使用泰勒公式进行估算时，在不同点有啥区别？[1]

leolinuxer

July 1, 2020

1 一个问题

利用函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 的泰勒展开，可以估算 $30^{\frac{1}{3}}$ 的值，那么，在 $x = 9$ 处进行展开，和在 $x = 27$ 处展开，有什么区别?

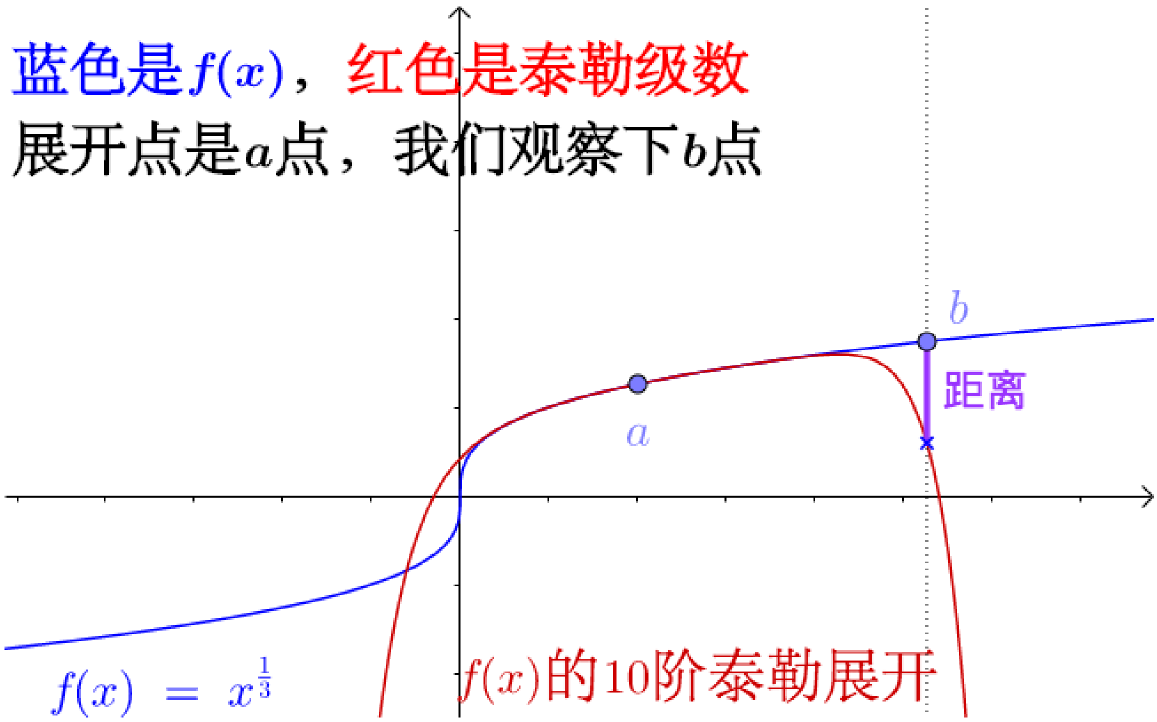
