



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El problema de la palabra para grupos virtualmente libres.

Leopoldo Lerena.

Director: Iván Sadofski Costa ...

Fecha de Presentación

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Teoría de lenguajes. | 5 |
| 1.1. Gramáticas. | 6 |
| 1.2. Lenguajes regulares. | 7 |
| 1.3. Lenguajes independientes de contexto. | 8 |
| 1.3.1. Autómatas de pila. | 9 |
| 1.3.2. Propiedades de los lenguajes independientes de contexto. | 12 |
| 1.4. Autómatas de pila determinísticos. | 13 |
| 1.4.1. Autómatas de pila determinísticos especiales. | 14 |
| 1.5. Lenguajes poly independientes de contexto. | 15 |
| 1.6. Conos de lenguajes y el problema de la palabra. | 15 |
| 1.7. Teoría de Bass Serre. | 17 |
| 1.7.1. Definiciones básicas. | 17 |
| 1.7.2. Casos particulares. | 21 |
| 1.7.3. Palabras reducidas. | 22 |
| 1.7.4. Árbol de Bass Serre. | 27 |
| 1.7.5. Acciones de grupos sobre árboles. | 31 |
| 1.7.6. Productos semi directos. | 40 |
| 2. Grupos virtualmente libres. | 41 |
| 2.1. Grupos independientes de contexto. | 44 |
| 2.2. Grafos de Cayley. | 46 |
| 2.3. Cuasisimetrías. | 54 |

Capítulo 1

Teoría de lenguajes.

En esta sección vamos a introducir los elementos básicos de la teoría de lenguajes formales que utilizaremos en este trabajo.

Consideremos un conjunto no vacío Σ que llamaremos el **alfabeto** y Σ^k el conjunto de sucesiones finitas de elementos $a_1 \dots a_k$ con $a_i \in \Sigma$. Los elementos de Σ se llaman **letras** y los elementos de Σ^k serán **palabras** de longitud k sobre Σ . La **palabra vacía** que corresponde a Σ^0 la denotaremos por λ .

Si w es una palabra sobre el alfabeto Σ luego una subpalabra u de w es una palabra $u \in \Sigma^*$ tal que $w = vuz$ para algunas $v, z \in \Sigma^*$. Si $w = vu$ entonces v es un prefijo de w y u es un subfijo de w .

DEFINICIÓN 1.0.1. El **monoide libre** sobre un alfabeto Σ es el siguiente conjunto

$$\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

con la operación \cdot que es la concatenación de palabras. Es decir dadas $w_1 \in \Sigma^k, w_2 \in \Sigma^l$ luego $w_1 \cdot w_2 \in \Sigma^{k+l} \subset \Sigma^*$. El elemento neutro es la palabra vacía que corresponde a la copia de Σ^0 que es la única palabra sin letras.

OBSERVACIÓN 1.0.2. El monoide es libre con la siguiente propiedad: si tenemos una función del alfabeto $f : \Sigma \rightarrow M$ donde M es algún monoide entonces existe un único morfismo de monoides $\bar{f} : \Sigma^* \rightarrow M$ que hace conmutar al siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \Sigma^* & & \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.0.3. Un **lenguaje** sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^* .

§1.1. Gramáticas.

Vamos a considerar lenguajes definidos a partir de lo que se conoce como una gramática. Esto es esencialmente un conjunto de reglas que al irse aplicando nos permiten generar todas las palabras del lenguaje.

DEFINICIÓN 1.1.1. Una **gramática** es una tupla $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ donde:

- V es un conjunto finito de *variables*;
- $S \in V$ es el *símbolo inicial*;
- Σ es un conjunto finito de *símbolos terminales* que lo tomamos disjunto de V ;
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ es un conjunto finito de *producciones*.

Dada una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ a cualquiera de sus producciones $(\gamma, \nu) \in P$, la vamos a denotar $\gamma \rightarrow \nu$.

A partir de una gramática \mathcal{G} podemos definirnos una relación sobre las cadenas $(\Sigma \cup V)^*$. Dados $x, y \in (\Sigma \cup V)^*$ diremos que x *deriva* en y si existen $u, v, w, z \in (\Sigma \cup V)^*$ tales que $x = uwv$ y tenemos una producción $w \rightarrow z \in P$ de manera que $y = uzv$. La notación que usaremos es $x \Rightarrow_{\mathcal{G}} y$. Consideremos la clausura transitiva y reflexiva de esta relación que denotaremos por $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^*$.

DEFINICIÓN 1.1.2. El **lenguaje generado por la gramática** van a ser las palabras en Σ^* que se pueden derivar del símbolo inicial S . Formalmente esto es

$$L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w\}.$$

EJEMPLO 1.1.3. Consideremos la siguiente gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ donde $V = \{S, A\}, \Sigma = \{a, b\}$ y tenemos las siguientes producciones,

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab \\ A &\rightarrow aA \\ A &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

Veamos como podemos derivar la palabra a^2b usando las producciones de esta gramática. Esto es que $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* a^2b$. Tomamos la siguiente sucesión:

$$S \rightarrow Ab \rightarrow aAb \rightarrow aaAb \rightarrow aab$$

y nos queda tal como queríamos ver.

Más aún probemos que $L(\mathcal{G}) = \{a^k b : k \geq 0\}$.

Si $w \in L(\mathcal{G})$ entonces $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w$ por definición. La única producción que la gramática tiene donde S está a la izquierda es $S \rightarrow Ab$. De esta manera cualquier palabra $w \in L(\mathcal{G})$ va a tener

una b como postfijo de la palabra. La variable A vemos que solo puede derivar en $a^k A$ o a^k para $k \geq 0$. Esto se debe a que podemos aplicar la producción $A \rightarrow aA$ tantas veces como querramos por lo tanto $A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* a^k$ para cualquier $k \geq 0$. Juntando con lo anterior vemos que $S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* a^k b$ así que terminamos de ver que la gramática genera al lenguaje $\{a^k b : k \geq 0\}$ tal como queríamos ver.

Es posible clasificar los lenguajes a partir de las características de las gramáticas que los generan.

§1.2. Lenguajes regulares.

DEFINICIÓN 1.2.1. Decimos que una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ es **regular** si las producciones son del estilo

1. $A \rightarrow \lambda$
2. $A \rightarrow a$
3. $A \rightarrow aB$

donde $A, B \in V$, $a \in \Sigma$ y λ es la palabra vacía. Si $L = L(\mathcal{G})$ para alguna gramática regular \mathcal{G} entonces diremos que L es un **lenguaje regular**.

En particular la gramática del ejemplo 1.1.3 es regular. De esta manera $L = \{a^k b : k \geq 0\}$ resulta ser un lenguaje regular.

DEFINICIÓN 1.2.2. Un **autómata finito no determinístico** es una tupla $\mathcal{M} = (Q, \{q_0\}, \Sigma, \delta, F)$ donde:

- Q es el conjunto de los *estados*.
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*.
- Σ es el *alfabeto*.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ es la *función de transición*.
- $F \subseteq Q$ es un subconjunto de estados que llamaremos *finales*.

A los autómatas finitos los interpretamos como grafos con algunas reglas para movernos sobre ellos. Para empezar Q representan los vértices de nuestro grafo.

EJEMPLO 1.2.3. Construyamos un autómata \mathcal{M} tal que acepte al lenguaje $L = \{a^k b : k \geq 0\}$.

Como vimos en este ejemplo el lenguaje $L = \{a^k b : k \geq 0\}$ es aceptado por un autómata no determinístico finito y por lo que sabíamos del ejemplo 1.1.3 es un lenguaje regular. Más aún vale que los lenguajes aceptados por autómatas finitos no determinísticos son justamente los regulares.

|| **TEOREMA 1.2.4.** *Un lenguaje L es regular sii es aceptado por un autómata finito no determinístico.*

Demostración. Demostración estándar. Ver [HU79]. ■

§1.3. Lenguajes independientes de contexto.

DEFINICIÓN 1.3.1. Decimos que una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ es **independiente de contexto** si las producciones tienen la siguiente forma:

$$A \rightarrow w$$

donde $A \in V, w \in (\Sigma \cup V)^*$. Si $L = L(\mathcal{G})$ para alguna gramática independiente de contexto \mathcal{G} entonces diremos que L es un **lenguaje independiente de contexto**.

EJEMPLO 1.3.2. Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Si $w = a_1 \dots a_k$ es una palabra sobre Σ^* entonces podemos considerar a w^r que es la palabra inversa dada por leerla de derecha a izquierda y tiene la siguiente pinta $w^r = a_k \dots a_1$. Consideremos sobre Σ el lenguaje

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^r\}$$

tal que este es el lenguaje de los palíndromos. Construyamos una gramática independiente de contexto para este lenguaje. Sea w una palabra en L luego sabemos que si su longitud es mayor que uno entonces debe ser que $w = aua$ o $w = bub$ para cierta palabra $u \in L$ dado que u necesariamente tiene que ser un palíndromo porque w lo es. Esto sucede para todas las palabras del lenguaje exceptuando las palabras de longitud uno que son justamente las letras del alfabeto. De esta manera podemos considerar la siguiente gramática $\mathcal{G} = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ donde las producciones P están dadas por :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \epsilon \\ S &\rightarrow a \\ S &\rightarrow b \\ S &\rightarrow aSa \\ S &\rightarrow bSb. \end{aligned}$$

Para ver que esta gramática genera al lenguaje L notemos que si tomamos una palabra en el lenguaje $w \in L$ luego si no es una letra al ser palíndromo sobre el alfabeto Σ necesariamente debe comenzar con a o con b y de esta manera tenemos que la primer derivación es $S \rightarrow aSa$ o $S \rightarrow bSb$. Dado que la subpalabra $w = aua$ que se obtiene de w sin considerar la primera y última letra es un palíndromo (e incluso podría ser la palabra vacía) luego podemos repetir este proceso para llegar a $S \xRightarrow{*}_{\mathcal{G}} w$ después de finitos pasos. Por otro lado toda palabra generada por esta gramática es un palíndromo porque todas las reglas son tales que agregan una letra al principio y la misma al final o simplemente agregan letras que también son palíndromos.

Toda gramática independiente de contexto la podemos tomar para que sea de una forma en particular.

DEFINICIÓN 1.3.3. Una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ independiente de contexto está en su **forma normal de Chomsky** si las producciones son de este tipo:

CH1. $A \rightarrow BC$ donde $A \in V$ y $B, C \in V \setminus \{S\}$.

CH2. $A \rightarrow a$ donde $A \in V, a \in \Sigma$.

CH3. $S \rightarrow \lambda$

|| **PROPOSICIÓN 1.3.4.** Para toda gramática \mathcal{G} independiente de contexto puede tomar otra \mathcal{G}' tal que esté en forma normal de Chomsky y $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$,

Demostración. Demostración estándar. Ver [HU79]. ■

§1.3.1. Autómatas de pila.

Así como las gramáticas nos permiten generar un lenguaje tenemos las máquinas que nos permiten aceptar un lenguaje. En nuestro caso en particular vamos a usar autómatas de pila no determinísticos para aceptar los lenguajes independientes de contexto.

DEFINICIÓN 1.3.5. Un **autómata de pila finito no determinístico** es una tupla

$$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, Z, \delta, q_0, F, Z_0)$$

donde:

- Q es un conjunto finito de *estados*;
- Σ es un conjunto finito que denotaremos el *alfabeto del lenguaje*;
- Γ es un conjunto finito que denotaremos el *alfabeto de la pila*;
- δ es la *función de transición* donde $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$;
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de *estados finales*;
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*;
- $Z_0 \in Z$ es el *símbolo inicial* en la pila.

Funcionamiento del autómata. El autómata de pila finito funciona de la siguiente manera. Dada una palabra $w \in \Sigma$ queremos saber si es aceptada por el autómata de pila o no. Para eso vamos a ir leyendo esta palabra de izquierda a derecha. Al comenzar a leer esta palabra estamos en el estado q_0 que distinguimos como el estado inicial de nuestro autómata. Nos fijamos en la función de transición que es una función parcial cuánto nos da evaluada $\delta(\lambda, q_0, \gamma)$ para algún γ prefijo de w y donde estamos mirando a $\lambda \in Z^*$ el elemento neutro de este monoide. Esto se corresponde a la idea de que al comenzar nuestra pila está vacía. En tal caso nuestra función de transición nos da un resultado que es un par (z, q) donde $z \in Z^*$ es lo que nos va a quedar en la pila y q es el nuevo estado al cual nos movimos. Notemos que nuestra función de transición no tiene porqué tener un (z, q) tal que podamos movernos o podría ser bien que tenga más de uno. En este caso diremos que nuestro autómata es **no determinístico** dado que en algunos casos existe más de una opción.

En general estamos en la siguiente situación en el proceso de aceptar la palabra w . Tenemos algún $z \in Z$ en el tope de la pila que al ser una pila lo leeremos de derecha a izquierda, estamos en algún estado $q \in Q$ y nos quedará una subpalabra γ de w para leer. Una **configuración** de nuestro autómata entonces es una manera de describir en que situación de aceptar o no aceptar una palabra y la denotamos (z, q, γ) .

Cuando hayamos visto toda la palabra o no tengamos manera de movernos de estado nos fijamos si el estado p en el que estamos es final, es decir si $p \in F$. En tal caso la palabra w es aceptada por el autómata. Formalmente estaremos en alguna configuración zq para $z \in Z^*$ y $q \in Q$ y no nos queda nada de la palabra w porque ya la consumimos toda.

OBSERVACIÓN 1.3.6. Así como definimos el autómata de pila no determinístico para que al tener la pila vacía se detenga podríamos haberlo hecho de una manera distinta por ejemplo dejando que la pila sea vacía y así poder transicionar de una configuración a otra. Esta manera es equivalente porque... Más en adelante nos va a resultar conceptualmente más útil para el caso que estemos viendo el problema de la palabra de un grupo mientras que para las demostraciones de esta sección usaremos esta otra definición.

Descripción instantánea del autómata. Veamos ahora como describir formalmente el funcionamiento de un autómata a partir de lo que estamos haciendo en cierto instante. Consideremos que estamos en el instante que nuestra subpalabra que nos queda por leer es w , estamos en un estado q y en nuestra pila tenemos la palabra γ , entonces vamos a representar al instante por medio de esta tupla (q, w, γ) . Si ahora tenemos la posibilidad de movernos a otro estado p tal que $(p, w', \alpha\beta) \in \delta(q, aw', x\beta)$ donde $aw' = w$ con a alguna letra posiblemente vacía y similarmente $x\beta = \gamma$ con $x \in \Gamma^*$ una letra de Γ posiblemente vacía. Este movimiento lo denotamos como $(q, aw', x\beta) \vdash (p, w', \alpha\beta)$. Podemos considerar la clausura transitiva de esta relación sobre los triples $Z \times Q \times \Sigma^*$ que denotaremos \vdash^* .

El lenguaje aceptado por un autómata de pila. Notemos que en particular el autómata de pila nos da un lenguaje que está formado por las palabras w en el alfabeto de la entrada del autómata Σ que son aceptadas. En general diremos que un autómata acepta un lenguaje L si su lenguaje aceptado es exactamente L . Este lenguaje aceptado por el autómata \mathcal{M} en algunas

casos para hacer énfasis en el autómata lo denotaremos $L(\mathcal{M})$ y siguiendo la notación formal anterior lo podemos describir de la siguiente manera,

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \gamma), \quad q \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$$

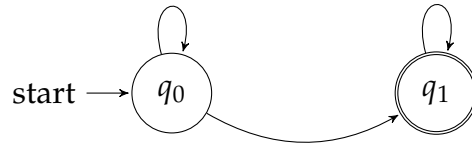
donde (q_0, w, Z_0) es el instante inicial en el cual tenemos la palabra w en el estado inicial q_0 con el símbolo Z_0 de la pila. Al finalizar deberíamos estar en un estado q final y lo que nos queda en la pila γ es totalmente irrelevante en este caso.

OBSERVACIÓN 1.3.7. Al ser un autómata de pila no determinístico existen posiblemente más de una manera de consumir alguna palabra en el autómata. Es así que por la definición que dimos la palabra es aceptada por el autómata si al menos alguna de estas derivaciones la lleva a ser aceptada. No importa si existen derivaciones que no lo hagan mientras una sí lo haga.

EJEMPLO 1.3.8. Sea nuestro alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ y L el lenguaje de los palíndromos sobre este alfabeto. Consideremos el siguiente autómata de pila

$$M = (Q, \{q_0\}, \{a, b\}, \{a, b, \$\}, \$, \{q_1\})$$

donde nuestra pila tiene el mismo alfabeto que el de entrada con un símbolo extra que es $\$$ que va a ser nuestro símbolo inicial de la pila.



El autómata tiene dos estados, el inicial y el final. La idea es que en el primer estado vamos apilando la palabra y en la segunda vamos desapilando la palabra anteriormente apilada. Nuestra función de transición va a ser la siguiente,

- $\delta(q_0, a, Z) = (q_0, aZ)$
- $\delta(q_0, b, Z) = (q_0, ba)$
- $\delta(q_1, a, a) = (q_0, \lambda).$
- $\delta(q_1, b, b) = (q_0, \lambda).$
- $\delta(q_0, \lambda, Z) = (q_1, Z)$
- $\delta(q_0, X, Z) = (q_1, Z)$

donde $Z = a, b, \$$ es decir cualquier cosa del alfabeto de la pila y $X = a, b$ cualquier elemento de nuestro alfabeto de entrada. El autómata en el primer estado apila lo que sea que estemos leyendo sin importar lo que esté en el tope de pila. En el segundo estado desapila cada vez que lo que estemos leyendo coincida con el tope de pila. Finalmente para ir del estado inicial al final tenemos en cuenta dos casos. Nos podemos mover por λ es decir sin consumir ninguna letra de la palabra de la entrada o leyendo alguna de las letras de la palabra. Estos casos se corresponden a que el palíndromo tenga longitud par o tenga longitud impar.

Este ejemplo nos da un indicio que los lenguajes aceptados por autómatas de pila también podrían ser independiente de contexto y esto efectivamente es cierto.

|| **TEOREMA 1.3.9.** *Un lenguaje L es independiente de contexto sii es aceptado por un autómata de pila no determinístico.*

Demostración. Ver [HU79]. ■

Hasta ahora definimos los autómatas de pila no determinísticos que aceptan por estado final. Otra definición posible de lenguaje aceptado podría ser que acepten por pila vacía. Es decir que una vez que consumimos la palabra w de entrada llegamos a una configuración (q, λ, λ) donde λ es la palabra vacía de ambos alfabetos respectivamente. Formalmente notaremos al lenguaje aceptado por pila vacía por un autómata \mathcal{M} de la siguiente manera,

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda), q \in Q, u \in \Sigma^*\}$$

donde arrancamos en el estado inicial y llegamos a algún estado q cualesquiera y nuestra pila está vacía así como lo que nos queda por leer de la palabra. En este caso obtenemos que nuestro lenguaje es aceptado por un autómata de pila no determinístico por pila vacía.

