Herbartgymnasium Oldenburg, Klasse 12, Schuljahr 2018/2019

Differentielle Algebra und der Risch-Algorithmus

Leonard Tomczak

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Seit Newton und Leibniz die Grundsteine für die Differential- und Integralrechnung legten, spielt der Begriff der Stammfunktion ein wichtige Rolle in der Analysis. Mithilfe dieser lassen sich Integrale, also z.B. Flächen unter komplizierten Kurven, einfach berechnen. Eine wichtige Frage dabei ist, ob es stets eine Stammfunktion gibt. Diese Frage wird durch den Fundamentalsatz der Analysis, zumindest für stetige Funktionen, mit Ja beantwortet. Häufig reicht es einem allerdings nicht, nur zu wissen, dass es eine Stammfunktion gibt, man will lieber einen expliziten bzw. elementaren Ausdruck für eine Stammfunktion haben, etwa $F(x) = \frac{x^3}{3}$ als Stammfunktion von $f(x) = x^2$ anstelle von $F(x) = \int_0^x t^2 dt$. Mit dem Begriff *elementarer Ausdruck* bzw. *elementare Funktion* ist gemeint, dass, dass sich eine solche Funktion grob gesagt nur aus

- der Variablen x
- Konstanten
- den Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
- Wurzelfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktion
- Trigonometrischen Funktionen und ihren Umkerfunktionen

zusammensetzt.
Dabei stellen sich sofort folgende Fragen:

- Gibt es zu einer elementaren Funktion auch immer eine elementare Stammfunktion?
- Gibt es ein allgemeines Verfahren/einen Algorithmus zur Bestimmung einer elementaren Stammfunktion, falls es eine gibt?

Es stellt sich heraus, dass die Antwort auf die erste Frage Nein ist. Klassische Gegenbeispiele sind:

$$\int e^{(x^2)} dx \qquad\qquad \int \frac{dx}{\log(x)}$$

oder elliptische Integrale wie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3\sin^2(x)}}$$

Die Antwort auf die zweite Frage ist tatsächlich Ja, es gibt einen solchen Algorithmus, den *Risch-Algorithmus*. Er überprüft, ob eine gegebene Funktion elementar integrierbar ist und gibt ggf. eine Stammfunktion aus. In dieser Arbeit werde ich in den Kapiteln 3 und 4 einige Grundlagen hinter der zugrundeliegenden Theorie, der differentiellen Algebra (das Problem wird nämlich nicht in der Analysis sondern in der Algebra gelöst!), erklären sowie im Kapitel 5 den Risch-Algorithmus, zumindest in Teilen, vorstellen. Ich habe mich hier in der Vorstellung der Theorie stark an [1] orientiert, dabei aber viele Details ausgelassen, die dort ggf. nachzulesen sind.

Weiter habe ich den Risch-Algorithmus in Teilen auch in *Python* implementiert. Den Code sowie diese Dokumentation sind auf https://github.com/leoli1/RischAlgorithm zu finden.

2 Einige algebraische Begriffe

2.1 Körpererweiterungen

In den folgenden Kapiteln werde ich einige Begriffe wie *Körpererweiterung, quadratfreies Polynom, Resultante* verwenden und als bekannt voraussetzen, werde also nicht näher auf diese eingehen. Daher stelle ich kurz einige Definitionen und Eigenschaften zu diesen Begriffen vor. Dieser Teil kann aber sonst auch ggf. übersprungen werden.

Definition. *Seien* $(K, +_K, \cdot_K)$ *und* $(F, +_F, \cdot_F)$ *Körper.* F *ist eine* Körpererweiterung *von* K*, falls gilt:*

- $K \subset F$
- *Für alle* $x, y \in K$ *gilt* $x +_K y = x +_F y$ *und* $x \cdot_K y = x \cdot_F y$.

Z.B. ist $\mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$.
In den folgenden Kapiteln interessiert uns eine spezielle Art von Körpererweiterungen, und zwar denen, die man durch *Adjunktion* neuer Elemente erhält:

Definition. *Sei* K *ein Körper und* x *zunächst nur ein Symbol. Dazu definieren wir den neuen Körper* $K(x)$ (K adjungiert x)*:*

$$K(\theta) = \left\{ \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \mid a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0 \in K \right\}$$

Man kann nun nachprüfen, dass es sich hierbei tatsächlich um einen Körper handelt. Beispielsweise ist $\mathbb{C}(x)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten x.
Wir können aber auch betrachten, was passiert, zu einem Körper ein algebraisches Element adjungieren. Z.B. ist $x = \sqrt{2}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, denn es gilt $x^2 - 2 = 0$. Nach Definition ist dann:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ \frac{a_n \sqrt{2}^n + \cdots + a_1 \sqrt{2} + a_0}{b_m \sqrt{2}^m + \cdots + b_1 \sqrt{2} + b_0} \mid a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0 \in \mathbb{Q} \right\}$$

Unter Benutzung der Formeln $\sqrt{2}^n = 2^{\frac{n}{2}}$ für gerades n bzw. $\sqrt{2}^n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2}$ für ungerades n können wir die Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ einfacher hinschreiben, und zwar in der Form $\frac{a_1\sqrt{2}+a_0}{b_1\sqrt{2}+b_0}$. Dies können wir aber noch weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}\frac{a_1\sqrt{2}+a_0}{b_1\sqrt{2}+b_0} &= \frac{(a_0+a_1\sqrt{2})(b_0-b_1\sqrt{2})}{(b_0+b_1\sqrt{2}))(b_0-b_1\sqrt{2})} \\ &= \frac{(a_0b_0-2a_1b_1)+(a_1b_0-a_0b_1)\sqrt{2}}{b_0^2-2b_1^2} \\ &= \frac{(a_0b_0-2a_1b_1)}{b_0^2-2b_1^2} + \frac{(a_1b_0-a_0b_1)\sqrt{2}}{b_0^2-2b_1^2} \\ &= A+B\sqrt{2}\end{aligned}$$

Wir können also jedes Element aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in der einfachen Form $A+B\sqrt{2}$ schreiben, wir brauchen also keine Brüche. Daher unterscheidet man zwischen einer *algebraischen* und einer *transzendenten* Körpererweiterung $K(x)$. Bei letzterer ist diese Art von Vereinfachung nicht möglich.
Beispiele:

- $K = \mathbb{R}$. Körpererweiterung mit i: $\mathbb{R}(i)$, wobei i eine Lösung von $x^2+1=0$ ist. Dann gilt: $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$

- $K = \mathbb{C}(x)$. Körpererweiterung mit $\theta = \exp(x)$. θ ist transzendent über K, was man sich leicht mit Mitteln aus der Analysis überlegen kann: Angenommen, θ wäre algebraisch über K mit $y_n\theta^n + \cdots + y_1\theta + y_0 = 0$, wobei $y_0, \ldots, y_n \in K = \mathbb{C}(x)$. Wir können annehmen, dass $y_0 \neq 0$ und dass alle y_i Polynome sind (sonst multipliziere die Gleichung mit einem Hauptnenner). Betrachten wir den Grenzwert $x \to -\infty$, gilt für alle $1 \leq i \leq n : y_i\theta = y_i \exp(x)^i \to 0$. Da y_0 ein Polynom ist, gilt aber $y_0 \to \pm\infty$ und somit $\pm\infty = 0$, was offensichtlich nicht der Fall ist, θ ist also transzendent über K. Die Elemente von $K(\theta)$ sind dann Brüche von Polynomen in θ mit Koeffizienten in $K = \mathbb{C}(x)$, z.B. ist $\frac{\frac{x}{1+x^2}\exp(x)+2}{\frac{1}{x}\exp(x)^2+\exp(x)-1} \in K(\theta)$.
  Dieser Fall wird später wieder wichtig.

- $K = \mathbb{C}(x)$, Körpererweiterung mit $\theta = \sqrt{x}$, θ ist algebraisch über K denn $\theta^2 - x = 0$. Die Elemente von $K(\theta)$ sind dann von der Form $v_0 + v_1\theta = v_0 + v_1\sqrt{x}$, wobei $v_0, v_1 \in \mathbb{C}(x) = K$ ist.

Führen wir mehrere solcher Adjunktionen hintereinanderaus, wie bei den letzten beiden Beispielen, schreiben wir auch $K(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ statt $K(\theta_1)(\theta_2)\ldots(\theta_n)$.

2.2 Polynome

Hier werde ich nur auf zwei Dinge eingehen:

- quadratfreie Polynome quadratfreie Faktorisierung von Polynomen
- Resultanten

2.2.1 Quadratfreie Polynome

Definition. *Sei F ein Körper. Ein Polynom $p \in F[t]$ heißt* quadratfrei*, falls es nicht von einem Quadrat geteilt wird, d.h. es gibt kein $q \in F[t]$ mit $q^2 \mid p$ und* $\deg(q) > 0$.

Dies ist, wenn man den Zerfällungskörper[1] von p über F betrachtet, genau dann der Fall, wenn p nur einfache Nullstellen hat. Beispiele:

- $f = (x-1)(x+1)^2 \in \mathbb{C}[x]$ ist nicht quadratfrei, denn für $q = x+1$ gilt: $q^2 \mid f$.

Mithilfe der Ableitung erhalten wir eine einfache Methode, um zu überprüfen, ob ein Polynom quadratfrei ist oder nicht. Die Ableitung ist hier die Abbildung

$$\frac{d}{dx} : F[x] \to F[x],$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} + \cdots + a_1$$

Man kann sich nun leicht überlegen, dass sich der Grad einer Nullstelle beim Ableiten um genau eins verringert, d.h. ist α eine $k-$fache Nullstelle von $f \in F[x]$, also $f = (x-\alpha)^k g$, sodass α keine Nullstelle von g ist, so ist $\frac{d}{dx} f = (x-\alpha)^{k-1}\tilde{g}$, wobei wieder α keine Nullstelle von $\tilde{g}$ ist.

Betrachten wir nun ein $f \in F[x]$ mit der Faktorisierung:

$$f = A \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)^{k_i}$$

so gilt:

$$\frac{d}{dx} f = g \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)^{k_i - 1}$$

wobei die α_i keine Nullstellen von g sind, womit insbesondere $\mathrm{ggT}(f,g) = 1$ ist. Damit folgt:

$$\mathrm{ggT}(f, \frac{d}{dx} f) = \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)^{k_i - 1} \qquad (*)$$

Wir wollten ja eigentlich überprüfen, ob f quadratfrei ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn f nur einfache Nullstellen hat, d.h. für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt: $k_i = 1$, was nach der eben hergeleiteten Formel äquivalent dazu ist, dass $\mathrm{ggT}(f, \frac{d}{dx} f) = \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)^{1-1} = 1$ ist. Also:

$$f \text{ ist quadratfrei} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ggT}(f, \frac{d}{dx} f) = 1$$

[1] Der Zerfällungskörper eines Polynoms $p \in F[t]$, ist die kleinste Körpererweiterung F, sodass p über diesem in Linearfaktoren zerfällt. Z.B. für $F = \mathbb{Q} : p = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ zerfällt p bereits über F in Linearfaktoren, F ist also bereits der Zerfällungskörper von p. Ist hingegen $q = x^2 + 1$ brauchen wir $\pm i \notin \mathbb{Q} : q = (x-i)(x+i)$, der Zerfällungskörper von q ist also $\mathbb{Q}(i)$.

