Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo introduciremos notación y varios resultados estándares que utilizaremos a lo largo de la tesis.

En la primer sección 1.1 introduciremos los grupos virtualmente libres y probaremos algunos resultados estándares de teoría de grupos sobre grupos finitamente generados. La observación 1.1.14 será de gran utilidad en los siguientes capítulos para tener una buena presentación para el problema de la palabra para los grupos virtualmente libres.

En la segunda sección 1.2 introduciremos ágilmente resultados estándares de la teoría de lenguajes junto con algunos ejemplos para ilustrar todas estas definiciones. En particular nos interesará especialmente para este trabajo la definición de los lenguajes independiente de contexto que introduciremos en la subsección 1.2.3.

Finalmente en **??** introducimos la notación que usaremos para los grafos no dirigidos, introduciremos los grafos de Cayley y probaremos un resultado **??** sobre los grafos de Cayley de los grupos libres que nos servirá más en adelante para guiarnos en la caracterización de los grafos de Cayley de los grupos virtualmente libres.

§1.1. Grupos virtualmente libres.

Definición 1.1.1. Dado H subgrupo de G podemos definir la *acción por multiplicación a izquierda* sobre G como $\alpha : H \to S(G)$ definida por $\alpha(h)(g) = hg$. En este caso el cociente por esta acción lo vamos a denotar $H\backslash G$.

Análogamente podemos definir una *acción por multiplicación a derecha* $\beta : H \to S(G)$ definida como $\beta(h)(g) = gh$. Al cociente de esta acción lo vamos a denotar G/H.

A los elementos de G/H los llamaremos *cosets a izquierda* y los denotaremos gH mientras que a los de $H\backslash G$ los llamaremos *cosets a derecha* y los denotaremos Hg.

Definición 1.1.2. Dado G grupo y H subgrupo el *índice* de H en G es el número de cosets a izquierda de H en G y lo denotaremos $[G : H]$.

LEMA 1.1.3. *Si G es un grupo, H un subgrupo de G y K un subgrupo de H entonces*

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Por la definición de cosets que dimos tenemos que $[G : H] = |G/H|$. Equivalentemente tenemos que podemos definir al índice como $[G : H] = |H\backslash G|$, ver [].

DEFINICIÓN 1.1.4. Dado un conjunto A podemos definir a F_A el *grupo libre* generado por los elementos de A como un grupo que tiene una función inyectiva $\iota : A \to F_A$ que denominamos la inclusión de los generadores en el grupo libre y que está definido por la siguiente propiedad universal: dado H grupo y $f : A \to H$ función entonces existe un único morfismo de grupos $\overline{f} : F_A \to H$ tal que $\overline{f} \circ \iota(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Equivalentemente el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
F_A \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & H \\
A \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Una observación que se desprende de la definición de un grupo libre es que si tenemos dos conjuntos A, A' tales que $|A| = |A'|$ luego $F_A \simeq F_{A'}$. En particular si $|A| = k < \infty$ tenemos que $F_A \simeq F_{\{1,\ldots,k\}}$. Introduciremos la notación F_k para referirnos a un grupo libre generado por algún conjunto S tal que $|A| = k$.

DEFINICIÓN 1.1.5. Un grupo G es *finitamente generado* si existe un conjunto finito A junto con un epimorfismo de grupos $\pi : F_A \twoheadrightarrow G$. En este caso al conjunto A lo llamaremos los *generadores* de G.

DEFINICIÓN 1.1.6. Sea G un grupo y H un subgrupo entonces el *normalizador* de H en G es el siguiente subgrupo

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

Denotaremos por $S = \{g \in G : gHg^{-1}\}$ al conjunto de conjugados del subgrupo H.

LEMA 1.1.7. *Si G es un grupo finitamente generado y H es un subgrupo de índice finito entonces $N_G(H)$ tiene índice finito y más aún $[G : N_G(H)] = |S|$.*

Demostración. Para ver que tiene índice finito notemos que $H \leqslant N_G(H)$ por lo tanto tenemos que

$$[G : N_G(H)] \leqslant [G : H] < \infty.$$

Para probar la otra afirmación definimos la siguiente función hacia los cosets a izquierda del normalizador desde el conjunto S,

$$\begin{aligned} S &\to G/N_G(H) \\ sHs^{-1} &\mapsto sN_G(H) \end{aligned}$$

Veamos que es biyectiva viendo que es inyectiva ya que $G/N_G(H)$ es un conjunto finito.