El siguiente resultado nos dice que en el caso que nuestro autómata sea no determinístico es equivalente usar una u otra manera de definir a nuestro lenguaje.

|| **TEOREMA 1.3.10.** *Un lenguaje L es aceptado por un autómata de pila no determinístico por estado final sii es aceptado por un autómata de pila no determinístico por pila vacía.*

Demostración. Ver [HU79]. ■

§1.3.2. Propiedades de los lenguajes independientes de contexto.

En esta sección vamos a considerar a los lenguajes independiente de contexto como una clase. Probemos algunas propiedades que cumplen respecto a las operaciones de conjuntos más usuales.

|| **PROPOSICIÓN 1.3.11.** *Los lenguajes independiente de contexto son cerrados por uniones.*

Demostración. Ver [HU79]. ■

|| **PROPOSICIÓN 1.3.12.** *Los lenguajes independientes de contexto no son cerrados por intersecciones.*

Demostración. Ver [HU79]. ■

Lo que si sucede es que son cerrados con respecto a intersecciones con lenguajes regulares.

PROPOSICIÓN 1.3.13. *Los lenguajes independiente de contexto son cerrados por intersecciones con lenguajes regulares.*

Demostración. Ver [HU79]. ■

Otras propiedades interesantes tienen que ver con su relación con morfismos de monoides.

PROPOSICIÓN 1.3.14. *Los lenguajes independiente de contexto son cerrados por:*

1. *Imágenes de morfismos de monoides.*
2. *Preimágenes de morfismos de monoides.*

Estaría bueno agregarlo por completitud porque no se ve en los cursos usuales y es necesario para definir los grupos IC.

Demostración. Ver [Sip13]. ■

Finalmente la herramienta principal que tenemos para ver que cierto lenguaje L no es independiente de contexto es usar el siguiente lema.

LEMA 1.3.15 (Pumping). *Sea L un lenguaje independiente de contexto entonces existe una constante $n \geq 0$ tal que para todas las palabras $w \in L$ de longitud al menos n existe una factorización $w = uvxwy$ con $|vwx| \leq n$ y $|vx| > 0$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ vale que $uv^iwx^iy \in L$.*

Demostración. Resultado estándar. Ver [HU79]. ■

§1.4. Autómatas de pila determinísticos.

Si en la definición anterior del autómata pedimos que la función de transición de una configuración dada tenga a lo sumo un valor entonces nuestro autómata lo vamos a llamar determinístico. Formalmente esto es que

$$|\delta(q, a, z)| \leq 1 \quad \forall z \in Z, p \in Q, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}.$$

En cierta manera estamos diciendo que de un instante dado solo tenemos a lo sumo una única posibilidad de movernos a otro estado. A los lenguajes aceptados por un automáta de pila determinístico los pensamos que son aceptados por un estado final.

Por lo tanto para cada palabra tenemos un único camino en el autómata para saber si es aceptada o no a diferencia de un automáta de pila no determinístico que podría tener varios caminos posibles para cada palabra.

OBSERVACIÓN 1.4.1. Todo automáta de pila determinístico en particular es no determinístico y por lo tanto la clase de lenguajes aceptados por los primeros están contenidos en la clase de los segundos.

Veamos que esta contención es estricta. Para eso volvamos a considerar el ejemplo del lenguaje de los palíndromos.

EJEMPLO 1.4.2. El lenguaje $L = \{w \in \{a, b\}^* : w = w^r\}$ no es aceptado por un autómeta de pila determinístico pero sí por uno no determinístico. Supongamos que M es un autómeta de pila determinístico que lo acepta. Notemos que para cualquier palabra $w \in \{a, b\}^*$ debe ser que al consumirla la pila no puede quedar vacía dado que $ww^r \in L$ y en tal caso no aceptaría a esta palabra. Esto es que la pila nunca está vacía sea cual sea la configuración que lleguemos. Para cada palabra arbitraria w existe otra x_w tal que al procesar wx_w lo que nos queda en la pila es de tamaño mínimo con respecto a todas las palabras wx . Sea entonces lo que tiene en la pila la palabra α_w que sabemos es de longitud mínima. Si consideramos palabras del estilo wx_wz sabemos que la longitud de lo que quede en la pila no puede disminuir. Ahora consideremos dos palabras del estilo $r = wx_w, s = uy_u$ tales que sus pilas son de longitud mínima al terminar de recorrer las palabras y que resultan tener el mismo tope de pila y terminar en el mismo estado. Podemos asegurar la existencia de estas palabras debido a que tenemos finitos estados y combinaciones de tope de pilas dado que el autómeta de pila es finito pero tenemos infinitas palabras que cumplen esta propiedad. Ahora basta con elegir z de modo que tz sea palíndromo pero que sz no lo sea.

Veamos que podemos elegir a z para que una de las concatenaciones tz, sz sea palíndromo y la otra no. Partamos en distintos casos. Si $|t| = |s|$ basta con tomar $z = s^r$. Si $|t| \neq |s|$ y supongamos que s tiene longitud menor y no es prefijo de t entonces de nuevo podemos tomar el palíndromo ss^r tal que ts^r no es un palíndromo. Finalmente queda el caso que una es un prefijo de la otra, supongamos $t = su$. Si elegimos $x = a, b$ tal que ux no sea un palíndromo luego la palabra ss^r es un palíndromo pero $suxs^r$ no lo es.

Esto muestra que si bien $sz \notin L$ y $tz \in L$ el autómeta de pila determinístico no va a poder diferenciarlas por lo tanto no es posible que este lenguaje sea aceptado por un autómeta de pila determinístico tal como queríamos ver.

§1.4.1. Autómetas de pila determinísticos especiales.

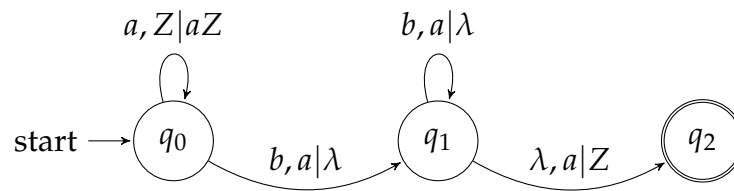
Consideremos ahora un autómeta de pila determinístico tal que acepta tanto por estado final como por pila vacía. A estos los llamaremos *autómetas de pila determinístico especiales*. Estos autómetas son los que nos surgen de la construcción del autómeta del problema de la palabra para grupos virtualmente libres.

EJEMPLO 1.4.3. Sea el lenguaje $L = \{a^m b^n : m \geq n \geq 1\}$ este no es un lenguaje independiente de contexto determinístico especial pero sí es determinístico.

Construyamos un autómeta de pila determinístico que acepte a L . Sea

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0\}, \{a, b\}, \{a, b, Z_0\}, Z_0, q_2)$$

el siguiente autómeta de pila determinístico que representamos así:



donde Z es cualquier letra del alfabeto de la pila. El autómata en el estado inicial q_0 apila a todas las a y cambia al estado q_1 cuando lee por primera vez una b y en ese caso desapila la a que está en el tope de la pila. En el estado q_1 sigue desapilando cada vez que ve una b . Finalmente va al estado q_2 cuando en la pila sigue quedando a y ya leímos toda la palabra y en tal caso la acepta porque significa que vimos como máximo tantas b como a y este es el lenguaje que buscábamos generar.

El lenguaje no es aceptado por un autómata de pila determinístico por pila vacía dado que tiene la propiedad de los prefijos. Es decir que existen palabras que están en el lenguaje tales que alguno de sus prefijos también están. Por ejemplo consideremos $a^m b^i$ y $a^m b^j$ para $m \geq 2$ e $i < j \leq m$. Esto es porque si $M = (Q, \Sigma, Z, Z_0, \delta, q_0, F)$ fuera un autómata de pila determinístico que acepta por pila vacía a este lenguaje tendríamos que $(q_0, a^m b^i, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)$ con q un estado final pero como tiene la pila vacía no podemos continuar aceptando a la palabra $a^m b^j$ ya que por la definición que empleamos el autómata necesita leer algún elemento de la pila. De esta manera vemos que este lenguaje no puede ser aceptado por pila vacía y estado final por un autómata de pila determinístico concluyendo que los lenguajes determinísticos especiales forman un subfamilia propia de los independientes de contexto determinísticos.

§1.5. Lenguajes poly independientes de contexto.

En esta sección vamos a introducir otra familia de lenguajes que generalizan levemente a los lenguajes independientes de contexto. La bibliografía fundamental es [?].

§1.6. Conos de lenguajes y el problema de la palabra.

En esta sección consideraremos un grupo G finitamente generado por algún alfabeto Σ finito donde lo vemos como un conjunto de generadores como monoide dado que en particular todos los grupos son monoides. De esta manera tenemos un epimorfismo de monoides $\pi : \Sigma^* \twoheadrightarrow G$.

El problema de la palabra es uno de los problemas de teoría de grupos más centrales al área. Explícitamente el problema consiste en dada una palabra $\omega \in \Sigma^*$ en los generadores del grupo encontrar un algoritmo para decidir si esta palabra es la identidad del grupo o no. Notemos que para poder pensar este problema estamos fijando de antemano algún conjunto de generadores posible del grupo.

Dado un grupo finitamente presentado consideramos el siguiente lenguaje

$$\text{WP}(G, \Sigma) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \stackrel{G}{=} 1\}$$

que llamaremos el **problema de la palabra de G para los generadores Σ** .

Queremos ver sobre qué clases de lenguajes el problema de la palabra queda bien definido y no depende de los generadores elegidos.

Así como definimos los lenguajes regulares vamos a preocuparnos por otros tipos siempre y cuando cumplan las siguientes condiciones.

DEFINICIÓN 1.6.1. Una clase de lenguajes \mathbb{C} es un **cono** si para todo $L \in \mathbb{C}$ resulta que:

- C1.** Es cerrado por imágenes de morfismos de monoides. Sea $L \subset \Sigma^*$ luego si existe $\phi : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ morfismo de monoides debe ser que $\phi(L) \in \mathbb{C}$.
- C2.** Es cerrado por preimágenes de morfismos de monoides. Sea $L \subset \Sigma^*$ luego si existe $\phi : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ morfismo de monoides debe ser que $\phi^{-1}(L) \in \mathbb{C}$.
- C3.** Es cerrado por intersecciones con lenguajes regulares. Si R es un lenguaje regular sobre Σ^* entonces $L \cap R \in \mathbb{C}$ también resulta serlo.

EJEMPLO 1.6.2. Los lenguajes independientes de contexto forman un cono. Esto se puede ver a partir de las proposiciones 1.3.13 y 1.3.14.

Los conos de lenguajes cumplen la siguiente propiedad de gran importancia para el estudio del problema de la palabra.

PROPOSICIÓN 1.6.3. Sea $WP(G, \Sigma)$ el lenguaje del problema de la palabra de cierto grupo G para algunos generadores Σ y \mathbb{C} cono de lenguajes. Si $WP(G, \Sigma) \in \mathbb{C}$ luego valen las siguientes afirmaciones:

- W1.** $WP(G, \Delta) \in \mathbb{C}$ para cualquier conjunto de generadores Δ .
- W2.** $WP(H) \in \mathbb{C}$ para todo subgrupo H grupo finitamente generado de G .

Demostración. Para ver **W1** formamos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^* & \xrightarrow{\delta} & G \\ f \downarrow & \nearrow \pi & \\ \Sigma^* & & \end{array}$$

donde f es algún morfismo de monoides y donde usamos la propiedad universal de los monoides libres. Notemos que $WP(G, \Delta) = \delta^{-1}(1)$ y como el diagrama conmuta tenemos que

$$f^{-1}(\delta^{-1}(1)) = f^{-1}(WP(G, \Sigma)) = WP(G, \Delta).$$

Dado que esto es un cono obtenemos lo que queríamos ver puesto que es cerrado por preimágenes de morfismos de monoides.

Veamos ahora que vale **W2**. Sea Σ' conjunto de generadores de H . Siempre podemos extenderlo a Σ tal que Σ genere a G . De esta manera

$$WP(H, \Sigma') = WP(H, \Sigma) \cap \Sigma'^*$$

y de vuelta como es un cono la intersección con lenguajes regulares nos da un lenguaje en el cono. ■

Esto nos dice que es interesante estudiar el problema de la palabra justamente sobre conos.

§1.7. Teoría de Bass Serre.

La mayoría de las construcciones de esta sección siguen la exposición de [Ser02].

§1.7.1. Definiciones básicas.

Un *grafo dirigido* es un par de conjuntos $Y = (V(Y), E(Y))$. Al conjunto $V(Y)$ lo llamaremos los vértices del grafo y al conjunto $E(Y)$ las aristas del grafo. Para cada arista $y \in E(Y)$ tendremos una designación $s(y) = P \in V(Y), t(y) = Q \in V(Y)$. Para cada $y \in E(Y)$ tendremos $\bar{y} \in E(Y)$ la arista con *asignación opuesta*, esto es que $s(\bar{y}) = Q, t(\bar{y}) = P$. Una *orientación* de las aristas es una función $o : E(Y) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que si $o(y) = 1$ luego $o(\bar{y}) = 0$.

Para esta sección nos interesa que los grafos sean *conexos*. Esto es que dado dos vértices $P, P' \in V(Y)$ existe una sucesión de aristas

$$(y_0, y_1, \dots, y_k) \text{ tal que } y_i \in E(Y) \text{ para } i = 0 \dots k$$

de modo que $s(y_0) = P$ y $t(y_k) = P'$.

Un *ciclo* es un camino de aristas (y_0, y_1, \dots, y_n) de manera que $s(y_0) = t(y_n)$. Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. Dado un grafo cualquiera Y conexo podemos construirnos un árbol T tal que $V(T) = V(Y)$ y $E(T) \subseteq E(Y)$. A este grafo lo llamaremos un *árbol de expansión* de Y .

En este contexto los morfismos que nos van a interesar van a respetar las propiedades de los grafos dirigidos.

DEFINICIÓN 1.7.1. Sean Y, Y' grafos dirigidos. Una función $\phi : Y \rightarrow Y'$ es un *morfismo de grafos* si:

- $\phi(V(Y)) \subseteq (V(Y'))$;
- $\phi(E(Y)) \subseteq (E(Y'))$;
- Si $y \in E(Y)$ entonces $\overline{\phi(y)} = \phi(\bar{y})$;
- Si $y \in E(Y)$ entonces $\phi(s(y)) = s(\phi(y))$

Notemos que de esta definición no hace falta pedir que respete el vértice en el cual termina una arista porque justamente para toda arista $y \in E(Y)$ vale que $t(y) = s(\bar{y})$.

Como tenemos morfismos de grafos podemos definir una acción de un grupo sobre un grafo dirigido.

DEFINICIÓN 1.7.2. Dado un grupo G diremos que G actúa sobre un grafo dirigido Y si se cumplen las siguientes condiciones,

- a. Para cada $g \in G$ tenemos un morfismo de grafos $g \cdot : Y \rightarrow Y$;
- b. $1 \cdot x = x$ para todo $x \in Y$;
- c. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para todo $x \in Y$ y todos $g, h \in G$.

Las acciones que nos van a interesar las vamos a tomar para que *no tengan inversiones* esto es que $g \cdot y \neq \bar{y}$ para toda arista $y \in E(Y)$ y para todo $g \in G$.

Ahora podemos definir los objetos centrales a la teoría de Bass Serre.

DEFINICIÓN 1.7.3. Dado un grafo dirigido Y . Un *grafo de grupos* \mathcal{G} sobre Y está definido por lo siguiente:

- 1. Para cada vértice $P \in V(Y)$ tenemos un grupo G_P .
- 2. Para cada arista $y \in E(Y)$ tenemos un grupo G_y tal que $G_y \leq G_{s(y)}$.
- 3. Para todo $y \in E(Y)$ tenemos un isomorfismo de G_y a $G_{\bar{y}}$ que denotaremos por $a \mapsto a^{\bar{y}}$ tal que $(a^{\bar{y}})^y = a$ para todo $a \in G_y$.

En general para la definición de grafo de grupos no es necesario pedir para la condición 2 que haya una contención sino que alcanza con tomar un monomorfismo. Para facilitar las construcciones más adelante supondremos que es un subgrupo pero los argumentos se pueden readaptar en el caso de no suponerlo.

Dado un grafo $Y = (V(Y), E(Y))$ llamaremos $F_{E(Y)}$ al grupo libre generado por las aristas del grafo.

DEFINICIÓN 1.7.4. Dado un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo $Y = (V(Y), E(Y))$ podemos armarnos el siguiente grupo

$$F(\mathcal{G}) = *_{P \in V(Y)} G_P * F_{E(Y)} / \langle\langle R \rangle\rangle$$

donde $R = \{\bar{y} = y^{-1}, ya^y y^{-1} = a^{\bar{y}}\}$ para $y \in E(Y), a \in G_y$.

OBSERVACIÓN 1.7.5. Las relaciones R por las que dividimos anteriormente se pueden condensar en

$$R = \{ya^y \bar{y} = a^{\bar{y}}\}.$$

DEFINICIÓN 1.7.6. Sea un grafo de grupos \mathcal{G} sobre Y . Consideremos T un árbol de expansión del grafo Y .¹ Nos armamos el siguiente **grupo fundamental del grafo de grupos**

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = F(\mathcal{G}) / \{y \mid y \in E(T)\}.$$

Esto es que para todas las aristas que aparecen en el árbol de expansión las identificamos con el 1. Esta definición se puede ver que en el caso particular de un grafo coincide con la definición que tenemos del grupo fundamental de un espacio topológico.

EJEMPLO 1.7.7. Sea un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo Y tal que $G_y = \{1\}$ para todo $y \in E(Y)$. Consideremos una orientación A para las aristas del grafo esto es que para cada par de vértices unido por una arista y tenemos que $y \in A \iff \bar{y} \notin A$. El grupo fundamental $\pi(\mathcal{G}, T)$ está generado por los elementos $G_P, P \in V(Y)$ y los elementos $g_y \in A \setminus (T \cap A)$. Esto es que nos queda el siguiente grupo

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = *_{P \in V(Y)} G_P * F$$

donde F es el grupo libre con base $A \setminus (T \cap A)$. Esto es que nos queda $\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq \pi_1(Y) *_{P \in V(Y)} G_P$.

EJEMPLO 1.7.8. Si el grafo es un segmento en particular él mismo es el árbol de expansión puesto que es un árbol. De esta manera si Y es el siguiente segmento de grupos,

$$G_P \bullet \xrightarrow{G_y} \bullet G_Q$$

entonces

$$\pi_1(\mathcal{G}, Y) = G_P *_{G_y} G_Q.$$

Podemos dar otra definición de grupo fundamental pero está vez usando caminos así como lo hacemos para el grupo fundamental usual.

