群论的预备知识 [1]

leolinuxer

July 1, 2020

Contents

1　集合与映射

1.1　集合基本概念

- **并集**：$C = A \cup B$，即 $x \in C \Leftrightarrow x \in A \quad or \quad x \in B$
- **交集**：$C = A \cap B$，即 $x \in C \Leftrightarrow x \in A \quad \& \quad x \in B$
- **差集**：$C = A - B$，即 $x \in C \Leftrightarrow x \in A \quad \& \quad x \notin B$
- **直积**：$C = A \times B = \{(a, b) | a \in A \& b \in B\}$

若映射 $f : A \to B$ 有如下不同情况，可以区分出：

1) 若 $A \subset B$，而 f 满足 $f(a) = a, \forall a \in A$，则称 f 为**包含映射**，记为 i；若此时 $B = A$，此时的 i 称为 A 的**恒等映射**，记作 1_A。

2) 若 $f(A) = B$，则称 f 为 A **到** B **的满射**

3) 若 $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a', a, a \in A$，则称 f 为**单射**。

4) 若 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**；此时从 $f(a) = b$，可记 $a = f^{-1}(b)$，从而确定了映射 $f^{-1} : B \to A$，称为 f 的**逆映射**。

5) 若 $C \subset A$，则由于 $f(c) \in B$ 对应于 $c \in C$，可定义 $f_c : C \to B$，即把 f 的定义域缩小到 C 上，则称 f_c 为 f 到 C 的**限制**。

> 如果 $f : A \to B$，且 $g : B \to C$，此时把 $a \in A$ 映为 $h(a) = g(f(a)) \in C$ 来定义映射 $h : A \to C$，则称 h 为 f 和 g 的**结合**，记作 $h = g \circ f$
>
> 如果 $f : A \to B$ 是双射，不难看出 $f^{-1} : B \to A$ 也是双射，且 $f^{-1} \circ f = 1_A, f \circ f^{-1} = 1_B$
>
> 对于 $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$，有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$，即映射的结合运算满足结合律。

1.2　集合 A 中的变换

考虑 $f : A \to B$，且 $B = A$，即 f **是** A **到** A **自身的映射，把映射** f **称为** A **的一个变换**，即 f 将 $a \in A$ 变为 $f(a) \in A$。

A **的所有变换，构成集合** T**，称为** A **的变换全集**。

A **的所有双射构成** T **的一个重要子集，记作** G**，称为** A **的变换群**。集合 G 具有如下性质：

1) $1_A \in G$，即 G 中含有**恒等变换**。

2) $f \in G \Leftrightarrow f^{-1} \in G$

3) $f \in G, g \in G \Rightarrow g \circ f \in G$。因此 G 的元素对结合运算 $\circ$ 而言是**封闭的**。

4) 对于 $f, h, h \in G$，可知 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$，即 G 的元素对 $\circ$ 满足结合律。

思考：T 包含 A 的**所有**变换，其中包括从 A 到 A 的双射（一一映射），也包括其它变换；而 A 的所有**双射**（一一映射）构成的 T 的子集 G，也就是 A 的变换群；

1.3 关系、等价关系与分类

1.3.1 关系

映射反应的是一个集合与另一个集合的外部联系；“关系”给出了集合内元素的内部联系。

集合上的一个**关系** $\sim$，指的是一种法则。由它可以判断任意 $a, b \in A$ 所构成的有序偶 (a, b) 是满足某种条件（此时称 a, b 有关系，记作 $a \sim b$），还是不满足这一条件（此时称 a, b 无关系，记作 $a \nsim b$）

例如大于 $(\geq)$ 就给出了整数集合 Z 的一个关系；对于三角形的集合，三角形的全等和相似也分别给出了这个集合的一个关系。

1.3.2 等价关系

集合 A 上定义的关系 $\sim$，若满足如下条件，则称 $\sim$ 是一个等价关系：

1) 自反律：对 $\forall a \in A \Rightarrow a \sim a$

2) 对称率：对 $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

3) 传递率：对 $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

1.3.3 集合的分类

集合 A 的一个**分类**，指的是把 A 分成许多称为**类**的非空子集合 $A_a, A_b, \cdots$，而其中每两个不同类的交集为空集，它们全体的并集是 A。

设 $\sim$ 是集合 A 的一个等价关系，对于 $a \in A$，我们把 A 中所有与 a 等价的元都汇集在一起，而构造出 A 的子集合 A_a，如果此时存在 $b \in A$，且 $b \notin A_a$，则同样构造 A_b，显然这些 $A_a, A_b, \cdots$ 给出 A 的一个分类。

反过来，如果给定了 A 的一个分类，那么我们就可以如下的定义 A 的一个等价关系：$\sim$: $a \sim b$，当且仅当 a, b 属于同一类；$a \nsim b$，当且仅当 a, b 不属于同一类；