Si $sN_G(H) = tN_G(H)$ entonces tenemos que esto sucede si y solo sí $t^{-1}s \in N_G(H)$. Esto nos dice que por la definición del normalizador,

$$t^{-1}sHs^{-1}t = H \iff sHs^{-1} = tHt^{-1}$$

y de esta manera obtenemos que la función está bien definida y es inyectiva y por lo tanto biyectiva. ■

Lema 1.1.8. *Sea G un grupo y sean K, H subgrupos de índice finito entonces $K \cap H$ es un subgrupo de índice finito.*

Demostración. Primero notemos que por el segundo teorema de isomorfismo para grupos tenemos que existe una biyección entre los siguientes conjuntos de cosets $KH/H \simeq K/K \cap H$ (en principio ningún subgrupo es normal así que no podemos hablar de grupos sino de conjuntos). Como $|KH/H| \leqslant |G/H| < \infty$ dado que H tiene índice finito obtenemos así que $|K/K \cap H| < \infty$.

Por 1.1.3 obtenemos lo siguiente

$$[G : K \cap H] = [G : K][K : K \cap H]$$

y como ambos índices de la derecha son finitos por lo visto obtenemos que $K \cap H$ es un subgrupo de índice finito también tal como queríamos ver. ■

A partir del resultado anterior con una inducción directa podemos probar el siguiente resultado.

Lema 1.1.9. *Sea G grupo y $K_1, \ldots, K_n$ subgrupos tales que K_i tiene índice finito para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$ es un subgrupo de índice finito.*

Lema 1.1.10. *Sea G un grupo finitamente generado y sea H subgrupo de índice finito entonces H es un grupo finitamente generado .*

Demostración. Sea $A = \{g_1, \ldots, g_n\}$ conjunto finito de generadores de G. Sea $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ conjunto transversal a derecha de H tal que $t_1 = 1$.

Dado g_j generador de G debe existir $h_{ij} \in H$ tal que $h_{ij}t_k = t_i g_j$ para cierto t_k. También debe existir $h_i \in H$ de manera que $h_i t_k = g_i$ para cierto t_k. Veamos que el conjunto finito

$$B = \{\, h_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\} \cup \{\, h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

genera a H.

Dado $h \in H$ veamos que se puede escribir como una palabra en B. Tenemos que

$$h = g_{i_1} \ldots g_{i_r}$$

donde usamos el conjunto finito de generadores de G.

Por lo visto anteriormente podemos escribir $g_{i_1} = h_{i_1} t_{k_1}$ para cierto y entonces nos queda la siguiente escritura de h,

$$h = h_{i_1} t_{k_1} g_{i_2} \dots g_{i_r}$$

entonces usando que $h_{k_1 i_2} t_{k_2} = t_{k_1} g_{i_2}$ llegamos a la siguiente escritura de h,

$$h = h_{i_1} h_{k_1 i_2} t_{k_2} \dots g_{i_r}.$$

Repitiendo inductivamente este procedimiento llegamos a que $h = h_{i_1} h_{k_1 i_2} \dots t_{k_r}$. Necesariamente $t_{k_r} = 1$ porque T es un conjunto de transversales de H y $h \in H$. Concluimos que B es un conjunto finito de generadores de H.

■

Definición 1.1.11. Un grupo finitamente generado G es *virtualmente libre* si tiene un subgrupo libre F tal que $(G : F) < \infty$.

Lema 1.1.12. *Sea G grupo, sea H subgrupo de G luego el subgrupo $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ es un subgrupo normal de G.*

Proposición 1.1.13. *Para todo grupo G virtualmente libre valen las siguientes propiedades.*

1. *Si F es un subgrupo libre de índice finito entonces podemos tomarnos otro subgrupo F' de manera que sea normal, libre y de índice finito.*

2. *Si H es un subgrupo de G de índice finito entonces H también resulta ser virtualmente libre.*

Demostración. Vamos a probar **1**. Si G es virtualmente libre y F es un subgrupo libre tenemos que la cantidad de conjugados de F es finita por el lema 1.1.7. Por el lema 1.1.12 tenemos que el siguiente subgrupo de G es normal

$$F' = \bigcap_{g \in G} gFg^{-1}$$

donde la cantidad de grupos que estamos intersecando es finita. Veamos que este subgrupo F' nos sirve.