Dados dos vértices $P, Q \in V(Y)$ denotaremos por $\Pi(P, Q)$ el conjunto de caminos de P a Q . De esta manera nos queda definido

$$\Pi(P, Q) = \{y_1 \dots y_k \mid s(y_1) = P, t(y_k) = Q, t(y_i) = s(y_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$$

tal que estos son subconjuntos en $F(\mathcal{G})$ si miramos a las aristas como elementos del grupo. En particular podemos tomar $g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k \in F(\mathcal{G})$ tales que

$$g_i \in G_{s(y_i)}, \quad g_k \in G_Q,$$

A estos subconjuntos los denotaremos $\pi(\mathcal{G}, P, Q)$. En particular para todo $P \in V(Y)$ tenemos que $\pi(\mathcal{G}, P, P)$ es un subgrupo de $F(\mathcal{G})$ esto porque si hacemos el producto entre dos elementos de este subconjunto tenemos que

$$(g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k g_k) \circ (g'_0 y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k) = g_0 y_1 g_1 \dots g_{k-1} y_k (g_k g'_0) y'_1 g'_1 \dots g'_{k-1} y'_k g'_k$$

donde $g_k g'_0 \in G_P$ por lo tanto su producto está bien definido y en definitiva nos queda otro elemento de $\pi(\mathcal{G}, P, P)$ tal como queríamos ver.

¹Como suponemos que Y es conexo existen (posiblemente varios) árboles de expansión.

DEFINICIÓN 1.7.9. El grupo fundamental de \mathcal{G} respecto a un punto de base P se define como $\pi_1(\mathcal{G}, P) = \pi(\mathcal{G}, P, P)$.

Notemos que en particular para esta construcción obtuvimos un subgrupo del grupo $F(\mathcal{G})$ mientras que en el caso de la definición anterior 1.7.6 obtuvimos un cociente. Podemos ver que ambas definiciones son equivalentes porque son isomorfos como grupos.

|| **TEOREMA 1.7.10.** $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es isomorfo con $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Demostración. Veamos que la composición de la inclusión $\iota : \pi_1(\mathcal{G}, P) \rightarrow F(\mathcal{G})$ con la proyección $\pi : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$ es un isomorfismo.

Dados $P, Q \in V(Y)$ consideremos la geodésica α que los une sobre T . Si leemos la sucesión de aristas que recorre esta geodésica tenemos una palabra en $T(P, Q) \in F_{E(Y)}$ de manera que nos define un elemento en el grupo $F(\mathcal{G})$. Ahora definamos el siguiente morfismo (que depende del árbol de expansión que tomamos):

$$\begin{aligned} \tau : F(\mathcal{G}) &\rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P) \\ \tau(y) &= T[P, s(y)]yT[t(y), P] \text{ para } y \in E(Y) \\ \tau(g) &= T[P, Q]gT(Q, P) \text{ para } Q \in V(Y), g \in G_Q \end{aligned}$$

Lo definimos sobre los generadores del producto libre y por como lo tomamos siempre nos devuelve un elemento de $\pi(\mathcal{G}, P)$. Para ver que está bien definido debemos ver que cumple la relación $\tau(\bar{y}a^y y) = \tau(a^{\bar{y}})$ para toda arista $y \in E(Y)$. Esto vale porque justamente

$$\begin{aligned} \tau(\bar{y}a^y y) &= T[P, s(\bar{y})]\bar{y}T[t(\bar{y}), P]T[P, s(y)]a^yT[t(y), P]T[P, s(\bar{y})]yT[t(y), P] \\ &= T[P, s(\bar{y})]\bar{y}a^y yT[t(y), P] \\ &= \tau(a^{\bar{y}}). \end{aligned}$$

Es un epimorfismo porque en particular todo elemento de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es un camino que termina y comienza en P intercalado con elementos de los estabilizadores de los vértices que aparecen en el camino. De esta manera como $\tau(y) = 1$ para todo $y \in E(T)$, notemos que pasa al cociente y existe $\bar{\tau} : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, P)$ epimorfismo.

Para terminar la demostración probemos que componiendo con ν nos queda la identidad. Si hacemos $\nu \circ \bar{\tau}$ notemos que

$$\nu \circ \bar{\tau}(a^y) = a^y, \quad \nu \circ \bar{\tau}(y) = y,$$

para $y \in E(Y) \setminus E(T)$ porque justamente estamos dividiendo por estas aristas. Esto porque $T[P, Q]$ es un camino de aristas en el árbol de expansión por lo tanto sobre $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ son la identidad. ■

§1.7.2. Casos particulares.

En esta sección vamos entender como son los grupos fundamentales de algunos grafos de grupos cuando los grafos tienen algunas formas en particular. La idea, aparte de ejemplificar en unos casos en particular, es que más adelante nos va a servir para reducir proposiciones sobre grafos finitos arbitrarios a grafos de estas formas. Entonces probar resultados sobre otros grafos se va a reducir a la demostraciones que tengamos de estos otros casos bases más comprendidos.

1.7.2.1. Segmentos y grupos amalgamados.

Consideremos que nuestro grafo de grupos \mathcal{G} está dado sobre cierto segmento Y de la siguiente pinta.

Calculemos el grupo fundamental de este grafo de grupos. Como podemos tomar al árbol de expansión al mismo segmento entonces $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ resulta ser el grupo que tomamos libre sobre G_P y G_Q en el que identificamos al subgrupo G_Y de G_P con el subgrupo isomorfo $G_{\bar{Y}}$ de G_Q . De esta manera el grupo que conseguimos es el grupo amalgamado $G_P *_{G_Y} G_Q$.

A continuación veremos un resultado que nos servirá para tener una escritura única y particular de cada palabra sobre los generadores de un grupo amalgamado.

PROPOSICIÓN 1.7.11. *Toda palabra sobre el grupo amalgamado $G_P *_{G_Y} G_Q$ se puede escribir de la siguiente forma:*

Demostración. *sorry* ■

Esta forma para cada palabra la llamaremos la forma normal de w .

1.7.2.2. Bucles y grupos HNN.

Si el grafo resulta ser un loop

Agregar grafiquito de un loop.

entonces no tiene árbol de expansión de manera que esto nos dice que $F(\mathcal{G}) \simeq \pi_1(\mathcal{G})$. Notaremos por a a cada elemento de G_Y mientras que notaremos por \bar{a} a cada elemento del grupo isomorfo $G_{\bar{Y}}$. Sea g el generador de F_Y , es decir el correspondiente a la única arista de este grafo. En este caso las relaciones que tenemos en nuestro grupo son las siguientes

$$g^{-1}ag = \bar{a} \quad \text{para todo } a \in G_Y.$$

De esta manera tenemos que una presentación de nuestro grupo es la siguiente:

Ahora veamos un resultado análogo al que demostramos anteriormente para grupos amalgamados que nos dirá una manera de escribir las palabras en estos grupos.

TEOREMA 1.7.12 (Britton). *Toda palabra w de un grupo G de tipo HNN es tal que se puede escribir de la siguiente manera:*

...

|| donde ...

Demostración. . ■

§1.7.3. Palabras reducidas.

En esta sección vamos a caracterizar los elementos del grupo $F(\mathcal{G})$.

Sea $c = (y_1, \dots, y_n) \in \Pi(P, Q)$ algún camino entre dos aristas $P, Q \in V(Y)$ y consideremos $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ una sucesión de elementos tomados de manera que $r_i \in G_{s(y_i)}$ tal como hicimos para la definición de $\pi(\mathcal{G}, P)$. Llamaremos al par (c, μ) visto como elemento en $*_{P \in V(Y)} G_P * E(Y)$ a

$$(c, \mu) = r_0 y_0 r_1 y_1 \dots r_n y_n.$$

Nos interesa saber bajo qué condiciones estas palabras son reducidas en el grupo $F(\mathcal{G})$. Notaremos $|c, \mu|$ la imagen de esta palabra en el grupo $F(\mathcal{G})$.

DEFINICIÓN 1.7.13. Una palabra (c, μ) es **reducida** si satisface las siguientes dos propiedades:

R1. Si $n = 0$ entonces $r_0 \neq 1$.

R2. Si $n \geq 1$ entonces $r_i \notin G_{y_i}$ para todo i tal que $y_{i+1} = \bar{y}_i$.

En particular si tomamos una palabra (c, μ) tal que el camino c tiene backtracking por la propiedad **R2** tenemos que esta palabra no va a ser reducida.

Queremos ver que estas condiciones nos alcanzan para probar que estas palabras vistas en $F(\mathcal{G})$ sean distintas de la identidad. Nuestro objetivo es el siguiente teorema:

|| **TEOREMA 1.7.14.** Toda palabra (c, μ) reducida es tal que $|c, \mu| \neq 1$.

En particular de este teorema obtenemos los siguientes corolarios de bastante utilidad.

|| **COROLARIO 1.7.15.** Para todo $P \in V(Y)$ vale que $G_P \leq F(\mathcal{G})$.

Demostración. Es el caso que c es el camino constante. ■

|| **COROLARIO 1.7.16.** Si (c, μ) es reducida y su longitud es al menos 1 entonces $|c, \mu| \notin G_{P_0}$ donde P_0 es el origen del camino c .

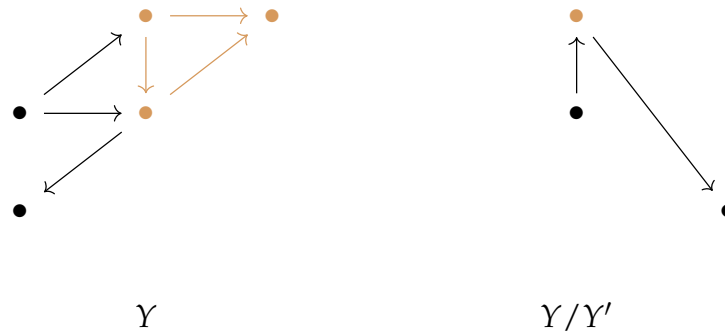
Demostración. Vamos a suponer que esto no es cierto y contradecir el teorema 1.7.14. Sea $c = (P_0 y_1 P_1 \dots P_0)$. Si no fuera cierto tendríamos que $|c, \mu| = x \in G_P$ y podríamos tomarnos otra palabra reducida (c, μ') tal que $\mu' = (x^{-1} r_0, \dots, r_n)$ de manera que $|c, \mu'| = 1$. Sigue siendo una palabra reducida porque justamente por suposición tenemos que la longitud de c es al menos 1. Esto es una contradicción porque ninguna palabra reducida puede ser la identidad. ■

COROLARIO 1.7.17. Sea T un árbol de expansión de Y luego si (c, μ) es una palabra reducida tal que c es un camino cerrado entonces $|c, \mu| \neq 1$ en $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.

Demostración. Por el teorema 1.7.14 tenemos que $|c, \mu| \neq 1$ en el grupo $F(\mathcal{G})$ y como estos dos grupos son isomorfos por medio de la inclusión y la proyección al cociente, por el teorema 1.7.10, entonces esto termina de probar el resultado. ■

Para esto emplearemos una construcción previa que nos ayude a probarlo recursivamente a partir de grafos cada vez más chicos.

Consideremos un grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo Y . Tomemos Y' un subgrafo conexo de Y y restrinjamos el grafo de grupos \mathcal{G} a Y' . El grupo de este grafo de grupos lo denotaremos $F(\mathcal{G}|Y')$. Por inducción supongamos que vale el teorema 1.7.14 para este grafo Y' .



El subgrafo Y' conexo lo distinguimos con este color.

Sea $W = Y/Y'$ el grafo que obtenemos de contraer Y' a un vértice que llamaremos $[Y']$. Como Y' es conexo también lo es W . Definamos un grafo de grupos sobre W .

1. Los vértices son $V(W) = V(Y) \setminus V(Y') \cup \{[Y']\}$.
2. Las aristas son $E(W) = E(Y) \setminus E(Y')$.

Si las aristas no empiezan ni terminaban en Y' dentro del grafo Y al contraer el subgrafo siguen idénticas. En el otro caso las definimos para que terminen (o empiecen) en $[Y']$. Sea $y \in E(W)$ entonces,

$$s(y) = \begin{cases} s(y), & \text{si } s(y) \notin V(Y') \\ [Y'], & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y análogamente,

$$t(y) = \begin{cases} t(y), & \text{si } t(y) \notin V(Y') \\ [Y'], & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces definamos el grafo de grupos \mathcal{H} sobre el grafo conexo W de la siguiente manera,

- Si $P \in V(Y) \setminus V(Y')$, tomamos $H_P = G_P$;
- Si $P = [Y']$ entonces tomamos $H_P = F(\mathcal{G}|Y')$.
- Si $y \in E(W)$ ponemos $H_y = G_y$ tal que como suponemos válido el resultado 1.7.14 para Y' tenemos que es un subgrupo.

Construyamos un morfismo de grupos $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$. Para eso primero lo definimos sobre los generadores. Para todo $g \in G_P$ con $P \in V(Y)$ definimos,

$$\beta(g) = \begin{cases} [g] \in H_P & \text{si } P \notin Y' \\ [g] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } P \in Y' \end{cases}$$

y para toda arista $y \in E(Y)$ definimos,

$$\beta(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \notin E(Y') \\ [y] \in F(\mathcal{G}|Y') & \text{si } y \in E(Y') \end{cases}$$

De manera que así como está definida cumple las relaciones porque $F(\mathcal{H})$ también las cumple y así vemos que pasa al cociente y así obtenemos que β está bien definida.

|| **LEMA 1.7.18.** *El morfismo de grupos $\beta : F(\mathcal{G}) \rightarrow F(\mathcal{H})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Podemos construirnos un morfismo $\alpha : F(\mathcal{H}) \rightarrow F(\mathcal{G})$ tal que sea su inversa. La construcción es análoga.

Para todo $g \in H_P$ con $P \in V(W) \setminus [Y']$ definimos,

$$\alpha(g) = [g] \in G_P$$

y para toda arista $y \in E(W)$ tal que no empiece ni termine en $[Y']$ definimos,

$$\alpha(y) = y$$

Finalmente sobre $F(\mathcal{G}|Y')$ definimos de manera análoga mandando todo elemento $g \in G_P$ para $P \in V(Y')$ a sí mismo en $F(\mathcal{G})$ e idénticamente para todas las aristas. Es claro que es un morfismo de grupos que a su vez es la inversa de β anteriormente definida. ■

La moraleja de este lema es que podemos tomar el grupo $F(\mathcal{G}|Y')$ para un subgrafo Y' conexo y después tomar el grupo $F(\mathcal{H})$ para el grafo resultante y es exactamente lo mismo que tomar $F(\mathcal{G})$ en el comienzo.

Para cada palabra (c, μ) del grafo de grupos $F(\mathcal{G})$ le vamos a asociar una palabra (c', μ') de \mathcal{H} tal que $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$. La idea es reemplazar las partes de la palabra que involucren a Y' con las respectivas en $F(\mathcal{G}|Y')$. Dados $1 \leq i \leq j \leq n$ llamemos c_{ij} al camino $(P_i y_i \dots y_{j-1} P_j)$ y μ_{ij} a los elementos (r_i, \dots, r_j) . Si c_{ij} está contenida en Y' denotaremos por r_{ij} al elemento correspondiente visto en $F(\mathcal{G}|Y')$. De esta manera lo que haremos es pensar en todos los subintervalos

$[i_a, j_a]$ tales que el camino c está dentro del subgrafo Y' . Así tenemos subdividido al intervalo $[1, n]$ de la siguiente manera,

$$1 \leq i_1 \leq j_1 < i_2 \leq j_2 < \dots i_m \leq j_m \leq n.$$

Donde en particular si miramos la palabra $c_{j_{a-1}i_a}$ notemos que es un camino por fuera de Y' exceptuando su comienzo y su final.

Definimos la palabra (c', μ') sobre los generadores de $F(\mathcal{H})$ como:

- $c' = (c_{j_1 i_2} \dots, c_{j_{a-1} i_a}, c_{j_a i_{a+1}} \dots, c_{j_{m-1} i_m})$
- $\mu' = (\mu_{1 i_1}, r_{i_1 j_2}, \dots, r_{i_m j_m}, \mu_{j_m n})$

donde tomamos la convención que $\mu_{1 i_1}$ o bien $\mu_{j_m n}$ pueden ser la identidad si $i_1 = 1$ o bien si $j_m = n$.

Por como las construimos nos queda que $\beta(|c, \mu|) = |c', \mu'|$ tal como queríamos ver. Veamos ahora que β preserva las palabras reducidas. Esto nos permitirá trabajar en grafos de grupos cada vez más chicos a medida que vayamos contrayendo subgrafos conexos.

PROPOSICIÓN 1.7.19. *Si (c, μ) es una palabra reducida para $F(\mathcal{G})$ entonces (c', μ') es reducida para $F(\mathcal{H})$.*

Demostración. Si la longitud de c' es exactamente 0 entonces es un camino constante en algún vértice $P' \in V(W)$. En tal caso $\mu = (r_0)$ donde $r_0 \neq 1$. Si $P \in V(W) \setminus [Y']$ entonces como $H_P = G_P$ obtenemos que $r_0 \neq 1$ visto en H_P . En el otro caso usamos inducción pues nos queda que $r_0 \in F(\mathcal{G}|Y')$ y por lo tanto es reducida usando el teorema 1.7.14.

Supongamos ahora que la longitud de c' es al menos 1. Sea $c' = (P'_1 w_1 \dots w_{n-1} P'_n)$ queremos ver que si $w_{k+1} = \overline{w_k}$ entonces $r_i \notin H_{y_k}$. Sea $P' = t(w_k)$ entonces si $P' \neq [Y']$ esto vale porque justamente (c, μ) es reducida. Distinguimos dos casos si $P' = [Y']$:

- I) En el primer caso (w_k, r'_k, w_{k+1}) es tal que $w_k = y_i, w_{k+1} = \overline{y_i}$ para cierto y_i que aparece en c . Viéndolo en $F(\mathcal{G})$ tenemos que $r_k \notin G_{t(y_i)}$ porque la palabra (c, μ) es reducida por suposición. Como $G_{t(y_i)}$ es un subgrupo de $H_{[Y']} = F(\mathcal{G}|Y')$ aplicando el corolario 1.7.15 entonces la imagen de r'_k no está en $H_{[Y']}$.
- II) En el otro caso tenemos que se corresponde a un camino dentro de Y' . Si (w_k, r'_k, w_{k+1}) tiene la forma $(y_{i_a}, r_{i_a j_a}, y_{j_{a+1}})$ donde $r_{i_a j_a} = |c_{i_a j_a} \mu_{i_a j_a}| \in F(\mathcal{G}|Y')$. Dado que la longitud del camino $c_{i_a j_a}$ es al menos 1 aplicando el resultado 1.7.16 al grafo de grupos \mathcal{G} restringido al subgrafo Y' vemos que $r_{i_a j_a} \notin G_Q$ si $Q = t(y_{i_a})$. Esto nos dice que en el grupo $F(\mathcal{H})$ tenemos que $r_{i_a j_a} \notin H_{t(w_k)} = F(\mathcal{G}|Y')$.