2 泰勒级数的收敛

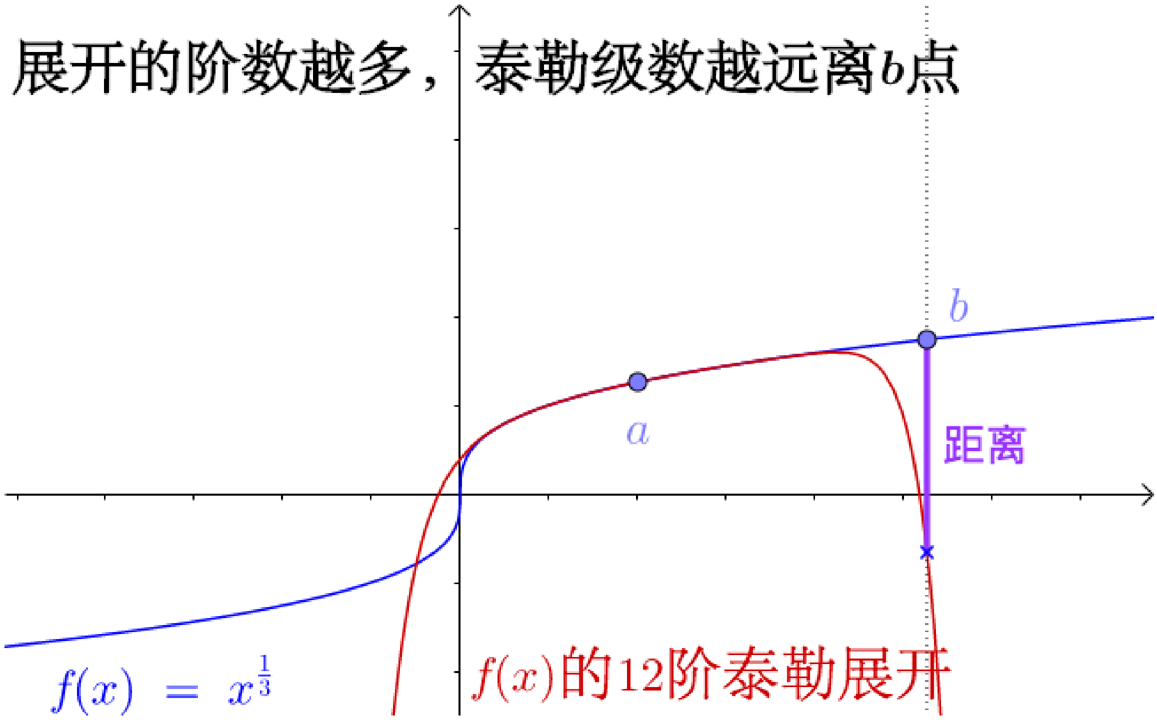
2.1 什么是收敛？

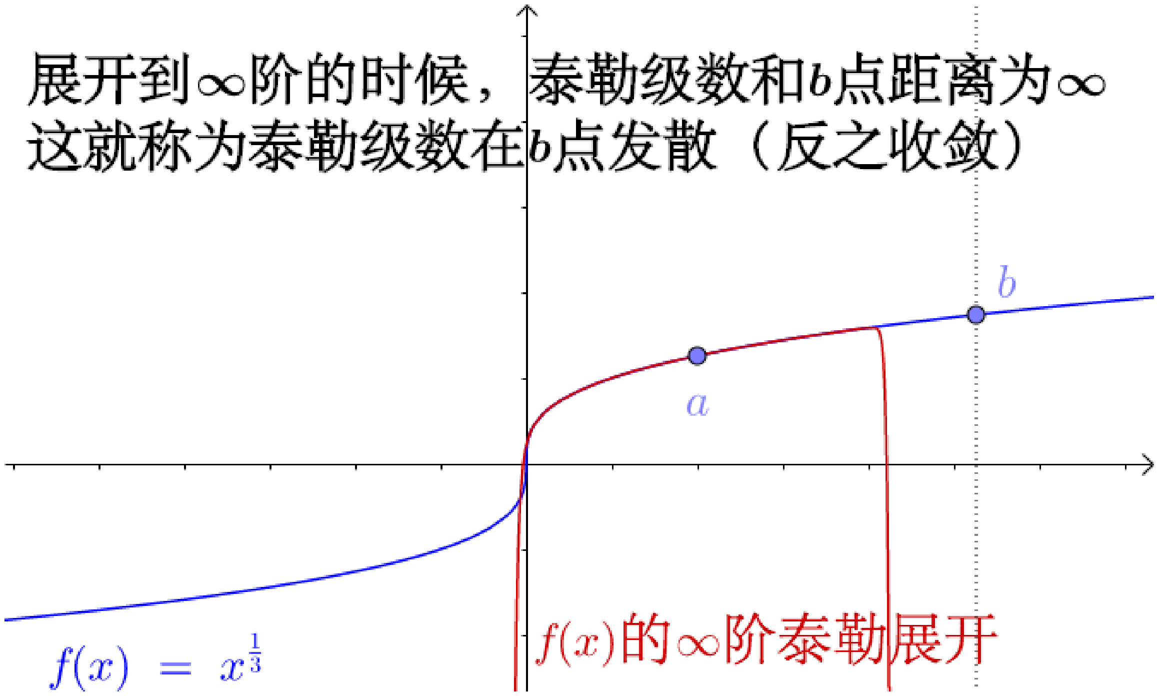
泰勒公式可以把可导的函数展开为幂级数：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(}n)(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