Como F tiene índice finito y todos sus conjugados al ser isomorfos a F también tienen índice finito entonces F' tiene índice finito por el lema 1.1.9. Como G es finitamente generado por ser virtualmente libre entonces usando 1.1.10 obtenemos que F' es finitamente generado. Finalmente notemos que es libre por el resultado **??** que nos dice que todo subgrupo de un grupo libre es libre, en particular al ser F' subgrupo de F que es libre obtenemos que F' es libre tal como queríamos ver.

Probemos **2**. Por el lema 1.1.10 obtenemos directamente que H es un grupo finitamente generado. Si F es un libre de índice finito en G podemos tomar $H \cap F$ que es libre por ser subgrupo de un libre de acuerdo al resultado **??**. El índice resulta ser finito puesto que

$$[H : F \cap H] \leqslant [G : F] < \infty.$$

■

OBSERVACIÓN 1.1.14. Dado G virtualmente libre vamos a construirnos una presentación en particular.

Como es un grupo virtualmente libre tenemos F subgrupo libre que podemos tomarlo normal y G/F grupo finito de manera que podemos escribir a G como una extensión de estos dos grupos por medio de la siguiente forma

$$1 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/F \longrightarrow 1$$

Consideremos que F es libre generado por $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Por otro lado sea $G/F = \{b_i : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ todos los elementos de este conjunto finito. Elegimos un transversal a derecha $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ de manera que $\pi(t_i) = b_i$ y $t_1 = 1$.

Dado que es un transversal tenemos que se deben cumplir las siguientes dos relaciones para $y_j \in Y$ y $t_i, t_j, t_k \in T$.

1. $t_i y_j t_i^{-1} = u_{ij}$ donde $u_{ij} \in F$ usando que F es normal.

2. Si tenemos que $b_i b_j = b_k$ entonces $t_i t_j = z_{ij} t_k$ donde $z_{ij} \in F$ usando que $(Ht_i)(Ht_j) = Ht_k$.

Afirmamos que la siguiente es una presentación finita de G.

$$\langle W \mid R \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_m \mid t_i y_j t_i^{-1} = u_{ij}, t_i t_j = z_{ij} t_k \rangle.$$

Sea el grupo que genera este presentación H y sea F' el grupo libre sobre sus generadores.

Notemos que $W = Y \cup T$ genera a G porque justamente F es libre y generado por Y y T es un conjunto transversal finito porque F tiene índice finito en G. Esto nos dice que tenemos un epimorfismo de grupos de F' en el grupo G.

Toda relación de G' la cumple el grupo G por la elección que tomamos, de esta manera tenemos un epimorfismo de grupos $\overline{\varphi}$ tal que hace conmutar al siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & G \\ H \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

El grupo G es tal que a toda palabra w en sus generadores la podemos llevar a que sea de la pinta

$$w = yt$$

donde $y \in F$ reducida y $t \in T$ es alguno de los transversales. Para llegar a esto hacemos el mismo procedimiento que hicimos en la demostración del lema 1.1.10.

De esta manera una palabra es trivial si y solamente si $y = 1$ y $t = 1$. Esto nos dice que $\overline{\varphi}(w) = 1$ si y solamente si $w = 1$. Concluimos así que $\overline{\varphi}$ es un isomorfismo de grupos tal como queríamos ver y por lo tanto $\langle W \mid R \rangle$ resultó ser una presentación de G.

Veamos ahora unos ejemplos y contrajemplos de grupos virtualmente libres.

EJEMPLO 1.1.15. Veamos algunos ejemplos elementales de grupos que son de esta familia y algunos que no lo sean.

1. Cualquier extensión de un grupo libre por un grupo finito es un grupo virtualmente libre,

$$1 \to F \to G \to K \to 1$$

   donde K es un grupo finito y F es un grupo libre finitamente generado. En particular esta familia de ejemplos incluye los productos directos $G = F \times K$ y semidirectos $G = F \rtimes K$.

2. Uno de los ejemplos más elementales de un grupo que no es virtualmente libre es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La primera observación es que al ser abeliano si tiene un subgrupo libre necesariamente tiene que ser isomorfo a $\mathbb{Z}$ porque este es el único grupo libre abeliano.