■

Como último resultado previo veamos un lema que nos dice qué pasa cuando contraemos un subárbol de un árbol Y .

|| **LEMA 1.7.20.** Si Y es un árbol finito e Y' es un subárbol de Y entonces $W = Y/Y'$ es un árbol.

Demostración. Debemos ver que W es un grafo conexo y sin ciclos.

Para ver que es *conexo* tomemos dos vértices $w_1, w_2 \in V(W)$ y veamos de construir un camino entre ellos. Si ambos vértices se pueden unir por un camino c en Y tal que no interseca a W podemos tomar ese mismo camino. Sino tomemos c algún camino que los una y notamos que c' tal como lo construimos anteriormente es un camino que los une en W .

Para ver que *no tiene ciclos* supongamos que σ es un ciclo de este grafo. Así como en el caso anterior este ciclo necesariamente tiene que ser sobre el vértice contraído $[Y']$ caso contrario conseguiríamos un ciclo en el grafo Y pero esto no es posible dado que es un árbol. Si miramos por medio del morfismo α definido en la proposición ?? obtenemos un camino c en Y tal que debe empezar y terminar en Y' . Como por hipótesis Y' es conexo existe un camino c tal que conecta estos dos vértices. Esto es una contradicción porque habríamos conseguido un ciclo sobre el grafo Y . ■

Finalmente estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección.

Demostración del teorema 1.7.14. Vamos a demostrar este resultado viéndolo para distintos casos de grafos.

1. El caso que Y es un segmento.

$$P_{-1} \bullet \xrightarrow{y} \bullet P_1$$

El elemento $|c, \mu|$ es de la pinta $r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n$. Donde $e_i = -e_{i+1}$ para todo $i = 1 \dots n$ y los elementos cumplen que $r_0 \in G_{P_{-e_i}}$ y $r_i \in G_{P_{e_i}} \setminus G_{y^{e_i}}$ dado que (c, μ) es una palabra reducida. El caso particular que nuestro camino es constante tenemos que $r_0 \neq 1$ porque vale **R1**. Para el otro caso, es decir el caso que el camino c no es constante consideremos el morfismo sobreyectivo al cociente

$$\phi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1}$$

donde $G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1} \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T)$ donde T es el mismo segmento Y en este caso. Acá estamos usando que el grupo fundamental de un segmento es un grupo amalgamado. Dado que conocemos como son las palabras reducidas en los grupos amalgamados por ?? entonces vemos que (c, μ) no es la identidad porque justamente

$$\phi(|c, \mu|) = r_0 \dots r_n \neq 1$$

por lo tanto como $\phi(|c, \mu|) \neq 1$ esto implica que $|c, \mu| \neq 1$ tal como queríamos ver.

2. El caso que Y es un árbol. Lo probamos usando inducción en la cantidad de vértices del grafo. Tomemos un segmento Y' dentro del árbol donde ya sabemos que el resultado vale por el caso anterior. Por el lema recientemente probado 1.7.20 vemos que el grafo $W = Y/Y'$ resulta ser un árbol y más aún podemos aplicarle la hipótesis inductiva dado que tiene menos vértices que Y . De esta manera aplicando el paso inductivo obtenemos que vale este resultado para el grafo de grupos \mathcal{H} sobre W por lo que $|c', \mu'| \neq 1$ y usando el lema 1.7.19 tenemos que $|c, \mu| \neq 1$.

3. El caso que Y es un bucle. Dado que en este caso el grupo $F(\mathcal{G})$ resulta ser una extensión de tipo HNN por lo visto en la sección anterior podemos aplicar el lema de Britton ?? que justamente nos muestra que esta palabra es distinta de la identidad en el grupo $F(\mathcal{G})$.
4. El caso general. Lo probamos por inducción en la cantidad de vértices. Para eso tomamos Y' un segmento o bien un loop dentro de Y y luego aplicamos el resultado a Y/Y' . Por inducción en este caso vale el resultado y luego volviendo a usar el lema 1.7.19 terminamos de probarlo para un grafo Y conexo y finito arbitrario.

§1.7.4. Árbol de Bass Serre.

Reescribir con la notación que uso en la siguiente sección.

Vamos a construirnos un revestimiento para un grafo de grupos arbitrario. Como el revestimiento universal de todo grafo es un árbol obtendremos un resultado similar en este caso.

Dado \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo Y conexo tomemos un árbol T de expansión de este grafo. Consideremos también A una orientación de las aristas del grafo Y de manera que $e(y) = 0$ si $y \in A$ mientras que $e(y) = 1$ si $y \notin A$. Dada una arista $y \in E(Y)$ denotaremos por $|y|$ a la arista y o \bar{y} tal que está en la orientación A . Llamaremos g_y al elemento de $F(\mathcal{G})$ correspondiente al generador $y \in E(Y)$ porque vamos a necesitar diferenciar elementos del grupo con las aristas propiamente dichas del grafo.

Queremos construirnos un grafo \tilde{X} tal que tenga las siguientes propiedades:

1. Una acción de $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ en \tilde{X} .
2. Un morfismo de grafos sobreyectivo $p : \tilde{X} \rightarrow Y$.
3. Unas secciones de los vértices de Y en los de \tilde{X} e idénticamente secciones en las aristas.

A nuestras secciones las vamos a denotar de manera que para todo vértice $P \in Y$ tendremos un $\tilde{P} \in V(\tilde{X})$. Mirando la acción de $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ sobre \tilde{X} nos gustaría que el estabilizador respecto a \tilde{P} sea el mismo que el estabilizador de P en el grafo de grupos \mathcal{G} . Para esto podemos definir directamente para que $\tilde{P} \simeq \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_P$. Análogamente para todas las aristas de nuestro grafo queremos que el estabilizador sea isomorfo al subgrupo G_y dentro de $G_{t(y)}$. Llamemos a los estabilizadores $\pi_{\tilde{P}}$ y $\pi_{\tilde{y}}$ respectivamente para diferenciarlos. A su vez diferenciaremos por \tilde{P} a la imagen de 1 dentro de los cosets e idénticamente lo haremos para \tilde{y} .

Usando estas condiciones tenemos que

$$V(\tilde{X}) = \coprod_{P \in V(Y)} \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_P, \quad E(\tilde{X}) = \coprod_{y \in E(Y)} \pi_1(\mathcal{G}, T)/G_y$$

para obtener un grafo nos queda definir como son los trasladados de aristas por medio de $g \in \pi_1(\mathcal{G}, P)$. Definimos así las siguientes operaciones sobre el grafo \tilde{X} ,

- (a) $\overline{g\tilde{y}} = g\tilde{y}$;

$$(b) \quad s(g\tilde{y}) = gg_y^{-e(y)}\widetilde{s(y)}$$

$$(c) \quad t(g\tilde{y}) = gg_y^{1-e(y)}\widetilde{t(y)}$$

Debemos ver que así como están definidas resultan ser consistentes estas definiciones. En el ítem **(a)** estamos definiendo como son las aristas con orientación opuesta. Por ahora tenemos definidas las aristas correspondientes a \bar{y} de manera disjunta a las que están definidas correspondientes a y . Para ver la validez de esta definición usamos que si $h\tilde{y} = g\tilde{y}$ entonces esto sucede si y solo si $h\pi_{\tilde{y}} = g\pi_{\tilde{y}}$ pero justamente como $\pi_{\tilde{y}} = \pi_y$ por como definimos a estos grupos por lo tanto resultaban provenir de la misma arista del grafo \tilde{X} .

Para probar que es válida la definición de **(b)** veamos que si tomamos dos representantes distintos de alguna coclase donde comienza la arista va a ser en el mismo vértice. En definitiva debemos ver para $h \in G_y$ que valga la siguiente igualdad,

$$hg_y^{-e(y)}\widetilde{s(y)} = g_y^{-e(y)}\widetilde{s(y)}$$

y esto recae en ver la siguiente igualdad que es básicamente la siguiente inclusión que es parecida a la relación que tenemos en este grupo,

$$g_y^{e(y)}\pi_{\tilde{y}}g_y^{-e(y)} \subset G_{\widetilde{s(y)}}.$$

Pensemos en los dos casos posibles dependiendo de si la arista está en la orientación elegida o no lo está,

- Si $e(y) = 0$ entonces $|y| = y$ y por como lo definimos tenemos que $\pi_{\tilde{y}} = G_y$ es tal que al conjugarlo por g_y nos queda un elemento de $G_{\tilde{y}}$ y tenemos que vale la inclusión $G_{\tilde{y}} \subset G_{\widetilde{s(y)}}$ dado que $t(\tilde{y}) = s(y)$ para todo $y \in E(Y)$.
- Si $e(y) = 1$ entonces tenemos la siguiente situación

$$\pi_{\tilde{y}} \subseteq G_{\widetilde{s(y)}}$$

y para probar esto usamos la definición de estos grupos porque $\pi_{\tilde{y}} = G_{\tilde{y}}$ dado que esta arista no está en la orientación. Usando nuevamente que $s(y) = t(\tilde{y})$ obtenemos lo que queríamos probar.

Finalmente la definición **(c)** es válida usando lo anteriormente demostrado y reemplazando y por \tilde{y} .

Por la construcción que hicimos nos queda que $\tilde{X}/\pi_1(\mathcal{G}, T) \simeq Y$. Por otro lado para todo $y \in E(T)$ tenemos que $g_y = 1$ por lo que usando las definiciones de las aristas tenemos que $s(\tilde{y}) = \widetilde{s(y)}$ y similarmente $t(\tilde{y}) = \widetilde{t(y)}$. Esto nos permite definarnos un *levantado* \tilde{T} del árbol T dado por mandar $P \mapsto \tilde{P}$ para todo $P \in V(Y)$ y para las aristas mandar $y \mapsto \tilde{y}$.

|| **TEOREMA 1.7.21 (Serre).** *El grafo \tilde{X} es un árbol.*

Demostración. Debemos ver dos cosas: que es conexo y que no tiene ciclos.

Empezamos probando que el grafo es conexo. Dada una arista \tilde{y} notemos que bien $s(\tilde{y}) = \widetilde{s(y)}$ o bien que $t(\tilde{y}) = \widetilde{t(y)}$. Si tomamos el árbol \tilde{T} éste va a tener como vértices al comienzo o al final de esta arista \tilde{y} . De esta manera como \tilde{T} es conexo y si le agregamos las aristas \tilde{y} que son conexas e intersecan a \tilde{T} entonces obtenemos un grafo conexo W . Dado que toda arista \tilde{y} está en W y que $\pi_1(\mathcal{G})$ actúa sobre este árbol tenemos que $\pi_1(\mathcal{G}) \cdot W = \tilde{X}$. El grupo $\pi_1(\mathcal{G})$ está finitamente generado por todos los elementos $g \in G_P$ para todo $P \in V(Y)$ y por los elementos g_y para toda arista $y \in E(Y)$. Llamemos a este conjunto de generadores S , luego lo que tenemos es que vale la siguiente igualdad de conjuntos,

$$\tilde{X} = \bigcup_{g \in \pi_1(\mathcal{G})} gW = \bigcup_{g=s_1 \dots s_n} \bigcup_{i=1 \dots n} s_1 \dots s_i W \cup W$$

donde estamos tomando la unión de todos los elementos de G como la unión de palabras indexadas por su longitud n y todos los trasladados de W por medio de subpalabras de g . Probaremos por inducción en la longitud de $g = s_1 \dots s_n$, visto sobre el conjunto de generadores S , que

$$s_1 \dots s_n W \cap s_1 \dots s_{n-1} W \neq \emptyset$$

por lo tanto la unión

$$W_g = W \cup s_1 W \cup \dots \cup s_1 \dots s_n W$$

sería conexa y de esta manera veríamos que \tilde{X} es conexo tomando la unión sobre todas las palabras del grupo dado que todos los W_g son conexos e intersecan a W un conexo. Para el caso base debemos ver dos casos.

1. Si $g = g_y$ para alguna arista $y \in E(Y)$. En este caso dependiendo si $y \in A$ o no obtenemos los siguientes dos casos,

$$\begin{array}{ll} s(g_y \tilde{y}) = s(\tilde{y}) & \text{si } e(y) = 1 \\ t(g_y \tilde{y}) = t(\tilde{y}) & \text{si } e(y) = 0 \end{array}$$

De esta manera $g_y W \cap W = \emptyset$.

2. Si $g \in G_P$ para algún $P \in V(Y)$ entonces $g\tilde{P} = \tilde{P} \in V(W)$ por lo tanto $gW \cap W \neq \emptyset$.

Ahora para el paso inductivo sigamos con la suposición de que es válido para palabras de longitud no mayor a $n - 1$. Queremos verlo para $s_1 \dots s_n$ y esto lo podemos hacer notando que

$$s_1(s_2 \dots s_n)W \cap s_2 \dots s_n W \neq \emptyset$$

donde usamos la hipótesis inductiva sobre $s_2 \dots s_n W$ que es una palabra de longitud $n - 1$ y que al trasladar por s_1 lo que está en la intersección está en la intersección de los trasladados. Vimos

así que el grafo \tilde{X} es conexo porque lo escribimos como unión de conexos que se intersecan de a pares dado que todos los W_g intersecan a W para todo $g \in \pi_1(\mathcal{G})$.

Veamos ahora que no tiene ciclos. Probaremos la siguiente proposición equivalente, para todo $n \in \mathbb{N}$ no existe camino cerrado de longitud n sin backtracking. Sea \tilde{c} un camino sobre \tilde{X} con estas propiedades. Queremos llegar a un absurdo. Sean las aristas de este camino $\tilde{c} = (s_1\tilde{y}_1, s_2\tilde{y}_2, \dots, s_n\tilde{y}_n)$. Si miramos la proyección de los vértices tenemos una sucesión de vértices (P_0, \dots, P_n) donde $P_n = P_0$ dado que el camino es cerrado. Introduzcamos la siguiente notación: sea $e_i = e(y_i)$ y sea $g_i = g_{y_i}$. Al ser \tilde{c} un camino cerrado valen las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} t(s_n\tilde{y}_n) &= s_n g_n^{e_n-1} \tilde{P}_0 = s_1 g_1^{-e_1} \tilde{P}_0 = s(s_1\tilde{y}_1) \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ t(s_{n_1}\widetilde{y_{n-1}}) &= s_{n-1} g_{n-1}^{e_{n-1}-1} \tilde{P}_n = s_n g_n^{-e_n} = s(s_n\tilde{P}_n) \end{aligned}$$

de manera que considerando $r_i \in G_{P_i} = \pi_{\tilde{P}_i}$ tal que $r_i = s_i g_i^{e_i-1} s_{i+1}^{-1} g_{i+1}^{-e_{i+1}}$ y nombrando a $q_i = s_i g_i^{-e_i}$ podemos reescribir las igualdades anteriormente obtenidas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} q_1 &= q_n g_n r_n \\ q_2 &= q_1 g_1 r_1 \\ &\vdots \\ q_n &= q_{n_1} g_{n-1} r_{n-1} \end{aligned}$$

Más aún usando cada ecuación para reescribirla en la anterior obtenemos que,

$$g_1 r_1 = q_1^{-1} q_2 = \dots = q_n^{-1} q_1$$

de modo que multiplicando todo de forma telescópica nos termina quedando lo siguiente cuando se nos cancelan todos los q_i ,

$$g_1 r_1 \dots g_n r_n = 1.$$

Para llegar a la contradicción veamos que esto que obtuvimos viene de una palabra reducida de manera que no podría ser la identidad. Sea la palabra (c, μ) para $F(\mathcal{G})$ dada por el camino c anteriormente definido y la sucesión $\mu = (1, r_1, \dots, r_n)$. Solo nos queda ver que efectivamente es una palabra reducida. Para eso debemos chequear que se cumpla la condición **R2** de ?? ya que suponemos que tiene longitud al menos 1.

Supongamos que existe i tal que $y_{i+1} = \bar{y}_i$ por lo que $g_{i+1} = g_i$ y $e_{i+1} = 1 - e_i$. Queremos ver que para ese mismo i vale que $r_i \notin G_{y_i}$. Para eso miramos la ecuación que teníamos

$$q_i s_i r_i = q_{i+1}$$

de manera que si desarmamos las definiciones y pasamos de lado obtenemos la siguiente igualdad

$$r_i = g_i^{e_i-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_i^{1-e_i}$$

esto es lo mismo que ver que

$$s_i^{-1}s_{i+1} \notin g_i^{1-e_i}G_{y_i}g_i^{e_i-1}.$$

El grupo de la derecha es justamente lo que definimos como π_{y_i} . Entonces debemos ver que $s_i\pi_{y_i} \neq s_{i+1}\pi_{y_i}$ pero esto vale porque por como definimos las aristas opuestas del grafo \tilde{X} y por como tomamos a y_i tenemos que

$$\overline{s_{i+1}y_{i+1}} = s_{i+1}\tilde{y}_i$$

pero esto es una contradicción porque al camino original \tilde{c} lo habíamos tomado sin backtracking.

Para concluir notemos que la palabra (c, μ) cumple las hipótesis del resultado 1.7.17 dado que es camino cerrado no trivial y es una palabra reducida por lo tanto $|c, \mu| \neq 1$ visto en $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ y esto contradice lo anteriormente obtenido. ■

DEFINICIÓN 1.7.22. El grafo \tilde{X} es el **árbol de Bass Serre** del grafo de grupos \mathcal{G} sobre un grafo conexo Y .

§1.7.5. Acciones de grupos sobre árboles.

Sea G grupo que actúa sin inversiones de aristas sobre un grafo conexo $X = (V(X), E(X))$. Consideremos $Y = G/X$ el grafo que conseguimos al cocientar por esta acción. Este grafo está dado por los siguientes vértices,

$$V(Y) = \{GP : P \in V(X)\}$$

y las aristas

$$E(Y) = \{Gy : y \in E(X)\}.$$

En particular como el grafo X es conexo tenemos que Y también lo es. Consideremos los siguientes representantes de clase para vértices. Esto nos define un morfismo de grafos que es la proyección $\pi : X \rightarrow Y$ tal que Consideremos $\iota : Y \rightarrow X$ una sección como conjuntos que la armamos con los siguientes dos pasos.

1. Para cada vértice $P \in V(Y)$ elegimos $\iota(P) = P'$ tal que $\pi(P') = P$.
2. Para cada arista $y \in E(Y)$ elegimos $\iota(y) = y'$ de manera que $s(\iota(y)) = \iota s(y)$. Esto lo podemos hacer para cada arista por separado.

