抽象代数的脉络 [1]

leolinuxer

July 2, 2020

Contents

1 抽象代数 **2**

1.1 相关概念 . . . 2

1.1.1 算术 (arithmetic) . . . 2

1.1.2 初等代数 (elementary algebra) 和高等代数 . . . 2

1.1.3 抽象代数 (abstract algebra) . . . 3

1.1.4 线性代数 . . . 3

1.2 代数结构 (algebraic structure) . . . 3

1.3 初等代数 → 抽象代数 . . . 3

2 Group-like **4**

2.1 原群 (magma) . . . 4

2.2 半群 (magma) . . . 4

2.3 幺半群 (monoid) . . . 5

2.4 群 (group) . . . 5

2.5 阿贝尔群 (交换群)(Abelian Group) . . . 5

3 环论 **5**

3.1 环 (ring) . . . 6

3.2 交换环 (commutative ring) . . . 7

3.3 整环 (integral domain) . . . 7

4 域 (Field) **7**

5 向量空间 (vector space) **7**

5.1 8 个公理 . . . 7

6 模 (module) 8

7 代数 (algebra)(环论) 8

8 格 (lattice) 8

9 总结 8

1 抽象代数

1.1 相关概念

1.1.1 算术 (arithmetic)

算术研究数的性质及其运算。算术运算不仅仅指加减乘除，还可以是百分比、平方根、取幂和对数；算法的对象包括自然数、整数、有理数和实数 (兴许还包括复数)；进制不仅仅是十进制，还可以是二进制、十六进制、六十进制。个人认为，算术的最大特点是关注具体数字。

1.1.2 初等代数 (elementary algebra) 和高等代数

用符号 (成了变量) 代替具体的数字，就可以得到更一般化 (generalization) 的等式，举例如下：

$$
\begin{aligned}
(2+3)^2 &= 2^2 + 2\times 2\times 3 + 3^2 \\
(3+5)^2 &= 3^2 + 2\times 3\times 5 + 5^2 \\
&\Rightarrow \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2\times a\times b + b^2
\end{aligned}
$$

初等代数 (elementary algebra) 是古老算术的推广与发展。在古代，算术积累了大量数量问题的解法，为寻求更系统、更普遍的求解各种数量关系方法，就产生了以解方程为中心的初等代数。从实际问题的数量关系 (即代数式：整式、分式、根式)、等量关系 (或者不等式) 列出列出方程或者方程组。方程 (组) 包括一元/二元一次方程 (linear equations with one/two variable)、一元二次方程 (quadratic equations)、指数和对数方程 (exponential and logarithmic equations)、无理方程 (radical equations)、线性方程组 (system of linear equations)。

高等代数相对于初等代数而言，本质上是一个东西，只是更加系统 (深度 + 广度)。

1.1.3 抽象代数 (abstract algebra)

初等代数再进一步推广 (generalization)，那就是抽象代数了。抽象代数 (abstract algebra)、近世代数、现代代数 (modern algebra) 指的都是同一个意思 (甚至直接称为代数学)。抽象代数主要研究对象是代数结构，包括群、环、域、向量空间。

1.1.4 线性代数

线性代数是抽象代数特殊的一类，其代数结构为：向量空间 (vector spaces，也叫线性空间) + 线性变换 (linear mappings)。很容易将线性代数和矩阵理论等同起来，但其实是不一样的，讨论线性变换是基于选定一组基的前提下。摘抄 mathoverflow 上的一个回答 (原文在 (`http://mathoverflow.net/questions/11669/what-is-the-difference-between-matrix-theory-and-linear-algebra`))：

> 线性代数和矩阵理论的区别：
>
> 矩阵允许讨论第 i 行第 j 列的元素；
>
> 线性代数讨论的是线性变换，线性变换不是一堆数构成的矩阵，只是用矩阵来表示线性变换比较方便而已；线性代数需要给定一组基，所以讨论对应矩阵的第 i 行第 j 列的元素是不被允许的；只允许讨论不基于基的概念，比如秩、迹、行列式、特征值集合等。
>
> 来源于：http://mathoverflow.net/questions/11669/what-is-the-difference-between-matrix-theory-and-linear-algebra

1.2 代数结构 (algebraic structure)