   Nos alcanza con ver que no es virtualmente $\mathbb{Z}$. Vamos a probarlo por reducción al absurdo. Sea entonces F un subgrupo que es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Sea $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el generador de F. Probaremos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/F$ tiene orden infinito. Para eso consideraremos $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que p, q son primos distintos y ambos coprimos con m y con n. Veamos que $[(p, q)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/F$ tiene orden infinito. Si no lo fuera deberían existir $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ de manera que

$$\alpha(p, q) = \beta(n, m)$$

   como todos son coprimos entre sí esto nos dice que $p \mid \beta$ y similarmente que $q \mid \beta$, por lo que tenemos que $q \mid \alpha$ y $p \mid \alpha$. Esto nos dice que se pueden escribir de esta manera

$$\alpha = p^{r_1} q^{s_1} \gamma_1$$
$$\beta = p^{r_2} q^{s_2} \gamma_2$$

   con $r_i, s_i \geqslant 1$ para $i = 1, 2$.

   Finalmente como

$$\alpha p = \beta n$$

   tenemos que $r_1 + 1 = r_2$ pero por otro lado como

$$\alpha q = \beta m$$

   acá tenemos que al ser m coprimo con p luego la multiplicidad de p en la descomposición en primos de lo que está a la izquierda es $r_2 - 1$ mientras que lo que está a la derecha es r_2.

   Esto es una contradicción que vino de suponer que $[(p, q)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/F$ tenía orden finito por lo tanto tenemos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no puede ser virtualmente libre.

§1.2. Teoría de lenguajes.

Consideremos un conjunto no vacío Σ que llamaremos en el contexto de los lenguajes un *alfabeto*. Dado $k \in \mathbb{N}$ denotaremos Σ^k el conjunto de sucesiones finitas de elementos de Σ de k letras. Hacemos énfasis especial en el caso que $k = 0$ denotando $\Sigma^0 = \lambda$ a la *palabra vacía*. Dada una palabra $w = a_1 \dots a_k$ con $a_i \in \Sigma$ diremos que su longitud es k y lo denotaremos $|w| = k$. Similarmente denotaremos $|w|_i$ a la cantidad ocurrencias de a_i en w.

Definición 1.2.1. El *monoide libre* sobre un alfabeto Σ es el siguiente conjunto

$$\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

con la operación $\cdot$ que es la concatenación de palabras. Es decir dadas $w_1 \in \Sigma^k, w_2 \in \Sigma^l$ luego $w_1 \cdot w_2 \in \Sigma^{k+l} \subset \Sigma^*$. El elemento neutro es la palabra vacía que corresponde a la copia de Σ^0 que es la única palabra sin letras.

Observación 1.2.2. El monoide es libre con la siguiente propiedad universal: si tenemos una función del alfabeto $f : \Sigma \to M$ donde M es algún monoide entonces existe un único morfismo de monoides $\overline{f} : \Sigma^* \to M$ que hace conmutar al siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M \\ \Sigma^* \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Si w es una palabra sobre el alfabeto Σ luego una subpalabra u de w es una palabra $u \in \Sigma^*$ tal que $w = vuz$ para algunas $v, z \in \Sigma^*$. Si $w = vu$ entonces v es un prefijo de w y u es un subfijo de w.

Definición 1.2.3. Un *lenguaje* L sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^*.

§1.2.1. Gramáticas.

Definición 1.2.4. Una *gramática* es una tupla $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ donde:

- V es un conjunto finito denominado las *variables*;
- $S \in V$ es el *símbolo inicial*;
- Σ es un conjunto finito disjunto de V que denominamos *símbolos terminales*;
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ es un conjunto finito de *producciones*.

Dada una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ a cualquiera de sus producciones $(\gamma, \nu) \in P$, la vamos a denotar por medio de la siguiente notación $\gamma \to \nu$.

A partir de una gramática $\mathcal{G}$ podemos definirnos una relación sobre las cadenas $(\Sigma \cup V)^*$. Dados $x, y \in (\Sigma \cup V)^*$ diremos que x *deriva* en y si existen $u, v, w, z \in (\Sigma \cup V)^*$ tales que $x = uwv$ y tenemos una producción $w \to z \in P$ de manera que $y = uzv$. La notación que usaremos es $x \Rightarrow_{\mathcal{G}} y$. Consideremos la clausura transitiva y reflexiva de esta relación que denotaremos por $\overset{*}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}}$.