Por como hicimos esta construcción nos garantizamos que el comienzo de cada arista cuando la miramos en X sea uno de los vértices que tomamos como representantes de vértices de Y en X . En principio no sabemos que el vértice del final de la arista de y coincida con el de comienzo de y . Lo que sabemos es que existe $g_y \in G$ tal que

$$g_y \overline{\iota(y)} = \iota(\bar{y})$$

porque ambas aristas en la misma órbita por la acción de G . Si fijamos una orientación de aristas para el grafo X luego podemos elegir para cada arista de la orientación algún $g_y \in G$ tal que $g_y \iota(y) = \iota(\bar{y})$. Para las aristas con la orientación opuesta tendremos algún $g_{\bar{y}} \in G$ tal que

$$g_{\bar{y}} \iota(\bar{y}) = \iota(y).$$

Como la acción de G sobre X es por morfismos de grafos tenemos que $\overline{g\bar{y}} = g\bar{y}$ y así queda claro que podemos elegir a $g_{\bar{y}} = g_y^{-1}$. El caso particular que $\iota(y) = \iota(\bar{y})$ definiremos que $g_y = 1 = g_{\bar{y}}$.

De esta manera nos podemos construir \mathcal{G} un grafo de grupos sobre el grafo Y . Consideremos para $P \in V(Y)$, $y \in E(Y)$ los siguientes grupos,

$$G_P = G_{\iota(P)}, \quad G_y = G_{\iota(y)}$$

donde estamos mirando los estabilizadores de la acción de G sobre X . La primera observación es que la elección de ι no afecta los grupos que tomamos para los vértices y aristas porque de cambiar la elección de ι nos quedarían grupos conjugados porque los vértices o aristas correspondientes están en la misma órbita de la acción de G . Por otro lado notemos que por esta definición tenemos que $G_y \simeq G_{\bar{y}}$. Consideremos el siguiente morfismo de grupos;

$$\begin{aligned} \phi : G_{\bar{y}} &\rightarrow G_y \\ a &\mapsto g_y^{-1} a g_y \end{aligned}$$

que está bien definido porque justamente $g_y \iota(y) = \iota(\bar{y})$ dado que $g_y \iota(\bar{y}) = \iota(y)$ por como lo elegimos a g_y y porque $\overline{g\bar{w}} = g\bar{w}$ para toda $w \in E(X)$. Ahora usamos que si $a \in G_{\iota(\bar{y})}$ luego $a \in G_{\iota(y)}$ por lo tanto $a \iota(\bar{y}) = \iota(y)$. Finalmente como $g_y^{-1} \iota(\bar{y}) = \iota(y)$ tal como queríamos ver.

Definimos el siguiente morfismo del producto libre de los estabilizadores de los vértices y el grupo libre en las aristas del grafo en el grupo G .

$$\begin{aligned} \varphi : *_{P \in V(Y)} G_P * F_{E(Y)} &\rightarrow G \\ g &\mapsto g \\ y &\mapsto g_y \end{aligned}$$

Probemos que este morfismo baja a $F(\mathcal{G})$. Para eso veamos que cumple las relaciones que definen a este cociente.

1. $g_y g_{\bar{y}} = 1$ para todo $y \in E(Y)$ porque justamente elegimos a $g_{\bar{y}}$ de esta manera;
2. $\bar{y} a y = a^{\bar{y}}$ para todo $y \in E(Y)$, $a \in G_y$ porque justamente vimos que $\varphi(\bar{y}) \varphi(a) \varphi(y) = g_y^{-1} a g_y = a^{\bar{y}}$.

De esta manera tenemos definido un morfismo de grupos $\varphi : F(\mathcal{G}) \rightarrow G$. Nuestro objetivo ahora es ver que este morfismo baja al grupo fundamental del grafo de grupos sobre un árbol de expansión.

|| **LEMA 1.7.23.** Para todo $g \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$ tenemos que $\varphi(g) = g$.

Demostración. Dado $g \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$ luego lo podemos representar en el grupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ por medio de la palabra reducida g . Por como está definido φ sabemos que $\varphi(g) = g$. ■

|| **PROPOSICIÓN 1.7.24.** El morfismo de grupos restringido al subgrupo $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, P) \rightarrow G$ es sobreyectivo.

Demostración. Dado $g \in G$ queremos ver que $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$. Sea $P \in \iota(V(Y))$ un vértice. Consideremos $gP \in V(X)$, como el grafo es conexo tenemos un camino que une a P con gP . Sea este camino

$$e_0 P_0 \xrightarrow{e_0 \iota(y_1)} e_1 P_1 \xrightarrow{e_1 \iota(y_2)} \dots \xrightarrow{e_{k-1} \iota(y_k)} e_k P_k$$

de manera que $P_i \in V(\iota(Y))$ y en particular $P_0 = P, P_k = P$ siguiendo nuestra notación anterior y así $s(\iota(y_i)) = P_{i-1}$ por como tomamos las levantadas de las aristas. Los elementos $e_i \in G_{s(\iota(y_i))}$ son tales que $e_i t(\iota(y_{i+1})) = P_{i+1}$ y donde en particular tenemos que $e_k P = gP$.

Una primera observación que podemos hacer es que $ge_k^{-1} \in G_P$ dado que $e_k P = gP$. Por el resultado anterior 1.7.23 tenemos que $\varphi(h) = h$ para todo $h \in G_P$. Esto nos dice que al ser φ un morfismo de grupos luego

$$(ge_k^{-1})e_k = g$$

entonces como $ge_k^{-1} \in G_P \leq \pi_1(\mathcal{G}, P)$ luego si vemos que $e_k \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ probaríamos que $g \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$ tal como queríamos ver.

Para ver esto lo probaremos por inducción en el camino que tomamos anteriormente. Veamos que $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$ para todo $i = 0 \dots n$.

El caso base consiste en ver que $e_0 \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P))$. Esto es cierto porque justamente tenemos que $e_0 \in G_P$ y por el lema anterior 1.7.23 tenemos que φ es la identidad cuando la restringimos a G_P .

Para el paso inductivo supongamos que $e_{i-1} \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_{i-1}))$ y queremos ver que $e_i \in \varphi(\pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$. Antes de probar esto veamos de reescribir a e_i en términos de e_{i-1} . Observemos que por como tomamos el camino tenemos que

$$e_{i-1} t(\iota(y_i)) = e_i P_i$$

y de esta manera obtenemos que $t(\iota(y_i)) = e_{i-1}^{-1} e_i P_i$ y como donde termina una arista es donde empieza la arista con orientación opuesta tenemos que $s(\iota(\overline{y_i})) = e_{i-1}^{-1} e_i P_i$. Por como definimos al elemento del grupo $g_{y_i} \in G$ tenemos que $g_{y_i} \iota(\overline{y_i}) = \iota(\overline{y_i})$ por lo tanto obtenemos que

$$s(g_{y_i} \iota(\overline{y_i})) = g_{y_i} P_i$$

de esta manera obtenemos que $g_{y_i}P_i = e_{i-1}^{-1}e_iP_i$ y por lo tanto llegamos a la siguiente escritura para e_i ,

$$e_{i-1}g_{y_i}h_i = e_i$$

donde $h_i \in G_{P_i}$.

Ahora podemos usar nuestra hipótesis inductiva para obtener un camino

$$h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1} \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$$

de manera que $e_{i-1} = \varphi(h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1})$. Recordemos que $\varphi(y_i) = g_{y_i}$ por la definición de nuestro morfismo φ y por otro lado tenemos que $\varphi(h_i) = h_i$ porque φ fija a los grupos G_{P_i} por definición también. Con esto concluimos la siguiente igualdad,

$$e_i = \varphi(h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1}y_ih_i)$$

y como $h_0y_0 \dots y_{i-1}h_{i-1}y_ih_i \in \Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i)$ terminamos de probar que $e_i \in \varphi(\Pi_1(\mathcal{G}, P, P_i))$ tal como queríamos ver. En particular con esto probamos que $e_k \in \varphi(\mathcal{G}, P)$ y esto implica que $g \in \varphi(\mathcal{G}, P)$ tal como queríamos ver. De esta manera la restricción de φ al subgrupo $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ es sobreyectiva. ■

|| **COROLARIO 1.7.25.** *La restricción del morfismo $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, P)$ se factoriza por el cociente $\pi_1(\mathcal{G}, T)$.*

1.7.5.1. Morfismo de grafos ψ .

Construyamos un morfismo de grafos del árbol de Bass Serre en el grafo X que vendría a ser el análogo al revestimiento.

Sea la asignación $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ dada por

$$\begin{aligned} \psi(gG_P P) &= \varphi(g)P \text{ para todo } g \in G, P \in V(Y) \\ \psi(gG_Y y) &= \varphi(g)\iota(y) \text{ para todo } g \in G, P \in V(Y) \end{aligned}$$

Veamos que es una función. Sean dos representantes g, h del mismo coset de G_P . Queremos ver que $\psi(gG_P P) = \psi(hG_P P)$. Para esto notemos que por la definición de ψ esto equivale a ver que $\varphi(g) = \varphi(h)$. Dado que $gh^{-1} \in G_P$ luego tenemos que $\varphi(gh^{-1}) = gh^{-1}$ porque φ restringida a G_P es la identidad por el resultado 1.7.23.

|| **LEMA 1.7.26.** *La función $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ resulta ser un morfismo de grafos.*

Demostración. Esta claro por como está definido que cada vértice de \tilde{X} va a parar a uno de X y que cada arista va a parar a una de X .

Veamos ahora que dada una arista $gG_Y y$ tenemos que $\psi(\overline{gG_Y y}) = \overline{\psi(gG_Y y)}$.

Finalmente veamos que respeta los comienzos de aristas. ■

Dado un vértice $x \in V(X)$ podemos definir su *star* como el siguiente conjunto de aristas,

$$st(x) = \{y \in E(Y) : s(y) = x\}$$

Como queremos que nuestro morfismo ψ represente un morfismo de revestimientos le vamos a pedir que localmente tenga buenas propiedades. En particular vamos a pedirle que mande un star de un vértice inyectivamente en dentro del star del otro vértice.

DEFINICIÓN 1.7.27. Un morfismo de grafos $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ se dice *localmente inyectivo* si para todo vértice $P \in V(\Gamma)$ resulta que $\psi : st(P) \rightarrow E(\Gamma')$ es inyectiva.

Probemos ahora que nuestro morfismo de grafos ψ cumple esta propiedad.

|| **PROPOSICIÓN 1.7.28.** El morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ es sobreyectivo y localmente inyectivo.

Demostración. Primero veamos que es sobreyectivo. Sabemos que $G \cdot Y = X$ si miramos a Y como subgrafo de X . Consideremos un vértice $\tilde{P} \in V(X)$ que por lo visto lo podemos escribir como $\tilde{P} = gP$ para cierto $g \in G$ y para cierto $P \in V(Y)$. Por el resultado anterior ?? sabemos que el morfismo de grupos φ resulta ser sobreyectivo. De esta manera tenemos que dado $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $\varphi(h) = g$. Luego alcanza con tomar como vértice a $hG_P P$ de manera que

$$\psi(hG_P P) = \varphi(h)P = gP = \tilde{P}$$

tal como queríamos ver.

Finalmente veamos que es localmente inyectivo. Sea $Q \in V(X)$ vértice. Sean $y, y' \in E(X)$ aristas tales que $s(y) = Q = s(y')$. Consideraremos dos casos dependiendo si las aristas están en la misma órbita por la acción de G o si no lo están.

1. Si $Gy \neq Gy'$ entonces no están en la misma órbita. En este caso tenemos que $\psi(y) = \varphi(g)\iota(y)$ mientras que $\psi(y') = \varphi(g)\iota(y')$. Como son elementos de órbitas distintas no pueden ser el mismo elemento y de esta manera concluimos que $\psi(y) \neq \psi(y')$.
2. El otro caso es que $Gy = Gy'$. En este caso lo que hacemos primero es fijar algún vértice $P \in V(X)$ tal que nos permita escribir a estas aristas como palabras reducidas usando el resultado ?. De esta manera obtenemos la siguiente escritura

$$Q = (c_0 y_1 c_1 y_2 \dots y_k)$$

tal que las aristas van a tener la siguiente pinta

$$\begin{aligned} y &= (c_0 y_1 c_1 y_2 \dots y_k c y) \\ y' &= (c_0 y_1 c_1 y_2 \dots y_k d y) \end{aligned}$$

donde c, d son representantes de cosets diferentes de la arista y por medio de la acción de G . Para terminar la demostración observamos lo siguiente que $\psi(y) = \psi(y')$ si y solo si $c\iota(y) = d\iota(y)$ y esto sucede si y solo si $c = d$. Pero en este caso obtendríamos que $y = y'$ por lo tanto el morfismo de grafos ψ resulta ser localmente inyectivo.

El siguiente resultado nos va a garantizar que el morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ sea un isomorfismo de grafos pidiéndole a X ser un árbol. ■

PROPOSICIÓN 1.7.29. *Todo morfismo de grafos $\psi : \Gamma \rightarrow T$ localmente inyectivo tal que T sea un árbol e Γ sea conexo es un monomorfismo de grafos.*

Demostración. Como el grafo Γ es conexo debe existir un camino de vértices $P = P_0 \dots P_k = Q$. Consideremos que este camino está reducido. Probemos por inducción en la longitud del camino que para puntos $P, Q \in V(X)$ a distancia menor que n no vale que $\psi(P) = \psi(Q)$.

El caso base es que la longitud del camino sea exactamente 1. En este caso tenemos que $\psi(P) = \psi(Q)$ donde $y \in E(Y)$ tal que $s(y) = P, t(y) = Q$. Al ser ψ un morfismo de grafos tenemos que

$$s(\psi(y)) = \psi(P) = \psi(Q) = t(\psi(y))$$

por lo tanto si $\psi(y)$ fuera una arista sería un bucle. Los grafos los tomamos para que no tengan bucles.

El paso inductivo partimos de un camino de aristas (y_1, \dots, y_n) reducido. Consideremos la imagen del camino por medio del morfismo. Como estamos en un árbol no puede haber ciclos, de esta manera tiene que ser que $\psi(y_k) = \overline{\psi(y_{k+1})}$ para ciertas aristas $y_k, y_{k+1} \in E(\Gamma)$. Como ψ es un morfismo de grafos cumple que $\psi(y_k) = \psi(\overline{y_k})$ y así de esta manera obtenemos que $\psi(y_k) = \psi(\overline{y_{k+1}})$. Como el morfismo es localmente inyectivo y ambas aristas parten del mismo vértice tenemos que $y_{k+1} = \overline{y_k}$. Esto es una contradicción porque asumimos que el camino que tomamos es reducido. ■

El siguiente resultado nos da la estructura de un grupo que actúa sobre un grafo conexo sin inversiones de aristas. Es el resultado central de la teoría de Bass Serre.

TEOREMA 1.7.30 ([Ser02]). *Sea G un grupo actuando en grafo conexo X sin inversiones de aristas y sea \mathcal{G} el grafo de grupos asociado sobre $Y = X/G$. Consideremos T un árbol de expansión de Y , $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ y $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$ luego las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) *el grafo X es un árbol;*
- (b) *el morfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ es un isomorfismo de grafos;*
- (c) *el morfismo $\varphi : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow G$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. La implicación **a** \Rightarrow **b** la hacemos usando la proposición 1.7.29 dado que ψ es localmente inyectivo. Para ver **b** \Rightarrow **a** usamos que \tilde{X} es un árbol por lo tanto X al ser isomorfo también es un árbol.

Probemos **b** \Rightarrow **c**. Para eso notemos que al ser φ sobreyectivo nos alcanza con ver que es inyectivo. Si $g \in \pi_1(\mathcal{G}, T)$ y $g \neq 1$ tal que $\varphi(g) = 1$ entonces necesariamente $g \notin G_P$ por el

lema anterior 1.7.23 dado que la restricción a estos subgrupos es la identidad. Esto nos dice que $gG_P P \neq G_P P$ dado que los cosets gG_P y G_P son distintos. Por como definimos a ψ tenemos que

$$\psi(gG_P P) = \varphi(g)P = \psi(G_P P)$$

pero esto contradice que ψ sea un isomorfismo.

Finalmente probemos **c** \Rightarrow **b**. Para esto como ψ es sobreyectivo nos alcanza con ver que es inyectivo. Sean $gG_P P, hG_Q Q \in V(\tilde{X})$ tales que $\psi(gG_P P) = \psi(hG_Q Q)$. Por la definición del morfismo ψ obtenemos que

$$\varphi(g)P = \varphi(h)Q$$

pero esto nos diría que $P = Q$ dado que ambos son representantes de las órbitas de la acción de G sobre el árbol T . Por otro lado obtenemos que $\varphi(gh^{-1})P = P$ y así $\varphi(gh^{-1}) \in G_P$. Como φ es un isomorfismo y en particular es inyectiva restringida al subgrupo G_P por el lema ?? deducimos que $gh^{-1} \in G_P$. Así ambos cosets son idénticos $gG_P = hG_Q$ y por lo tanto vimos que los dos vértices son idénticos $gG_P P = hG_Q Q$ y de esta manera probamos que ψ es inyectiva. ■

Como corolarios obtenemos una caracterización para los grupos libres que usaremos varias veces y que es una herramienta fundamental de la teoría geométrica de grupos.

|| **COROLARIO 1.7.31.** *Un grupo G es libre si y solo si G actúa libremente sobre un árbol sin inversiones de aristas.*

Demostración. Si G es libre entonces su grafo de Cayley lo podemos tomar como un árbol y usamos que actúa libremente sobre él sin invertir aristas.

Para la vuelta usamos 1.7.30 porque es isomorfo a $\pi_1(\mathcal{G}, T)$ y este grupo es libre por ser el grupo fundamental de un grafo dado que los estabilizadores son triviales por hipótesis. ■

|| **COROLARIO 1.7.32.** *Dado G un grupo libre todo subgrupo $H \leq G$ resulta ser libre.*

Demostración. H actúa sin inversiones y libremente sobre el mismo árbol que actúa G . ■

Otra consecuencia de este teorema de Serre es un resultado obtenido por Karass, Pietrowski y Solitar que nos da una cota de qué tan grande puede ser un subgrupo libre dentro de un grupo fundamental de un grafo finito de grupos finitos. Este resultado generaliza la fórmula de Schreier para subgrupos libres.

Primero probamos el siguiente lema sobre grupos libres que nos va a ayudar en la demostración de esta fórmula.

|| **LEMA 1.7.33.** *Todo grupo libre finitamente generado no tiene torsión.*

Demostración. El grafo de Cayley de un grupo libre se puede tomar para que sea un árbol. Si tuviera torsión tendría un ciclo contradiciendo que es un árbol. ■

PROPOSICIÓN 1.7.34. [KPS73] Sea \mathcal{G} un grafo de grupos finito con grupos sobre los vértices finitos. Sea $G = \pi_1(\mathcal{G}, T)$ y sea F un subgrupo libre de G de índice finito con rango $r(F)$. Luego la siguiente fórmula vale:

$$\frac{r(F) - 1}{(G : F)} = \sum_{y \in E(Y)} \frac{1}{2 \cdot |G_y|} - \sum_{P \in V(Y)} \frac{1}{|G_P|}.$$

Demostración. Sea \tilde{X} el árbol de Bass Serre para este grafo de grupos \mathcal{G} . Notemos que F no interseca a ningún subgrupo de G que sea isomorfo a G_P para ningún $P \in V(Y)$. Esto porque el grupo F es libre y G_P es finito por lo tanto la intersección tendría torsión pero por el lema 1.7.33 ningún grupo libre tiene torsión. De esta manera F es isomorfo al grupo fundamental de \tilde{X}/F con todos los grupos de los vértices triviales justamente porque los estabilizadores lo son.