抽象代数研究对象是代数结构，转载如下：

> 代数主要研究的是运算规则。一门代数，其实都是从某种具体的运算体系中抽象出一些基本规则，建立一个公理体系，然后在这基础上进行研究。一个集合再加上一套运算规则，就构成一个代数结构 (想想计算机的数据结构：数据 + 操作)。
>
> 来源于：http://sparkandshine.net/mit-mathematical-formalism/

1.3 初等代数 → 抽象代数

抽象代数将初等代数的一些概念延伸：

1. 数–> 集合
2. "+ "–> 二元运算

   加号 "+" 被抽象为二元运算 *(binary operation)，**对两个元素作二元运算，得到的新元素仍然属于该集合，这叫封闭性 (closure)**。实际上，加减乘除都叫二元运算 (二元指的是两个操作数)。

3. 0/1 –> 单位元

0 和 1 被抽象成单位元 (identity elements)，0 为加法单位元，1 为乘法单位元。单位元是集合的一个特殊元素 (跟二元运算有关)，满足单位元与其他元素相结合时，不改变该元素，即满足 $a*e = a$ 与 $e*a = a$。可见，单位元取决于元素与二元运算，如矩阵的加法单位元是零矩阵，矩阵的乘法单位元是单位矩阵。值得注意的是，有些集合不存在单位元，如正整数集合没有加法单位元

4. 负数–> 逆元素

负数推广到逆元素 (inverse element)，对于加法，a 的逆元素是-a；对于乘法，a 的逆元素是倒数 a−1。直观地说，逆元可以撤销操作，如加了一个数 a，再加上该数的逆元-a(相当于撤消操作)，结果还是一样。

5. 结合律 (Associative property)

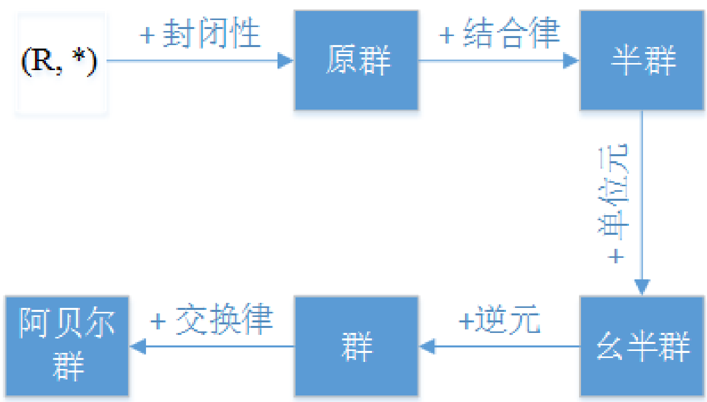
结合律是某些二元运算的性质，有些二元运算没有结合律 (如减法、除法、八元数)

6. 交换律 (Commutative property)

交换律，改变二元运算符两边的元素不影响结果。并不是所有二次元运算都满足交换律 (如矩阵的乘法)。

2 Group-like

代数结构 (R, *)，二元运算根据封闭性、单位元、逆元、结合律、交换律，可以归纳成不同的群。本节介绍的 group-like，从最不严格到严格 (依次添加限制条件)，其关系图如下：



2.1 原群 (magma)

原群 (magma) 是一种基本的代数结构，只要满足两元素作二元运算得到新元素仍属于该集合，即封闭性。

2.2 半群 (magma)

半群 (Semigroup)，满足结合律 (associative property) 的代数结构。$V =< S * >$，其中二元运算 $*$ 是可结合的，即 $(a * b) * c = a * (b * c)$，则称 V 是半群。

2.3 幺半群 (monoid)

幺半群在半群的基础上，还需要满足有一个单位元。

2.4 群 (group)

群 (group) 是两个元素作二元运算得到的一个新元素，需要满足群公理 (group axioms)，即：

- 封闭性：$a*b$ 仍然属于该集合
- 结合律：$(a*b)*c = a*(b*c)$
- 单位元：$a*e = ae*a = a$
- 逆元：加法的逆元为 $-a$，乘法的逆元为倒数 $1/a$，$\cdots$(对于所有元素)

如整数集合，二次元运算为加法就是一个群 (封闭性是显然的，加法满足结合律，单位元为 0，逆元取相反数-a)。

2.5 阿贝尔群 (交换群)(Abelian Group)