总结后有：集合 A 的一个分类可以确定它的一个等价关系；反之，集合 A 的一个等价关系可以确定它的一个分类。

因此，类也称为**等价类**。而 A_a 称为**由 a 确定的等价类**，a 是 A_a 的一个**代表**。当然，若 $a \sim b$，则 $A_a = A_b$，即一个等价类可以由其中的任一元做代表，因为有这种随意性，所以任何关于等价类的命题首先必须与**代表元的选取无关**。

全体奇数和全体偶数这两个集合构成了整数集合 Z 的一个分类。

理解：集合的分类是**不重不漏**的。

1.3.4 商集合

由 A 的等价关系 $\sim$，确定了 A 的各个类 $A_a, A_b, \cdots$，以这些类做为元素而得到的集合，称为由 A 按 $\sim$ 而确定的商集合，记作：

$$A/\sim = \{A_a, A_b, \cdots\}$$

此时，很自然的由 a 对应 A_a，可定义 $f: A \to A/\sim$，容易验证这是一个满射，称为 A 到商集合 $A/\sim$ 上的**自然映射**。

1.4 整数集合 Z 与同余关系

接下来，我们把上面的理论应用到整数集合 Z 上。取定 $n \in N^*$，定义关系 $\sim$: $a \sim b$，当且仅当 $a-b$ 能被 n 整除时（记作 $n|(a-b)$），称 a, b 对于**模 n 同余**，记作 $a \equiv b \quad mod(n)$。

可以证明，这是一个等价关系；这时的等价类称为模 n 的**同余类**；通常把以 a 为代表的同余类记作 $[a]_n$ 或简记为 $[a]$ 或 $\bar{a}$。而把此时的商集合记为 Z_n，称为**模 n 同余类集合**。于是：

$$\bar{a} = \{a + kn \; | k \in Z\}$$

$$Z_n = \{\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \bar{n}\}$$

举例：

当 $n = 2$ 时，模 2 同余的数分别为 $\{1, 3, 5, \cdots\}$ 和 $\{2, 4, 6, \cdots,\}$。因此 $Z_2 = \{\bar{1}, \bar{2}\}$；其中 $\bar{1}$ 为全体奇数，$\bar{2}$ 为全体偶数；

当 $n = 7$ 时，$Z_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$；对于一年中的 365 天，这些同余类通常以周一、周二、……、周日来标记。同理，对于年份，可以按 $n = 12$ 划分为以十二生肖为代表的 12 个同余类。

为了今后的应用，我们在 Z_n 中再划分出一个重要的子集 Z'_n 来。为此，对于 $l, m \in N^*$，我们以 (l, m) 来表示 l, m 的最大公因数。如果 l, m 互素，则 $(l, m) = 1$。定义：

$$Z'_n = \{\bar{k} \in Z_n | 1 \leq k \leq n, (k, n) = 1\}$$

称为**模 n 同余类乘群**。

举例：当 $n=6$ 时，$Z_6=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$，其中与 $n=6$ 互素的元素为 $\bar{1},\bar{5}$，所以 $Z_6'=\{\bar{1},\bar{5}\}$；

当 p 是素数时，有 $Z_p=\{\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{p-1},\bar{p}\}$，$Z_p'=\{\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{p-1}\}$

举例：当 $n=17$ 时，$Z_{17}'=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\cdots,\overline{16}\}$；而数 3^m，对 $m=0,1,2,\cdots,15$ 所属的同余类分别为：

- $m=0$ 时，$3^m=1$ 所属的同余类为 $\bar{1}$
- $m=1$ 时，$3^m=3$ 所属的同余类为 $\bar{3}$
- $m=2$ 时，$3^m=9$ 所属的同余类为 $\bar{9}$
- $m=3$ 时，$3^m=27$ 所属的同余类为 $\overline{10}$
- $\cdots$

即数 3^m，对 $m=0,1,2,\cdots,15$ 所属的同余类分别为：$\bar{1},\bar{3},\bar{9},\overline{10},\overline{13},\bar{5},\overline{11},\overline{16},\overline{14},\bar{8},\bar{7},\bar{4},\overline{12},\bar{2},\bar{6}$，它们是 $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\cdots,\overline{16}$ 的另一种排列。

1.5 算数基本定理与欧拉函数 $\varphi(n)$

欧拉函数 $\varphi(n)$ 的定义为 Z_n' 中元素的个数。即 $\varphi(x)$ 等于满足 $1\le k\le n$，及 $(k,n)=1$ 的正整数 k 的个数。

根据定义，显然有：$\varphi(1)=\varphi(2)=1,\varphi(3)=\varphi(4)=\varphi(6)=2,\varphi(5)=4,\cdots$

证明如下：

$Z_1'=\{\bar{1}\},Z_2'=\{\bar{1}\}\Rightarrow\varphi(1)=\varphi(2)=1$

$Z_3'=\{\bar{1},\bar{2}\},Z_4'=\{\bar{1},\bar{2}\},Z_6'=\{\bar{1},\bar{5}\}\Rightarrow\varphi(3)=\varphi(4)=\varphi(6)=2$

$Z_5'=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}\Rightarrow\varphi(5)=4$

