

# 凸优化 [1]

August 12, 2020

## Contents

<b>1</b>	<b>几何体的向量表示</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>凸集凸函数定义</b>	<b>2</b>
2.1	凸集 . . . . .	2
2.2	凸函数 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>凸函数各种性质及其证明</b>	<b>3</b>
3.1	性质-下水平集 . . . . .	3
3.2	性质-全局最优 . . . . .	4
3.3	性质-梯度 . . . . .	4
3.4	性质-Hessian 矩阵 . . . . .	6
3.5	性质 . . . . .	7
3.6	性质-Jensen 不等式前奏 . . . . .	8
3.7	性质-Jensen 不等式 . . . . .	9
<b>4</b>	<b>凸优化</b>	<b>9</b>
4.1	凸优化问题定义 . . . . .	9
4.2	常见凸优化问题 . . . . .	10
4.2.1	线性规划 LinearProgramming(LP) . . . . .	10
4.2.2	二次规划 QuadraticProgramming(QP) . . . . .	10
4.2.3	二次约束的二次规划 Quadratically Constrained Quadratic Programming(QCQP) .	10
4.2.4	半正定规划 Semidefinite Programming(SDP) . . . . .	10
<b>5</b>	<b>浅谈凸优化问题为何如此重要</b>	<b>11</b>

# 1 几何体的向量表示

在介绍凸集等概念之前，首先介绍一下空间几何体的向量表示，下面在定义凸集概念时使用到了线段的向量表示。先通过一个例子来认识一下如何使用向量表示线段。

已知二维平面上两定点  $A(5, 1)$ 、 $B(2, 3)$ ，给出线段  $AB$  的方程表示如下：

$$\begin{cases} x_1 = \theta \times 5 + (1 - \theta) \times 2 \\ x_2 = \theta \times 1 + (1 - \theta) \times 3 \end{cases} \quad \theta \in [0, 1]$$

如果将点  $A$  看成向量  $\vec{a}$ ，点  $B$  看成向量  $\vec{b}$ ，则线段  $AB$  的向量表示为：

$$\vec{x} = \theta \vec{a} + (1 - \theta) \vec{b}, \quad \theta \in [0, 1]$$

而直线的向量表示是：

$$\vec{x} = \theta \vec{a} + (1 - \theta) \vec{b}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

由此衍生推广到高维，可得以下几何体的向量表示，三角形的向量表示：

$$\vec{x} = \theta_1 \vec{a}_1 + \theta_2 \vec{a}_2 + \theta_3 \vec{a}_3, \quad \theta_i \in [0, 1], \sum \theta_i = 1$$

三维平面的向量表示：

$$\vec{x} = \theta_1 \vec{a}_1 + \theta_2 \vec{a}_2 + \theta_3 \vec{a}_3, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \sum \theta_i = 1$$

超几何体的向量表示：

$$\vec{x} = \theta_1 \vec{a}_1 + \theta_2 \vec{a}_2 + \cdots + \theta_k \vec{a}_k, \quad \theta_i \in [0, 1], \sum \theta_i = 1$$

超平面的向量表示：

$$\vec{x} = \theta_1 \vec{a}_1 + \theta_2 \vec{a}_2 + \cdots + \theta_k \vec{a}_k, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \sum \theta_i = 1$$

## 2 凸集凸函数定义

### 2.1 凸集

集合  $C$  内任意两点间的线段也均在集合  $C$  内，则称集合  $C$  为凸集，数学定义为：

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \theta \in [0, 1], \text{ 则 } x = \theta \cdot x_1 + (1 - \theta) \cdot x_2 \in C$$

$k$  个点的版本:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_k \in C, \theta_i \in [0, 1], \text{ 且 } \sum \theta_i = 1, \text{ 则 } x = \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \in C$$

上面凸集定义中便用到了线段的向量表示, 含义是如果点  $x_1$  和点  $x_2$  在集合  $C$  内, 则线段  $x_1x_2$  上所有点都在集合  $C$  内, 凸集的交集仍是凸集。

