórmula. ■

Finalmente podemos probar que grupo fundamental de un grafo de grupos finito con grupos finitos es virtualmente libre. Antes de probar esto necesitamos un lema sobre acciones en conjuntos finitos.

**LEMA 0.1.35.** Sea  $G$  un grupo que actúa libremente sobre un conjunto finito  $X$  de dos maneras distintas  $\alpha, \beta : G \rightarrow S(X)$ . Entonces debe existir  $\varphi \in S(X)$  tal que para todo  $g \in G$  valga que

$$\alpha(g) = \varphi^{-1} \circ \beta(g) \circ \varphi.$$

**Demostración.** Tomamos representantes para cada acción  $R, S \subseteq X$  tales que

$$\bigsqcup_{r \in R} \alpha(G)(r) = \bigsqcup_{s \in S} \beta(G)(s)$$

donde la unión es disjunta como órbitas de esta acción. Como ambas acciones son libres resulta que  $\alpha(G)(r)$  y  $\beta(G)(s)$  tienen cardinal exactamente  $|G|$  usando que  $X$  también es finito. De esta manera vemos que  $|R| = |X|/|G| = |S|$  por lo tanto existe una biyección  $\varphi$  entre ambos conjuntos que la extendemos a todo  $X$  de la siguiente manera,

$$\varphi(\alpha(g)r) = \beta(g)s$$

siempre y cuando  $\varphi(r) = s$ . Esta biyección cumple todo lo que queríamos. ■

**TEOREMA 0.1.36.** [?] Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de grupos sobre un grafo finito  $Y$  con grupos finitos en los vértices. Entonces  $\pi_1(\mathcal{G})$  es un grupo finitamente generado virtualmente libre.

**Demostración.** Dado que el grafo  $Y$  es finito y los grupos  $G_P$  para todo  $P \in V(Y)$  también son finitos podemos tomarnos  $X$  un conjunto finito tal que  $|G_P|$  divida a  $|X|$ .

Para cada  $P \in V(Y)$  podemos armarnos una acción libre de  $G_P$  en  $X$ . Esto nos da un monomorfismo  $G_P \rightarrow S(X)$ . A su vez por cada grupo  $G_y$  con  $y \in E(Y)$  obtenemos dos acciones libres sobre  $X$  dependiendo con qué inclusión lo estamos mirando. Por el lema 0.1.35 podemos elegirnos para cada  $y \in E(Y)$  alguna  $\varphi_y \in S(X)$  tal que haga conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & G_{s(y)} & \xrightarrow{\sigma} S(X) \\ & \nearrow & \downarrow \varphi_y \\ G_y & & \\ & \searrow & \\ & G_{t(y)} & \xrightarrow{\tau} S(X) \end{array}$$

Para la arista con orientación opuesta tomamos  $\varphi_{\bar{y}} = \varphi_y^{-1}$ . De esta manera tenemos un morfismo de grupos definido sobre el grupo libre  $*_{P \in V(Y)} G_P * E(Y)$ . Por como tomamos a  $\varphi_y$  y como hace conmutar al diagrama tenemos que  $\varphi_{\bar{y}} \circ \sigma \circ \varphi_y = \tau$ . Usando la definición del grupo  $F(\mathcal{G})$  tenemos un morfismo de grupos  $h : F(\mathcal{G}) \rightarrow S(X)$  tal que la restricción a  $G_P$  es inyectiva para todo  $P \in V(Y)$ . Si fijamos  $P \in V(Y)$  y consideramos el subgrupo normal de  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$

$$F = \{g \in \pi_1(\mathcal{G}, P) \mid h(g) = 1\}$$

entonces por como lo consideramos tenemos que  $F \cap G_Q = \{1\}$  para todo  $Q \in V(Y)$ . Esto nos dice que el grupo  $F$  actúa libremente sobre el árbol de Bass Serre de nuestro grafo de grupos  $\mathcal{G}$ . A su vez como  $F$  es un subgrupo de  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  tenemos que actúa sin inversiones. Estamos en condiciones de usar el teorema de Serre 0.1.30 y así obtenemos que este grupo debe ser libre.

Por lo visto obtuvimos que  $F$  es un subgrupo libre de  $\pi_1(\mathcal{G}, P)$  y queremos ver que tiene índice finito. Para eso notemos que al ser  $|X| < \infty$  entonces  $|S(X)| < \infty$  y como  $S(X) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, P)/F$ , por la propiedad universal del cociente, entonces  $(\pi_1(\mathcal{G}, P) : F) < \infty$  tal como queríamos ver.

Finalmente notemos que por 0.1.34 el grupo  $F$  es un grupo finitamente generado tal como queríamos ver. ■

### §0.1.6. Productos semi directos.

En esta sección vamos a refinar los resultados obtenidos anteriormente para ver que los grupos fundamentales de grafos finitos de grupos finitos y por lo tanto los grupos virtualmente libres se pueden meter dentro de un producto semidirecto  $FQ$  donde  $F$  es un grupo libre y  $Q$  es un cociente finito de  $G$ . La referencia de esta sección es el paper [?] que a su vez se basó en los métodos del paper de Dahmani-Guirardel.

|| **PROPOSICIÓN 0.1.37.**

**Demostración.** sorry ■

**EJEMPLO 0.1.38.** Ejemplo de  $SL_2(\mathbb{Z})$ .