为了推导 $\varphi(n)$ 的计算公式，我们先来叙述**算数基本定理**。因为任何大于 1 的整数 n 都或是合数或是素数。而如果 n 是合数，则 n 可以唯一地分解为一系列素数的乘积，这就是：

算数基本定理：对于大于 1 的自然数，一定可把它唯一地表达为 $n=p_1^{v_1}\cdot p_2^{v_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{v_k}$，这里 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是素数，且 $v_1,v_2,\cdots,v_k\in N^*$。

为了求得 $\varphi(n)$ 的表达式，先来讨论两个简单的情况，再把它们综合起来：

1) 首先求 $\varphi(p^n)$，这里 p 是素数。对于 $1\le k\le p^n$ 的 k，要与 p^n 互素，其充要条件是 k 不能被 p 整除，即 $p\nmid k$。然而，在 1 到 p^n 之间，有 p^{n-1} 个数，即 $p,2p,3p,\cdots,(p^{n-1}p)$ 是能被 p 整除的，因此其中不能被 p 整除的数共有 p^n-p^{n-1} 个。于是有：

定理：设 p 是一个素数，则

$$\varphi(p^n) = p^n(1-\frac{1}{p})$$

特别的，当 $n=1$ 时，$\varphi(p) = p-1$。

2) 然后，我们设 $(l,m)=1$，来求 $\varphi(lm)$ 的计算公式。为此，我们以 $[k]_{lm}$ 映为 $([k]_l,[k]_m)$ 来定义对应：

$$\rho : Z'_{lm} \to Z'_l \times Z'_m$$

不难证明，这一对应是与同余类代表的选取无关的，因此，ρ 是一个映射。同样也不难证明，ρ 既是单射又是满射，即是双射。于是 Z'_{lm} 中元素的个数 $\varphi(lm)$ 等于 $Z'_l \times Z'_m$ 中元素的个数，即 Z'_l 中的元素个数 $\varphi(l)$ 与 Z'_m 中的元素个数 $\varphi(m)$ 的乘积，这就有：

定理：若 $(l,m)=1$，则 $\varphi(lm) = \varphi(l)\cdot\varphi(m)$

待加深理解：注意 $(l,m)=1$，即 l,m 是互素的。然后呢?

举个例子：$Z'_{15} = \{\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{7},\overline{8},\overline{11},\overline{13},\overline{14}\}$ ，即 $\varphi(15)=8$

且 $15 = 3\times 5$，$Z'_3 = \{\overline{1},\overline{2}\}, Z'_5 = \{\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$，

所以 $\varphi(3)=2, \varphi(5)=4$，即 $\varphi(8) = \varphi(3)\cdot\varphi(5) = 8$

综上两点，有如下定理：

定理：对于大于 1 的自然数 n，有：

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{v_1})\cdots\varphi(p_k^{v_k}) = n(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是 n 的各个素因数。

举个例子：$Z'_{15} = \{\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{7},\overline{8},\overline{11},\overline{13},\overline{14}\}$ ，即 $\varphi(15)=8$

且 $15 = 3^1\times 5^1$，所以 $\varphi(15) = \varphi(3^1)\varphi(5^1) = 15(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 15\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = 8$

2 群论基础

2.1 群的定义

首先给出下面两个例子：

例 1：给出集合 $A=\{1,-1\}$，并考虑其中元的通常乘法运算，不难看出集合 A 具有如下性质：

- A 的元在乘法下是封闭的，即对任意 $a,b\in A, a\cdot b\in A$
- 该乘法满足结合律，即对任意 $a,b,c\in A$，有 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\in A$
- 有数 1，它对任意 $a\in A$，有 $1\cdot a=a\cdot 1=a$
- 由 $1\cdot 1=1,(-1)\cdot(-1)=1$，可知对于任意 $a\in A$，存在 $b\in A$，使得 $a\cdot b=b\cdot a=1$

例 2：给出整数集合 Z，并考虑其中元的通常加法运算，同样也有：

- Z 的元在加法下是封闭的，即对任意 $a,b\in Z, a+b\in Z$
- 该加法满足结合律，即对任意 $a,b,c\in Z$，有 $a+(b+c)=(a+b)+c\in Z$
- 有数 0，它对任意 $a\in Z$，有 $0+a=a+0=a$
- 对于任意 $a\in Z$，存在 $-a\in Z$，使得 $a+(-a)=(-a)+a=0$

尽管这两个例子中的集合不同，而且所考虑的运算也不同，但是它们具有共性：一个集合，一种封闭的运算，还有同样的一些运算性质。于是人们就从这些具体的原型中抽象出它们的共性，从而提出**抽象群**的概念，然后对抽象群进行研究。

理解：群论也是从变化中抽取出来的不变性（共性）。在其他领域中，有类似的思考过程。比如在线性空间中，不管坐标基如何变化，向量的”长度“不变；在欧式空间和闵氏空间中，两点间的”距离“不随坐标的变化而变化（虽然欧式空间和闵氏空间对于距离的定义不同）；比如拓扑学，也是研究在形状不断变化下，物体的拓扑结构具有什么样的不变形。