DEFINICIÓN 1.2.5. Dada una gramática $\mathcal{G}$ consideramos el *lenguaje generado por la gramática*

$$L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} w\}.$$

Este lenguaje está formado por las palabras en Σ^* que se pueden derivar del símbolo inicial.

EJEMPLO 1.2.6. Consideremos la siguiente gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ donde $V = \{S, A\}, \Sigma = \{a, b\}$ y tenemos las siguientes producciones,

$$\begin{aligned} S &\to Ab \\ A &\to aA \mid \lambda \end{aligned}$$

donde usamos | para separar distintas producciones que tienen el mismo lado izquierdo.

Veamos como podemos derivar la palabra a^2b usando las producciones de esta gramática. Esto es que $S \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} a^2b$. Tomamos la siguiente sucesión:

$$S \to Ab \to aAb \to aaAb \to aab$$

y nos queda tal como queríamos ver.

Más aún probemos que $L(\mathcal{G}) = \{a^k b : k \geqslant 0\}$.

Si $w \in L(\mathcal{G})$ entonces $S \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} w$ por definición. La única producción que la gramática tiene donde S está a la izquierda es $S \to Ab$. De esta manera cualquier palabra $w \in L(\mathcal{G})$ va a tener una b como postfijo de la palabra. La variable A vemos que solo puede derivar en $a^k A$ o a^k para $k \geqslant 0$. Esto se debe a que podemos aplicar la producción $A \to aA$ tantas veces como querramos por lo tanto $A \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} a^k$ para cualquier $k \geqslant 0$. Juntando con lo anterior vemos que $S \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} a^k b$ así que terminamos de ver que la gramática genera al lenguaje $\{a^k b : k \geqslant 0\}$ tal como queríamos ver.

Es posible clasificar los lenguajes a partir de las características de las gramáticas que los generan.

§1.2.2. Lenguajes regulares.

DEFINICIÓN 1.2.7. Decimos que una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ es *regular* si las producciones son del estilo

1. $A \to \lambda$

2. $A \to a$

3. $A \to aB$

donde $A, B \in V$, $a \in \Sigma$ y λ es la palabra vacía. Si $L = L(\mathcal{G})$ para alguna gramática regular $\mathcal{G}$ entonces diremos que L es un *lenguaje regular*.

En particular la gramática del ejemplo 1.2.6 es regular. De esta manera $L = \{a^k b : k \geqslant 0\}$ resulta ser un lenguaje regular.

DEFINICIÓN 1.2.8. Un *autómata finito no determinístico* es una tupla $\mathcal{M} = (Q, \{q_0\}, \Sigma, \delta, F)$ donde:

- Q es un conjunto finito que denominamos *estados*.
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*.
- Σ es un conjunto finito que denominamos *alfabeto*.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ es la *función de transición*.
- $F \subseteq Q$ es un subconjunto de estados que llamaremos *finales*.

Un par $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$ lo llamaremos una configuración del automáta. Consideremos que $w = aw'$ donde $a \in \Sigma$ y $w' \in \Sigma^*$ luego si tenemos que $p \in \delta(q, a)$ entonces denotaremos esto así $(q, w) \vdash (p, w')$. Esto nos define una relación sobre $Q \times \Sigma^*$ tal que si tomamos la clausura transitiva y simétrica obtenemos una relación de equivalencia sobre este conjunto.

DEFINICIÓN 1.2.9. El lenguaje generado por un autómata finito no determinístico M es

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^*, q_F \in F \mid (q_1, w) \vdash^* (q_F, \lambda)\}$$

OBSERVACIÓN 1.2.10. Al ser un autómata finito no determinístico existen posiblemente más de una manera de consumir alguna palabra en el autómata. Es así que por la definición que dimos la palabra es aceptada por el autómata si al menos alguna de estas derivaciones la lleva a ser aceptada. No importa si existen algunas que no lo hagan mientras una sí lo haga.

Vale que los lenguajes aceptados por automátas finitos no determinísticos son justamente los regulares.

