线性代数基础要点

leolinuxer

July 1, 2020

Contents

1 线性代数解决什么问题 [1]

线性代数研究的是**如何解决线性问题**；如何**把复杂问题线性化**是别的学科的内容，比如《微积分》、《信号与系统》等。

线性代数讨论的线性问题包括：

- 向量、向量空间：
- **关于向量、向量空间的函数**，也称为矩阵函数；矩阵可以对向量进行变换
- 对矩阵函数进行坐标变换

1.1 线性代数的几个基础概念和他们之间的关系

- 「**基**」
- **向量**：描述线性的“东西”（直线、平面、立方体）；
- **矩阵**可以对向量进行变换；变换的形式包括：
  - **线性变换**：旋转、推移、伸缩；投影之类的**升降维**的操作；恒等变换（单位变换）、求微商（线性空间 $P[x]$ 内）、求定积分等

  - **仿射变换**：线性变换 + 平移

- **行列式**：代表矩阵变换前后的面积 (体积) 之比
- 「**秩**」
- **相似矩阵**
- **二次型**
- **特征值和特征向量**
- 「**迹**」
- **奇异值**

2 矩阵 [2]

正确的观点是把矩阵看作函数，这样很多疑惑就可以迎刃而解。

2.1 矩阵是一个函数

我们熟悉的直线函数 $ax = y$，把点 $(x, 0)$ 映射到点 $(0, ax)$。

我们通过矩阵：$A\vec{x} = \vec{y}$ 也可以完成这个映射，令：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

也可以完成：

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ax \end{pmatrix}$$

对于：$ax = y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ 只能完成实数到实数的映射：$x \to y \implies \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

但是对于：$A\vec{x} = \vec{y}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ 可以完成更广泛的映射：$\vec{x} \to \vec{y} \implies \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

为了完成这一点，矩阵 A 就不再是系数 a 了，而是一个函数（或者说是映射）。

写成这样，矩阵乘法看起来更像是函数：$A(\vec{x}) = \vec{y}$

从线性方程组的角度来看，也很容易得出矩阵是一个函数的结论来。给定线性方程组

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

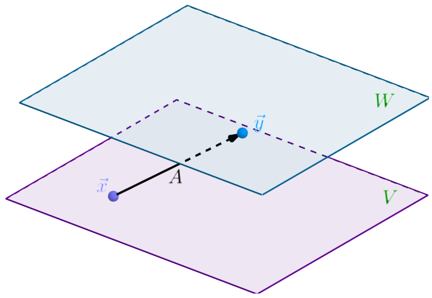
按照矩阵形式，可以改写为：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