阿贝尔群在群的基础上，还需满足交换律。如整数集合和加法运算，$(Z, +)$，是一个阿贝尔群。即：

- 群公理
- 逆元：加法的逆元为 $-a$，乘法的逆元为倒数 $1/a$，$\cdots$(对于所有元素)

3 环论

环在交换群基础上，进一步限制条件。环、交换环、域间的关系如下：

3.1 环 (ring)

环在阿贝尔群 (也叫交换群) 的基础上，添加一种二元运算 $\cdot$ (虽叫乘法，但不同于初等代数的乘法)。一个代数结构是环 $(R, +, \cdot)$，需要满足环公理 (ring axioms)。环公理如下：

1. $(R, +)$ 是交换群
   - 封闭性：$a*b$ 仍然属于该集合
   - 结合律：$(a*b)*c = a*(b*c)$
   - 单位元：$a*e = a$ & $e*a = a$
   - 逆元：加法的逆元为 $-a$，乘法的逆元为倒数 $1/a$，$\cdots$(对于所有元素)
   - 交换律：a + b = b + a
2. $(R, \cdot)$ 是幺半群
   - 结合律：$(a\ b)\ c = a\ (b\ c)$
   - 单位元：乘法的单位元为 1，$a * 1 = a$ & $1 * a = a$
3. 乘法对加法满足分配律
   - $a\ (b + c) = (a\ b) + (a\ c)\ \forall a, b, c \in R$
   - $(b + c)\ a = (b\ a) + (c\ a)\ \forall a, b, c \in R$

3.2 交换环 (commutative ring)

交换环 (commutative ring) 在环的基础上，二元运算乘法还满足交换律。

3.3 整环 (integral domain)

整环在交换环的基础上，并满足没有零因子 (如此，集合内任意两个元素乘积均不等于 0)

4 域 (Field)

域 (Field) 在交换环的基础上，还增加了二元运算除法，要求元素 (除零以外) 可以作除法运算，即每个非零的元素都要有乘法逆元。由此可见，**域是一种可以进行加减乘除 (除 0 以外) 的代数结构，是数域与四则运算的推广**。整数集合，不存在乘法逆元 (1/3 不是整数)，所以整数集合不是域；有理数、实数、复数可以形成域，分别叫有理数域、实数域、复数域。

5 向量空间 (vector space)

向量空间是一些向量的集合。最熟悉的例子是几何向量或矢量 (Euclidean vectors, geometric vector, spatial vector)，表示具有大小和方向的对象；矢量可以做加法 (addition) 和乘法 (scalar multiplication) 运算

其他例子，还包括坐标空间 (Coordinate spaces)、复数、函数空间 (Function spaces)、线性方程组 (linear equations)。

5.1 8 个公理

给定域 F，向量空间 V 记为 F-向量空间。其二元运算：

- 向量加法：$+ : V \times V \to V$ 记作 $v + w, \exists v, w \in V$
- 标量乘法：$\cdot : F \times V \to V$ 记作 $a \cdot v, \exists a \in F, v \in V$

并且满足如下 8 条公理：

- 向量加法结合律：$u + (v + w) = (u + v) + w$
- 向量加法的单位元：V 存在零向量的 0，$\forall v \in V, v + 0 = v$
- 向量加法的逆元素：$\forall v \in V, \exists w \in V$，使得 $v + w = 0$
- 向量加法交换律：$v + w = w + v$
- 标量乘法与域乘法兼容性 (compatibility)：$a(bv) = (ab)v$
- 标量乘法有单位元: $1v = v$, 1 指域 F 的乘法单位元
- 标量乘法对于向量加法满足分配律：$a(v + w) = av + aw$

- 标量乘法对于域加法满足分配律: $(a+b)v = av + bv$

另，若 F 是实数域 $\mathbb{R}$，则 V 称为实数向量空间；若 F 是复数域 $\mathbb{C}$，则 V 称为复数向量空间；若 F 是有限域，则 V 称为有限域向量空间。

6 模 (module)

模是对向量空间的推广，将标量需为域 (向量空间) 推广到任意环 (模)。

7 代数 (algebra)(环论)