TEOREMA 1.2.11. *Un lenguaje L es regular sii es aceptado por un autómata finito no determínistico.*

Demostración. Demostración estándar. Ver [?]. ■

§1.2.3. Lenguajes independientes de contexto.

DEFINICIÓN 1.2.12. Una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ es *independiente de contexto* si las producciones tienen la siguiente forma:

$$A \to w$$

donde $A \in V, w \in (\Sigma \cup V)^*$. Si $L = L(\mathcal{G})$ para alguna gramática independiente de contexto $\mathcal{G}$ entonces diremos que L es un *lenguaje independiente de contexto*.

OBSERVACIÓN 1.2.13. Todo lenguaje regular en particular resulta ser un lenguaje independiente de contexto .

EJEMPLO 1.2.14. Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Si $w = a_1 \dots a_k$ es una palabra sobre Σ^* entonces podemos considerar a w^r que es la palabra inversa dada por leerla de derecha a izquierda y tiene la siguiente pinta $w^r = a_k \dots a_1$. Consideremos sobre Σ el lenguaje

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^r\}$$

tal que este es el lenguaje de los palíndromos. Construyamos una gramática independiente de contexto para este lenguaje. Sea w una palabra en L luego sabemos que si su longitud es mayor que uno entonces debe ser que $w = aua$ o $w = bub$ para cierta palabra $u \in L$ dado que u necesariamente tiene que ser un palíndromo porque w lo es. Esto sucede para todas las palabras del lenguaje exceptuando las palabras de longitud uno que son justamente las letras del alfabeto. De esta manera podemos considerar la siguiente gramática $\mathcal{G} = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ donde las producciones P están dadas por:

$$S \to \lambda \mid aS \mid b \mid aSa \mid bSb.$$

Para ver que esta gramática genera al lenguaje L notemos que si tomamos una palabra en el lenguaje $w \in L$ luego si no es una letra al ser palíndromo sobre el alfabeto Σ necesariamente debe comenzar con a o con b y de esta manera tenemos que la primer derivación es $S \to aSa$ o $S \to bSb$. Dado que la subpalabra $w = aua$ que se obtiene de w sin considerar la primera y última letra es un palíndromo (e incluso podría ser la palabra vacía) luego podemos repetir este proceso para llegar a $S \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathcal{G}} w$ después de finitos pasos. Por otro lado toda palabra generada por esta gramática es un palíndromo porque todas las reglas son tales que agregan una letra al principio y la misma al final o simplemente agregan letras que también son palíndromos.

Toda gramática independiente de contexto la podemos tomar para que sea de una forma en particular.

DEFINICIÓN 1.2.15. Una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ independiente de contexto está en su *forma normal de Chomsky* si las producciones son de este tipo:

CH1. $A \to BC$ donde $A \in V$ y $B, C \in V \backslash \{S\}$.

CH2. $A \to a$ donde $A \in V, a \in \Sigma$.

CH3. $S \to \lambda$

PROPOSICIÓN 1.2.16. *Para toda gramática $\mathcal{G}$ independiente de contexto puede tomar otra $\mathcal{G}'$ tal que esté en forma normal de Chomsky y $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$,*

Demostración. Demostración estándar. Ver [**?**]. ■

§1.2.4. Autómatas de pila.

DEFINICIÓN 1.2.17. Un *autómata de pila finito no determinístico* es una tupla

$$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F, Z_0)$$

donde:

- Q es un conjunto finito denominado los *estados*;
- Σ es un conjunto finito que denominamos el *alfabeto del lenguaje*;
- Γ es un conjunto finito que denominamos el *alfabeto de la pila*;
- δ es la *función de transición* donde $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \times \Gamma \cup \{\lambda\} \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma)$;
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de *estados finales*;
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*;

OBSERVACIÓN 1.2.18. Bajo esta definición de un automáta de pila no determinístico notemos que no hay transición posible si en el tope de la pila está el símbolo inicial de la pila.

Una configuración de un autómata de pila no determinístico va a ser un triple $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times Z^*$. Sea $w = aw'$ con $a \in \Sigma$ y $w' \in \Sigma^*$ tal que $(p, \gamma') \in \delta(q, a, \gamma)$ luego denotaremos $(q, w, \gamma) \vdash_{\mathcal{M}} (p, w', \gamma')$ la transición de una configuración en otra en el automáta de pila no determinístico $\mathcal{M}$. Esta operación nos define una relación sobre $Q \times \Sigma^* \times Z^*$. Consideremos la relación de equivalencia generada por la clausura transitiva y simétrica de esta operación. Así como en el caso de los autómatas finitos la denotaremos $\vdash^*_{\mathcal{M}}$.