## 2.2 凸函数

**凸函数**定义为, 设  $f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $C$  是凸集, 对于  $x_1, x_2 \in C$  都有:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$$

则称  $f(x)$  为定义在凸集  $C$  上的凸函数。

**严格凸函数**定义为, 设  $f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $C$  是凸集, 对于  $x_1, x_2 \in C$  都有:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$$

则称  $f(x)$  为定义在凸集  $C$  上的严格凸函数。

凸函数的等价定义: 设  $f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $C$  是凸集, 对于  $x_1, x_2, x_3 \in C$  且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 下式成立则  $f(x)$  为凸函数 (?? 待证明?? ):

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

## 3 凸函数各种性质及其证明

### 3.1 性质-下水平集

设  $f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $C$  是凸集, 若  $f$  是凸函数, 则对于  $\forall \beta$ , 证明下面水平集  $D_\beta$  是凸集

$$D_\beta = \{x | f(x) \leq \beta, x \in C\}$$

证明: 若对于  $\forall x_1, x_2 \in D_\beta$ , 则线段  $x_1x_2$  为:

$$x_1x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1$$

且因为  $f(x)$  是凸函数，所以：

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \leq \alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta = \beta$$

所以原命题得证，水平集  $D_\beta$  是凸集。

### 3.2 性质-全局最优

凸优化问题的局部极小值是全局极小值。

这个性质是凸优化问题一个良好的性质，在机器学习任务中我们只需将非凸问题转化为凸优化问题，便可直接求出问题的全局极值，下面给出证明：

反证法证明：假定  $x^*$  是局部极小点，不是全局极小点，则一定存在  $x'$  使得：

$$f(x') < f(x^*)$$

构造凸组合点  $x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x^*$ ， $\sum \alpha_i = 1$ ，有：

$$f(x) = f(\alpha_1 x' + \alpha_2 x^*) \leq \alpha_1 f(x') + \alpha_2 f(x^*) < \alpha_1 f(x^*) + \alpha_2 f(x^*) = f(x^*)$$

当  $\alpha_2 \rightarrow 1$  时， $x$  点无限趋近于  $x^*$ ，即  $x$  是  $x^*$  邻域中的一点，但仍然存在  $f(x) < f(x^*)$ ，与  $x^*$  是局部极小点矛盾；因此原问题得证。

### 3.3 性质-梯度

设  $f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ， $C$  是凸集，对于  $x_1, x_2 \in C$ ，

(1)  $f$  为凸函数的充要条件是：对于  $\forall x_1, x_2 \in C$  且  $x_1 \neq x_2$  都有：

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1)$$

(2)  $f$  为严格凸函数的充要条件是：对于  $\forall x_1, x_2 \in C$  且  $x_1 \neq x_2$  都有：

$$f(x_2) > f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1)$$

证明：先证明充分性，即  $f(x)$  是凸函数  $\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1)$

因为  $f(x)$  是凸函数, 所以  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1], \sum \alpha_i = 1$ , 有:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

令  $\alpha_1 = 1 - t, \alpha_2 = t$ , 有:

$$f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$$

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

$$\frac{f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(x_1)}{t} \leq f(x_2) - f(x_1)$$

用极限的思想:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(x_1)}{t} = \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1)$$

所以:

$$\nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1)$$

故充分性得证;

再证明必要性, 即  $f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1) \Rightarrow f(x)$  是凸函数

$\forall x_1, x_2 \in C$ , 有  $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1], \sum \alpha_i = 1$ , 所以:

$$f(x_1) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x_1 - x)$$

$$f(x_2) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x_2 - x)$$

所以:

$$\alpha_1 f(x_1) \geq \alpha_1 f(x) + \nabla f(x)^T \alpha_1 (x_1 - x)$$

$$\alpha_2 f(x_2) \geq \alpha_2 f(x) + \nabla f(x)^T \alpha_2 (x_2 - x)$$

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \geq (\alpha_1 + \alpha_2) f(x) + \nabla f(x)^T (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x)$$

