Cálculo del Momento de Inercia en Coordenadas Polares

Utilizando la fórmula

$$I = \int r^2 \, dm,$$

podemos establecer que dm en nuestras coordenadas polares será

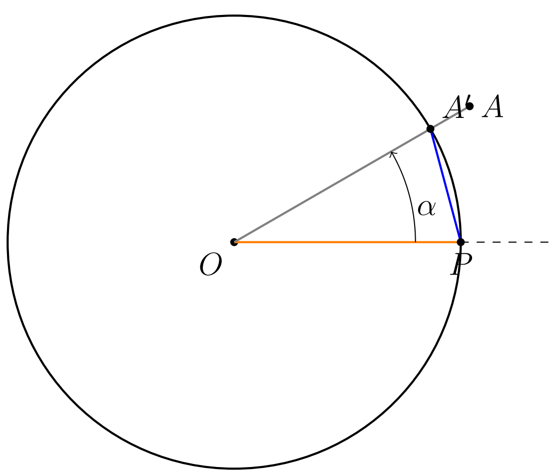
$$dm = \lambda r \, d\alpha.$$

Entonces nuestra integral ahora queda como

$$I = \int r^2 \cdot \lambda r \, d\alpha = \lambda \int r^3 \, d\alpha.$$

Ahora hay que escribir r en función de α, por lo que nos apoyaremos en la ley de senos.

A' es el lugar geométrico denotado por el segmento AP, por lo que nuestro $d\alpha$ "hace moverse" a A' por todo AP, donde en el valor máximo de α, $A' = A$, y en el valor mínimo de $\alpha = 0$, $A' = P$.



Por la ley de senos sabemos que:

$$\frac{r}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin(\theta - \alpha)}$$

De donde despejamos:

$$r = R \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(\theta - \alpha)}$$

Ya definimos r en términos de α, ya podríamos realizar la integral, sin embargo, es una integral definida, entonces hay que definir los límites que puede tomar α.

Ya conocíamos que lo mínimo para que $A' = P$ es cuando $\alpha = 0$, pero para que $A' = A$ significaría que esta ley de senos se cumpliría

$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\theta - \alpha)}$$

despejando

$$\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{R}{AP}$$

$$\sin(\theta - \alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$$

$$\frac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R}{AP}$$

$$\sin\theta\cot\alpha - \cos\theta = \frac{R}{AP}$$

$$\sin\theta\cot\alpha - \cos\theta = \frac{R}{AP}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\frac{R}{AP} + \cos\theta}\right)$$

$$\alpha \in \left[0, \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\frac{R}{AP} + \cos\theta}\right)\right]$$

Ahora ya se puede evaluar la integral

$$I(\theta) = \lambda \int r^3 \, d\alpha = \lambda \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\frac{R}{AP} + \cos\theta}\right)} \left(R \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(\theta - \alpha)}\right)^3 d\alpha$$