Quadratfreie Polynome werden in den folgenden Kapiteln wichtig werden, da man bei ihnen recht einfach eine Partialbruchzerlegung durchführen kann (sofern sie im Nenner sind), bei nicht-quadratfreien kann man das zwar prinzipiell auch, wird aber komplizierter. Um dies machen zu können, muss man zunächst ein gegebenes Polynom quadratfrei „machen“. Dazu bedient man sich der *Quadratfreien Faktorisierung*:

Definition. *Die* quadratfreie Faktorisierung *eines Polynoms $f \in F[x]$ ist folgende Darstellung:*

$$f = \prod_{i=1}^{n} a_i^i$$

Dabei sind die a_i jeweils quadratfrei und paarweise teilerfremd.

Insbesondere gibt es stets eine solche Darstellung und sie ist bis auf eine multiplikative Konstante in den a_i eindeutig. Im Prinzip erhält man diese Darstellung, indem man alle Nullstellen gleicher Ordnung gruppiert, Beispiel:

- $f = x^5 + 11x^4 + 34x^3 + 14x^2 - 35x - 25 \in \mathbb{C}[x]$. f hat die einfache Nullstelle 1 und zwei doppelte, nämlich -1 und -5. Damit gilt:
$$\begin{aligned} f &= (x-1)(x+1)^2(x+5)^2 \\ &= (x-1)[(x+1)(x+5)]^2 \\ &= (x-1)(x^2+6x+5)^2 \\ &= a_1 a_2^2 \end{aligned}$$
mit $a_1 = x - 1, a_2 = x^2 + 6x + 5$. Insbesondere sind die a_1, a_2 quadratfrei und teilerfremd, was direkt aus der Herleitung folgt. Somit ist $a_1 a_2^2$ die quadratfreie Faktorisierung von f.

Im Allgemeinen ist es allerdings nicht möglich bzw. schwierig, alle Nullstellen eines Polynoms f zu bestimmen, es gibt aber dafür bessere Methoden, um die quadratfreie Faktorisierung zu bestimmen. Wenden wir nämlich $*$ auf die quadratfreie Faktorisierung von $f = \prod_{i=1}^{n} a_i^i = a_1 a_2^2 \cdots a_n^n$ an, erhalten wir:

$$c := \mathrm{ggT}(f, \frac{d}{dx} f) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{i-1} = a_2 a_3^2 a_4^3 \cdots a_n^{n-1}$$

Teilen wir nun f durch c, erhalten wir:

$$w := \frac{f}{c} = \frac{a_1 a_2^2 a_3^3 \cdots a_n^n}{a_2 a_3^2 a_4^3 \cdots a_n^{n-1}} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

Nun gilt $y := \mathrm{ggT}(c, w) = a_2 a_3 \cdots a_n$. Damit können wir nun a_1 bestimmen:

$$\frac{w}{y} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_2 a_3 \cdots a_n} = a_1.$$

Indem wir dasselbe Verfahren mit c durchführen, können wir nun a_2 berechnen und dann analog rekursiv die anderen a_i. Für diesen Algorithmus benötigten wir lediglich eine ggT-Berechnungen und Polynomdivisionen, also z.B. keine Faktorisierungen bzw. Nullstellenberechnungen.

2.2.2 Resultanten

Resultanten bieten eine interessante Alternative zum euklidischen Algorithmus, um zu überprüfen, ob zwei Polynome teilerfremd sind. Dazu überlegen wir uns zunächst Folgendes:

Lemma. *Sei F ein Körper und $0 \neq f, g \in F[x]$. Dann sind f und g genau dann teilerfremd, falls die Gleichung*

$$fa + gb = 0$$

in $a, b \in F[x]$ mit der Bedingung $\deg(a) < \deg(g), \deg(b) < \deg(f)$ nur die triviale Lösung $a = 0, b = 0$ hat.

Dies lässt sich recht einfach zeigen:
($\Rightarrow$). Seien f, g teilerfremd. Betrachte die Gleichung $fa = gb$ in a, b mit $\deg(a) < \deg(g), \deg(b) < \deg(f)$. Dann gilt $fa = -gb$. Da f die linke Seite teilt, muss f auch die rechte Seite teilen, ferner gilt $f \mid b$, da f und g teilerfremd sind. Da aber $\deg(f) > \deg(b)$ ist, muss $b = 0$ folgen. Analog folgt $a = 0$.
($\Leftarrow$). Seien f, g nicht teilerfremd. Dann gibt es ein h mit $h \mid f, g$ und $\deg(h) > 0$. Setzen wir $a = \frac{g}{h}, b = -\frac{f}{h}$, so gilt:

$$fa + gb = f\frac{g}{h} - g\frac{f}{h} = 0$$

Und es gilt insbesondere $\deg(a) < \deg(g), \deg(b) < \deg(f)$.
Die Frage ist nun: Wie können wir überprüfen, ob es eine nicht-triviale Lösung der Gleichung $fa + gb = 0$ gibt, ohne über andere Methoden den ggT von f und g zu bestimmen? Dies geht mit etwas linearer Algebra.
Dazu schreiben wir $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$. Da wir $a, b \in F[x]$ mit $\deg(a) < \deg(g), \deg(b) < \deg(f)$ suchen, können wir zunächst $a = p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0$ und $b = q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ schreiben. Wir müssen dann die Gleichung $fa + gb = 0$ in den Koeffizienten von a, b lösen:

$$\begin{aligned}
& fa + gb = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)(p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0) + \\
& (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)(q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (a_n p_{m-1} + b_m q_{n-1})x^{n+m-1} + \\
& (a_n p_{m-2} + a_{n-1}p_{n-1} + b_m q_{n-2} + b_{m-1}q_{n-1})x^{m+n-2} + \\
& \cdots + (a_1 p_0 + a_0 p_1 + b_1 q_0 + b_0 q_1)x + (a_0 p_0 + b_0 q_0) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases}
a_0 p_0 + b_0 q_0 & = 0 \\
a_1 p_0 + a_0 p_1 + b_1 q_0 + b_0 q_1 & = 0 \\
\cdots & \\
a_n p_{m-2} + a_{n-1}p_{m-1} + b_m q_{n-2} + b_{m-1}q_{n-1} & = 0 \\
a_n p_{m-1} + b_m q_{n-1} & = 0
\end{cases}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten p_i, q_j, den Koeffizienten von a, b, wobei die Koeffizienten gerade die a_j, b_i, die Koeffizienten von f, g, sind. In Matrixschreibweise sieht dies dann wie folgt aus:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{a_0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0}}^{n} & \overbrace{\hphantom{b_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0}}^{m} \end{array} \\
n+m\left\{\begin{pmatrix}
a_0 & \cdots & 0 & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} \\
0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_m
\end{pmatrix}\right.
\end{array}
\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = 0
$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass dieses lineare Gleichungssystem genau dann eine nicht-triviale Lösung hat, wenn $\det(\tilde{S}_{f,g}) = 0$, wobei $\tilde{S}_{f,g}$ die eben definierte Koeffizientenmatrix ist. Dies ist nun fast die Resultante, aber aus anderen Gründen definiert man die Resultante $\operatorname{res}(f, g)$ von f, g als die Determinante der SYLVESTER-Matrix $S_{f,g}$, die wir erhalten, indem wir in $\tilde{S}_{f,g}$ einige Zeilen und Spalten vertauschen und transponieren:

$$
S_{f,g} = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & & \cdots & & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0
\end{pmatrix}
$$

Und:

$$\operatorname{res}(f, g) := \det(S_{f,g})$$

Die Resultante $\operatorname{res}(f, g)$ unterscheidet sich insbesondere höchstens um einen Faktor der Form $(-1)^k$ von $\det(\tilde{S}_{f,g})$. Damit gilt:

f, g haben einen nicht-trivialen Teiler bzw. sind nicht teilerfremd $\iff$ $\operatorname{res}(f, g) = 0$

Falls in den Polynomen f, g mehrere Variablen auftauchen sollten, z.B. z und θ (was später der Fall sein wird), und wir die Resultante bezüglich θ bestimmen wollen, d.h. wir schreiben f, g als Polynome in θ, in den Koeffizienten tritt dann ggf. z auf, schreiben wir $\operatorname{res}_\theta(f, g)$.

Beispiel:

- $f = x^2 + 3x + 2, g = 5x^2 - 5 \in \mathbb{C}[x]$. Dann ist:

$$
\tilde{S}_{f,g} = \begin{pmatrix}
2 & 0 & -5 & 0 \\
3 & 2 & 0 & -5 \\
1 & 3 & 5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 5
\end{pmatrix}
$$

bzw. die Sylvestermatrix:

$$S_{f,g} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Die Resultante von f, g ist dann:

$$\operatorname{res}(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Folglich sind f, g nicht teilerfremd und tatsächlich gilt: $(x+1) \mid f, g$.

Ein weiteres Resultant über Resultanten, welches später wichtig wird, was wir aber hier nicht mehr beweisen, ist folgendes Lemma:

Lemma. *Sei F ein Körper und $f, g \in F[x]$, wobei A der Leitkoeffizient von g und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen von g sind. Dann gilt:*

$$\operatorname{res}(f, g) = A^{\deg(f)} \prod_{i=1}^{n} f(\alpha_i)$$

3 Grundlagen der differentiellen Algebra

Im Folgenden sei F stets ein Körper.
Zunächst benötigen wir eine rein algebraische Definition der Ableitung.