群的定义：在非空集合 $G=\{a,b,\cdots,\}$ 中规定元素间的一种运算，称为“乘法”，记作“$\cdot$”（在不会混淆时可以省略去 $\cdot$）。如果 G 对“$\cdot$”满足下列 4 条公理，则称 G 是一个群，记作 $(G,\cdot)$，或简单的用 G 来表示：

1. **封闭性：若 $a,b\in G$，则 $a\cdot b\in G$；**
2. **结合律：若 $a,b,c\in G$，则 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$**
3. **单位元：对任意 $a\in G$，存在 $e\in G$，满足 $e\cdot a=a\cdot e=a$，称 e 为 G 的单位元**
4. **逆元：对任意 $a\in G$，都有一个逆元，记作 a^{-1}，满足 $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=e$**

于是，$A=\{1,-1\}$ 在通常乘法下成群；Z 在通常加法下成群；集合 A 的双射全体，在映射的结合运算下成群，即 A 的变换群。

若对任意 $a,b\in G$，有 $ab=ba$，则称 G 为**可换群**；对于可换群常用”$+$“代替”$\cdot$“，且把此时的单位元称为**零元**，逆元称为**负元**。如果群 G 仅含 n 个元素，则称它为 n **阶群**，记作 $|G|=n$，这种群是**有限群**，否则是**无限群**。

对于上一节定义的 Z_n，可以如下地定义它的元素的乘法：$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{ab}$ ，但是一般来说，Z_n 不是群，因为 $\overline{n}$ 没有逆元；不难证明，$\overline{k}$ 有逆元的充要条件是 $(k,n)=1$，因此 Z_n' 是群，即**模 n 同余类乘群**，它是可交换群，且 $|Z_n'|=\varphi(n)$。

理解：对于 $Z_{15}=\{\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15}\}$，根据乘法的定义：$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{ab}$ 可知，它的单位元是 $\overline{1}$，并且有：

$$\overline{2}\cdot\overline{8}=\overline{16}\xrightarrow{\text{更换同余类}\overline{16}\text{的代表}}\overline{1}$$

可知，$\overline{2},\overline{8}$ 互为逆元。但是对于 $\overline{15}$，它和任意元素的乘法都是：

$$\overline{15}\cdot\overline{x}=\overline{15x}\xrightarrow{\text{更换同余类的代表}}\overline{15}$$

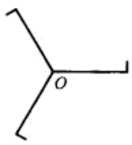
即 $\overline{15}$ 没有逆元。也就是说对于 Z_n，它的 $\overline{n}$ 没有逆元，因此 Z_n 不是群。

同理，对于 Z_{15}，可知 $\overline{3},\overline{5},\overline{6},\overline{9},\overline{10},\overline{12}$ 也都没有逆元，印证了 $\overline{k}$ 有逆元的充要条件是 $(k,n)=1$。

但是，基于上述逻辑容易证明，Z_n' 是群。

2.2 群与对称性

举个旋转的例子来描述群的对称性。给定下图，



我们用绕 O 点逆时针转动来描述该图形所具有的对称性：转动 $0°$ 或 $360°$ 记为 g_1，转动 $120°$ 记作 g_2，转动 $240°$ 记作 g_3；对于 $g_i,g_i\in G=\{g_1,g_2,g_3\}$，定义 $g_j\cdot g_i$ 表示先进行 g_i 再进行 g_j，于是 G 是群。

给出对称群的乘法运算如下：

$$\begin{cases} g_1\cdot g_1=g_1, & g_1\cdot g_2=g_2, \quad g_1\cdot g_3=g_3 \\ g_2\cdot g_1=g_2, & g_2\cdot g_2=g_3, \quad g_2\cdot g_3=g_1 \\ g_3\cdot g_1=g_3, & g_3\cdot g_2=g_1, \quad g_3\cdot g_3=g_2 \end{cases}$$

于是得到 G 的乘法表如下，表中第 i 行 j 列的元素是 $g_j\cdot g_i$：

Table 1: standard table

	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	g_1
g_3	g_3	g_1	g_2

从表中可以得到一个规律：表中的每一行和每一列都是这三个群元的一个排列。

重新排列定理：设 $g \in G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$**，则当** i **取遍** $,2,\cdots,n$**，**gg_i **或** g_ig **就取遍** G。

2.3 对称群

类似于 S_2, S_3, S_4, S_5，我们把 S_n 定义成 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数字的置换的全体。接下来定义元素的乘法，使 S_n 成群。为简明起见，以 S_3 为例，对于

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

有

$$g_2 \cdot g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$1 \xrightarrow{g_5} 2 \xrightarrow{g_2} 3$$
$$2 \xrightarrow{g_5} 3 \xrightarrow{g_2} 2$$
$$3 \xrightarrow{g_5} 1 \xrightarrow{g_2} 1$$

所以

$$g_2 \cdot g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = g_3$$

不难证明 S_3 在置换的乘法下是群。同样 n 个数字 $1,2,\cdots,n$ 的全部置换 S_n，在上述乘法下构成 $n!$ 的**对称群** S_n。

2.4 子群 (subgroup)