因为  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , 所以有:

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \geq f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

故必要性得证。

### 3.4 性质-Hessian 矩阵

凸函数的 Hessian 矩阵半正定。

该性质描述了凸函数二阶可微时满足的性质，即凸函数的 Hessian 矩阵半正定，此性质可通过泰勒公式进行，在给出该性质证明之前，先给出 Hessian 矩阵和泰勒公式定义。

Hessian 矩阵是一个多元函数的二阶偏导数构成的方阵，一个多元函数 Hessian 矩阵定义如下：

$$H(f) = J(J(f)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

一般情况下，多元函数的混合二阶偏导数与求导次序无关 [2]，即：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

因此 Hessian 矩阵是一个对称矩阵，它可以看作二阶导数对多元函数的推广。Hessian 矩阵简写为  $\nabla^2 f(x)$ 。对于如下多元函数：

$$f(x, y, z) = 2x^2 - xy + y^2 - 3z^2$$

它的 Hessian 矩阵为：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

根据多元函数极值判别法，假设多元函数在点 M 的梯度为 0，即 M 是函数的驻点，则有：

- 如果 Hessian 矩阵正定，函数在该点有极小值
- 如果 Hessian 矩阵负定，函数在该点有极大值
- 如果 Hessian 矩阵不定，则不是极值点（鞍点）

这可以看做是一元函数极值判别法对多元函数对推广，Hessian 矩阵正定类似于二阶导数大于 0，其他的以此类推。对于  $n$  阶矩阵  $A$ ，对于任意非 0 的  $n$  维向量  $x$  都有：

$$x^T A x > 0$$

则称矩阵  $A$  为正定矩阵。判定矩阵正定的常用方法有以下几种：

- 矩阵的特征值全大于 0；
- 矩阵的所有顺序主子式都大于 0；

- 矩阵合同于单位阵  $I$ ;

泰勒公式是用若干项连加来表示一个函数，这些相加的项由函数在某一点的导数求得，下面给出一个函数  $f(x)$  在  $x = a$  点的泰勒展开式：

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

证明：Hessian 矩阵可看做： $\nabla^2 f(x)$

对于凸函数  $f(x)$ ，有  $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0)$ ，

将  $f(x)$  进行泰勒展开，有

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)^T(x - x_0) + R(n)$$

其中  $R(n)$  是余项，关于  $(x - x_0)^2$  的高阶无穷小，即  $R(n) \rightarrow 0$

因此：

$$\frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)^T(x - x_0) \geq 0$$

其中  $x - x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $H(f) = \nabla^2 f(x_0)^T$ ，所以：

$$(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)^T(x - x_0) \geq 0$$

因此  $H$  半正定，问题得证。

### 3.5 性质

若  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$  (即  $x, y$  为  $n$  维空间向量)， $Q$  为半正定对称阵，则  $f(x) = X^T Q X$  为凸函数

证明：要证明  $f(x) = X^T Q X$  为凸函数，需要证明：

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

其中， $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0, 1]$

令

$$\begin{aligned} F &= f(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha f(x) - (1 - \alpha)f(y) \\ &= (\alpha x + (1 - \alpha)y)^T Q (\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha x^T Q x - (1 - \alpha)y^T Q y \\ &= \alpha^2 x^T Q x + (1 - \alpha)^2 y^T Q y + \alpha(1 - \alpha)x^T Q y + \alpha(1 - \alpha)y^T Q x - \alpha x^T Q x - (1 - \alpha)y^T Q y \end{aligned}$$