Dado que \tilde{X} es un árbol estamos en las hipótesis para usar 1.7.30 y de esta manera obtenemos que $F \simeq \pi_1(\tilde{X}/F)$. Usando esto calculemos el rango del grupo libre contando todas las aristas que no pertenezcan a un árbol de expansión T' del grafo \tilde{X}/F . Recordemos que al ser un árbol de expansión tenemos que $\frac{1}{2}|E(T')| = |V(\tilde{X}/F)| - 1$.

$$\begin{aligned} r(F) &= \frac{1}{2}(|E(\tilde{X}/F)| - |E(T')|) \\ &= \frac{1}{2}|E(\tilde{X}/F)| - |V(\tilde{X}/F)| + 1 \end{aligned}$$

donde multiplicamos por $\frac{1}{2}$ porque todas las aristas las contamos una vez por cada una de las dos orientaciones que tienen.

Finalmente para obtener la fórmula que queremos probar tenemos que usar como está construido el árbol de Bass Serre \tilde{X} .

$$|V(\tilde{X}/F)| = \sum_{P \in V(X)} |(G/G_P)/F|$$

y acá usamos que la cantidad de cosets de $(G/G_y)/F$ es la misma que hay en $(F/G)/G_y$ por lo tanto

$$|V(\tilde{X}/F)| = \sum_{P \in V(X)} \frac{(G : F)}{|G_y|}$$

Obtenemos una expresión análoga para las aristas y así terminamos de probar la validez de la fórmula. ■

Finalmente podemos probar que grupo fundamental de un grafo de grupos finito con grupos finitos es virtualmente libre. Antes de probar esto necesitamos un lema sobre acciones en conjuntos finitos.

LEMA 1.7.35. *Sea G un grupo que actúa libremente sobre un conjunto finito X de dos maneras distintas $\alpha, \beta : G \rightarrow S(X)$. Entonces debe existir $\varphi \in S(X)$ tal que para todo $g \in G$ valga que*

$$\alpha(g) = \varphi^{-1} \circ \beta(g) \circ \varphi.$$

Demostración. Tomamos representantes para cada acción $R, S \subseteq X$ tales que

$$\bigsqcup_{r \in R} \alpha(G)(r) = \bigsqcup_{s \in S} \beta(G)(s)$$

donde la unión es disjunta como órbitas de esta acción. Como ambas acciones son libres resulta que $\alpha(G)(r)$ y $\beta(G)(s)$ tienen cardinal exactamente $|G|$ usando que X también es finito. De esta manera vemos que $|R| = |X|/|G| = |S|$ por lo tanto existe una biyección φ entre ambos conjuntos que la extendemos a todo X de la siguiente manera,

$$\varphi(\alpha(g)r) = \beta(g)s$$

siempre y cuando $\varphi(r) = s$. Esta biyección cumple todo lo que queríamos. ■

TEOREMA 1.7.36. *[KPS73] Sea \mathcal{G} un grafo de grupos sobre un grafo finito Y con grupos finitos en los vértices. Entonces $\pi_1(\mathcal{G})$ es un grupo finitamente generado virtualmente libre.*

Demostración. Dado que el grafo Y es finito y los grupos G_P para todo $P \in V(Y)$ también son finitos podemos tomarnos X un conjunto finito tal que $|G_P|$ divida a $|X|$.

Para cada $P \in V(Y)$ podemos armarnos una acción libre de G_P en X . Esto nos da un monomorfismo $G_P \rightarrow S(X)$. A su vez por cada grupo G_y con $y \in E(Y)$ obtenemos dos acciones libres sobre X dependiendo con qué inclusión lo estamos mirando. Por el lema 1.7.35 podemos elegirnos para cada $y \in E(Y)$ alguna $\varphi_y \in S(X)$ tal que haga conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & G_{s(y)} & \xrightarrow{\sigma} S(X) \\ & \nearrow & \downarrow \varphi_y \\ G_y & & \\ & \searrow & \\ & G_{t(y)} & \xrightarrow{\tau} S(X) \end{array}$$

Para la arista con orientación opuesta tomamos $\varphi_{\bar{y}} = \varphi_y^{-1}$. De esta manera tenemos un morfismo de grupos definido sobre el grupo libre $*_{P \in V(Y)} G_P * E(Y)$. Por como tomamos a φ_y y como hace conmutar al diagrama tenemos que $\varphi_{\bar{y}} \circ \sigma \circ \varphi_y = \tau$. Usando la definición del grupo $F(\mathcal{G})$ tenemos un morfismo de grupos $h : F(\mathcal{G}) \rightarrow S(X)$ tal que la restricción a G_P es inyectiva para todo $P \in V(Y)$. Si fijamos $P \in V(Y)$ y consideramos el subgrupo normal de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$

$$F = \{g \in \pi_1(\mathcal{G}, P) \mid h(g) = 1\}$$

entonces por como lo consideramos tenemos que $F \cap G_Q = \{1\}$ para todo $Q \in V(Y)$. Esto nos dice que el grupo F actúa libremente sobre el árbol de Bass Serre de nuestro grafo de grupos \mathcal{G} . A su vez como F es un subgrupo de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ tenemos que actúa sin inversiones. Estamos en condiciones de usar el teorema de Serre 1.7.30 y así obtenemos que este grupo debe ser libre.

Por lo visto obtuvimos que F es un subgrupo libre de $\pi_1(\mathcal{G}, P)$ y queremos ver que tiene índice finito. Para eso notemos que al ser $|X| < \infty$ entonces $|S(X)| < \infty$ y como $S(X) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, P)/F$, por la propiedad universal del cociente, entonces $(\pi_1(\mathcal{G}, P) : F) < \infty$ tal como queríamos ver.

Finalmente notemos que por 1.7.34 el grupo F es un grupo finitamente generado tal como queríamos ver. ■

§1.7.6. Productos semi directos.

En esta sección vamos a refinar los resultados obtenidos anteriormente para ver que los grupos fundamentales de grafos finitos de grupos finitos y por lo tanto los grupos virtualmente libres se pueden meter dentro de un producto semidirecto FQ donde F es un grupo libre y Q es un cociente finito de G . La referencia de esta sección es el paper [?] que a su vez se basó en los métodos del paper de Dahmani-Guirardel.

|| PROPOSICIÓN 1.7.37.

Demostración. *sorry* ■

EJEMPLO 1.7.38. Ejemplo de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Capítulo 2

Grupos virtualmente libres.

En este capítulo veremos como entran en juego las diferentes áreas de la matemática para definir de manera equivalente a los grupos virtualmente libres.

DEFINICIÓN 2.0.1. Un grupo G finitamente generado es **virtualmente libre** si existe un subgrupo F libre tal que su índice en G es finito.

Veamos algunas propiedades elementales que cumplen todos los grupos virtualmente libre. Antes probemos algunos lemas sobre grupos.

DEFINICIÓN 2.0.2. Sea G un grupo y H un subgrupo entonces el normalizador de H en G es el siguiente subgrupo

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

Denotaremos por $S = \{g \in G : gHg^{-1} \neq H\}$ al conjunto de conjugados del subgrupo H .

LEMA 2.0.3. Si G es un grupo finitamente generado y H es un subgrupo de índice finito entonces $N_G(H)$ tiene índice finito y más aún $[G : N_G(H)] = |S|$.

Demostración. Para ver que tiene índice finito notemos que $H \leq N_G(H)$ por lo tanto tenemos que

$$[G : N_G(H)] \leq [G : H] < \infty.$$

Para probar la otra afirmación definimos la siguiente función hacia los cosets a derecha del normalizador desde el conjunto S ,

$$\begin{aligned} S &\rightarrow G/N_G(H) \\ sHs^{-1} &\mapsto N_G(H)s \end{aligned}$$

Veamos que es biyectiva.

Si $N_G(H)s = N_G(H)t$ entonces tenemos que esto sucede si y solo si $st^{-1} \in N_G(H)$. Esto nos dice que por la definición del normalizador,

$$st^{-1}Hts^{-1} = H \iff s^{-1}Hs = t^{-1}Ht$$

y de esta manera obtenemos que la función está bien definida y es biyectiva. ■

LEMA 2.0.4. *Sea G un grupo finitamente generado y sean K, H subgrupos de índice finito entonces $K \cap H$ es un subgrupo de índice finito.*

Demostración. Primero notemos que por el segundo teorema de isomorfismo para grupos tenemos que existe una biyección entre los siguientes conjuntos,

$$KH/K \simeq K/K \cap H$$

y en particular como $|KH/K| \leq |G/K| < \infty$ por hipótesis obtenemos así que $|K/K \cap H| < \infty$.

Finalmente por una propiedad de índices de subgrupos obtenemos lo siguiente

$$[G : K \cap H] = [G : K][K : K \cap H]$$

y como ambos índices de la derecha son finitos por lo visto obtenemos que $K \cap H$ es un subgrupo de índice finito también tal como queríamos ver. ■

LEMA 2.0.5. *Sea G un grupo finitamente generado y sea H subgrupo de índice finito entonces H es un grupo finitamente generado.*

Demostración. Sea $A = \{g_1, \dots, g_n\}$ conjunto finito de generadores de G . Sea $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ conjunto transversal a derecha de H , esto es que Ht_1, \dots, Ht_k son todos los cosets a derecha de H sobre G . Supongamos que $t_1 = 1$ dado que es el representante del coset H .

Dado g_j generador de G debe existir $h_{ij} \in H$ tal que $h_{ij}t_k = t_i g_j$ para cierto t_k . También debe existir $h_i \in H$ de manera que $h_i t_k = g_i$ para cierto t_k . Veamos que el conjunto finito

$$B = \{h_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n} \cup \{h_i\}_{1 \leq i \leq n}$$

genera a H .

Dado $h \in H$ tenemos que

$$h = g_{i_1} \dots g_{i_r}$$

donde usamos el conjunto finito de generadores de G .

Por lo visto anteriormente podemos escribir $g_{i_1} = h_{i_1} t_{k_1}$ y entonces nos queda la siguiente escritura de h ,

$$h = h_{i_1} t_{k_1} g_{i_2} \dots g_{i_r}$$

entonces usando que $h_{k_1 i_2} t_{k_2} = t_{k_1} g_{i_2}$ llegamos a la siguiente escritura de h ,

$$h = h_{i_1} h_{k_1 i_2} t_{k_2} \dots g_{i_r}.$$

Repitiendo inductivamente este procedimiento llegamos a que $h = h_{i_1} h_{k_1 i_2} \dots t_{k_r}$. Este t_{k_r} tiene que ser 1 porque justamente $h \in H$, por lo tanto tenemos B es un conjunto finito de generadores de H . ■

Con esto podemos probar estos resultados elementales de grupos virtualmente libre.

PROPOSICIÓN 2.0.6. *Para todo grupo G virtualmente libre valen las siguientes propiedades.*

1. *Si F es un subgrupo libre de índice finito entonces podemos tomarnos otro subgrupo F' de manera que sea normal y libre.*
2. *Si H es un subgrupo de G de índice finito entonces H también resulta ser virtualmente libre.*

Demostración.

1. Si G es virtualmente libre y F es un subgrupo libre tenemos que la cantidad de conjugados de F es finita por el lema 2.0.3. Por lo tanto podemos considerar el siguiente subgrupo normal

$$F' = \bigcap_{g \in G} gFg^{-1}$$

donde la cantidad de grupos que estamos intersecando es finita y es normal por construcción. Veamos que F' nos sirve. Para ver que tiene índice finito nos alcanza con usar el lema 2.0.4 e inducción para que valga para una intersección finita arbitraria. Como tiene índice finito usando 2.0.5 sabemos entonces que es un grupo finitamente generado. Finalmente notemos que es libre por el resultado 1.7.32 que nos dice que todo subgrupo de un grupo libre es libre, en particular al ser F' subgrupo de F que es libre obtenemos que F' es libre tal como queríamos ver.

2. Por el lema 2.0.5 obtenemos directamente que H es grupo finitamente generado. Si F es un libre de índice finito en G podemos tomar $H \cap F$ que es libre por ser subgrupo de un libre de acuerdo al resultado 1.7.32. El índice resulta ser finito puesto que

$$[H : F \cap H] \leq [G : F] < \infty.$$

■

Veamos ahora unos ejemplos y contraejemplos de grupos virtualmente libres.

EJEMPLO 2.0.7. Veamos algunos ejemplos elementales de grupos que son de esta familia y algunos que no lo sean.

Agregar la construcción de la presentación de los grupos virtualmente libre.

1. Cualquier extensión de un grupo libre por un grupo finito es un grupo virtualmente libre,

$$1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$$

donde K es un grupo finito y F es un grupo finitamente generado libre. En particular esto nos da los casos más elementales de productos directos y semidirectos, esto es $G = F \times K$ o bien $G = F \rtimes K$. En este capítulo veremos que todo grupo virtualmente libre podemos considerarlo como un subgrupo de una extensión de este tipo.

2. El ejemplo más sencillo de un grupo que no es virtualmente libre es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La primera observación es que al ser abeliano si tiene un subgrupo libre necesariamente tiene que ser isomorfo a \mathbb{Z} .

Nos alcanza con ver que no es virtualmente \mathbb{Z} . Sea F un subgrupo que es isomorfo a \mathbb{Z} . Sea $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el generador de F . Probaremos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/F$ tiene orden infinito. Para eso consideraremos $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que p, q son primos distintos y ambos coprimos con m, n . Veamos que $[(p, q)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/F$ tiene orden infinito. Si no lo fuera deberían existir $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ de manera que

$$\alpha(p, q) = \beta(n, m)$$

como todos son coprimos entre sí esto nos dice que $p \mid \beta$ y similarmente que $q \mid \beta$, por lo que tenemos que $q \mid \alpha$ y $p \mid \alpha$. Esto nos dice que se pueden escribir de esta manera

$$\begin{aligned}\alpha &= p^{r_1} q^{s_1} \gamma_1 \\ \beta &= p^{r_2} q^{s_2} \gamma_2\end{aligned}$$

con $r_i, s_i > 1$ para $i = 1, 2$.

Finalmente como

$$\alpha p = \beta n$$

tenemos que $r_1 + 1 = r_2$ pero por otro lado como

$$\alpha q = \beta m$$

acá tenemos que al ser m coprimo con p luego la multiplicidad de p en la descomposición en primos de lo que está a la izquierda es $r_2 - 1 \leq 0$ mientras que lo que está a la derecha es r_2 . Esto es una contradicción que vino de suponer que $[(p, q)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/F$ tenía orden finito por lo tanto tenemos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no puede ser virtualmente libre.

§2.1. Grupos independientes de contexto.

En esta sección definiremos una familia de grupos que veremos más en adelante que coincide con los grupos virtualmente libre.

DEFINICIÓN 2.1.1. Si G es un grupo finitamente generado tal que para ciertos generadores Σ resulta que $WP(G, \Sigma)$ es independiente de contexto entonces diremos que G es un **grupo independiente de contexto**.

Como corolario de la proposición 1.6.3 y de saber que los lenguajes independiente de contexto forman un cono 1.6.2 la definición anterior no depende del conjunto de generadores.

Veamos algunos ejemplos de grupos de esta familia.

EJEMPLO 2.1.2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es un grupo independiente de contexto. Si tomamos los siguientes generadores $\Sigma = \{a, b, c\}$ tal que tenemos un morfismo de monoides $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por $\pi(a) = (1, 0), \pi(b) = (0, 1), \pi(c) = (-1, -1)$. Bajo esta presentación

$$WP(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \Sigma) = \{w \in \Sigma^* : \exists n \in \mathbb{N}, |w|_a = |w|_b = |w|_c = n\}.$$

Este lenguaje no es independiente de contexto. Para eso usemos el lema del pumping 1.3.15 para probarlo por contradicción. Si fuera independiente de contexto debería existir una constante $n \geq 0$ tal que hace valer las hipótesis del lema. Consideremos la palabra $w = a^n b^n c^n \in WP(G, \Sigma)$. Si tenemos una factorización $uvwxy = a^n b^n c^n$, que $|vwx| \leq n$ implica que no todas las letras aparecen en vwx . Supongamos que la letra que no aparece es c . Por otro lado como $|vx| \leq 0$ esto nos dice que al menos una letra aparece en la subpalabra vx . Si tomamos $i = 0$ notemos que la palabra $uwy \in WP(G, \Sigma)$ pero esto es una contradicción porque la cantidad de c en esta palabra es mayor que de a o b .

Una pregunta natural es intentar entender la relación entre la clasificación del lenguaje del problema de la palabra de un grupo dado y las distintas familias de grupos que le corresponden.

|| **TEOREMA 2.1.3 (Muller-Schupp 1983).** *[?] Todo grupo virtualmente libre es independiente de contexto.*

Demostración. Sea G grupo virtualmente libre presentado por $G = \langle \Sigma \mid R \rangle$. Veamos de construir un autómata de pila de manera que acepta al lenguaje $WP(G, \Sigma)$.

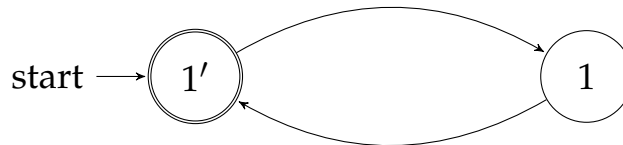
Fijemos entonces un subgrupo libre de índice finito F que lo podemos tomar de manera que sea normal por la proposición 2.0.6. Sea T conjunto transversal a derecha de G/F que sabemos que es finito. Consideremos al conjunto $\Delta = \Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup T$ de generadores de nuestro grupo porque en particular sabemos que Σ generaba .

OBSERVACIÓN 2.1.4. En particular los grupos virtualmente libres son independiente de contexto usando la equivalencia 1.3.9. Más aún su problema de la palabra es un lenguaje independiente de contexto determinístico y como tal tiene las siguientes buenas propiedades algorítmicas ??.

EJEMPLO 2.1.5. Consideremos los siguientes ejemplos que nos irán guiando para entender todas las equivalencias.