Definition. *Eine Abbildung $D : F \to F$ heißt* Ableitung *auf F, falls für alle $x, y \in F$ gilt:*

1. $D(x + y) = D(x) + D(y)$
2. $D(xy) = xD(y) + D(x)y$

Wir erkennen, dass es sich bei diesen Bedingungen lediglich um die Summen- und Produktregel handelt.
Betrachten wir zum Beispiel $F = \mathbb{C}(x)$, also den Körper der rationalen Funktionen

mit komplexen Koeffizienten[1], so ist der aus der Analysis bekannte Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ offensichtlich eine Ableitung auf F, die Bezeichnung *Ableitung* ist also gerechtfertigt.
Ein Körper F zusammen mit einer Ableitung D auf diesem wird *Differentieller Körper* genannt.
Aus der Definition können wir weitere uns bekannte Regeln herleiten:

Lemma. *Für $n \in \mathbb{N}, x, y \in F$, wobei F ein differentieller Körper mit Ableitung D ist, gilt:*

1. $D(\frac{x}{y}) = \frac{yD(x)-xD(y)}{y^2}$ *(Quotientenregel)*
2. $D(x^n) = nD(x)x^{n-1}$ *(Potenzregel)*

Wir benötigen zusätzlich noch den Begriff der *Konstanten.* In der Analysis zeichnen sich konstante Funktionen dadurch aus, dass ihre Ableitung 0 ist. Analog definieren wir Konstanten in der differentiellen Algebra:

Definition. *Für einen differentiellen Körper (F, D) definieren wir:*

$$K := \{x \in F \mid D(x) = 0\}$$

als den Konstantenkörper *von F und die Elemente von K nennen wir* Konstanten*.*

Im Folgenden schreiben wir x' statt $D(x)$.
Um alle elementaren Funktionen zu erhalten genügt nicht $\mathbb{C}(x)$, wir benötigen auch noch Exponential-, Logarithmus- und Wurzelfunktionen. Dafür benötigen wir den Begriff der differentiellen Körpererweiterung:

Definition. *Seien $(F, D_F), (G, D_G)$ jeweils differentielle Körper, wobei gilt:*

1. *G ist ein Teilkörper von F*
2. *$D_F|_G = D_G$ („D_F eingeschränkt auf G“)*
3. *Die Konstantenkörper von F und G sind identisch*[2]

Dann ist F eine differentielle Körpererweiterung *von G.*

---

[1] Streng genommen handelt es sich hierbei nicht um Funktionen, sondern um rein formale Ausdrücke der Form $\frac{a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0}{b_mX^m+\cdots+b_1X+b_0}$, für den Grundkörper $\mathbb{C}$ ist diese Unterscheidung in dieser Anwendung nicht allzu wichtig. Würden wir über endlichen Körpern arbeiten, ist dies anders, z.B. sind die Polynome X und X^2 aus $\mathbb{Z}_2[X]$ verschieden, ihre zugehörigen Abbildungen sind aber identisch.

[2] In der Literatur wird meist die dritte Bedingung bei dieser Definition weggelassen, allerdings wird diese dann häufig in den darauffolgenden Sätzen vorausgesetzt.

Da wir nur eine bestimmte Art von Funktionen, nämlich elementare, betrachten wollen, müssen wir die differentiellen Körpererweiterungen einschränken, und zwar auf exponentielle, logarithmische und algebraische: Aus der Analysis wissen wir, dass für eine differenzierbare Funktion u, die Funktion $f = \exp(u)$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{f'}{f} = u'$$

Die Logarithmusfunktion $g = \log(u)$ erfüllt analog:

$$g' = \frac{u'}{u}$$

Auf diese Weise können wir exponentielle und logarithmische Körpererweiterungen auch in der Sprache der differenziellen Algebra erkennen:

Definition. *Sei G eine differentielle Körpererweiterung von F und $\theta \in G$.*

1. *Gibt es ein $u \in F$ mit $\frac{\theta'}{\theta} = u$, so nennt man θ* exponentiell *über F und schreibt $\theta = \exp(u)$.*
2. *Gibt es ein $u \in F$ mit $\frac{u'}{u} = \theta'$, so nennt man θ* logarithmisch *über F und schreibt $\theta = \log(u)$.*

Nun benötigen wir noch wurzelartige Funktionen, diese können wir als algebraische Ausdrücke auffassen:

Definition. *Sei G eine differentielle Körpererweiterung von F und $\theta \in G$.*
θ heißt algebraisch *über F, falls θ Lösung einer Polynomgleichung über F ist, d.h. es gibt ein $f \in F[z]$ mit $f(\theta) = 0$.*

Beispiele:
Sei $F = \mathbb{C}(x)$ und D die Standardableitung.

- $\theta = \sqrt[n]{x}$, $G = F(\theta)$. θ ist algebraisch über F, z.B. erfüllt θ die Polynomgleichung $z^n - x = 0$.
- $\theta = \log(x^2+1), G = F(\theta)$. Für $u = x^2+1$ gilt: $\theta' = \frac{u'}{u}$, θ ist also ein Logarithmus über F.

Wir können nun definieren, was genau elementare Funktionen sind:

Definition. *Sei F ein differentieller Körper und G eine differentielle Körpererweiterung von diesem. Falls $\theta_1, \ldots, \theta_n$ existieren, sodass gilt:*

- $G = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$
- *Für $i = 1, \ldots, n$ ist die Funktion θ_i exponentiell, logarithmisch oder algebraisch über $F(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$*

so ist G eine elementare *Körpererweiterung von F.*
Für den Spezialfall $F = \mathbb{C}(x)$ nennt man die Elemente $f \in G$ einer elementaren Körpererweiterung G von F elementare *Funktionen.*

Beispiele:

- $f = \frac{\exp(\sqrt{x})+x}{\sqrt{x}+x^2+1}$. Seien $\theta_1 = \sqrt{x}$ und $\theta_2 = \exp(\theta_1)$. θ_1 erfüllt die Polynomgleichung $z^2 - x = 0$ und ist somit algebraisch über $\mathbb{C}(x)$. Für $u = \sqrt{x} = \theta_1$ ist $\frac{\theta_2'}{\theta_2} = u$ und somit exponentiell über $\mathbb{C}(x, \theta_1)$ ist. Da $f = \frac{\theta_2+x}{\theta_1+x^2+1} \in \mathbb{C}(x, \theta_1, \theta_2)$, ist f elementar.

- $f = \sin(x)$. Wähle $\theta_1 = \exp(ix)$. Wegen $\sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$ ist $f = \frac{\theta_1 - \frac{1}{\theta_1}}{2i} \in \mathbb{C}(x, \theta_1)$, somit ist $\sin(x)$ elementar.

- $f = \exp(x)^2$. Sei $\theta_1 = \exp(x)$. Dann ist $f = \theta_1^2 \in \mathbb{C}(x, \theta_1)$. Allerdings gilt auch: $f = \exp(x)^2 = \exp(2x) =: \theta_2 \in \mathbb{C}(x, \theta_2)$.

Das letzte Beispiel zeigt, dass ein zu einer elementaren Funktion gehörender differentieller Körper nicht eindeutig ist.
Nach dieser Definition sind allerdings auch einige Funktionen elementar, die man intuitiv vielleicht eher nicht als elementar bezeichnen würde. Betrachte z.B. die Polynomgleichung $z^5 - 3z + x = 0$ über $\mathbb{C}(x)[z]$. Die Lösungsfunktionen sind nach Definition elementar, sie lassen sich aber nicht wie die Lösungen von $z^5 - x = 0$ geschlossen mithilfe von Wurzelausdrücken hinschreiben (Siehe *Satz von Abel-Ruffini*).

Definition. *Eine Funktion $f \in F$ heißt* elementar integrierbar*, falls eine elementare Körpererweiterung G von F und ein $g \in G$ existiert mit $g' = f$. g ist dann eine* Stammfunktion *von f. Wir schreiben dann $\int f = g$.*

Mit dem Gleichheitszeichen in $\int f = g$ muss man etwas aufpassen, da ein solches g nicht unbedingt eindeutig ist, z.B. ist $\int x = \frac{x^2}{2}$ und $\int x = \frac{x^2}{2} + 1$, aber $\frac{x^2}{2} \neq \frac{x^2}{2} + 1$. (Vergleichbar mit der Landau $\mathcal{O}$-Notation: $x = \mathcal{O}(x)$, $\frac{x}{2} = \mathcal{O}(x)$, aber $x \neq \frac{x}{2}$.)

4 Der Satz von Liouville

Ein wichtiges Resultat der differentiellen Algebra ist der folgende Satz, der grob formuliert besagt, dass, falls eine Funktion elementar integrierbar ist, in einer Stammfunktion bis vielleicht auf Logarithmen keine neuen Ausdrücke auftauchen, die nicht in der gegebenen Funktion enthalten ist.

Satz. *(Liouville)*
Sei $f \in F$ mit Konstantenkörper K. Falls f elementar integrierbar ist mit einer Stammfunktion g, dann gibt es Konstanten $c_1, \ldots, c_m \in K$ und $v_0, \ldots, v_m \in F$, sodass:

$$g = v_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$

Beweisidee:
Sei $f \in F$ elementar integrierbar und $g \in G$ eine Stammfunktion, wobei G eine elementare Körpererweiterung von F ist:

$$G = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$

Dabei können wir annehmen, dass, wenn ein θ_i exponentiell oder logarithmisch ist, es transzendent über $F(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$ ist. Ich stelle hier nur den Fall vor, dass $n = 1$ und $\theta := \theta_1$ logarithmisch über F ist, wobei $\theta' = \frac{u'}{u}$. Der exponentielle Fall ist ähnlich.
Zum Beweis benötigt man folgenden Hilfssatz über die Ableitung eines Polynom in $F[\theta]$:
Sei $p \in F[\theta]$, wobei θ logarithmisch und transzendent über F ist, und $m = \deg(p) > 0$. Falls der Leitkoeffizient von p eine Konstante ist, gilt $\deg(p') = m - 1$, andernfalls $\deg(p') = m$. Dies lässt sich leicht durch Nachrechnen bestätigen.

Da $g \in G = F(\theta)$, können wir $g(\theta) = \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ schreiben, wobei $a, b \in F[\theta], \mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und b monisch ist. Dann gilt:

$$\int f = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow f = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$
$$\Rightarrow b^2 f = a'b - ab'$$

b teilt die linke Seite und muss daher auch die rechte Seite teilen. Da b auch $a'b$ teilt, muss insbesondere $b \mid ab'$ gelten. Da aber $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ ist, folgt: $b \mid b'$. Angenommen $m := \deg(b) > 0$. Nach dem Hilfssatz folgt dann $\deg(b') = m - 1 < \deg(b)$. Dann kann aber b kein Teiler von b' sein. Es gilt also $\deg(b) = 0$. Da b monisch ist, folgt $g(\theta) = a(\theta) \in F[\theta]$. Dann gilt aber auch:

$$f = a'(\theta)$$

Die linke Seite hängt aber nicht von θ ab! Wir können daher f als Polynom in $F[\theta]$ mit Grad 0 auffassen. Nach dem Hilfssatz folgt dann, dass a entweder auch Grad 0 oder vom Grad 1 mit konstantem Leitkoeffizienten ist. In jedem Fall ist $a(\theta)$ von der Form:

$$a(\theta) = v_0 + c\theta = v_0 + c \log(u)$$

mit $v_0 \in F, c \in K$. Dies ist genau die Form von $\int f = a(\theta)$, die wir für den Satz beweisen wollten! Der allgemeine Fall für $n \geq 1$ wird dann mit Induktion über die Anzahl an benötigten Erweiterungen n erledigt, wobei der Induktionsschritt für den logarithmischen/exponentiellen Fall ähnlich zu diesem Beispiel $n = 1$ ist. Der algebraische Fall ist noch einmal etwas anders, werden wir hier aber nicht behandeln, er kann z.B. in [2] nachgelesen werden.