因为  $Q$  是对称阵, 即  $Q^T = Q$ , 所以:

$$x^T Q y = (y^T Q^T x)^T = (y^T Q x)^T = y^T Q^T x$$

最后一步等号是因为  $(y^T Q x)^T \in \mathbb{R}^1$ , 所以  $(y^T Q x)^T = y^T Q^T x$

所以:

$$F = \alpha(\alpha - 1)(x^T Q x - 2x^T Q y + y^T Q y) = \alpha(\alpha - 1)(x - y)^T Q (x - y)$$

因为  $Q$  是半正定阵, 所以对  $(x - y) \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$(x - y)^T Q (x - y) \geq 0$$

所以  $F \leq 0$ , 所以  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ , 即问题得证

### 3.6 性质-Jensen 不等式前奏

凸函数  $f(x)$ , 其中  $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 1, 0 \leq Q_i \leq 1$ , 证明下面不等式:

$$f(Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + \dots + Q_n x_n) \leq Q_1 f(x_1) + Q_2 f(x_2) + \dots + Q_n f(x_n)$$

使用数学归纳法证明:

假设,  $n = 2$  时成立, 即:  $f(Q_1 x_1 + Q_2 x_2) \leq Q_1 f(x_1) + Q_2 f(x_2)$

假设,  $n = k$  时成立, 即:  $f(Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + \dots + Q_k x_k) \leq Q_1 f(x_1) + Q_2 f(x_2) + \dots + Q_k f(x_k)$

则当  $n = k + 1$  时, 有:

$$\begin{aligned} F &= Q_1 f(x_1) + Q_2 f(x_2) + \dots + Q_k f(x_k) + Q_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &= (1 - Q_{k+1}) \frac{1}{(1 - Q_{k+1})} (Q_1 f(x_1) + Q_2 f(x_2) + \dots + Q_k f(x_k)) + Q_{k+1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

根据  $n = k$  时,  $\frac{\sum_{i=1}^k Q_i}{1 - Q_{k+1}} = 1$ , 有

$$\begin{aligned} F &\geq (1 - Q_{k+1}) f\left(\frac{Q_1 f(x_1) + Q_2 f(x_2) + \dots + Q_k f(x_k)}{1 - Q_{k+1}}\right) + Q_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\geq f(Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + \dots + Q_k x_k + Q_{k+1} x_{k+1}) \end{aligned}$$