我们对 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 进行泰勒展开：



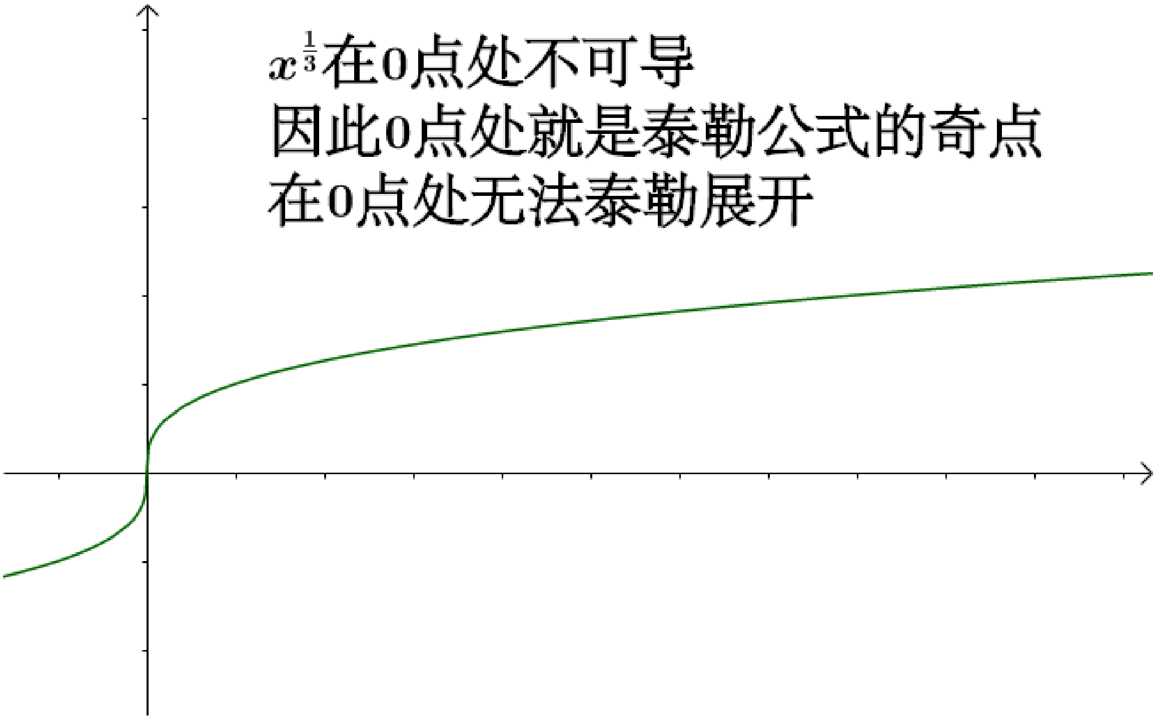


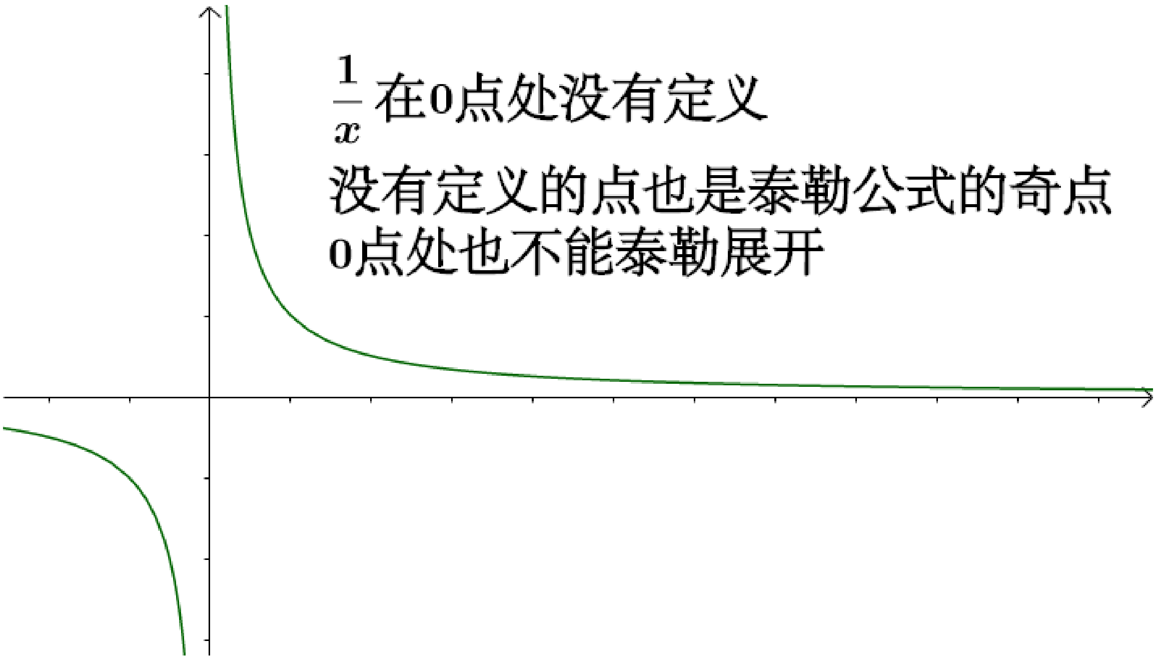


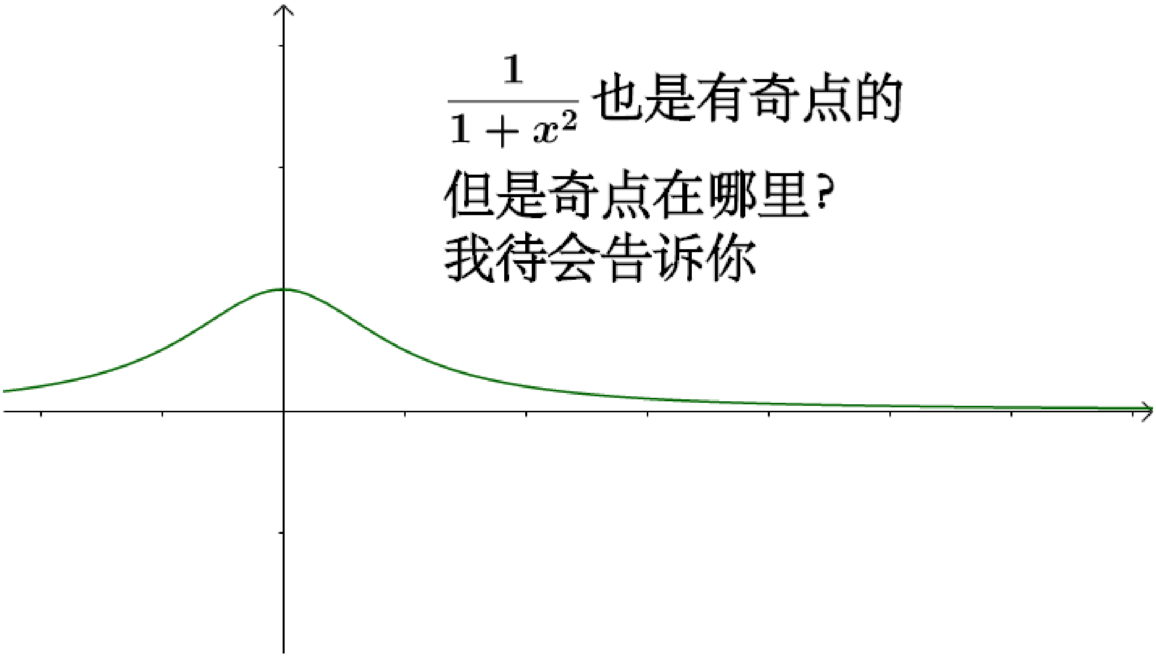