- E1.** Dado un grupo libre F_Σ veamos cómo construir un autómata \mathcal{M} tal que acepta su problema de la palabra. Pensemos un autómata de pila no determinístico que tenga dos estados. Uno inicial que también va a ser final para poder aceptar la palabra vacía que corresponde al elemento 1 de nuestro grupo y otro estado para las palabras que no están en el problema de la palabra. Para eso la idea es tener en la pila lo que fuimos leyendo de nuestra palabra hasta el momento visto como un elemento en el grupo. Esto es, cada vez que leemos una letra de la palabra ver de multiplicarla como un elemento en el grupo con lo que

tenemos en el tope de la pila. Eventualmente cuando hayamos recorrido la palabra entera debería quedarnos una palabra en la pila que queremos que sea exactamente 1 y esto es lo mismo que pedir que sea aceptada por pila vacía. Entonces este automáta lo podemos representar de la siguiente manera:



Donde las transiciones del estado 1' a 1 son todas las transiciones en las cuales la letra que estamos por leer no es la inversa de lo que esté al tope de la pila. Por otro lado las transiciones del estado 1 al estado 1' son todas las que lo que leemos es justamente el inverso de lo que está al tope de la pila.

E2. Para $C_2 * C_3$ es un autómata de 12 estados.

§2.2. Grafos de Cayley.

Un grafo en esta sección va a estar definido por su conjunto de vértices $V(X)$ y por uno de aristas $E(X) \subseteq V(X) \times V(X)$. En particular las aristas no van a estar dirigidas y no tomaremos a (v, v) como una arista para ningún $v \in V(X)$.

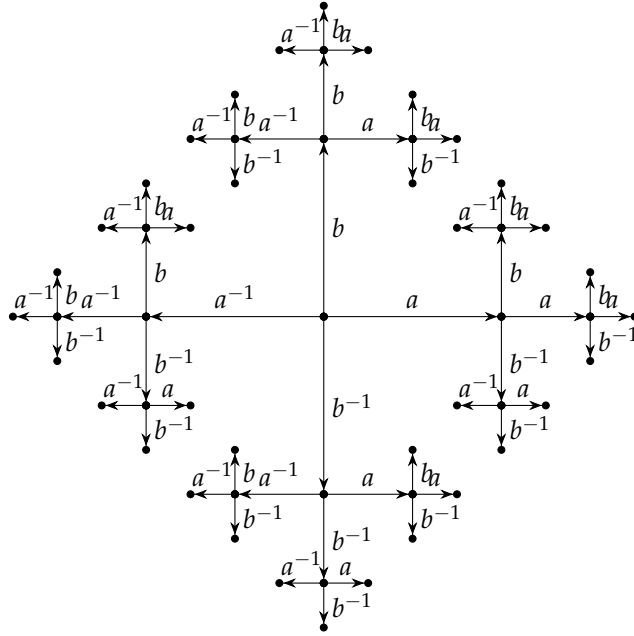
DEFINICIÓN 2.2.1. Sea G un grupo finitamente generado y Σ un conjunto de generadores como grupo. Supongamos que $1 \notin \Sigma$. Definimos el **grafo de Cayley** $\Gamma = \text{Cay}(G, \Sigma)$ como el grafo que tiene como vértices $V(\Gamma) = G$ y aristas $(g, h) \in E(\Gamma)$ sii $h = ga$ para ciertos $g, h \in G$ y $a \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$.

Para una arista (g, ga) llamaremos la *etiqueta* al generador a . Extendemos esta definición a caminos sobre el grafo para obtener una palabra en el monoide Σ^* . Este grafo por como lo definimos no tiene aristas múltiples ni tampoco tiene bucles. Dado que Σ es un conjunto d tenemos que el grafo Γ es conexo.

El grafo de Cayley lo podemos ver como un espacio métrico justamente si hacemos que todas las aristas sean isométricas a $[0, 1]$. Esto es que $d(g, ga) = 1$ para todo $g \in G, a \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$. Un camino $\alpha = g_0 \dots g_n$ es una *geodésica* si $d(g_i, g_j) = j - i$ para todo $i, j \in [0, n]$.

Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos. En particular los árboles vistos como espacios métricos resultan ser *únicamente geodésicos*. Esto es que dados v, w dos vértices existe una única geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow T$ tal que $\gamma(0) = v$ y $\gamma(1) = w$.

EJEMPLO 2.2.2. Sea $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ el grupo libre en a, b . Su grafo de Cayley para estos generadores tiene la siguiente pinta,



Notemos que este grafo resulta ser un árbol y esto es algo que vale en general para todos los grupos libres cuando miramos respecto a sus generadores canónicos.

Como todo grupo libre es tal que sus grafos de Cayley resultan ser árboles por un resultado clásico de Serre, ver [?]. Es razonable pensar que todo grupo virtualmente libre es tal que su grafo de Cayley se parezca a un árbol. La primera noción que podemos tomar para modelizar esto es el de tener un treewidth finito.

DEFINICIÓN 2.2.3. Una **descomposición en un árbol** de un grafo X es un árbol T y un mapa

$$X : V(T) \rightarrow \mathcal{P}(V(X))$$

que denotaremos X_t para cada vértice $t \in V(T)$. Le vamos a pedir que cumpla las siguientes condiciones:

- T1.** Para todo vértice $v \in V(X)$ debe existir $t \in V(T)$ tal que $x \in X_t$.
- T2.** Para toda arista e entre dos vértices $v, w \in V(X)$ debe existir $t \in V(T)$ tal que $v, w \in X_t$.
- T3.** Si $v \in V(X)$ es tal que $v \in X_t \cap X_s$ luego $v \in X_r$ para todo r en la geodésica que va desde s a t dentro de T . En otras palabras esto es que $\{t \in V(T) : v \in X_t\}$ forma un subárbol.

La idea de la descomposición es que los *bolsones* $X_t \in \mathcal{P}(V(T))$ no tengan muchos vértices si es que queremos modelizar que el grafo se parezca a un árbol. Esto nos conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2.4. El **bagsize** de una descomposición en un árbol T de un grafo X es el siguiente valor:

$$bs(X, T) = \{\sup |X_t|, t \in V(T) : T \text{ descomposición de } X\} - 1$$

Un grafo X tiene **treewidth finito** si existe una descomposición en un árbol de bagsize finito.

EJEMPLO 2.2.5. En particular si el grafo X es un árbol notemos que tiene treewidth exactamente igual a 1. Una manera de probarlo es tomar T la subdivisión baricéntrica de X . Este es el siguiente árbol que tiene como vértices a

$$V(T) = \{s \mid s \in V(X) \vee s \in E(X)\}.$$

Tomamos todos los vértices de X y los agregamos a los de T y agregamos un vértice por cada arista del grafo X . Finalmente las aristas están formadas por

$$E(T) = \{(s, t) \mid t \subset s \vee s \subset t\}$$

agregamos una arista entre cada par de vértices de T tales que uno se corresponde con un vértice de X y el otro con una arista que lo contiene en X .

La descomposición que tomamos entonces es la siguiente. Por cada $t \in V(T)$ tenemos ya armados los bolsones por la construcción que hicimos. Esto es que:

- Si t es un vértice que ya estaba en $V(X)$ entonces $X_t = \{t\}$.
- Si t lo agregamos por una arista $(x, y) \in E(X)$ entonces $X_t = \{x, y\}$.

Por como los definimos es evidente que $|X_t| \leq 2$ para todo $t \in V(T)$. De esta manera si vemos que se trata de una descomposición en un árbol tendremos probado que $bs(X, T) = 1$ tal como queríamos ver.

Finalmente veamos que se trata de una descomposición. Corroboremos que cumple las tres condiciones necesarias.

- T1.** Todo vértice $v \in V(X)$ lo podemos ver como uno en T . Su bolsón asociado X_v lo tiene como único elemento por la construcción de esta descomposición.
- T2.** Si $xy \in E(X)$ entonces tenemos un vértice $t \in V(T)$ tal que $X_t = \{x, y\}$.
- T3.** Sea $x \in X_t \cap X_s$. Por como armamos los bolsones, uno de estos dos tiene que corresponderse con una arista de X . Supongamos que X_t tiene esa pinta entonces $X_t = \{x, y\}$ para cierto vértice $y \in V(X)$.

En el caso que $X_s = \{x\}$ la geodésica que podemos tomar entonces es st puesto que s se corresponde con el vértice x y sabemos que existe una arista $st \in E(T)$ porque justamente t se corresponde con una arista en X que contiene a x .

En el caso que $s \in V(T)$ sea tal que el bolsón X_s se corresponda con los vértices que aparecen en una arista debería ser del tipo $X_s = \{x, z\}$ para cierto $z \in V(X)$. Si miramos la geodésica sobre T entre ambos vértices no es más que el siguiente camino tvs donde $v \in V(T)$ es el vértice que está tanto en el árbol original X como en la subdivisión baricéntrica T . Esto es que $X_v = \{x\}$. De esta manera x está en todos los bolsones correspondientes a la geodésica sobre T tal como queríamos ver.

PROPOSICIÓN 2.2.6. Sea Γ grafo tal que tiene una descomposición en un árbol T . Sean X, Y, Z bolsones tales que el vértice correspondiente a Z en el árbol T está en la geodésica que va de X a Y . Sean $x \in X, y \in Y$ tales que $x = x_0 \dots x_n = y$ es algún camino en Γ conectándolos. Entonces debe existir algún $0 \leq i \leq n$ tal que $x_i \in Z$.

Demostración. Vamos a demostrarlo haciendo inducción en la longitud n del camino. El caso base es que $n = 0$ por lo tanto $x = y$. En este caso por ser una descomposición en un árbol tenemos que usando la tercer propiedad que $x \in Z$ también.

Para el paso inductivo tomemos X' bolsón que contiene tanto a x como a x_1 que sabemos existe por ser una de las propiedades de las descomposiciones en árboles. Si este bolsón X' es Z ya está porque nos alcanza con tomar $i = 1$ de manera que $x_1 \in Z$. En el caso que esto no ocurra miramos el camino de longitud $n - 1$ dado por $x_1 x_2 \dots x_n = y$ y usando la hipótesis inductiva llegamos al resultado. ■

DEFINICIÓN 2.2.7. Sea Γ un grafo y $C \subseteq V(\Gamma)$ un conjunto de vértices entonces definimos los **vecinos de C** por medio de

$$N(C) = \{v \in V(\Gamma) : \exists w \in C, vw \in E(\Gamma)\}.$$

De esta manera podemos definir recursivamente los l -ésimos vecinos por medio de $N^l(C) = N(N^{l-1}(C))$.

OBSERVACIÓN 2.2.8. Esta definición la podemos escribir de manera más concisa como $N^l(C) = \{v \in V(\Gamma) : \exists w \in C, d(v, w) \leq l\}$.

PROPOSICIÓN 2.2.9. Si $(X_t)_{t \in V(T)}$ es una descomposición en un árbol T para un grafo Γ entonces si tomamos como bolsones a $N^l(X_t)$ también tenemos una descomposición en un árbol.

Demostración. Probemos este resultado haciendo inducción en l . Basta verlo para el caso base porque el paso inductivo es idéntico. Sea entonces $l = 1$, en este caso notemos que las dos primeras condiciones de la descomposición en un árbol se siguen cumpliendo porque no hicimos más que agrandar los bolsones. Esto es que si X_t era un bolsón luego $X_t \subseteq N(X_t)$. Debemos ver que cumple la tercer condición. Partamos de un vértice $x \in V(X)$ tal que $x \in N(X_s) \cap N(X_t)$ y veamos que si $r \in V(T)$ está en la geodésica de t a s entonces $x \in N(X_r)$. Notemos que en este caso debe existir algún $y \in N(X_s)$ tal que $xy \in E(X)$. Análogamente existe $z \in N(X_t)$ tal que $xz \in E(X)$. Si no fuera así tendríamos que $x \in X_s \cap X_t$ y esta condición ya se cumpliría por ser los bolsones de una descomposición. Entonces si usamos la proposición 2.2.6 tomando el camino yxz tenemos que alguno de estos tres vértices debe estar en X_r . De esta manera $x \in N(X_r)$ tal como queríamos ver. ■

DEFINICIÓN 2.2.10. Dado un grafo X , el **borde** de un conjunto de vértices $C \subseteq V(X)$ se define como

$$\beta C = \{u \in V(X) : \exists v \in V(X), uv \in E(X), (u \in C \wedge v \in \bar{C}) \vee (u \in \bar{C} \wedge v \in C)\}.$$

EJEMPLO 2.2.11. Construyamos una descomposición en un árbol que podemos hacer en general para todos los grafos de Cayley de grupos finitamente generados. Consideremos el grafo $\Gamma = \text{Cay}(G, \Sigma)$ para cierto conjunto de generadores Σ finito.

Sea $V_n = \Gamma \setminus B_n(1)$ tal que $V_0 = \Gamma \setminus \{1\}$. El árbol que vamos a considerar va a tener como vértices a conjuntos de vértices del grafo Γ de manera que resultará evidente los bolsones que vamos a tomar para la descomposición. Los vértices del árbol T van a estar dados por los siguientes conjuntos,

$$V(T) = \{\beta C : C \subseteq V_n \text{ componente conexa}\}$$

esto es todas las fronteras de las componentes conexas que nos quedan cuando consideramos algún V_n . Las aristas entonces van a estar dadas por lo siguiente,

$$E(T) = \{\beta C \beta D : C \subseteq D \subseteq V_n, C \subset V_{n+1}\}$$

esto es que C es una componente conexa del grafo que queda de sacarla la bola de radio un número mayor que el que está D .

Agregar dibujito de esta descomposición, creo que eso explica mucho mejor.

Notemos en particular que por como definimos este grafo T resulta que si C es una componente conexa de V_n entonces solo existe una única arista $(\beta C, \beta D)$ tal que $D \subseteq V_{n+1}$. Esto se debe a que al ser C conexo entonces como $V_{n+1} \subseteq V_n$ en particular $C \subseteq V_n$ y debe estar contenida en una sola componente conexa $D \subseteq V_{n+1}$.

Podemos ver que así como lo construimos tenemos que el grafo T resulta ser un árbol tal que su raíz es $B_1(\Gamma)$.

Para ver que es un árbol veamos primero que es conexo. Dado un vértice $\beta C \in V(T)$ vamos a armar un camino que lo conecte con la raíz del árbol $B_1(\Gamma)$. Usemos inducción en el n tal que C es una componente conexa de V_n . El caso base es algún C tal que es una componente conexa de V_2 y queremos armarnos un camino que lo una con $B_1(\Gamma)$. Dado que $V_2 \subseteq V_1$ en particular tenemos que $C \subseteq V_1$. De esta manera por la definición tenemos que existe una arista $\beta C B_1(0)$ tal como queríamos ver.

Para el paso inductivo supongamos para cualquier borde de una componente conexa de V_{n+1} tenemos un camino que lo une con la raíz $B_1(\Gamma)$ y veamos de construirnos un camino con cualquier borde de una componente conexa $C \subseteq V_n$. De esta manera debe existir D componente conexa de V_{n+1} tal que $C \subseteq D$. Esto es porque $V_{n+1} \subseteq V_n$ y al ser C un conexo si interseca alguna de las componentes conexas de V_{n+1} debe estar contenida en ella. Necesariamente debe intersecar a alguna de estas componentes conexas porque particionan al espacio. Así vimos que existe una arista $(\beta C, \beta D)$ y ahora usando la hipótesis inductiva obtenemos un camino de $B_1(\Gamma)$ con βD . Concluimos que el grafo T es conexo.

Para terminar de ver que es un árbol veamos que es acíclico. Dado un camino cerrado σ en T probemos que necesariamente tiene que repetirse algún vértice por lo tanto ningún camino cerrado puede ser un ciclo. Vamos a probarlo usando inducción en el máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \in V_n$ y βC es uno de los vértices en el camino. Para el caso base notemos que si σ es un camino cerrado tal que el máximo n que aparece es $n = 1$ entonces necesariamente σ es idéntico al camino constante fijo en $B_1(0)$. Para el paso inductivo supongamos que para todo camino

cerrado con máximo $m \in \mathbb{N}$ tal que algún vértice que aparece en este camino es una componente conexa de V_m resulta ser $n - 1$ entonces este camino no es un ciclo. Veamos que si $m = n$ entonces este camino cerrado también resulta ser un ciclo.

Partamos de un camino tal que pasa por βC con $C \subseteq V_n$. Como no existe $\beta C, \beta C' \in E(T)$ tal que C, C' sean componentes conexas de un mismo V_n por la definición que dimos de las aristas. Necesariamente tiene que haber una arista con alguna componente conexa $D \in V_{n-1}$ dado que n es máximo en este camino cerrado. Como vimos anteriormente solamente hay una única arista que una a βC con alguna βD con $D \subseteq V_{n-1}$. Esto nos dice que si el camino cerrado pasa por la arista $(\beta C, \beta D)$ necesariamente debe volver a pasar por la arista $(\beta C, \beta D)$ por lo tanto no es un ciclo. Concluimos que el grafo T es acíclico y por lo tanto como es conexo también resulta que T es un árbol.

Para ver que es una descomposición de árboles debemos ver que cumple las tres condiciones 2.2.3 de la definición.

- T1.** La primera condición la cumple por como lo definimos porque cualquier vértice del grafo $g \in V(\Gamma)$ es tal que existe $n \in \mathbb{N}$ de manera que $d(1, g) = n$, por lo que está en alguna componente conexa $C \subseteq V_{n-1}$. En particular como la distancia es exactamente n tiene que existir una arista $gg' \in E(\Gamma)$ con un vértice $g' \in V_{n-1}$ y por lo tanto $g \in \beta C$.
- T2.** La segunda condición partimos de una arista $gh \in E(\Gamma)$ luego miramos las distancias que hay al 1 de ambos vértices para conseguirnos el bolsón adecuado. Supongamos que ambas están a la misma distancia del 1. En tal caso sea n tal que $d(g, 1) = d(h, 1) = n$ luego si miramos V_{n-1} notemos que tienen que estar en la misma componente conexa porque existe una arista entre ambos vértices. Sea esta componente C luego como están a distancia exactamente n ambas están en el borde, esto es que $g, h \in \beta C$ tal como queríamos ver. El otro caso es que $d(g, 1) = n < d(h, 1) = n + 1$ y en este caso como están conectadas resulta que están en βC si C es la componente conexa que contiene a h en V_n por definición del borde de un conjunto de vértices de un grafo.
- T3.** Para la tercera condición supongamos que hay $g \in V(\Gamma)$ tal que está en la intersección de dos bolsones $\beta C \cap \beta D$. Queremos ver que está en todos los bolsones que aparecen en la geodésica de βC a βD en el árbol T . Si $d(g, 1) = n$ luego solo puede estar en la frontera de alguna componente conexa C tal que esté en alguna de estas opciones V_{n-1}, V_n, V_{n+1} . Supongamos que $D \subseteq V_n$, en tal caso vale que $D \not\subseteq V_n$ porque sino tendríamos que resulta ser la misma componente conexa. Sin pérdida de generalidad supongamos que $C \subset V_n$ mientras que $D \subset V_{n+1}$. Como ambas son componentes conexas luego si hay una intersección tiene que haber una contención, esto es que $D \subseteq C$. De esta manera vemos que $\beta C, \beta D \in E(T)$ por lo tanto como están unidos por una arista la geodésica es justamente esta arista.