5 Der Risch-Algorithmus für transzendente Körpererweiterungen

Sei eine elementare Funktion f gegeben.
Der erste Schritt besteht darin, geeignete $\theta_1, \ldots, \theta_n$ zu finden, sodass $f \in \mathbb{C}(x, \theta_1, \ldots, \theta_n)$.
Diesen Schritt werde ich hier überspringen und bei meinem Programm dem Benutzer überlassen. Außerdem beschränke ich mich hier und in der Implementierung auf rein transzendente Körpererweiterungen, d.h. z.B. Wurzelfunktionen lassen sich hiermit nicht integrieren.
Der allgemeine Aufbau des Algorithmus ist rekursiv, d.h. man reduziert das Problem auf $\mathbb{C}(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, $\mathbb{C}(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$, $\ldots$ und schließlich auf $\mathbb{C}(x)$, also auf rationale Funktionen.Die letzte Körpererweiterung mit θ_n ist entweder exponentiell oder logarithmisch, das Verfahren bei den beiden Fällen ist ähnlich. Wir betrachten zunächst den logarithmischen Fall.

5.1 Logarithmische Körpererweiterungen

Sei $\theta := \theta_n$ logarithmisch über $F := \mathbb{C}(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, mit $u \in F$, sodass $\frac{u'}{u} = \theta'$.
Nach Definition ist f von der Form $f = \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$, wobei $a, b \in F[\theta]$ sind.
Zunächst führen wir eine Polynomdivision durch, wodurch wir $p, r, q \in F[\theta]$ mit $\deg(r) < \deg(q)$ erhalten, sodass $f = s + \frac{r}{q}$. Das Integral können wir dann aufteilen:

$$\int f = \int s + \int \frac{r}{q}$$

Diese beiden Teile werden wir separat betrachten, zunächst den polynomiellen Teil.

5.1.1 Der Polynomielle Teil

Mit $l := \deg(p)$ ist p von der Form:

$$p(\theta) = p_l\theta^l + \cdots + p_1\theta + p_0$$

Hierbei sind die Koeffizienten p_i Funktionen aus F. Wir nehmen nun an, dass p elementar integrierbar ist.

Nach dem Satz von Liouville gibt es $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ und $v_0, \ldots, v_m \in F(\theta)$ mit

$$p(\theta) = v_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i(\theta)'}{v_i(\theta)}$$

Man kann sich nun überlegen, dass die v_i für $i = 1, \ldots, m$ nicht von θ abhängen können, da sonst auf der rechten Seite im Nenner irgendwo θ auftauchen müsste, was nicht möglich ist, da p ein Polynom in θ ist und θ daher nur im Zähler auftauchen kann. Ebenso kann θ auch nicht im Nenner von v_0 auftauchen. Folglich sind $v_i \in F$ für $i = 1, \ldots, m$ und $v_0 \in F[\theta]$.

Wir versuchen nun die Koeffizienten von v_0 herauszufinden. Aus Kapitel 4 wissen wir, dass sich der Grad eines logarithmischen Polynoms beim Ableiten entweder gleich bleibt oder sich um eins verringert und da auf der rechten Seite der obigen Gleichung nur v_0 von θ abhängt, gilt $\deg(v_0) \le l+1$. Sei also $v_0(\theta) = q_{l+1}\theta^{l+1} + q_l\theta^l + \cdots + q_0$, mit $q_i \in F$. Setzen wir das ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
p(\theta) &= (q_{l+1}\theta^{l+1} + q_l\theta^l + \cdots + q_0)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i} \\
&= q_{l+1}\theta^{l+1} + ((l+1)q_{l+1}\theta' + q_l')\theta^l + (lq_l\theta' + q_{l-1}')\theta^{l-1} + \cdots \\
&\quad + (2q_2\theta' + q_1')\theta + \left(q_1\theta' + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}\right)
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann:

$$\begin{aligned}
0 &= q_{l+1}' \\
p_l &= (l+1)q_{l+1}\theta' + q_l' \\
p_{l-1} &= lq_l\theta' + q_{l-1}' \\
&\vdots \\
p_0 &= q_1\theta' + q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass q_{l+1} eine Konstante ist, welche wir im Folgenden $b_{l+1} \in \mathbb{C}$ nennen.

Wir können nun die zweite Gleichung integrieren:

$$\int p_l = (l+1)b_{l+1}\theta + q_l$$

Die linke Seite können wir über Rekursion wegen $p_l \in F$ berechnen. Falls $\int p_l$ nicht elementar ist, können wir folgern, dass p auch nicht elementar integrierbar ist.

Haben wir aber aber eine Stammfunktion von p_l, müssen wir überprüfen, ob diese eine neue logarithmische Erweiterung über F enthält. Falls dies der Fall ist, müsste sie auch auf der rechten Seite der Gleichung auftauchen. Falls also in $\int p_l$ ein neuer

Logarithmus auftaucht, muss es θ sein, andernfalls kann keine Gleichheit bestehen und $\int p$ ist nicht elementar.

Ist also $\int p_l = c_l\theta + d_l$ mit $c_i \in \mathbb{C}, d_I \in F$, so erhalten wir über einen Koeffizientenvergleich: $b_{l+1} = \frac{c_l}{l+1}$ und $q_l = d_l + b_l$. Dabei ist $b_i \in \mathbb{C}$ einfach eine Integrationskonstante.

Dies können wir dann in die dritte Gleichung einsetzen, umformen und integrieren:

$$p_{l-1} = l(d_l + b_l)\theta' + q'_{l-1}$$
$$p_{l-1} - ld_i\theta' = lb_i\theta' + q_{l-1}$$
$$\int p_{l-1} - ld_i\theta' = lb_i\theta + q_{l-1}$$

Die linke Seite können wir wegen $p_{l-1} - ld_i\theta' \in F$ berechnen und dann wie eben verfahren, bis wir an der letzten Gleichung ankommen. Wir erhalten dann:

$$\int p_0 - d_1\theta' = b_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$

Die erste Bedingung, nämlich dass das Integral auf der linken Seite elementar sein muss, gilt immernoch, allerdings können dort auch nun neue Logarithmen auftauchen, da auf der rechten Seite auch neue Logarithmen auftauchen können (Die c_i, v_i, m sind Unbekannte). Wir können dann $\int p_0 - d_1\theta' = c_0\theta + d_0$ schreiben, wobei diesmal d_0 nicht notwendigerweise in F liegt. Dann ist $b_1 = c_0$ und:

$$q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i) = d_0$$

Dann haben wir alle Unbekannten gefunden und es gilt:

$$\int p(\theta) = b_{l+1}\theta^{l+1} + q_l\theta^l + \cdots + q_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$

Beispiele:

- $\theta = \log(x), p(\theta) = x\theta^2 - \theta, l = 2, p_2 = x, p_1 = -1, p_0 = 0.$
  Über den Ansatz $\int p(\theta) = b_3\theta^3 + q_2\theta^2 + q_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$, erhalten wir die Gleichungen:

$$0 = b'_3$$
$$x = 3b_3\theta' + q'_2$$
$$-1 = 2q_2\theta' + q'_1$$
$$0 = q_1\theta' + q'_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v'_i}{v_i}$$

  Integrieren wir die zweite Gleichung erhalten wir:

$$\frac{x^2}{2} + b_2 = 3b_3\theta + q_2$$

  Also: $b_3 = 0, q_2 = \frac{x^2}{2} + b_2,$. Einsetzen in die dritte Gleichung liefert:

$$-1 = 2\left(\frac{x^2}{2} + b_2\right)\theta' + q'_1$$
$$-1 - x^2\theta' = 2b_2\theta' + q'_1$$

$$\int -1 - x^2 \frac{1}{x} = 2b_2\theta + q_1$$
$$-x - \frac{x^2}{2} + b_1 = 2b_2\theta + q_1$$

Also: $b_2 = 0, q_1 = -x - \frac{x^2}{2} + b_1$. Setzen wir dies in die letzte Gleichung ein, erhalten wir:

$$0 = (-x - \frac{x^2}{2} + b_1)\theta' + q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$
$$(x + \frac{x^2}{2})\theta' = b_1\theta' + q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$
$$\int (x + \frac{x^2}{2})\frac{1}{x} = b_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$
$$x + \frac{x^2}{4} + b_0 = b_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$

Also $b_1 = 0, q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i) = x + \frac{x^2}{4} + b_0$.
Setzen wir alles zusammen, erhalten wir:

$$\int p(\theta) = \frac{x^2}{2}\theta^2 + \left(-x - \frac{x^2}{2}\right)\theta + x + \frac{x^2}{4} + b_0.$$

bzw.

$$\int x\log(x)^2 - \log(x) = \frac{x^2}{2}\log(x)^2 + \left(-x - \frac{x^2}{2}\right)\log(x) + x + \frac{x^2}{4} + b_0.$$

Eine Probe bestätigt, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Stammfunktion handelt!

- $\theta = \log(x), p(\theta) = \frac{\theta}{x+1}, l = 1, p_1 = \frac{1}{x+1}, p_0 = 0$. Angenommen, p wäre elementar integrierbar, dann ist $\int p(\theta) = b_2\theta^2 + q_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$ und wir erhalten:

$$0 = b_2'$$
$$\frac{1}{x+1} = 2b_2\theta' + q_1'$$
$$0 = q_1\theta' + q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$

Integrieren wir die zweite Gleichung, erhalten wir:

$$\log(x+1) + b_1 = 2b_2\log(x) + q_1$$

$\log(x+1)$ ist allerdings ein neuer Logarithmus und nicht θ, die Gleichung kann also für keine $b_1, b_2 \in \mathbb{C}, q_1 \in \mathbb{C}(x)$ erfüllt sein. Folglich ist $\frac{\log(x)}{x+1}$ nicht elementar integrierbar!