集合有子集合，相应的，群也有子群的概念。

定义：群 G 的非空子集合 H 称为 G 的一个子群，记作 $H \trianglelefteq G$，或 $G \trianglerighteq H$（原书符号无法打出，类似这样），如果在 G 所定义的乘法运算下，H 本身构成构成一个群。

显然，$\{e\}$ 和 G 本身都是 G 的子群，它们是 G 的**平凡子群**。G 的其它子群则是 G 的**真子群**。

例如：对于前文给出的 S_3：

$$\begin{aligned} S_3 = &\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\} \end{aligned}$$

$H_1 = \{g_1, g_2\}$ 是一个真子群，$H_2 = \{g_1, g_5, g_6\}$ 也是一个真子群。

设 H 是 G 的一个子群，不难证明 H 的单位元就是 G 的单位元 e，而且任意 $a \in H$ 在 H 中的逆元就是 a 在 G 中的逆元 a^{-1}。另外，若要验证 G 的子集 H 对 G 的乘法运算是否成群，就需要判断此时 H 能否满足群的 4 条公理。不过 G 满足结合律，所以它的子集 H 也满足结合律。因此，只需要验证公理 (1)(3)(4)(封闭性、单位元、逆元)。

定理：设 $H \subseteq G$，H 是 G 的子群的充要条件是对任意 $a, b \in H$，有 $ab^{-1} \in H$

理解：H 若想成为 G 的子群，需要满足的条件，是对于任意 $a, b \in H$，有 $ab^{-1} \in H$，即 a “乘法运算” b 的逆得到的元，仍然在 H 中。

子群的概念是重要的，伽罗瓦正式成功地揭示了每一个 n 次多项式都有一个与 S_n 有关的子群——**该方程的伽罗瓦群**相关联，从而把方程是否根式可解归结为该子群的性质——可解性的研究。在这个意义上，该子群是该方程的“遗传密码”。

2.5 陪集 (cosets)

现在我们用 G 的真子群 H 来给出 G 的一个**分类**。由 $H \subset G$，可知存在 $a_2 \in G - H$（G 和 H 的差集），于是构造：

$$a_2H = \{a_2h | h \in H\}$$

容易证明，$H \cap a_2H = \varnothing$。如果存在 $a_3 \in G$，且 $a_3 \notin H \cup a_2H$，则同样再构造 a_3H，也有 $a_3H \cap (H \cup a_2H) = \varnothing$。类似地，可得到 $a_4H, a_5H, \cdots$，于是当群 G 是有限群时，就有：

$$G = H \cup a_2H \cup a_3H \cup \cdots a_lH$$

我们把 G 的具有 aH 形式的子集，称为 G 的关于子群 H 的由元素 a 给出的**左陪集**。令 $a_1 = e$，由 $H = eH = a_1H$ 可知，H 也是 G 的一个左陪集。于是上式 $G = H \cup a_2H \cup a_3H \cup \cdots a_lH$ 称为 G 的一个**左陪集分解**。若 $|G| = n, |H| = m$，并且把左陪集的个数，称为 H 在 G 中的**指数**，记为 $(G : H) = l$，于是考虑到**每一个左陪集中元素的个数都是** m，即有：

拉格朗日定理：设 H 是有限群 G 的子群，则 $|G| = (G : H) \cdot |H|$

由上可知，子群 H 的阶 m 是群 G 的阶 n 的一个因子。例如 $|S_3| = 6$，所以如果它有子群的话，它只可能有 2 阶，3 阶的真子群，而不可能有 4 阶，5 阶的真子群。

类似的，我们也有**右陪集**的概念，这指的是具有：

$$Ha = \{ha | h \in H\}$$

形式的集合。

关于陪集的定义：设 $(H, \cdot)$ 是群 $(G, \cdot)$ 的一个子集，$a \in G$，则集合 $aH(Ha)$ 称为由 a 所确定的 H 在 G 中的左陪集（右陪集），简称为 H 关于 a 的左陪集（右陪集），记为 $aH(Ha)$。元素 a 称为陪集 $aH(Ha)$ 的代表元素。

（理解，这里的陪集还是属于“子集”的概念，没有要求是“子群”，虽然 H 是 G 的子群，但是 aH 未必要求成群）

关于陪集的定理：设 H 是 G 的子群，对于任意 $a, b \in G$，有：

(1) $aH = bH$ 或者 $aH \cap bH = \varnothing$

(2) $Ha = Hb$ 或者 $Ha \cap Hb = \varnothing$

(来源于：https://www.voicenews.cn/21660.html)

对 a 来说的左陪集 aH，其实就是 a 在 G 上的一个等价类。

(来源于知乎：https://zhuanlan.zhihu.com/p/23886266)

理解：假如有实数加群 $< R, + >$，和一个整数加群 $< Z, + >$，则后者一定是前者的子群：

$$Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

我们在实数加群里面随便选取一个 $a = 2.5$，得到 a 确定 G 在 H 上的左陪集是

$$aH = \{\cdots, 2.5 - n, \cdots, 2.5 - 2, 2.5 - 1, 2.5, 2.5 + 1, 2.5 + 2, \cdots, 2.5 + n, \cdots\}$$