2.2 泰勒公式的奇点

什么叫做奇点？比如对于 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 这个函数：

- 不可导的点为奇点
- 没有定义的点也是奇点
- 复平面上的奇点

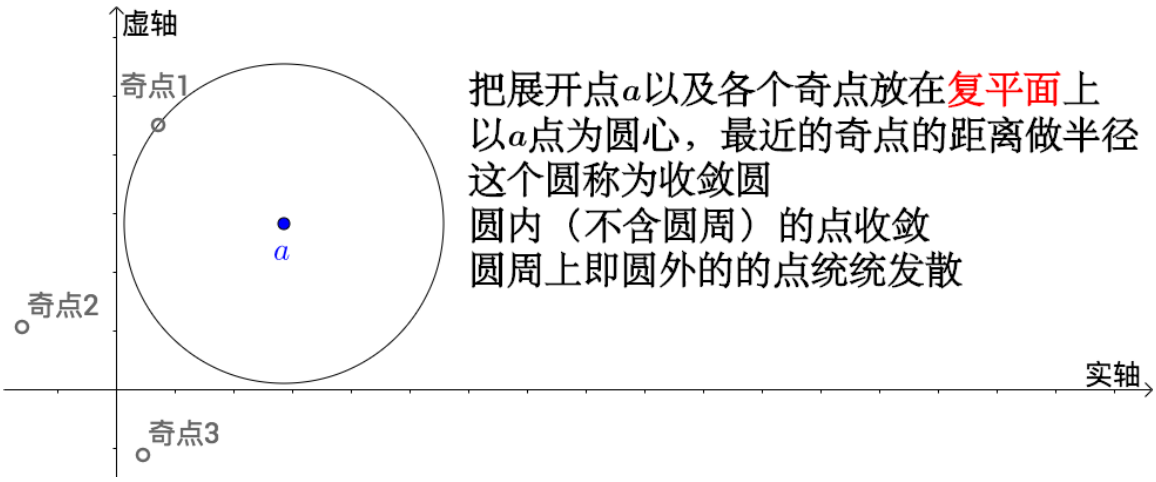

$x^{\frac{1}{3}}$在0点处不可导
因此0点处就是泰勒公式的奇点