- Folgendes Beispiel zeigt, dass man vorsichtig sein muss, wenn es darum geht, zu überprüfen, ob es sich einen neuen Logarithmus handelt oder nicht:
$\theta = \log(\frac{x}{x+1}), p(\theta) = \frac{1}{x^2+x}\log(\frac{x}{x+1}), p_1 = \frac{1}{x^2+x}, p_0 = 0$. Wir stellen wieder die üblichen Gleichungen auf: $\int p(\theta) = b_2\theta^2 + q_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$ und

$$0 = b_2'$$

$$\frac{1}{x^2+x} = 2b_2\theta' + q_1'$$

$$0 = q_1\theta' + q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$

Integrieren wir die zweite Gleichung, erhalten wir:

$$\log(x) - \log(x+1) + b_1 = 2b_2\theta + q_1$$

$\log(x)$ und $\log(x+1)$ einzeln betrachtet sind allerdings neue Logarithmen und nicht in $\mathbb{C}(x,\theta)$! Allerdings gilt für ihre Differenz: $\log(x) - \log(x+1) = \log(\frac{x}{x+1}) = \theta$. Die Bedingungen sind hier also doch erfüllt. Rechnen wir weiter, erhalten wir:

$$\int p(\theta) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$$

5.1.2 Der Rationale Teil

Zu berechnen: $\int \frac{r}{q}$ mit $\deg(r) < \deg(q)$. Weiter können wir annehmen, dass $\mathrm{ggT}(r,q) = 1$ und q monisch ist, d.h. der Leitkoeffizient von q ist 1.
Das Berechnen des Integrals gliedert sich in zwei Teile:

1. *Hermite-Reduktion*: Das Integral so lange aufteilen, bis der Nenner Quadratfrei ist.

2. *Rothstein/Trager Methode*: Den Rest integrieren, wobei der Nenner nun quadratfrei ist.

1. Hermite-Reduktion:
Zunächst berechnen wir die quadratfreie Faktorisierung des Nenners,

$$q(\theta) = \prod_{i=1}^{k} q_i(\theta)^i$$

wobei die q_i quadratfrei und paarweise teilerfremd sind. Daraufhin können wir eine Partialbruchzerlegung von $\frac{r}{q}$ durchführen:

$$\frac{r}{q} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \frac{r_{ij}}{q_i^j}$$

Hierbei gilt: $\deg(r_{ij}) < \deg(q_i)$. Wir können nun die $\frac{r_{ij}}{q_i^j}$ einzeln integrieren. Dazu betrachten wir einen solchen Term mit $j > 1$.
Da die q_i quadratfrei sind, gilt: $\mathrm{ggT}(q_i(\theta), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}q_i(\theta)) = 1$. Man kann zeigen, dass daraus auch $\mathrm{ggT}(q_i(\theta), q_i(\theta)') = 1$ folgt ($q_i(\theta)'$ ist die Ableitung nach x).
Daher können wir nun mithilfe des euklidischen Algorithmus $s, t \in F[\theta]$ mit $\deg(s) < \deg(q_i'), \deg(t) < \deg(q_i)$, sodass:

$$sq_i + tq_i' = r_{ij}$$

Und somit:

$$\int \frac{r_{ij}}{q_i^j} = \int \frac{sq_i + tq_i'}{q_i^j} = \int \frac{s}{q_i^{j-1}} + \int \frac{tq_i'}{q_i^j}$$

Das zweite Integral können wir partiell integrieren:

$$\int \frac{tq_i'}{q_i^j} = \frac{t}{(1-j)q_i^{j-1}} - \int \frac{t'}{(1-j)q_i^{j-1}}$$

Also:

$$\int \frac{r_{ij}}{q_i^j} = \frac{t}{(1-j)q_i^{j-1}} + \int \frac{s - \frac{t'}{1-j}}{q_i^{j-1}}$$

Wir haben nun die Potenz von q_i im Nenner um eins verringert, insbesondere gilt noch $\deg(s - \frac{t'}{1-j}) < \deg(q_i)$. Dies können wie so lange weitermachen, bis wir folgendes erreicht haben:

$$\int \frac{r}{q} = \frac{c}{d} + \int \frac{a}{b}$$

Mit $a, b, c, d \in F[\theta], \deg(a) < \deg(b)$, insbesondere ist der Nenner b jetzt quadratfrei. Nun können wir mit dem zweiten Teil fortfahren.

Wir betrachten als Einschub bzw. zur Motivation Rationale Funktionen aus $\mathbb{C}(x)$, also ohne Logarithmen etc.

Also seien $f, g \in \mathbb{C}[x], \mathrm{ggT}(f, g) = 1, \deg(f) < \deg(g)$, g quadratfrei und monisch. Zu berechnen: $\int \frac{f}{g}$. Sind $x_1, \dots, x_n$ die verschiedenen Nullstellen von g, so gilt $g(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, wir können also eine Partialbruchzerlegung durchführen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{x - x_j}$$

Hierfür war es wichtig, dass g quadratfrei ist, denn sonst hätte g eine mehrfache Nullstelle und die Partialbruchzerlegung würde wesentlich komplizierter werden. Die Koeffizienten c_j können wir mit Mitteln aus der Analysis herausfinden. Fixieren wir i und multiplizieren die Gleichung mit $x - x_i$, können wir den Grenzwert $x \to x_i$ betrachten:

$$\frac{f(x)}{g(x)}(x - x_i) = c_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j \frac{x - x_i}{x - x_j}$$

$$\lim_{x \to x_i} \frac{f(x)}{g(x)}(x - x_i) = \lim_{x \to x_i} \left(c_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j \frac{x - x_i}{x - x_j} \right)$$

Alle Terme auf der rechten Seite bis auf c_i haben einen $x - x_i$ Faktor und fallen daher bei der Grenzwertbildung weg. Bei der linken Seite gilt wegen $g(x_i) = 0$:

$$\lim_{x \to x_i} \frac{f(x)}{g(x)}(x - x_i) = \frac{f(x_i)}{\lim_{x \to x_i} \frac{g(x) - g(x_i)}{x - x_i}} = \frac{f(x_i)}{g'(x_i)}$$

Also:

$$c_i = \frac{f(x_i)}{g'(x_i)}$$

Damit lässt sich das Integral einfach berechnen:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} = \int \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \frac{1}{x - x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \log(x - x_i)$$

Die Bedeutung von $c_i = \frac{f(x_i)}{g'(x_i)}$ wird später noch einmal relevant.

Zurück zu dem eigentlichen Problem: Wir wollen $\int \frac{a}{b}$ berechnen, das Problem hierbei ist, dass a, b Polynome in θ über F und nicht in x über $\mathbb{C}$ sind. Wir können aber ähnlich vorgehen: Man kann mithilfe des Satzes von Liouville zeigen, dass, wenn $\frac{a}{b}$ elementar integrierbar ist, sich das Integral wie folgt schreiben lässt:

$$\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \log(\theta - b_i)$$

Wobei $\prod_{i=1}^{n}(\theta - b_i) = b$ die Faktorisierung von b ist. Dazu können wir direkt zwei klassische Beispiele betrachten, mit $\theta = \log(x)$:

- $f = \frac{1}{\theta}$. Der Nenner ist bereits quadratfrei und faktorisiert. Angenommen, $\int f$ wäre elementar. Dann gilt:

  $$\int f(\theta) = c \log(\theta)$$

  Ableiten ergibt:

  $$\frac{1}{\theta} = c\frac{\theta'}{\theta} = \frac{c}{x\theta}$$

  Dies kann aber für keine Konstante c gelten. Folglich ist der Integrallogarithmus:

  $$\mathrm{Li}(t) = \int_2^t \frac{1}{\log(x)} \mathrm{d}x$$

  nicht elementar.

- $f = \frac{1}{x\theta}$. Damit der Nenner monisch ist, schreiben wir $f = \frac{\frac{1}{x}}{\theta}$. Angenommen, f wäre elementar integrierbar, so wäre wieder:

  $$\int \frac{\frac{1}{x}}{\theta} = c \log(\theta)$$

  Also:

  $$\frac{\frac{1}{x}}{\theta} = \frac{c}{x\theta}$$

  Diese Gleichung ist für $c = 1$ erfüllt, also ist:

  $$\int \frac{1}{x \log(x)} = \log(\log(x))$$

Folgendes Beispiel zeigt, dass dieses Vorgehen nicht immer so einfach ist:

- Wir betrachten wieder $\theta = \log(x)$.

  $$f = \frac{2\frac{\theta}{x} - 1}{\theta^2 - x}$$

  f erfüllt die Vorraussetzungen, denn der Nenner ist quadratfrei, monisch und hat einen größeren Grad als der Zähler. Faktorisieren wir den Nenner, erhalten wir: $\theta^2 - x = (\theta + \sqrt{x})(\theta - \sqrt{x})$. Falls f elementar integrierbar ist, können wir $\int f$ also in folgender Form schreiben:

  $$\int \frac{2\frac{\theta}{x} - 1}{\theta^2 - x} = c_1 \log(\theta + \sqrt{x}) + c_2 \log(\theta - \sqrt{x})$$

  Indem wir ableiten und einen Koeffizientenvergleich durchführen, sehen wir, dass mit $c_1 = c_2 = 1$ die Gleichung tatsächlich erfüllt ist. Allerdings tritt hier der Ausdruck $\sqrt{x}$ auf, der nicht in $\mathbb{C}(x, \theta)$ ist. Nach dem Satz von Lioville wissen wir aber, dass sich $\int f$ ohne solche Ausdrücke schreiben lässt, und tatsächlich gilt:

  $$\log(\theta + \sqrt{x}) + \log(\theta - \sqrt{x}) = \log((\theta + \sqrt{x})(\theta + \sqrt{x})) = \log(\theta^2 - x)$$

Und somit:

$$\int \frac{2\frac{\theta}{x} - 1}{\theta^2 - x} = \log(\theta^2 - x)$$

Solche neuen Ausdrücke lassen sich vermeiden, indem wir die *Rothstein/Trager-Methode* anwenden: Unsere Vorraussetzungen sind wie folgt:
Wir haben $\frac{a}{b}$ gegeben, wobei $a, b \in F[\theta], \deg(b) < \deg(a), \mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und b quadratfrei und monisch ist. Sei $R(z) := \mathrm{res}_\theta(a(\theta) - zb'(\theta), b(\theta))$.
Dann gilt:
$\frac{a}{b}$ ist genau dann elementar integrierbar, wenn alle Nullstellen von R Konstanten sind. Falls dies der Fall ist, gilt:

$$\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i(\theta))$$

wobei die $c_1, \ldots, c_m$ die *verschiedenen* Nullstellen von R sind und die v_i wie folgt definiert sind:

$$v_i(\theta) = \mathrm{ggT}(a(\theta) - c_i b'(\theta), b(\theta))$$

Dies können wir auf unser letztes Beispiel anwenden:
Es gilt: $a(\theta) = 2\frac{\theta}{x} - 1, b(\theta) = \theta^2 - x$.

$$a(\theta) - zb'(\theta) = 2\frac{\theta}{x} - 1 - z\left(2\frac{\theta}{x} - 1\right) = \frac{2}{x}(1 - z)\theta + (z - 1)$$