即

$$aH = \{a + x | x \in Z, a \in R\}$$

(来源于知乎：https://zhuanlan.zhihu.com/p/23886266)

2.6 正规子群与商群

根据 $G = H \cup a_2H \cup a_3H \cup \cdots a_lH$，我们定义**商集合**：

$$G/H = \{H, a_1H, a_2H, \cdots, a_lH\}$$

我们希望在 G/H 中引入乘法运算，即**两个陪集的乘法**，使 G/H 成群（理解：G/H 是“群的群”，因为 G/H 的每个元都是一个子群）。当然，这一乘法应该与 G 的乘法有关联，一个很自然的想法是令：

$$a_iH \cdot a_jH = (a_i \cdot a_j)H$$

不过，若 $h_i, h_j \in H$，则 $a_iH = a_ih_iH, a_jH = a_jh_jH$，即 a_i 与 a_ih_i 都是 a_iH 的代表，a_j 与 a_jh_j 都是 a_jH 的代表，因此如果上式成立，它应该与代表的选择无关，于是必须有：

$$a_iH \cdot a_jH = a_ih_iH \cdot a_jh_jH = a_ih_ia_jh_jH$$

因此应有：

$$(a_ia_j)H = (a_ih_ia_jh_j)H$$

然而，对 G 的任意子群 H 来说，这一条件一般是不能满足的。为此，伽罗瓦引入了**正规子群**这一重要的概念。

正规子群的定义：如果 G 的子群 H，对任意 $a \in G$，满足 $aH = Ha$，即此时不必区分左右陪集，则称 H 为 G 的一个正规子群，记作 $G \triangleright H$ 或 $H \triangleleft G$。

设 $G \triangleright H$，由群的乘法定义满足结合律和“重新排列定理”可知，$(a_ih_ia_jh_j)H = (a_ih_ia_j)H = (a_ih_i)Ha_j = (a_i)h_iHa_j = a_iHa_j = a_ia_jH$，从而推出了 $(a_ia_j)H = (a_ih_ia_jh_j)H$。此时利用 G/H 中的这一乘法，不难证明：

定理：设 $G \triangleright H$，并按照 $a_iH \cdot a_jH = (a_i \cdot a_j)H$ 定义的元素的乘法，则 G/H 构成群，这个群称为 G 关于正规子群 H 的商群。

例：**可换群 G 的任意子群都是它的正规子群**。

例：若 H 是 G 的指数为 2 的子群，则 $G = H \cup aH = H \cup Ha$，从而有 $aH = Ha$，因此 $G \rhd H$。（理解，**也就是说，如果 H 是 G 的子群，且 H 的指数为 2，则 H 就是 G 的正规子群**）

例：对任意群 G 而言，群 G 本真与 $\{e\}$ 都是 G 的正规子群，称这两个群为 G 的**平凡正规子群**。

例：设 $G \rhd H$，则 $|G/H| = |G|/|H|$。

理解 1：把群 G 当成一个高中，里面的元素就是学生。这个高中有三个年级，每个年级 5 个班，每个班 40 个学生。

下面来谈谈商的本质，其实**商就是把有等价关系的两个元素在新的群中看成同一个，而等价关系的给出，就是由被商掉的那个群决定的**。

回到之前的例子，我现在把一个班级看成一个子群，就取高一一班好了，这里的等价关系就是同一个班级的学生是彼此等价的，显然互反性，传递性，对称性满足，这确实是个等价关系。那么做商以后得到的集合是什么呢，这个集合就是这个高中班级的集合，里面有十五个元素：高一一班一直到高三五班。每个元素都是一个集合，里面的元素是这个班级的学生，这样在这个商关系之下，班级也就是所谓的陪集。

现在我们换一下，把年级看成等价关系，被商的子群就是一个年级，就取高一年级，这样得到的商群中的元素就是三个年级。

那么什么是正规子群呢，你可以把正规子群理解为一类特殊的子群，特殊在于，**商掉正规子群得到的商群有自然的群结构**。在上面的例子中，可以非常不严格的把班级和年级看成正规子群，因为它们是特殊的，因为生活中我们常以班级年级作为统一的单位。

在上面的例子中，还有什么可以当子群呢，你不妨把学号为 1 的学生全体当一个子群，此时的等价关系就是相同的学号。这样得到的商群就是 40 个，为什么我要把它当子群，因为在生活中你基本遇不到学校以学号来划分全体学生···在正规子群这里，类比是很不贴切的，我主要想告诉你的是正规子群是极其特殊的子群。

来源于知乎：https://www.zhihu.com/question/63046350/answer/204840915

理解 2：一个群可以看作正规子群和商群“组合”起来的（在特殊情况下就是直积），这样就把复杂的群化解成了简单的群，得到一个群的合成因子。

来源于知乎：https://www.zhihu.com/question/21561484/answer/92539982

理解 3：回忆，**商集合**是由集合 A 的各个类作元素得到的集合，其中的每个类都是一个等价类（即类内元素等价）；而**商群**是由正规子群构成的群。

理解 4：再加深一下对“商”的理解，比如有 6 个桔子，按照每行 2 个排列成 3 行，那么对于每一行的 2 个桔子，可以看成这一行内的桔子是等价的，并且一共有 3 “类”。