在0点处无法泰勒展开


$\frac{1}{x}$在0点处没有定义
没有定义的点也是泰勒公式的奇点
0点处也不能泰勒展开



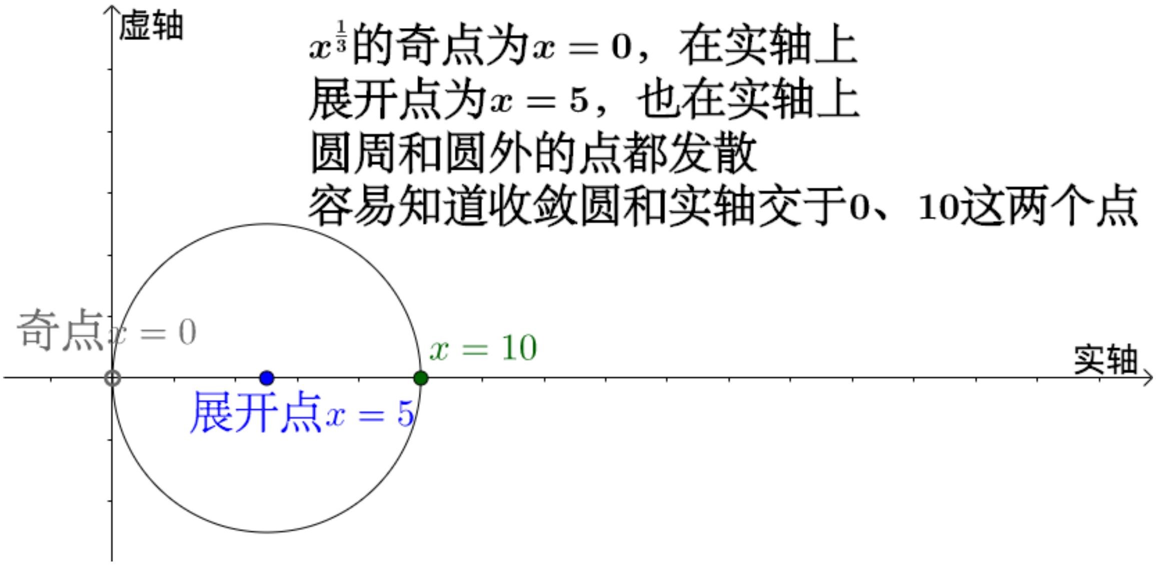
2.3 奇点与收敛圆

通过奇点来判断泰勒级数的收敛，这就是我说的那个非常漂亮的数学结论，由柯西证明的泰勒级数的收敛半径：

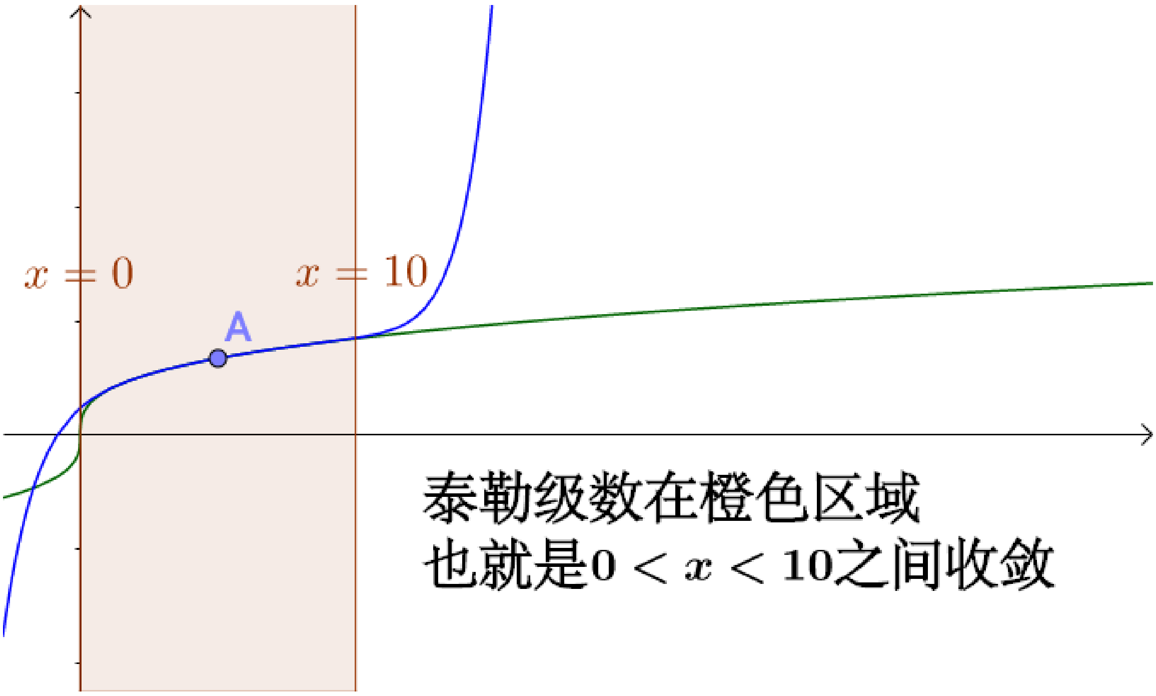