OBSERVACIÓN 2.2.12. Si tenemos un grupo G tal que es independiente de contexto consideremos \mathcal{G} gramática que genera al lenguaje del problema de la palabra, $WP(G, \Sigma) = L(\mathcal{G})$. Si A es una de las variables de esta gramática podemos obtener el lenguaje L_A de palabras generadas a partir de esta variable, donde

$$L_A = \{w \in \Sigma^* \mid A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^* w\}.$$

Veamos que si $v, v' \in L_A$ entonces $v =_G v'$, es decir son el mismo elemento vistos en el grupo G . Para eso si tenemos una derivación que en algún momento llega a $S \Rightarrow_G^* \beta A \gamma \Rightarrow_G^* uvw$ también tenemos otra derivación que deriva en $S \Rightarrow_G^* \beta A \gamma \Rightarrow_G^* uv'w$. Es decir que $uvw, uv'w \in \text{WP}(G, \Sigma)$ por lo tanto

$$uvw =_G 1 =_G uv'w \implies v =_G v'$$

tal como queríamos ver.

El siguiente resultado es un teorema de Muller-Schupp demostrado en [MS85]. La demostración sigue la exposición del paper [ADL⁺17].

TEOREMA 2.2.13 (Muller - Schupp 1985). *Todo grupo independiente de contexto es tal que su grafo de Cayley tiene treewidth finito.*

Demostración.

La descomposición que hicimos en 2.2.11 es válida para todo grafo de Cayley. Veamos que esta descomposición para un grupo independiente de contexto tiene treewidth finito. Buscamos $k \in \mathbb{N}$ tal que nos permita acotar $|\beta C| \leq k$ para todo $\beta C \in V(T)$. Alcanza con ver que los diámetros de los bolsones βC están acotados uniformemente, esto es que exista $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{diam}(\beta C) = \sup_{g, h \in \beta C} d(g, h) \leq M$$

para todo βC de la descomposición de árboles. Si esto sucede, al ser el grupo finitamente generado por Σ entonces $|\Sigma|^M < \infty$.

Dado que G es un grupo independiente de contexto entonces el lenguaje del problema de la palabra para estos generadores $\text{WP}(G, \Sigma)$ tiene una gramática \mathcal{G} independiente de contexto que lo genera. Consideremos que está en la forma normal de Chomsky.

Para cada variable A de nuestra gramática podemos considerar el siguiente lenguaje

$$L_A = \{w \in \Sigma^* : A \Rightarrow_G^* w\}.$$

Para este lenguaje introduzcamos un número natural $k_A \in \mathbb{N}$ definido por $k_A = \max_{w \in L_A} |w|$. Como tenemos finitas variables en nuestra gramática \mathcal{G} podemos considerar $k = \max_{A \in V} k_A$. Veamos que $\text{diam}(\beta C) \leq 3k$ para todo $\beta C \in V(T)$.

Sean $g, h \in \beta C$ para cierta C componente conexa de V_n , acotemos $d(g, h)$. Para eso consideremos una geodésica α que una 1 con g y análogamente otra γ que una 1 con h . Como $C \cup \beta C$ es conexo podemos tomar un arco τ que una g con h dentro de $C \cup \beta C$. De esta manera tenemos un triángulo tal que si leemos las letras que están en la etiqueta del arco empezando desde 1 y moviéndonos por α leemos la etiqueta u . Cuando nos movemos por τ leemos la etiqueta v . Consideremos que esta etiqueta v es tal que $|v| > 1$ caso contrario ya tenemos la cota probada. Finalmente leemos la etiqueta w cuando regresamos al 1 por medio de γ . Como uvw está en un ciclo en el grafo de Cayley entonces $uvw \in \text{WP}(G, \Sigma)$ y por lo tanto tenemos alguna derivación $S \Rightarrow_G^* uvw$.

Ya que tenemos esta derivación $S \Rightarrow_G^* uvw$ miremos la primer variable que deriva a v como subpalabra. Esto es que para la subpalabra v sabemos que existe alguna variable A tal que $A \Rightarrow_G^* v'v''$ donde v es a su vez una subpalabra de $v'v''$. Tomamos la última variable que aparece en la derivación. Ésta debe existir porque en particular S cumple lo pedido de ser una variable que deriva a una palabra que contiene a v como subpalabra.

Como está en la forma normal de Chomsky sabemos que al ser $|v| \geq 2$ entonces tenemos que la derivación tiene la siguiente pinta

$$S \Rightarrow_G^* u'Aw' \Rightarrow_G u'BCw' \Rightarrow_G^* u'v'v''w'$$

donde B, C son otras variables. En particular notemos que $A \Rightarrow_G^* v'v''$, $B \Rightarrow_G^* v'$ y $C \Rightarrow_G^* v''$.

Si miramos la geodésica α sabemos que cuando leímos u' habremos llegado a un vértice del grafo x , y al estar sobre la geodésica misma tenemos la siguiente igualdad,

$$d(x, g) = d(1, g) - d(1, x).$$

Análogamente cuando miramos la geodésica γ en la instancia que ya leímos w' saliendo desde h llegamos a cierto vértice z y por la misma razón que en el caso anterior obtenemos

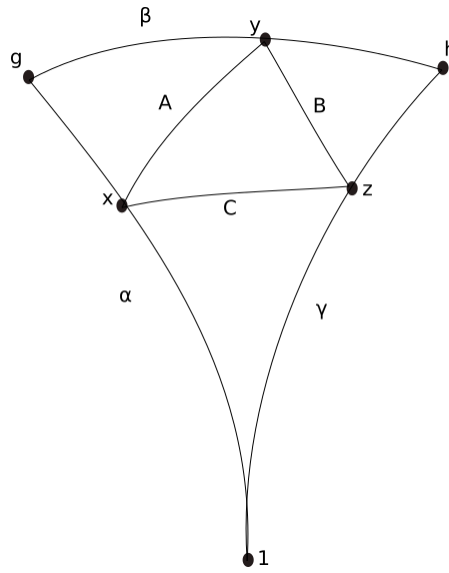
$$d(z, h) = d(1, h) - d(1, z).$$

Por otro lado si consideramos el vértice y al que llegamos después de leer $u'v'$ que sabemos que está en el arco τ dado que v es subpalabra de $v'v''$. Usando que $y \in \tau \subseteq C \cup \beta C$ tenemos que $d(1, y) \leq n + 1 = d(1, g)$ por ser C una componente conexa de V_n , entonces vale la siguiente desigualdad

$$d(x, g) = d(1, g) - d(1, x) \leq d(1, y) - d(1, x) = d(x, y)$$

y análogamente tenemos que $d(z, h) \leq d(z, y)$.

Por la observación 2.2.12 notemos que si reemplazamos v' por la palabra de menor tamaño del lenguaje L_B seguimos teniendo un ciclo pero de longitud idéntica o más chica. La palabra v' la leemos justamente cuando vamos del vértice x al vértice y , así la distancia $d(x, y)$ está acotada por la mayor de todas las palabras que puedan derivarse de B . Idénticamente hacemos esto para las variables A y C . Por como definimos a k tenemos las siguientes cotas $d(x, y), d(y, z), d(x, z) \leq k$.



Ahora estamos listos para ver que $d(g, h) \leq 3k$. Usamos la desigualdad triangular tres veces,

$$\begin{aligned} d(g, h) &\leq d(g, x) + d(x, z) + d(h, z) \\ &\leq d(x, y) + d(x, z) + d(y, z) \leq 3k \end{aligned}$$

tal como queríamos ver. ■

EJEMPLO 2.2.14. Ejemplo de $PSL(2, \mathbb{Z})$ o de algún otro grupo que sea un producto libre de grupos finitos.

§2.3. Cuasisometrías.

DEFINICIÓN 2.3.1. Sean X, Y espacios métricos. Una **cuasisimetría** es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que:

Q1. Para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ existe constante $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{A}d_X(x_1, x_2) - A \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Ad_X(x_1, x_2) + A$$

Q2. Existe una constante real $C \geq 0$ tal que para todo punto $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que

$$d(y, f(x)) \leq C$$

Dos espacios métricos que se dicen *cuasisométricos* si existe una cuasisimetría entre ellos.

OBSERVACIÓN 2.3.2. Si nos restringimos a que los espacios métricos sean grafos podemos redefinir una cuasisometría para que sea una función de los vértices de un grafo a los del otro. Esto es si tenemos dos grafos Γ_1 y Γ_2 entonces son cuasisométricos como espacios métricos si y solo si existe $f : V(\Gamma_1) \rightarrow V(\Gamma_2)$ tal que

- Para todo $v, w \in V(\Gamma_1)$ existe constante $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{A}d_X(v, w) - A \leq d_Y(f(v), f(w)) \leq Ad_X(v, w) + A$$

- Existe una constante real $C \geq 0$ tal que para todo vértice $y \in V(\Gamma_2)$ existe $v \in V(\Gamma_1)$ tal que

$$d(y, f(v)) \leq C$$

Para esto si tenemos una cuasisometría g como espacios métricos definamos una sobre los vértices f de la siguiente manera. Por cada vértice $v \in V(\Gamma_1)$ consideremos $g(v) \in \Gamma_2$. Si $g(v) \in V(\Gamma_2)$ tomamos $f(v) = g(v)$. El otro caso es que $g(v)$ cae en el medio de alguna arista $xy \in E(\Gamma_2)$. Supongamos que $d(g(v), x) \leq \frac{1}{2}$ porque la distancia máxima con alguno de los vértices debe ser no más de $\frac{1}{2}$ porque justamente las aristas son isométricas con el intervalo $[0, 1]$. En este caso definamos $f(v) = x$. Notemos ahora que la distancia entre dos vértices por medio de f a lo sumo aumenta. Tenemos que

$$d(f(v), f(w)) \leq d(g(v), g(w)) + 1$$

para $v, w \in V(\Gamma_1)$ porque a lo sumo las imágenes por g están a distancia $\frac{1}{2}$ de alguno de los vértices. De esta manera notemos que si tomamos la constante $C + 1$ nos sirve. Para ver que la imagen es cuasidensa idénticamente tomando $C + 1$ nos sirve. En definitiva f definida de esta manera es una cuasisometría con constante $C + 1$.

|| **PROPOSICIÓN 2.3.3.** *Si existe $f : X \rightarrow Y$ cuasisometría entonces también debe haber $g : Y \rightarrow X$ cuasisometría.*

Demostración. Resultado estándar. Ver [BH13]. ■

Todo espacio métrico es cuasisométrico consigo mismo por medio de la identidad. La composición de cuasisometrías también sigue siendo una cuasisometría. Con esta proposición vemos que ser cuasisométricos es una relación de equivalencia entre los espacios métricos.

Intuitivamente una cuasisometría entre espacios métricos nos dice que estos resultan ser bastante similares al menos desde cierta distancia.

EJEMPLO 2.3.4. Ejemplo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para ver que no es cuasisométrico con un árbol o bien podría rehacer el ejemplo de la parte anterior.

Todo grafo de Cayley lo podemos pensar como un espacio métrico tal como lo definimos en la sección 2.2. Veamos que esto no depende de los generadores que hayamos elegido.

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Sea G grupo finitamente generado por Σ y Δ conjuntos finitos entonces $\text{Cay}(G, \Sigma)$ y $\text{Cay}(G, \Delta)$ son cuasisométricos entre sí.*

Demostración. Resultado estándar. Ver [BH13]. ■

Así otra manera de pensar que un grafo de un grupo virtualmente libre es casi un árbol es pedirle que sea cuasisométrico con un árbol. Veamos que esta categorización es equivalente a pedirle que el treewidth sea finito que era la otra caracterización que habíamos obtenido anteriormente.

PROPOSICIÓN 2.3.6. *El treewidth finito es un invariante por cuasisimetría para grafos con grado acotado uniformemente.*

Demostración. Si tenemos una cuasisimetría $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ tal que Γ_2 tiene treewidth finito $k \in \mathbb{N}$, nos gustaría ver que Γ_1 también tiene esta propiedad. Consideremos l tal que $d(f(v), f(w)) \leq l$ para vértices $v, w \in V(\Gamma_1)$ que estén conectados por una arista. Esto lo podemos tomar porque al ser una cuasisimetría

$$d(f(v), f(w)) \leq Cd(v, w) + C \leq 2C$$

entonces basta con tomar $l \geq C + 1$.

Veamos de armarnos la descomposición en un árbol T para Γ_1 . Tomaremos como árbol para descomposición al mismo T que usamos para Γ_2 . Sean X_t los bolsones de esta descomposición. Recordemos que por 2.2.9 si tomamos $N^l(X_t)$ los vecinos del bolsón X_t que están a distancia no mayor a l seguimos teniendo una descomposición. Consideraremos los bolsones $Y_t = f^{-1}(N^l(X_t))$ de vértices en Γ_1 .

Debemos ver que cumplen las tres propiedades.

T1. La primera se cumple puesto que los bolsones X_t cubren $V(\Gamma_2)$. De esta manera $\cup_{t \in T} N^l(X_t) = V(\Gamma_2)$ y por lo tanto tomando preimagen tenemos que

$$\bigcup_{t \in V(T)} f^{-1}(N^l(X_t)) = \bigcup_{t \in V(T)} Y_t = f^{-1}(V(\Gamma_2)) = V(\Gamma_1)$$

donde usamos que la preimagen de la unión es la unión de las preimágenes.

T2. La segunda condición usamos que si hay una arista $xy \in E(\Gamma_2)$ luego debe ser que $d(f(x), f(y)) \leq l$ por como tomamos a l . De esta manera como $f(x) \in X_t$ para algún $t \in V(T)$, notemos que $f(y) \in N^l(X_t)$ también. Tomando preimagen tenemos que $x, y \in f^{-1}(N^l(X_t))$ y esto es que justamente $x, y \in Y_t$ para un mismo $t \in V(T)$ tal como queríamos ver.

T3. Para la tercera condición si $x \in Y_t \cap Y_s$ queremos ver que $x \in Y_r$ para todo $r \in V(T)$ que aparezca en la geodésica de s a t . Como la preimagen de una intersección es lo mismo que la intersección de las preimágenes entonces

$$x \in f^{-1}(N^l(X_t)) \cap f^{-1}(N^l(X_s)) = f^{-1}(N^l(X_t) \cap N^l(X_s))$$

de esta manera debe existir $v \in V(\Gamma_2)$ tal que $v \in N^l(X_s) \cap N^l(X_t)$. Ahora usamos que esta es una descomposición sobre Γ_2 para notar que $v \in N^l(X_r)$. Tomando preimagen tenemos que $x \in Y_r$ tal como queríamos ver.

Finalmente debemos ver que el tamaño de los bolsones está acotado uniformemente. Esto es que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $|Y_t| \leq k$ para todo $t \in V(T)$. Como Γ_2 tiene treewidth finito tenemos que $|X_t| \leq M$ uniformemente para todo $y \in V(T)$ para cierta M . Como el grado de los grafos está acotado uniformemente por alguna constante d tenemos que

$$|N^l(X_t)| \leq d^l |X_t| \leq d^l M.$$

Finalmente notemos que al ser f una cuasisimetría tenemos que $|f^{-1}(v)| \leq k$ para todo $v \in V(\Gamma_2)$. Esto lo podemos ver porque si $f(x) = v = f(y)$ entonces

$$\frac{1}{C}d(x, y) - C \leq d(f(x), f(y)) = 0 \implies d(x, y) \leq C^2 < \infty$$

y esta cota es uniforme para todo $v \in \Gamma_2$. Así vemos que,

$$|Y_t| = |f^{-1}(N^l(X_t))| \leq C^2 d^l M < \infty$$

y tomamos k suficientemente grande para que haga valer esto. Concluimos así que la descomposición que nos armamos para Γ_1 tiene treewidth finito. ■

A partir de este resultado podemos ver que la otra manera que teníamos de pensar a los grafos que se parecen a árboles resulta ser más débil. El siguiente resultado lo demostramos en el caso general de un grafo tal que los grados de sus vértices están acotados uniformemente. Como caso particular tenemos los grafos de Cayley de grupos finitamente generados.

|| **PROPOSICIÓN 2.3.7.** *Un grafo X de grado acotado uniformemente cuasisométrico con un árbol tiene treewidth finito.*

Demostración. Dado que el grafo X es cuasisométrico a un árbol T , por la observación 2.2.5 este tiene treewidth exactamente 1. Por la proposición anterior 2.3.6 como es un invariante por cuasisimetría vemos que X debe tener treewidth finito tal como queríamos ver. ■

|| **COROLARIO 2.3.8.** *Todo grupo independiente de contexto es tal que su grafo de Cayley es cuasisométrico a un árbol.*

Demostración. Por 2.2.13 todo grupo independiente de contexto tiene treewidth finito y usando la proposición recién demostrada concluimos que su grafo de Cayley es cuasisométrico a un árbol. ■

|| **PROPOSICIÓN 2.3.9.** *Sea G grupo finitamente generado entonces si H es un subgrupo de índice finito resulta que son cuasisométricos.*

Demostración. Resultado estándar pero no tan elemental de demostrar. Es un corolario de Milnor Schwarz. Ver [Lö17]. ■

Esto nos dice que todo grupo es cuasisométrico con los subgrupos de índice finito. De esta manera obtenemos el siguiente resultado,

|| **PROPOSICIÓN 2.3.10.** *Todo grafo de Cayley de un grupo virtualmente libre es cuasisométrico a un árbol.*

Demostración. Si G es virtualmente libre entonces existe $F \leq G$ grupo libre de índice finito. Por la prop anterior 2.3.9 tenemos que el grafo de Cayley de G es cuasisométrico con el de H . Por el resultado ?? sabemos que los grafos de grupos libres son árboles y así queda demostrada la proposición. ■

Bibliografía

- [ADL⁺17] Javier Aramayona, Volker Diekert, Christopher J Leininger, Pedro V Silva, and Armin Weiß. *Algorithmic and geometric topics around free groups and automorphisms*. Springer, 2017. [52](#)
- [BH13] Martin R Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013. [55](#), [56](#)
- [HU79] John E. Hopcroft and Jeff D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1979. [8](#), [9](#), [12](#), [13](#)
- [KPS73] Abraham Karrass, Alfred Pietrowski, and Donald Solitar. Finite and infinite cyclic extensions of free groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 16(4):458–466, 1973. [38](#), [39](#)
- [Löh17] Clara Löh. *Geometric group theory*. Springer, 2017. [58](#)
- [MS85] David E Muller and Paul E Schupp. The theory of ends, pushdown automata, and second-order logic. *Theoretical Computer Science*, 37:51–75, 1985. [52](#)
- [Ser02] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Science & Business Media, 2002. [17](#), [36](#)
- [Sip13] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Course Technology, Boston, MA, third edition, 2013. [13](#)