变分法 [1]

July 1, 2020

1 简单的背景介绍

让一个物体从静止开始沿着一个光滑无摩擦的轨道下滑，如果要求下滑过程耗时最短，轨道应该是什么形状？这个问题被称作最速降曲线问题（the brachistochrone problem）。

2 变分大法

假设我们有两个定点 (a,p) 和 (b,q)，连接这两点的任意曲线的方程 $y=f(x)$ 都将满足如下的边界条件：

$$y(a)=p, y(b)=q \tag{1}$$

现在考虑如下形式的定积分：

$$I=\int_a^b f(y,y')dx \tag{2}$$

其中 $f(y,y')$ 是关于 $y(x)$ 和其一阶导数 $y'(x)$ 的函数，我们期望找到一个具体的 $y(x)$，使得 I 有极值（极大或极小）。

注意在一般的极值问题中，我们考察的是自变量 x 的变化：x 取值多少时，函数会有极值。而现在这个新问题的不同之处，我们考察的是函数 $y(x)$ 的变化 $y(x)$ 是什么形式时，I 会有极值（高大上叫法：I 称作函数 $y(x)$ 的泛函）。**然而这两类问题依然有共通之处：当 I 取极值时，对 $y(x)$ 作微小的变化，I 在一级近似下应该保持不变。**

如果 $y(x)$ 有微小改变 $\delta y(x)$（高大上叫法：$\delta y(x)$ 称作函数 $y(x)$ 的变分），那么 $f(y,y')$ 的变化为：

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \tag{3}$$

I 相应的变化为：

$$\delta I=\int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y']dx \tag{4}$$

方括号里的第二项可以改写成 $\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx}$，然后我们可以进行分部积分：

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) \tag{5}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y'}\partial y\Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})dx \tag{6}$$

由于 $y(x)$ 的边界条件固定，$\delta y(a) = \delta y(b) = 0$，所以分部积分出来的第一项为零，仅第二项有贡献。代回（4）式中，稍作化简可以得到

$$\delta I = \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})]\delta y(x)dx \tag{7}$$

如果 I 有极值，对任意满足边界条件的 $\delta y(x)$ 都必须有 $\delta I = 0$，这就要求：

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0 \tag{8}$$

这便是传说中的 Euler-Lagrange 方程，它是变分法的核心定理。有了此等大杀器，原则上就可以找出所寻求的极值函数 $y(x)$。

通常来讲 Euler-Lagrange 方程会是一个二阶的微分方程，$y(x)$ 的通解中含有的两个待定常数刚好可以通过两个边界条件确定。我们下面来举几个例子操练操练。

2.1 例：两点间的最短路经

先来一个简单的例子小试牛刀。给定平面上两点 (a, p) 和 (b, q)，连接它们的长度最短的曲线是什么？

曲线 $y(x)$ 上相近的两点 (x, y) 和 $(x + dx, y + dy)$ 之间的曲线元长度为：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx \tag{9}$$

曲线的总长度为：

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx \tag{10}$$

现在希望 S 有最小值，我们可以取 $f(y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$，运用 Euler-Lagrange 方程来寻找可以让 S 有极小的函数 $y(x)$。注意到：

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{11}$$

代回（6）式中，容易得到

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \tag{12}$$

括号里这一大坨的导数为零，那么括号里这一大坨必然是一个常数，我们马上可以推出 $y'(x)$ 也必然

是一个常数。因此我们需要寻找的 $y(x)$ 满足直线方程：

$$y = kx + c \tag{13}$$

斜率 k 和截距 c 很容易通过边界点的坐标算出。由此我们证明了大家非常熟悉的结论：两点之间直线段的距离最短。

2.2 例：最速降曲线

问题在开篇的历史故事介绍中已经有提到，我们这里直接进入解答环节。

为方便起见，我们将坐标系的 y-轴搞成朝下的方向，斜向下的轨道可以由函数 $y(x)$ 给出，其中轨道的起点和终点分别设为 $(0,0)$ 和 (a,b)，我们来试求最速降曲线的函数式。

当物理下滑到 (x,y) 位置时，它的速度大小可以根据能量守恒关系解出

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$v = \sqrt{2gy} \tag{14}$$

而根据定义，速度大小等于单位时间内走过的轨道长度

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1+y'^2}\frac{dx}{dt} \tag{15}$$

联立后有：

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx \tag{16}$$

积分后就可以得到总时间的表达式：

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \frac{1+y'^2}{y}dx \tag{17}$$

令 $f(y,y') = \frac{1+y'^2}{y}$，有：

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

丢回 Euler-Lagrange 式里面，我们可以得到这么一个初步的方程：

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} + \frac{d}{dx}(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}) = 0 \tag{18}$$

看到这种东西，要保持平静，铁了头往下算，要相信好多恶心的东西会神奇地同归于尽。

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}}+\frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}}-\frac{1}{2}\frac{y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}}-\frac{y'^2y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}(1+y'^2)^2+y(1+y'^2)y''-\frac{1}{2}y'^2(1+y'^2)-yy'^2y''=0 \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}(1+y'^2)+yy''=0 \tag{21}$$

瞧，柳暗花明又一村。不过这还远没完，解这个二阶微分方程还需要一个骚操作。我们对上式乘上一个 $2y'$：

$$y'(1+y'^2)+2yy'y''=0 \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}[y(1+y'^2)]=0 \tag{23}$$

它要等于零，方括号里那一坨等于常数就完儿事了。且让我们将这个常数写作 k：

$$y(1+y'^2)=k$$

$$y'^2=\frac{k}{y}-1=\frac{k-y}{y}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{k-y}{y}}$$

原来的二阶微分方程降次变成了一阶，我们终于可以愉快地分离变量两边积分了：

$$x=\int dx=\int\sqrt{\frac{y}{k-y}}dy$$

后略。

3 分部积分

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

也可以简写成：

$$\int udv=uv-\int vdu$$

References

[1] “浅谈变分原理.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/139018146