把展开点 a 以及各个奇点都放在复平面上，以 a 为圆心，最近的奇点的距离做半径，这个圆叫做收敛圆；圆内的点（不含圆周）收敛；圆周上和圆外的点统统发散。

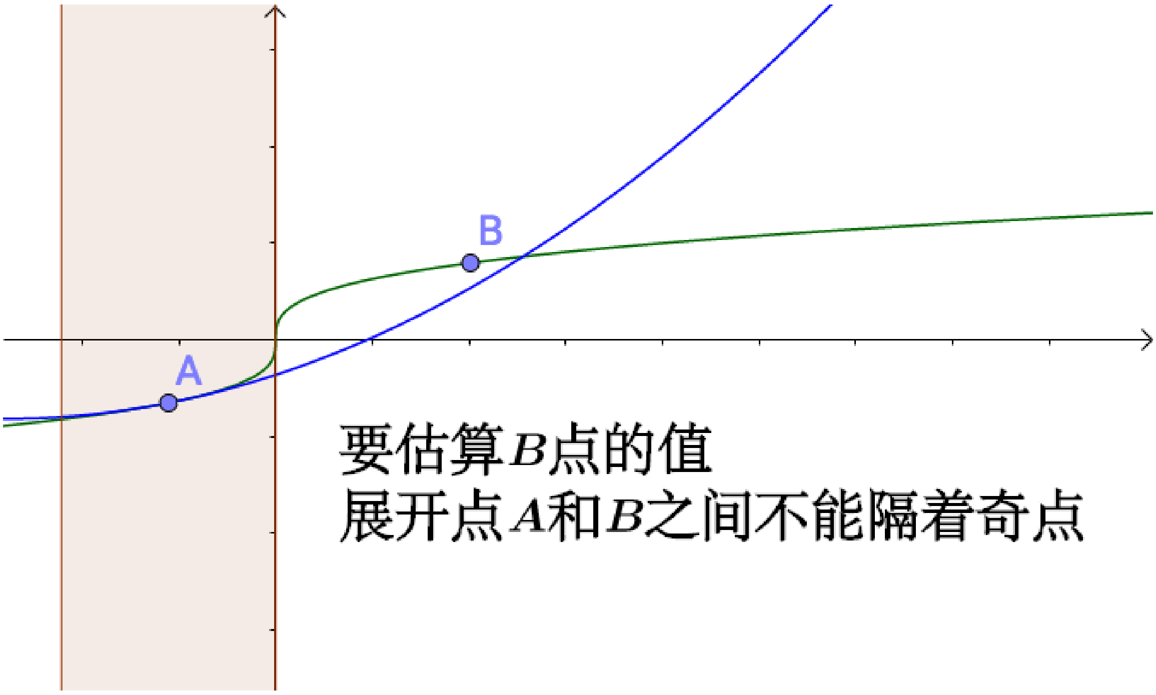
我们用 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 这个函数来举例子：