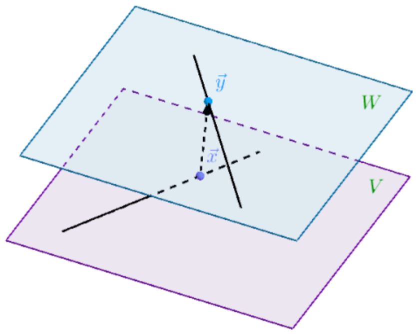
所以，矩阵 $[1, 2; 2, 1]$ 就是一个线性变换的函数。

2.2 矩阵也被称为线性映射

假设 $\vec{x}$ 所在平面为 V，而 $\vec{y}$ 所在平面为 W，$\vec{x}$ 通过矩阵 A 映射到了 $\vec{y}$，可以如下表示：



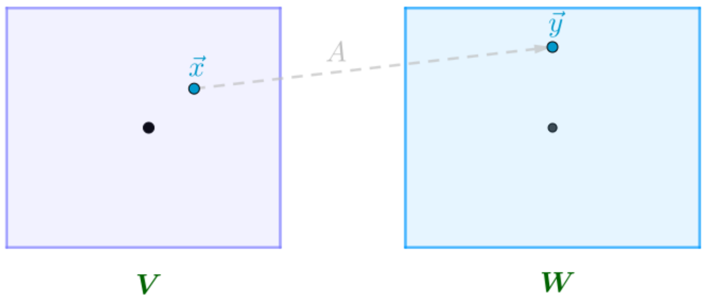
A 这个映射的特殊之处是，V 上的直线通过 A 映射到 W 上也是直线：



所以矩阵也被称为线性映射。

2.3 矩阵函数的工作方式

我们来看看矩阵 A 是如何工作的。为了方便后面的讲解，把之前表示线性映射的 3D 图变为 2D 图：



为了画图方便，$\vec{x}$ 所在平面为 V、$\vec{y}$ 所在平面为 W，都是二维平面，即 $\mathbb{R}^2$。

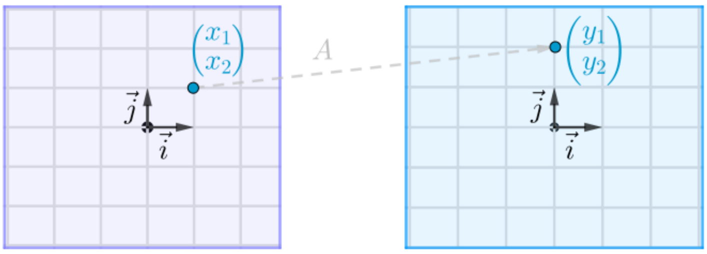
2.3.1 坐标

研究线性映射，最重要的是搞清楚当前处在哪个基下。我们先来看看：$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$,$\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 的基。$\vec{x},\vec{y}$ 的基默认为各自向量空间下的自然基，其自然基为（即 $\mathbb{R}^2$ 下的自然基）：

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

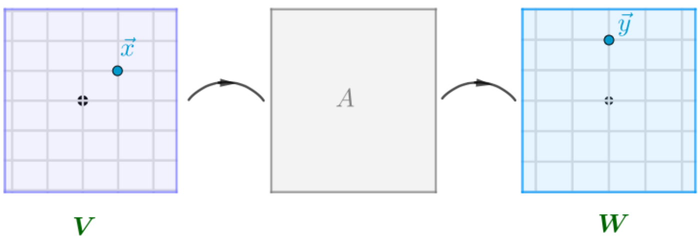
所以：

$$\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}\qquad \vec{y}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}$$

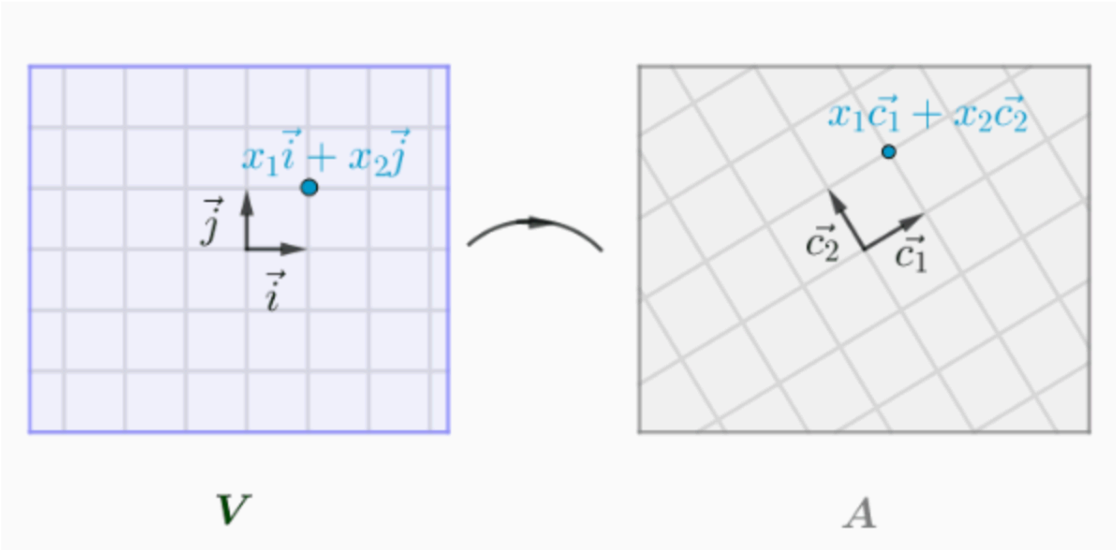


2.3.2 映射法则的工作原理

为了说清楚映射法则 A 是怎么工作的，我们把 A 也用一个空间表示，V 会通过 A 映射到 W：



若：$A=\begin{pmatrix}\vec{c_1}, & \vec{c_2}\end{pmatrix}$ 其中 $\vec{c_1},\vec{c_2}$ 为 A 的列向量。根据矩阵乘法的规则有：$A\vec{x}=x_1\vec{c_1}+x_2\vec{c_2}$ 则 $A\vec{x}$ **相当于在 A 空间中，以 $\vec{c_1},\vec{c_2}$ 为基，坐标为** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ **的向量**：