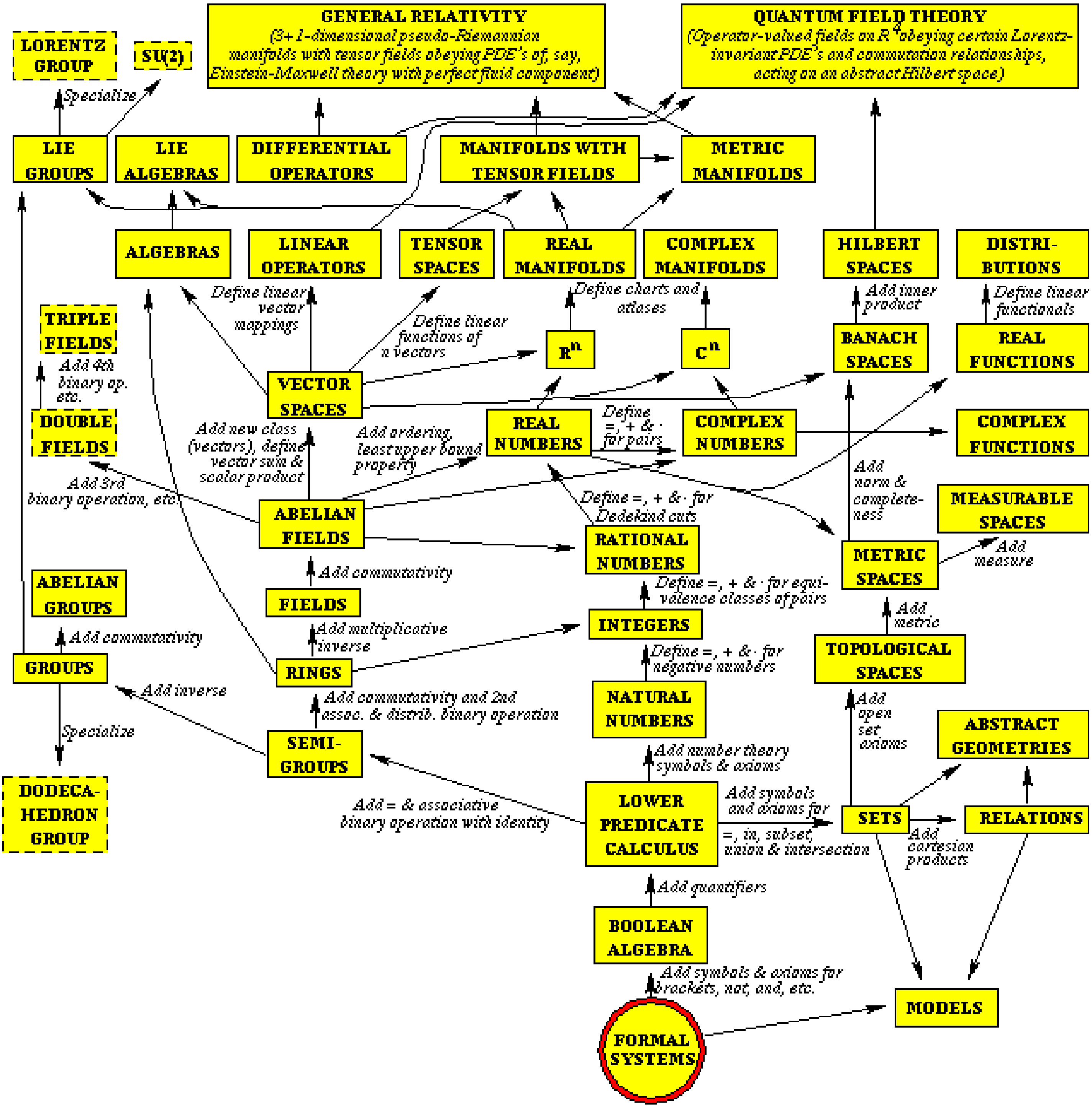
代数将 algebra over a field 中的域推广到交换环。

8 格 (lattice)

格是任意两个元素都有上确界和下确界的偏序集合。

9 总结

是时候，祭出这张图了，图片来源于 (`http://mccabism.blogspot.fr/2007_03_01_archive.html`)



References

[1] [Online]. Available: http://sparkandshine.net/algebraic-structure-primer-group-ring-field-vector-space/