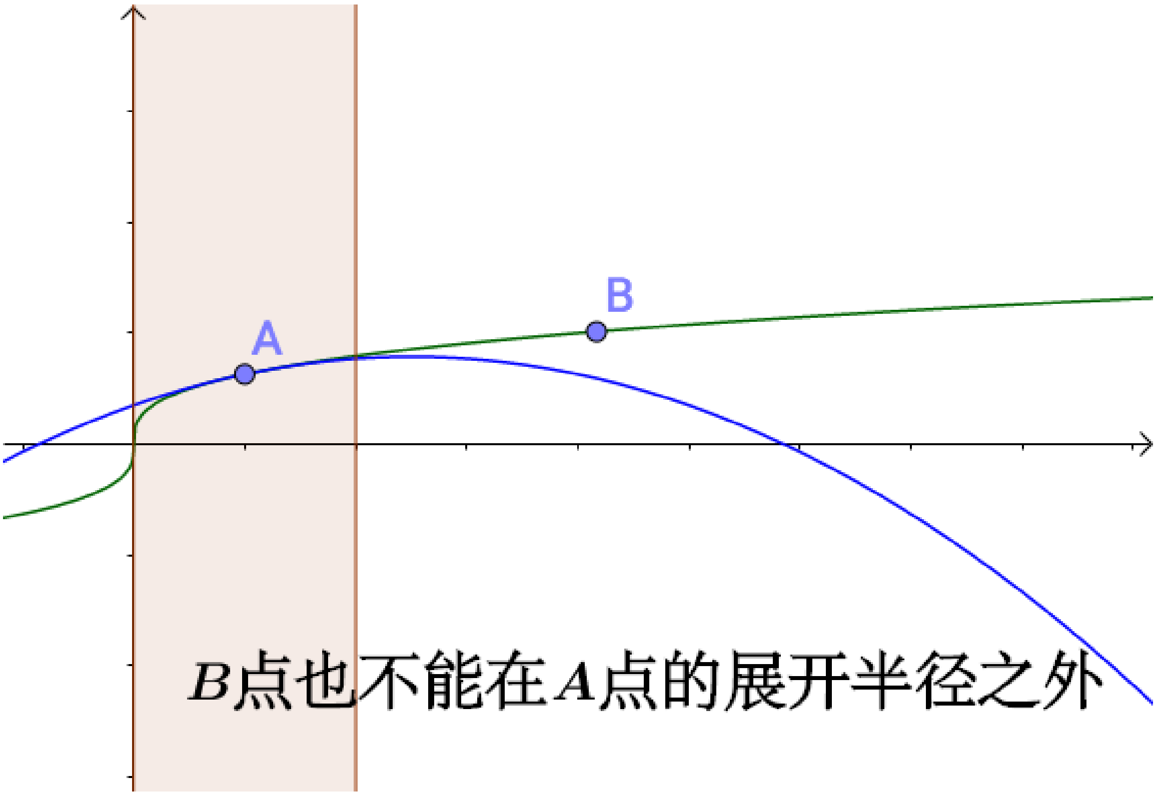


上面的收敛圆意味着，在实数范围内做 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 的话，如果在 $x=5$ 泰勒展开展开，那么只有在 $0<x<10$ 内的泰勒级数才会收敛：