所以命题得证。



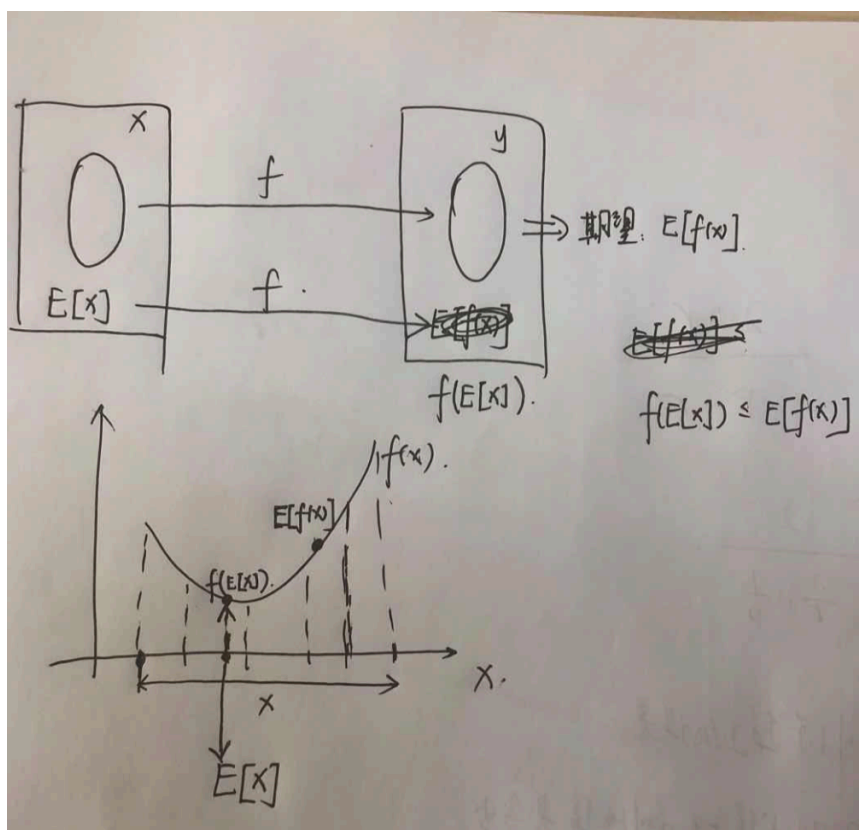
### 3.7 性质-Jensen 不等式

Jessen 不等式,  $f(x)$  为凸函数, 其中  $E(x)$  是  $x$  的期望, 则:

$$f(E[x]) \leq E[f(x)]$$

根据上述性质, 可以快速得证。

Jessen 不等式的直观理解:



## 4 凸优化

### 4.1 凸优化问题定义

一个凸优化问题可描述为:

$$f(x) \quad s.t. \quad x \in C$$

$$s.t. \quad g_i(x) \leq 0, h_i(x) = 0$$

通过以下凸优化性质便可理解何为凸优化问题:

- (1) 目的是求解目标函数的最小值;
- (2) 目标函数  $f(x)$  和不等式约束函数  $g(x)$  都是凸函数, 定义域是凸集;

(3) 若存在等式约束函数，则等式约束函数  $h(x)$  为仿射函数；仿射函数指的是最高次数为 1 的多项式函数，一般形式为  $f(x) = Ax + b$ ， $A$  是  $m * k$  矩阵， $x$  是一个  $k$  向量， $b$  是一个  $m$  向量

(4) 凸优化问题有一个良好的性质即：局部最优解便是全局最优解

## 4.2 常见凸优化问题

### 4.2.1 线性规划 Linear Programming(LP)

如果目标函数和不等式约束函数都是仿射函数，则凸优化问题称为线性规划，数学表示为：

$$\begin{aligned} & C^T x + d \\ \text{s.t. } & Gx \leq h, Ax = b \end{aligned}$$

### 4.2.2 二次规划 Quadratic Programming(QP)

如果目标函数是凸二次函数，而不等式约束仍是仿射函数，则凸优化问题称为二次规划，数学表示为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} x^T P x + c^T x + d \\ \text{s.t. } & Gx \leq h, Ax = b \end{aligned}$$

### 4.2.3 二次约束的二次规划 Quadratically Constrained Quadratic Programming(QCQP)

如果目标函数和不等式约束均为凸二次函数，则凸优化问题称为二次约束的二次规划，数学表示为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} x^T P x + c^T x + d \\ \text{s.t. } & \frac{1}{2} x^T Q_i x + r_i^T x + s_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad Ax = b \end{aligned}$$

### 4.2.4 半正定规划 Semidefinite Programming(SDP)

半正定规划较前面的复杂，在机器学习中也经常用到，下面给出数学描述：

$$\begin{aligned} & \text{tr}(CX) \\ \text{s.t. } & \text{tr}(A_i x) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad X \succeq 0 \end{aligned}$$

其中符号  $\text{tr}(A)$  表示矩阵  $A$  的迹，矩阵  $A$  的迹是指  $A$  的对角线上各个元素的总和

## 5 浅谈凸优化问题为何如此重要

1、凸优化具有良好性质，如局部最优解是全局最优解，且凸优化问题是多项式时间可解问题，如：线性规划问题；

2、很多非凸优化或 NP-Hard 问题可以转化成凸优化问题，方法：对偶、松弛 (扩大可行域，去掉部分约束条件)，在 SVM 算法中，为了对目标函数进行优化，便使用了拉格朗日乘子法、对偶问题、引入松弛因子等。

## References

- [1] “机器学习概念篇：一文详解凸函数和凸优化，干货满满。” [Online]. Available: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/51127402>
- [2] “理解凸优化.” [Online]. Available: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/37108430>