Also:

$$\begin{aligned} R(z) = \mathrm{res}_\theta(a(\theta) - zb'(\theta), b(\theta)) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{x}(1-z) & (z-1) & 0 \\ 0 & \frac{2}{x}(1-z) & (z-1) \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} \\ &= \frac{x-4}{x}z^2 + \frac{-2x+8}{x}z + \frac{x-4}{x} \\ &= \frac{x-4}{x}\left(z^2 - 2z + 1\right) \\ &= \frac{x-4}{x}(z-1)^2 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass R (als Funktion von z) nur die konstante (doppelte) Nullstelle $c_1 = 1$ hat. Damit ist

$$v_1 = \mathrm{ggT}(a(\theta) - b'(\theta), b(\theta)) = \mathrm{ggT}(0, \theta^2 - x) = \theta^2 - x$$

und wir erhalten wieder:

$$\int \frac{2\frac{\theta}{x} - 1}{\theta^2 - x} = \log(\theta^2 - x)$$

Um eine Idee davon zu bekommen, wieso hier die Resultante auftaucht, betrachten wir dieses Beispiel noch einmal. Zunächst brauchten wir neue Ausdrücke ($\sqrt{x}$), um den Nenner von f vollständig zu faktorisieren. Diese konnten wir aber hinterher zusammenfassen: $\log((\theta + \sqrt{x})(\theta + \sqrt{x})) = \log(\theta^2 - x)$. Das lag daran, dass die Koeffizienten c_1, c_2 der Logarithmen beide gleich waren. Allgemein für $\int f = \int \frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$ genügt es also vielleicht, wenn wir nur die *verschiedenen* Werte der c_i herausfinden. Dies ist wie folgt möglich: Wir erinnern uns, dass wir für den Fall, dass $a, b \in \mathbb{C}[x]$ ist, die c_i einfach durch $c_i = \frac{a(x_i)}{b'(x_i)}$ berechnen konnten, wobei die $x_1, \ldots, x_m$ die Nullstellen von b waren. Das heißt wir suchen die verschiedenen Lösungen, der

Gleichungen:

$$a(x_i) - c_i b'(x_i) = 0$$

für $i = 1, \dots, m$. Dies können wir auch wie folgt zusammenfassen: Die verschiedenen c_i sind genau die verschiedenen Nullstellen von

$$\tilde{R}(z) := \prod_{i=1}^{m} (a(x_i) - z b'(x_i))$$

Es stellt sich heraus, dass dies, bis auf einen Faktor, der vom Leitkoeffizienten von $b(x)$ abhängt und insbesondere nicht 0 ist, genau die Resultante $R(z) := \mathrm{res}_x(a(x) - zb'(x), b(x))$ ist. Man kann dann weiter zeigen, dass dies auch hier für Logarithmen anwendbar ist und auch, dass sich die zugehörigen v_i einfach durch $v_i = \mathrm{ggT}(a(\theta) - c_i b'(\theta), b(\theta))$ berechnen lassen.

5.2 Exponentielle Körpererweiterungen

Sei nun $\theta := \theta_n$ exponentiell über $F := \mathbb{C}(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, mit $u \in F$, sodass $\frac{\theta'}{\theta} = u, f(\theta) = \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$

Im Allgemeinen ist das Verfahren bei exponentiellen Körpererweiterungen recht ähnlich zu den logarithmischen, allerdings ist der polynomielle Teil, etwas komplizierter. Durch eine Polynomdivision $f = s + \frac{r}{q}$, teilen wir das Integral wieder auf:

$$\int f = \int s + \int \frac{r}{q}$$

Diesmal wenden wir uns zuerst dem rationalen Teil zu.

5.2.1 Der Rationale Teil

Im Prinzip verwenden wir wieder die *Hermite-Reduktion*, um den Nenner quadratfrei zu machen, hierbei gibt es aber ein Problem. Wir beginnen wieder mit der quadratfreien Faktorisierung des Nenners:

$$q(\theta) = \prod_{i=1}^{k} q_i(\theta)^i$$

Die q_i sind jeweils quadratfrei, d.h. $\mathrm{ggT}(q_i(\theta), \frac{d}{d\theta} q_i(\theta)) = 1$. Bei dem Fall der logarithmischen Körpererweiterung, konnten wir jetzt folgern, dass auch $\mathrm{ggT}(q_i(\theta), q_i(\theta)') = 1$ gilt, das ist hier nicht der Fall, wie das Beispiel $q_i = \theta = \exp(x)$ zeigt: Es gilt $\mathrm{ggT}(\theta, \frac{d}{d\theta}\theta) = \mathrm{ggT}(\theta, 1) = 1$, aber $\mathrm{ggT}(\theta, \theta') = \mathrm{ggT}(\theta, \theta) = \theta \neq 1$. Allerdings lässt sich zeigen, dass es genügt, zusätzlich $\theta \nmid q_i$ zu fordern, damit $\mathrm{ggT}(q, q_i') = 1$ gilt. Daher klammern wir zunächst die größtmöglich Potenz von θ in q aus, d.h. $q(\theta) = \theta^l \tilde{q}(\theta)$, mit $\theta \nmid \tilde{q}$. Dann gilt insbesondere $\mathrm{ggT}(\theta^l, \tilde{q}(\theta)) = 1$. Daher können wir Polynome $\tilde(r), w \in F[\theta]$ mit $\deg(\tilde(r)) < \deg(\tilde{q}), \deg(w) < \deg(\theta^l) = l$ finden, sodass:

$$\tilde{r}\theta^l + w\tilde{q} = r$$
$$\Rightarrow \tilde{r}\frac{\theta^l}{q} + w\frac{\tilde{q}}{q} = \frac{r}{q} = f - s$$
$$\Rightarrow f = s + \frac{w}{\theta^l} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{q}}$$

Setzen wir $\tilde{s} = s + \theta^{-l}w$, erhalten wir:

$$\int f = \int \tilde{s} + \int \frac{\tilde{r}}{\tilde{q}}$$

Der polynomielle Teil $\tilde{s}$ ist nun ein erweitertes Polynom, da auch negative Potenzen von θ auftreten können. Da θ exponentiell ist, ist dies aber nicht so schlimm, denn $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$. Auf den rationalen Teil können wir jetzt die *Hermite-Reduktion* anwenden, und daraufhin wieder die *Rothstein/Trager-Methode*, wobei es hier dann wieder eine kleine Variation gibt. Haben wir nach der *Hermite-Reduktion* das Integral $\int \frac{a}{b}$, wobei b quadratfrei ist und einen größeren Grad als a hat, übrig, bestimmen wir wieder die Resultante:

$$R(z) = \text{res}_\theta(a(\theta) - zb'(\theta), b(\theta))$$

und die verschiedenen Nullstellen $c_1, \ldots, c_m$ von R. Wieder gilt, dass die Nullstellen Konstanten sein müssen, damit das Integral elementar ist und zudem berechnen wir die v_i durch $v_i = \text{ggT}(a(\theta) - c_i b'(\theta), b(\theta))$ wie bei den Logarithmen. Allerdings gilt jetzt:

$$\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = -u \sum_{i=1}^{m} c_i \deg(v_i) + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i(\theta))$$

Der Grund für das Auftauchen des u-Ausdruckes ist hier, dass bei der Ableitung der log-Terme stets der Grad des Nenners gleich dem Grad des Zählers ist, aber $\deg(a) < \deg(b)$ ist, was durch das u behoben wird.

Beispiel:

- $f = \frac{2x}{1+\theta}$ mit $\theta = \exp(x^2)$. Also $a(\theta) = 2x, b(\theta) = 1 + \theta$. Der Nenner ist bereits quadratfrei, $\theta \nmid b$, $\deg(b) > \deg(a)$, wir können also die *Rothstein/Trager-Methode* anwenden:

  $$R(z) = \text{res}_\theta(a(\theta) - zb'(\theta), b(\theta)) = \text{res}_\theta(2x - 2xz\theta, 1 + \theta)$$
  $$= \begin{vmatrix} -2xz & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
  $$= -2xz - 2x = -2x(z + 1)$$

  Wir sehen, dass R (als Funktion von z) nur die konstante Nullstelle $c_1 = -1$ hat. Damit ist

  $$v_1 = \text{ggT}(a(\theta) + b'(\theta), b(\theta)) = \text{ggT}(2x + 2x\theta, 1 + \theta) = 1 + \theta$$

  Also:

  $$\int \frac{2x}{1+\theta} = u - \log(1 + \theta) = x^2 - \log(1 + \theta)$$

- $f = \frac{1}{1+\theta}, \theta = \exp(x^2), a = 1, b = 1 + \theta$. Es gilt:
$$\begin{aligned} R(z) &= \mathrm{res}_\theta(a(\theta) - zb'(\theta), b(\theta)) = \mathrm{res}_\theta(1 - 2xz\theta, 1 + \theta) \\ &= \begin{vmatrix} -2xz & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2xz - 1 \end{aligned}$$
Hier hat R allerdings eine nicht konstante Nullstelle, und zwar $z = -\frac{1}{2x}$, daher ist f nicht elementar integrierbar.

5.2.2 Der Polynomielle Teil

Angenommen, $\int \tilde{s}$ wäre elementar,dann gibt es nach dem Satz von Liouville $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ und $v_0, \ldots, v_m \in F(\theta)$ mit
$$\tilde{s}(\theta) = v_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i(\theta)'}{v_i(\theta)}$$
Da $\tilde{s}$ ein erweitertes Polynom ist, können wir es wie folgt schreiben:
$$\tilde{s} = \sum_{j=-k}^{l} p_j \theta^j$$
Wobei die p_j Funktionen aus F sind. Bei dem Logarithmischen Fall konnten wir folgern, dass die $v_1, \ldots, v_m$ nicht von θ abhängen konnten. Dies ist hier nicht der Fall. Allerdings kann man zeigen, dass, wenn v_i von θ abhängt, $v_i = \theta$ gelten muss[1]. Dann gilt für $v_i(\theta) = \theta$: $\frac{v_i'}{v_i} = u'$, was wir dann einfach in den v_0-Term hereinziehen können. Zudem können wir folgern, dass v_0 im Nenner nur einen Term der Form θ^n haben kann. Eine wichtige Eigenschaft bei exponentiellen θ ist, dass die Potenz beim Ableiten gleich bleibt, d.h. $(f\theta^n)' = f'\theta^n + nf\theta'\theta^{n-1} = (f' + nfu')\theta^n$. Zusammenfassend gilt daher:
$$\tilde{s}(\theta) = \left(\sum_{j=-k}^{l} q_j \theta^j\right)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$
Wobei $q_j, v_i \in F, c_i \in \mathbb{C}$. Wir können nun einen Koeffizientenvergleich durchführen, um die q_j, c_i, v_i herauszufinden: Für $-k \leq j \leq -1$ und $1 \leq j \leq l$ gilt:
$$p_j = q_j' + ju'q_j$$
Und für $j = 0$:
$$p_0 = q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$
Wegen $p_0 \in F$ können wir diese Gleichung durch Rekursion lösen, indem wir integrieren:
$$\int p_0 = q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$