2.7 循环群 (cycle group) 与 n 次本原根

设 G 是一个群，而 e 是它的单位元。我们对于 $0 \in N, n \in N^*$，规定 $a^0 = e, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n个}$，$a^{-n} = (a^{-1})^n$，则显然有 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^n)^m = a^{nm}, \forall m, n \in \mathbf{Z}$。

因此，我们引入**循环群**的定义：

循环群的定义：对于 n 阶群 G，如果存在 $a \in G$，使得 $G = \{a^0, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$，则称 G 为由 a 生成的（有限）循环群，记作 $G = \langle a \rangle$，a 是 G 的一个生成元。

对于有限群 G，取任意 $a \in G$，$a \neq e$，构造 $H = \langle a \rangle$，不难证明 H 是 G 的一个循环子群。**如果 G 是素数阶的，则由拉格朗日定理可知，G 不含任何真子群，因此 $G = H = \langle a \rangle$，即 G 是循环群，当然也是可换群，并且它的每一个非单位元都是生成元。**

例：根据前文定义的模 n 同余类集合 Z_n 和同余类乘群 Z_n'，即：

$$\bar{a} = \{a + kn \mid k \in Z\}$$

$$Z_n = \{\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \bar{n}\}$$

$$Z_n' = \{\bar{k} \in Z_n | 1 \leq k \leq n, (k, n) = 1\}$$

有：$Z_3' = \{\bar{1}, \bar{2}\} = \langle \bar{2} \rangle$；同理，$Z_5' = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \langle \bar{2} \rangle$；$Z_7' = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} = \langle \bar{3} \rangle$。

理解：根据前文，我们知道 Z_n 和 Z_n' 上定义的乘法运算是 $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$，并且知道 Z_n 不是群（因为它的元 $\bar{n}$ 没有逆元），并且 Z_n' 是群。

因此我们知道，对于群 Z_n' 来说，$\bar{1}$ 是它的单位元。那么对于任意元素 $a \in G, a \neq e$，并且如果 Z_n' 是素数阶的，那么 Z_n' 的每一个非单位元都是生成元。

理解：注意，Z_n' 是素数阶的，不等价于 n 是素数；比如 $Z_5' = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$，5 是素数，但是 $|Z_5'| = 4$ 不是素数，因此不能推导出来 Z_5' 的任意非单位元 $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ 都是它的生成元，实际上，$\bar{4}$ 就不是 Z_5' 的生成元（$\bar{4}$ 只能循环生成 $\bar{1}$ 和 $\bar{4}$）。

一般地，当 p 是素数时，可以证明 $Z_p' = \{\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{p-1}\}$ 是循环群。

理解：以模 6 加法群 $\langle Z6, + \rangle$ 入手，来认识循环群的特点。

首先，循环群，顾名思义，cycle group 即带有循环的意思。怎么个循环法呢?

我们看 $\langle Z6, + \rangle$ 中的元素 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$。取其中的元素 1，不停地对自身进行模 6 加法，即对本身进行

幂运算。可得：

$$
\begin{aligned}
&1^1 = 1\\
&1^2 = 1+1 = 2\\
&1^3 = 1+1+1 = 3\\
&1^4 = 1+1+1+1 = 4\\
&1^5 = 1+1+1+1+1 = 5\\
&1^6 = 1+1+1+1+1+1 = 0(\text{模 6 加法意义下})\\
&1^7 = 1+1+1+1+1+1+1 = 1(\text{模 6 加法意义下})\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

如上对 1 不断幂运算，可见两个现象：

1、可以遍历所有的元素，也可以说，我们仅用元素 1 就能生成所有的元素，这就是循环群里的生成元的概念。

2、幂运算的结果就是 123450123450123450 这样不断的循环，这就是循环群名字由来。

现在，我们继续思考，如果对其它元素进行不断的幂运算呢，会出现什么结果？

经过不断的幂运算，我们发现：元素 0 形成的结果只有 0，结果集合为 {0}；元素 2、4 形成的结果是一样的，结果集合为 {0,2,4}；元素 3 形成的结果集合为 {0,3}；元素 1、5 形成的结果为 {0,1,2,3,4,5}；可见，不同的元素，有的形成的结果不同，有的却相同。我们可以按照他们生成的结果来将他们划分为不同的群体。

对于元素 1、5，他们都能生成所有元素，所以他们两个元素不仅证明了这个群是循环群，还说明他们都是循环群的生成元。他们生成了 {0,1,2,3,4,5} 这个子群（或者说群本身，也叫平凡子群）并且他们都是 6 阶元素，所谓 6 阶，就是 $a^6 = e = 0$(幺元，或称单位元，这个群的单位元是 0)。6 阶也是这个群的阶数。