明白了泰勒公式的收敛半径之后，我们就可以明白：



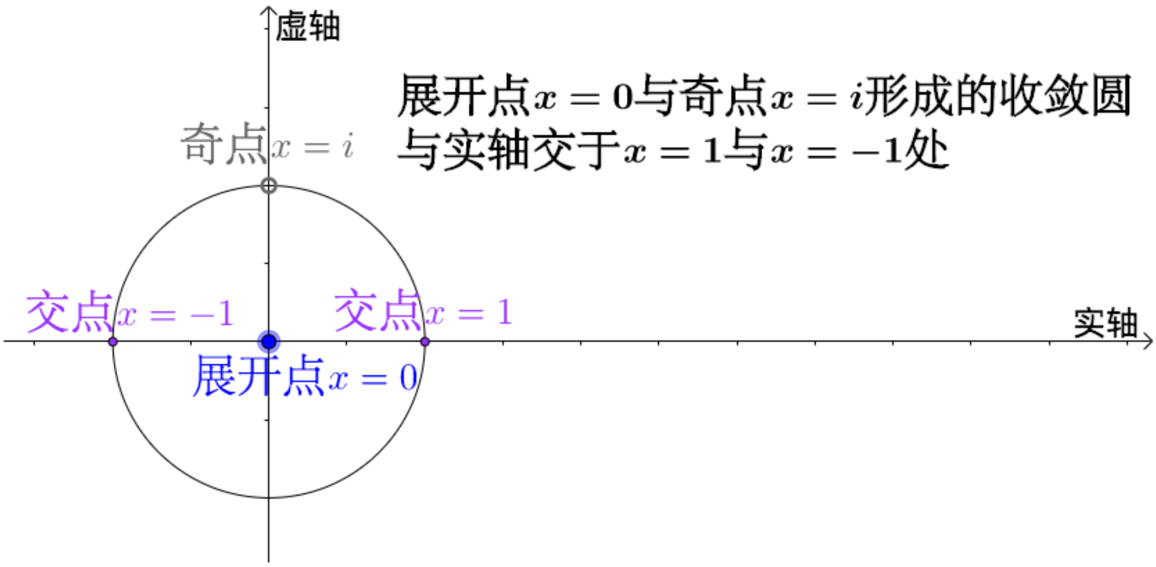


2.4 回归到开头的问题

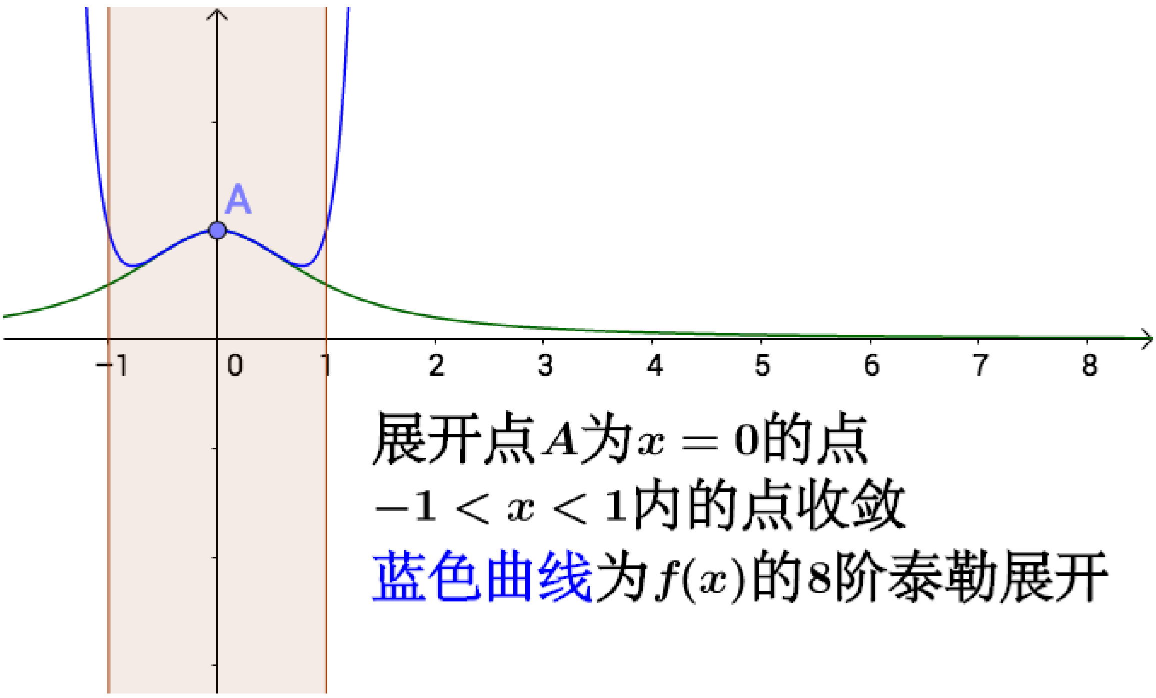
此时回到我们最初的那个问题：利用函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 的泰勒展开，可以估算 $30^{\frac{1}{3}}$ 的值。在 $x=9$ 处进行展开，$x=30$ 在收敛半径之外 (收敛半径为 9)，无法估算；在 $x=27$ 处展开，$x=30$ 在收敛半径之内 (收敛半径为 27)，可以估算。

2.5 复数与实数的关系

回到我们之前挖下的坑，$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的奇点在哪里？很明显 $x=i$ 时，是 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的奇点，因为 $1+i^2=0$。我们把奇点和展开点放到复平面上看看：



所以在实平面上的 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，虽然奇点不在实平面内，但是依然被奇点所影响，所以其收敛半径为 $-1<x<1$：



References

[1] “使用泰勒公式进行估算时，在不同点有啥区？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/206/