[1] Um das zu zeigen, benötigt man allerdings noch weitere Annahmen, und zwar, dass die v_i monisch und irreduzibel (über $F[\theta]$) sind. Diese können wir aber o.B.d.A. annehmen, denn wäre z.B. $v_i = ab$ mit $a, b \in F[\theta]$, so gilt: $\log(v_i) = \log(ab) = \log(a) + \log(b)$ bzw. $\frac{v_i'}{v_i} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}$, wir können also dann v_i in seine irreduziblen Faktoren aufteilen und in der Summe dadurch ersetzen

Die anderen Gleichungen beinhalten alle sowohl ein q_j als auch ein q_j', wir haben also eine Differentialgleichung, die sogenannte *Risch-Differentialgleichung* die wir in F lösen müssen. Ich habe diese nur für den Spezialfall, dass die Koeffizienten in der Gleichung Polynome über $\mathbb{C}$ sind, umgesetzt, also falls $q_j' + aq_j = b$, wobei $a, b \in \mathbb{C}[x]$. Diese kann man dann einfach lösen, indem man als Ansatz für q_j ein Polynom wählt und mit dem Leitkoeffizienten beginnend über Koeffizientenvergleiche alle Koeffizienten bestimmt. In [2] wird eine komplette Lösung dieser Differentialgleichung vorgestellt. Ist eine der Differentialgleichung nicht über F lösbar bzw. ist eines der q_j nicht elementar, so ist $\int \tilde{s}$ auch nicht elementar.
Beispiele:

- $F = \mathbb{C}(x)$, $f = \theta := \exp(x^2), u = x^2, p_1 = 1, p_0 = 0$. Falls f elementar integrierbar wäre, gilt
$$\int \theta = q_1\theta + q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log(v_i)$$
Und wir erhalten die Gleichungen:
$$1 = q_1' + 2xq_1$$
$$0 = q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$
Wir müssen also überprüfen, ob $1 = y' + 2xy$ eine Lösung $y \in \mathbb{C}(x)$ hat. Angenommen, es gäbe eine Lösung $y = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{C}[x], \mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt:
$$1 = \frac{a'b - ab'}{b^2} + 2x\frac{a}{b} = \frac{a'b - ab' + 2bxa}{b^2}$$
Also: $b^2 = a'b - ab' + 2bxa$. Da b die linke Seite teilt, muss b auch die rechte Seite teilen. Da $b \mid a'b, 2bxa$, muss auch $b \mid ab'$ und wegen $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ folgt $b \mid b'$. Da aber $\deg(b') < \deg(b)$ ist, kann das nur der Fall sein, wenn $b' = 0$. Dann ist $y \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n := \deg(y) > 0$, denn eine Konstante kann diese Differentialgleichung nicht lösen. Dann ist der Ausdruck $y' + 2xy$ aber ein Polynom vom Grad $n + 1 > 0 = \deg(1)$, y kann also doch keine Lösung dieser Risch-Differentialgleichung sein. Folglich ist diese nicht lösbar und somit ist auch die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, die man durch eine kleine Substitution und Multiplikation mit einer Konstanten aus f erhält:
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$
nicht elementar.

- Betrachten wir hingegen $f = x\theta$ mit $\theta = \exp(x^2)$ erhalten wir die Gleichungen:
$$x = q_1' + 2xq_1$$
$$0 = q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$
Die erste Gleichung wird nun durch $q_1 = \frac{1}{2}$ gelöst, die Lösung der zweiten

Gleichung ist eine beliebige Konstante C, also:

$$\int x \exp(x^2) = \frac{1}{2} \exp(x^2) + C$$

6 Implementierung

Bevor ich den Risch-Algorithmus implementieren kann, brauche ich eine Umgebung, in der ich folgende Dinge zur Verfügung habe:

- Datenstruktur für Polynome, nicht nur über $\mathbb{C}$, sondern auch über $\mathbb{C}(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$, Rationale Funktionen
- Datenstruktur für „Körpertürme“, d.h. $\mathbb{C}(x, \theta_1, ...\theta_n)$
- Verschiedene Polynommanipulationsmethoden:
  - Addition, Multiplikation
  - Polynomdivision
  - ggT-Berechnung, lösen von Gleichungen der Art $a(x)p(x) + q(x) = r(x)$, wobei $a, b \in K[x]$ gesucht sind
  - Quadratfreie Faktorisierung
  - Partialbruchzerlegung
  - Ableiten
  - Resultanten (also im Wesentlichen Determinantenberechnung)

Ein Polynom $p(t) = p_n t^n + p_{n-1} t^{n-1} + \dots + p_0$ wird über die Klasse *Polynomial* aus *Polynomial.py* abgespeichert. Die wichtigen Attribute und Methoden dieser Klasse seien im Folgenden erklärt:

- Attribute:
  - *coefficients*: Hier werden die $p_0, \dots, p_n$ in Form einer Liste der Länge $n+1$ abgespeichert. Der Einfachheit halber verwende ich die *dense representation*, d.h. alle Koeffizienten, auch die, die 0 sind, werden abgespeichert.

- *variable*: Das ist die Variable in der das Polynom steht, z.B. $x, \theta_1, \ldots, \theta_n, z, \ldots$. Nähere Informationen zu dieser, z.B. die zu einem θ_i gehörenden Körpererweiterung, sind in der *Variable*-Klasse in $FieldExtension.py$.

- Methoden:
  - *factorSquareFree*: führt eine quadratfreie Faktorisierung von p durch, sodass:
  $$p(t) = \prod_{i=1}^{m} a_i^i$$
  wobei die a_i quadratfrei paarweise teilerfremd sind. Die Methode gibt dann die a_i in Form einer Liste $[(a_1, 1), (a_2, 2), \ldots, (a_m, m)]$ zurück
  - *differentiate*: Leitet das Polynom nach x ab, z.B. *differentiate*$(\theta + x) = (\theta + x)' = \theta + 1$ mit $\theta = \exp(x)$
  - *differentiateWRTtoPolyVar*: Leitet das Polynom nach seiner Variable ab, z.B. *differentiateWRTtoPolyVar*$(\theta^2 + x) = \frac{d}{d\theta}(\theta^2 + x) = 2\theta$ mit $\theta = \exp(x)$
  - *__add__,__mul__*: Methoden für das Addieren bzw. Multiplizieren zweier Polynome.

Dann gibt es bzgl. der Polynome noch einige Funktionen, die nicht in der Klasse enthalten sind:

- *PolyDiv*: Führt eine Polynomdivision zu zwei gegebenen Polynomen aus.
- *PolyGCD*: Berechnet mithilfe des euklidischen Algorithmus den ggT zweier Polynome.
- *extendedEuclidGenF*: Input: Polynome p, q, f mit $\mathrm{ggT}(p, q) \mid f$. Diese Funktion findet dann Polynome x, y mit $xp + yq = f$, sodass zusätzlich eine Grad-Bedingungen erfüllt sind, z.B. $\deg(x) < \deg(q) - \deg(\mathrm{ggT}(p, q))$
- *PartialFractionWithPowerFactorization*: Führt eine Partialbruchzerlegung von $\frac{a}{b}$ durch, für b die quadratfreie Faktorisierung übergeben wird: $b = \prod_{i=1}^{m} b_i^i$. Die Funktion berechnet dann $r_{11}, r_{21}, r_{22}, \ldots, r_{mm}$ mit:
$$\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \frac{r_{ij}}{b_i}$$
wobei zusätzlich gilt $\deg(r_ij) < \deg(b_i)$. Es wird dann die Liste $[(r_{11}, b_1, 1), (r_{21}, b_2, 1), (r_{22}, b_2, 2), \ldots, (r_{mm}, b_m, m)]$ zurückgegeben.

Zusätzlich gibt es noch die Klasse *RationalFunction*, welche allerdings nicht besonders spannend ist. Im Wesentlich hat sie die zwei Attribute *numerator* und *denominator*, also Zähler- und Nennerpolynome und einige Methoden wie die *Polynomial*-Klasse.

Eine weitere wichtige Klasse ist *FieldExtension*. Hier werden die Informationen über ein θ zur Körpererweiterung $F(\theta)$ gespeichert. Hier wieder einige Attribute:

- *extensionType*: Die Art der Körpererweiterung. Kann die Werte $0, 1, 2, 3$ annehmen, die für *TRANS_LOG, TRANS_EXP, ALGEBRAIC, TRANSCENDENTAL_SYMBOL* stehen. Der letzte Typ ist dafür da, falls zwischendurch neue Variablen benötigt werden, die aber nicht z.B. für eine Exponentialfunktion stehen. Dies wird beispielweise benötigt, wenn die Resultante $\operatorname{res}_\theta(a(\theta) - zb'(\theta), b(\theta)) \in F[z]$ berechnet wird.

- *argFunction*: Falls es sich um ein logarithmisches oder exponentielles θ handelt, wird zu diesem ein u benötigt mit $\log(u) = \theta$ bzw. $\exp(u) = \theta$, dies wird hier abgespeichert.

Dazu gibt es noch die Klasse *FieldTower*, in der eine Folge von solchen $\theta_1, \dots, \theta_n$ abgespeichert werden. Dies sind bereits die wichtigsten Klassen, es gibt allerdings noch viele weitere Teile, z.B. eine Matrix-Klasse zum berechnen von Determinanten und Lösen von linearen Gleichungssystemen oder eine *Pretty-Printing*-Funktion, die dafür sorgt, dass der Output nicht nur auf einer Zeile geschrieben wird, sondern, dass z.B. Potenzen hochgestellt werden o.Ä. Bilder hierzu sind im nächsten Kapitel zu finden.

