Ideas sueltas.

1. Dowker y treewidth.

Estaría bueno que el teorema de Dowker nos diga algo sobre el treewidth de un grafo.

Si consideremos los mapas

$$X : V(T) \to V(X)$$

y

$$T : V(X) \to V(T)$$

entonces podemos definirnos una relación $R \subset V(T) \times V(X)$ por medio de xRt si $x \in X_t$.

A partir del teorema de Dowker nos podemos construir complejos simpliciales K_X y K_T tales que resultan homotópicos entre sí.

Una observación de esto es que

Observación 1.1. Si X es un árbol entonces es isomorfo como grafo a su complejo de Dowker. Esto es que $X \simeq K_X$.

En particular

Observación 1.2. T siempre resulta ser un spanning tree del complejo K_T.

2. Otra construcción para que el treewidth sea conexo.

Me gustaría probar el siguiente resultado o al menos ver dónde se rompe.

Pregunta 2.1. *Todo grupo fundamental de un grafo de grupos finito con grupos finitos tiene treewidth conexo finito.*

Lo bueno de esto sería dar una descomposición de un árbol distinta a la que aparece en [ADL+17] tal que sea conexa.

Acá estoy usando el siguiente resultado de [KPS73].

Teorema 2.2. *Un grupo es virtualmente libre sii es el grupo fundamental de un grafo de grupos finito con grupos finitos.*

Primero pensé en el caso de un grupo $G = G * H$ que en particular es el grupo fundamental del grafo que tiene dos vértices con grupos G y H que asumo finitos. El grupo de la arista es 1.

Para este caso quería tomar la siguiente descomposición.

$$\begin{aligned}
V(T) &= \{v \in G_1 * G_2 : v = wa_ih\} & h \in H, w \in G_1 * G_2 \\
&= \{v \in G_1 * G_2 : v = wb_jg\} & g \in G, w \in G_1 * G_2 \\
&= \{v \in G_1 * G_2 : v = wb_ja_i\} & w \in G_1 * G_2 \\
&= \{v \in G_1 * G_2 : v = wa_ib_j\} & w \in G_1 * G_2 \\
&= \{v \in G_1 * G_2 : v = a_i, b_j\} & w \in G_1 * G_2
\end{aligned}$$

Por como está construído es claro que T es conexo.

Habría que probar que no tiene ciclos... HACER

Para ver que es una descomposición habría que ver las tres propiedades necesarias.

- Cubren todo.
- Todas las aristas están en algún bolsón por construcción.
- Todo vértice está a lo sumo en dos bolsones que resultan conexos por construcción.

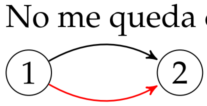
Finalmente los bolsones son conexos porque básicamente agregamos todas aristas para que nos queden conexas. Aparte los bolsones tienen dos vértices conectados por una arista o bien son una copia del grafo de Cayley de G o de H.

Esta misma idea creo que se puede extender fácilmente para obtener una descomposición para un producto libre arbitrario de grupos finitos.

Quedaría ver entonces el siguiente resultado.

Pregunta 2.3. *Un grupo amalgamado $G *_K H$ de grupos finitos tiene treewidth conexo finito.*

No me queda claro que la idea de antes pueda andar en este caso.



Tesis de licenciatura.

Referencias

[ADL+17] Javier Aramayona, Volker Diekert, Christopher J Leininger, Pedro V Silva, and Armin Weiß. *Algorithmic and geometric topics around free groups and automorphisms*. Springer, 2017.

[KPS73] Abraham Karrass, Alfred Pietrowski, and Donald Solitar. Finite and infinite cyclic extensions of free groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 16(4):458–466, 1973.