对于元素 2、4，他们生成了子群 {0,2,4}，他们都是 3 阶元素。

对于元素 3，生成了子群 {0,3}，他是 2 阶元素。

对于元素 0，生成了子群 {0}，他是 1 阶元素。

通过对上面的观察，我们又看出一些规律，就是：

(1). n 阶元素生成的子群中具有 n 个元素

(2). 一个 n 阶群，他具有 p 个不同类型的生成子群，p 是 n 的正因子个数，比如本例中 6 的正因子有 1,2,3,6 共四个。

(3). 一个 n 阶群，他的生成元个数是小于 n 且与 n 互为素数的个数。本例中，小于 6 且与 6 互素的数是 1、5，共两个，所以这个群的生成元就正好 2 个。

（来源：https://blog.csdn.net/u013709443/article/details/82823678）

在之前的章节中，我们研究过 $x^n - 1 = 0$ 的解集合为：

$$1, \zeta = e^{i2\pi/n}, \zeta^2 = e^{i4\pi/n}, \cdots, \zeta^{n-1} = e^{i2\pi(n-1)/n}$$

（在复平面中，这 n 个根 $1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{n-1}$ 均匀地分布在圆心为点 O，半径为 1 的一个圆上）

即方程 $x^n-1=0$ 的解集合 $G_n=\{1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}\}$，其中 $\zeta=e^{i2\pi/n}$。对于集合 G_n，以数的乘法为 G 中元素的乘法，显然 G_n 是一个 n 阶循环群，且 ζ 是它的一个生成元。

由其中的元的性质可知，$G_1=\{1\}=\langle 1\rangle$，$G_2=\{1,-1\}=\langle -1\rangle$，$G_3=\{1,\omega,\omega^2\}=\langle\omega\rangle=\langle\omega^2\rangle$，$G_6=\{1,\zeta,\omega,-1,\omega^2,\zeta^5\}=\langle\zeta\rangle=\langle\zeta^5\rangle$。由此看见，$x^6-1=0$ 的 6 个根中，只有 ζ,ζ^5 是 G_6 的生成元，而其它的 4 个根都不是 G_6 的生成元。

因为 $1,-1,\omega,\omega^2$ 满足的 $x^n-1=0$ 型的方程的最低次数分别为：$n=1,2,3$，它们只能分别是 G_1,G_2,G_3 的生成元。因此，我们把 $1,-1,\omega,\omega^2$ 分别称为 1 次，2 次和 3 次**本原根**，即是这些方程所“固有的”根。按照这种说法，ω,ω^5 就是 6 次本原根了。

上面从是否是 G_6 的生成元的角度，把 $x^6-1=0$ 的根分成了两类：非本原根和本原根。注意到 $\zeta^6=1,\zeta^2,\zeta^3,\zeta^4$ 这 4 个非本原根中的指数 6，2，3，4 与 $n=6$ 都不是互素的，因此不难得出本原根的另一种刻画：ζ^k 是 $x^6-1=0$ 的一个本原根，当且仅当 $(k,6)=1$。

在一般情况下，$x^n-1=0$ 的解 $1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}$ 中，凡满足 $(k,n)=1$ 的 k 所确定的根 ζ^k 是 G_n 的生成元，是 $x^n-1=0$ 的本原根，称为 n **次本原根**。因此，$x^n-1=0$ 的本原根共有 $\varphi(n)$ 个。当 $n=$ 素数 p 时，$\varphi(p)=p-1$，即 $\zeta,\cdots,\zeta^{p-1}$ 都是本原根。

于是在 $x^6-1=0$ 的 6 个根中：

- 1 次本原根有 $\varphi(1)=1$ 个：1；
- 2 次本原根有 $\varphi(2)=1$ 个：-1；
- 3 次本原根有 $\varphi(3)=2$ 个：ω,ω^2；
- 6 次本原根有 $\varphi(6)=2$ 个：ζ,ζ^5；

因此，$6=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6)=\sum_{d|6}\varphi(d)$，其中 $\sum$ 是求和符号，下标 $d|6$ 表示，对 $\varphi(d)$ 的求和时，d 取遍 6 的所有因子，即 $d=1,2,3,6$。而在一般情况下，有：

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n$$

2.8 单群

单群的定义：如果群 G 除了 G 本身和 $\{e\}$ 这两个平凡的正规子群外，不含任何其他的正规子群，则称 G 为（简）单群。

素数阶群必是可换群，又因为它没有任何真子群，所以它又是可换单群；反过来，设 G 是 n 阶可换单群，因此 G 就没有任何真子群，任取 $a\in G$，且 $a\neq e$，构造 $\langle a\rangle$，那么 $\langle a\rangle=G$，于是 $G=\{a^0=e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$；若 n 是合数，则从 $n=l\cdot m,1<l<n,1<m<n$ 可推知 $\langle a^l\rangle$ 是 G 的一个真子群，这就矛盾了，因此 n 比是素数。所以**有限可换单群**一定是素数阶群。

2.9 群的同态映射与同构映射

References

[1] 冯承天. 从一元一次方程到伽罗瓦理论.