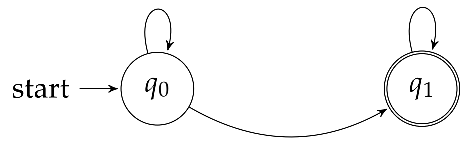
DEFINICIÓN 1.2.19. Dado $\mathcal{M}$ un autómata de pila no determinístico consideramos el lenguaje generado por estado final como

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \gamma),\ \ q \in F,\ \gamma \in \Gamma^*\}$$

EJEMPLO 1.2.20. Sea nuestro alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ y L el lenguaje de los palíndromos sobre este alfabeto tal como lo definimos en el ejemplo 1.2.14. Consideremos el siguiente autómata de pila

$$M = (Q, \{a, b\}, \{a, b, \$\}, \delta, q_0, \{q_1\}, \$)$$

donde nuestra pila tiene el mismo alfabeto que el de entrada con un símbolo adicional que va funcionar como nuestro símbolo inicial de la pila. El autómata tiene dos estados, el inicial y el final. Al automáta de pila lo representaremos de la siguiente manera:



La idea es que en el primer estado vamos apilando la palabra y en la segunda vamos desapilando la palabra anteriormente apilada. Nuestra función de transición δ va a ser la siguiente,

- $\delta(q_0, a, Z) = (q_0, aZ)$
- $\delta(q_0, b, Z) = (q_0, ba)$
- $\delta(q_1, a, a) = (q_0, \lambda)$.
- $\delta(q_1, b, b) = (q_0, \lambda)$.
- $\delta(q_0, \lambda, Z) = (q_1, Z)$
- $\delta(q_0, X, Z) = (q_1, Z)$

donde Z es decir cualquier elemento del alfabeto de la pila y X cualquier elemento de nuestro alfabeto de entrada. El autómata en el primer estado apila lo que sea que estemos leyendo sin importar lo que esté en el tope de pila. En el segundo estado desapila cada vez que lo que estemos leyendo coincida con el tope de pila. Finalmente para ir del estado inicial al final tenemos en cuenta dos casos. Nos podemos mover por λ es decir sin consumir ninguna letra de la palabra de la entrada o leyendo alguna de las letras de la palabra. Estos casos se corresponden a que el palíndromo tenga longitud par o tenga longitud impar.

Este ejemplo nos da un indicio que los lenguajes aceptados por autómatas de pila también podrían ser independiente de contexto y esto efectivamente es cierto.

TEOREMA 1.2.21. *Un lenguaje L es independiente de contexto sii es aceptado por un autómata de pila no determinístico.*

Demostración. Ver [?]. ■

Hasta ahora definimos los autómatas de pila no determinísticos que aceptan por estado final. Otra definición posible de lenguaje aceptado podría ser que acepten por pila vacía. Es decir que una vez que consumimos la palabra w de entrada llegamos a una configuración (q, λ, λ) donde λ es la palabra vacía de ambos alfabetos respectivamente. Formalmente dado un autómata de pila $\mathcal{M}$ notaremos al lenguaje aceptado por pila vacía de la siguiente manera,

$$N(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda),\ q \in Q, u \in \Sigma^*\}$$

donde arrancamos en el estado inicial y llegamos a algún estado q cualesquiera sin importar que sea final o no. La pila está vacía así como lo que nos queda por leer de la palabra. En este caso diremos que nuestro lenguaje es aceptado por un autómata de pila no determinístico por pila vacía.

El siguiente resultado nos dice que en el caso que nuestro autómata sea no determinístico es equivalente usar una u otra manera de definir a nuestro lenguaje.

TEOREMA 1.2.22. *Un lenguaje L es aceptado por un autómata de pila no determinístico por estado final si y solo sí es aceptado por un autómata de pila no determinístico por pila vacía.*

Demostración. Ver [**?**]. ■

§1.3. Grafos no dirigidos.

Agregar lo básico de grafos de Cayley y probar grafo de Cayley de libre es árbol