7 Benutzung des Programms

Zur Benutzung des startet man das *main.py*-Skript. Prinzipiell kann man das Programm auch als Modul benutzt werden, also z.B. eingebunden in andere Programme; dafür habe ich es allerdings noch nicht ausgereift. Will man nun eine Funktion f, muss man zunächst selber die benötigten $\theta_1, \dots, \theta_n$ finden, sodass $f \in \mathbb{C}(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$. Die hierbei benötigte Anzahl an Körpererweiterungen n muss als erstes eingegeben werden. Daraufhin muss jedes θ_i einzeln eingegeben werden. Dazu muss zunächst angegeben werden, ob es sich um eine transzendente oder algebraische Körpererweiterung handelt. Da ich algebraische θ_i noch nicht implementiert habe, gibt es nur die transzendente Variante, woraufhin gefragt wird, ob θ_i logarithmisch oder exponentiell ist und man muss die Argumentfunktion, d.h. das u mit $\theta_i = \log(u)$ bzw. $\theta_i = \exp(u)$, eingeben.
Will man nun einen Funktionsterm für f eingeben, muss man darauf achten, nicht z.B. $\log(u)$ zu schreiben, sondern stattdessen die zugehörige Variable, in diesem Fall

T_i (aufgrund mangelnder griechischer Buchstaben beim Programmieren). Dies gilt auch, wenn man vorher bereits in einigen der u eine vorherige Körpererweiterung benötigt.
Insbesondere muss man bei der Eingabe darauf achten, die *python*-Syntax zu beachten, d.h. z.B. $x{*}{*}2$ statt $x\hat{}2$ und $2{*}x$ statt $2x$: Beispiele:

- Wir wollen die Funktion $f = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ integrieren. Es gilt bereits $f \in \mathbb{C}(x)$, wir brauchen also keine Körpererweiterungen.

```
Number of field extensions? 0
C(x)
integrate f = x**3/(x**2-2*x+1)
                               ⎛3⎞ 2 ⎛1⎞ 3
⌠      3          (-2)+(-1)x+⎜-⎟x +⎜-⎟x
|     x                        ⎝2⎠   ⎝2⎠
|────────── dx = ──────────────────────────+3log((-1)+x) + C
|          2                (-1)+x
⌡1+(-2)x+x
```

- $f = \frac{1}{x^5+3x+1}$:

```
Number of field extensions? 0
C(x)
integrate f = 1/(x**5+3*x+1)
                          1
                          -
⌠   1                     5
|─────── dx =     ∑      ────log(x+(-1)w) + C
|       5             5  3  4
⌡1+3x+x       1+3w+w =0  -+x
                         5
```

- $f = \frac{1}{x\log(x)\log(\log(x))}$. Hierfür brauchen wir zwei logarithmische Körpererweiterungen, $\theta_1 = \log(x), \theta_2 = \log(\theta_1) = \log(\log(x))$, also $f = \frac{1}{x\theta_1\theta_2}$:

```
Number of field extensions? 2
Field extension of C(x)
Type of field extension (Transcendental: t, Algebraic: a):t
Type of transcendental extension (Exponential: e, Logarithmic: l):l
Field extension: log(u)
u = x
Field extension of C(x,T_1) where T_1 = log(x)
Type of field extension (Transcendental: t, Algebraic: a):t
Type of transcendental extension (Exponential: e, Logarithmic: l):l
Field extension: log(u)
u = T_1
C(x,T_1,T_2) where T_1 = log(x); T_2 = log(T_1) = log(log(x))
Use field-extension Variables instead of the function names, e.g. f=x*T_1 instead of f=x*log(x)
integrate f = 1/(x*T_1*T_2)
⌠    1
|    -
|    x
|  ──────
|  log(x)
|────────── dx = log(log(log(x))) + C
⌡log(log(x))
```

- $f = \frac{2\frac{\log(x)}{x}-1}{\log(x)^2-x}$, das Beispiel von vorhin. Mit $\theta_1 = \log(x)$ ist $f = \frac{2\frac{\theta_1}{x}-1}{\theta_1^2-x} \in \mathbb{C}(x,\theta)$:

```
Number of field extensions? 1
Field extension of C(x)
Type of field extension (Transcendental: t, Algebraic: a):t
Type of transcendental extension (Exponential: e, Logarithmic: l):l
Field extension: log(u)
u = x
C(x,T_1) where T_1 = log(x)
Use field-extension Variables instead of the function names, e.g. f=x*T_1 instead of f=x*log(x)
integrate f = (2*T_1/x-1)/(T_1**2-x)
⌠      ⎛2⎞
⎮(-1)+⎜─⎟log(x)
⎮      ⎝x⎠                ⎛             2⎞
⎮───────────── dx = log⎝(-1)x+log(x) ⎠ + C
⎮              2
⌡(-1)x+log(x)
```

- $f = \frac{2x}{(1+x^2)(\log(x)-x)} - \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)\log(1+x^2)}{(\log(x)-x)^2}$, wir benötigen zwei Körpererweiterungen: $\theta_1 = \log(1+x^2), \theta_2 = \log(x), f = \frac{2x}{(1+x^2)(\theta_2-x)} - \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)\theta_1}{(\theta_2-x)^2} \in \mathbb{C}(x,\theta_1,\theta_2)$. In diesem Fall spielt die Reihenfolge der θ_i keine Rolle.

```
Number of field extensions? 2
Field extension of C(x)
Type of field extension (Transcendental: t, Algebraic: a):t
Type of transcendental extension (Exponential: e, Logarithmic: l):l
Field extension: log(u)
u = x**2+1
Field extension of C(x,T_1) where T_1 = log(x**2+1)
Type of field extension (Transcendental: t, Algebraic: a):t
Type of transcendental extension (Exponential: e, Logarithmic: l):l
Field extension: log(u)
u = x
C(x,T_1,T_2) where T_1 = log(x**2+1); T_2 = log(x) = log(x)
Use field-extension Variables instead of the function names, e.g. f=x*T_1 instead of f=x*log(x**2+1)
integrate f = 2*x/((1+x**2)*(T_2-x))-((1/x-1)*T_1)/(T_2-x)**2
⌠      2
⎮(-2)x  ⎛(-1)+x⎞    ⎛     2⎞ ⎛ 2x ⎞
⎮──────+⎜──────⎟log⎝1+x  ⎠+⎜────⎟log(x)
⎮    2  ⎝  x   ⎠           ⎜   2⎟                ⎛     2⎞
⎮ 1+x                      ⎝1+x ⎠             log⎝1+x  ⎠
⎮───────────────────────────────────── dx = ──────────── + C
⎮         2                   2             (-1)x+log(x)
⌡        x +(-2)xlog(x)+log(x)
```

Die Funktion, die in diesem Bildausschnitt integriert wird, sieht anders aus als wie wir sie definiert haben. Das liegt daran, dass das Programm bei der Auswertung des gegebenen Ausdruckes diesen direkt in *eine* rationale Funktion aus $\mathbb{C}(x,\theta_1)(\theta_2)$ umwandelt, d.h. die beiden Brüche werden auf einen Nenner gebracht, addiert und ggf. gekürzt. Ähnliche „Vereinfachungen“werden auch rekursiv für die einzelnen Teilterme durchgeführt. Daher kommt das unterschiedliche Erscheinungsbild zustande.

- $f = \exp(x^2), \theta_1 = \exp(x^2)$:

```
Number of field extensions? 1
Field extension of C(x)
Type of field extension (Transcendental: t, Algebraic: a):t
Type of transcendental extension (Exponential: e, Logarithmic: l):e
Field extension: exp(u)
u = x**2
C(x,T_1) where T_1 = exp(x**2)
Use field-extension Variables instead of the function names, e.g. f=x*T_1 instead of f=x*exp(x**2)
integrate f = T_1
⌠   ⎛ 2⎞
⌡exp⎝x ⎠ dx = Integral is not elementary
```

- $f = \frac{1}{1+\exp(x)}, \theta_1 = \exp(x)$:

```
Number of field extensions? 1
Field extension of C(x)
Type of field extension (Transcendental: t, Algebraic: a):t
Type of transcendental extension (Exponential: e, Logarithmic: l):e
Field extension: exp(u)
u = x
C(x,T_1) where T_1 = exp(x)
Use field-extension Variables instead of the function names, e.g. f=x*T_1 instead of f=x*exp(x)
integrate f = 1/(1+T_1)
⌠   1
⎮──────── dx = x+(-1)log(1+exp(x)) + C
⌡1+exp(x)
```

Manche Konsolen unterstützen kein Unicode, daher wird möglicherweise ein etwas unschönerer Ausdruck ausgegeben. Ich arbeite allerdings an einer Ascii-Version des *Pretty-Printing*-Systems, sodass dieses Problem umgangen wird. Ebenfalls kann es zu Anzeigeproblemen kommen, wenn das Programm in einem Python-Editor wie *IDLE* oder *Eclipse* ausgeführt wird, da in den dortigen Textfeldern die Zeichen unterschiedliche Längen haben.

8 Anstehende Entwicklungen

Das Projekt *Differentielle Algebra und der Risch-Algorithmus* ist natürlich nicht abgeschlossen und wird es auch nie werden, aber es gibt einige Dinge die ich in der Zukunft gerne noch implementieren bzw. verbessern möchte (Stand 13.1.2019):

- Performance: Bezogen auf die Effizienz hängt das Programm ziemlich hinterher. Bereits für kleine Berechnungen wie das Addieren von Polynomen finden unzählige Funktionsaufrufe statt, von denen viele überflüssig sind bzw. schneller gemacht werden können. Auch einige Algorithmen könnten verbessert werden, z.B.:

- Die ggT-Berechnung: Zurzeit wird der ggT zweier Polynome über den euklidischen Algorithmus berechnet. Dieser ist zwar einfach und erfüllt seine Aufgabe, aber gerade bei ggT-Berechungen über multivariaten Polynomringen wie sie hier auftauchen wird er problematisch. Bereits bei der ggT-Berechnung zweier Polynome 6-ten Grades über $\mathbb{C}(x, \theta_1)[\theta_2]$, also drei Variablen, kam es zu einem Overflow-Error, da zu große Zahlen in den Zwischenschritten auftraten. Es gibt bessere Algorithmen hierfür.
- Der rationale Teil beim Integrieren: Hier werden verscheidene ggT's der Form ggT$(a - zb', b)$ berechnet. Die Berechnung dieser ggT's kann hier noch einmal verbessert werden.(Siehe *Lazard/Rioboo/Trager*-Algorithmus und Subresultanten.)
- Die Berechnung der quadratfreien Faktorisierung. Auch hierbei gibt es bessere Algorithmen als den, der in Kapitel 2 vorgestellt wurde.

• Allgemeine Lösung der Risch-Differentialgleichung

• Algebraische Körpererweiterungen, zumindest für wurzelartige, d.h. für $\theta = \sqrt[n]{f}$.

• Automatische Erkennung/Auswahl geeigneter Körpererweiterungen $\theta_1, \ldots, \theta_n$ zu einer gegebenen Funktion f

• Ausarbeitung zu einem Modul, sodass ich verschiedene Funktionen des Programms, wie z.B. Polynome, Matrizen etc. auch für andere Projekte einfach einbinden kann.

• Unterstützung für endliche Körper (nicht direkt für das Integrations-Problem, sondern allgemein für Polynome, Matrizen etc.)

• Fehlerbehebungen (es gibt sicher noch diverse Fehler im Programm)

Literaturverzeichnis

[1] Geddes, Keith O. / Czapor, Stephen R. / Labahn, George: *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 1993, S.473-569

[2] Terelius, Björn: *Symbolic Integration*, https://www.nada.kth.se/utbildning/grukth/exjobb/rapportlistor/2009/rapporter09/terelius_bjorn_09095.pdf, (Stand 20.9.2018)
Der letzte Link scheint nicht mehr zu funktionieren (Stand 13.1.2019), man das Dokument aber über das Web-Archive finden: https://web.archive.org/web/20171030035427/https://www.nada.kth.se/utbildning/grukth/exjobb/rapportlistor/2009/rapporter09/terelius_bjorn_09095.pdf