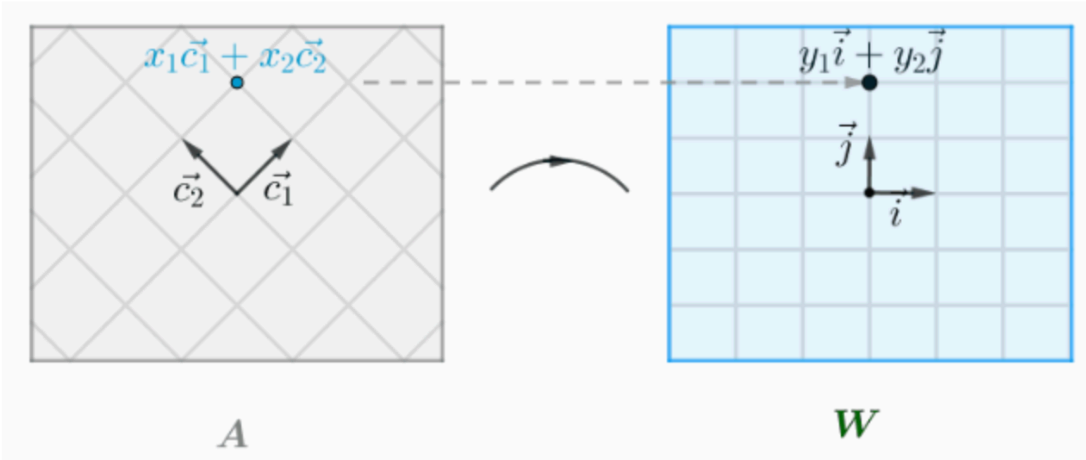
举例说明 $A\vec{x}=x_1\vec{c_1}+x_2\vec{c_2}$:

$$A=\begin{pmatrix}\vec{c_1}, & \vec{c_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

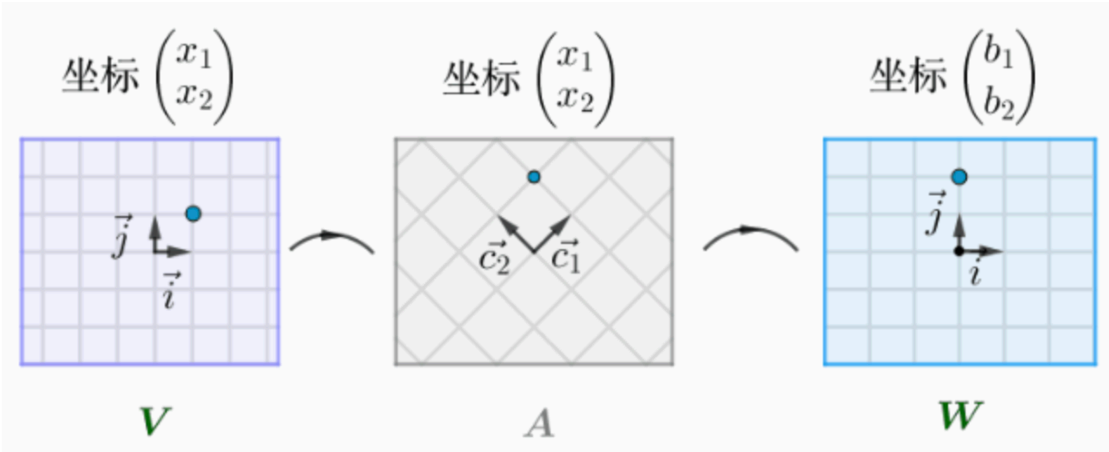
$$A\vec{x}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}x_1 & c_{12}x_2\\ c_{21}x_1 & c_{22}x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}c_{12}\\ c_{22}\end{pmatrix}=x_1\vec{c_1}+x_2\vec{c_2}$$

再将 $A\vec{x}$ 向量用自然基表示:

$$\begin{aligned}
A=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\vec{c_1}, & \vec{c_2}\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow \vec{c_1}=c_{11}\vec{i}+c_{21}\vec{j},\quad \vec{c_2}=c_{12}\vec{i}+c_{22}\vec{j}\quad (\vec{c_1},\vec{c_2}\textbf{都是}\vec{i},\vec{j}\text{的线性组合})\\
A\vec{x}=x_1\vec{c_1}+x_2\vec{c_2}&=x_1c_{11}\vec{i}+x_2c_{12}\vec{i}+x_1c_{21}\vec{j}+x_2c_{22}\vec{j}\\
&=(x_1c_{11}+x_2c_{12})\vec{i}+(x_1c_{21}+x_2c_{22})\vec{j}\\
&=\begin{pmatrix}x_1c_{11}+x_2c_{12}\\ x_1c_{21}+x_2c_{22}\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow y_1\vec{i}+y_2\vec{j}
\end{aligned}$$

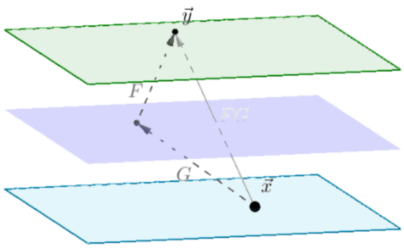


所以整体来说，就是**基改变，导致向量的坐标发生变化：**



2.4 复合函数和乘法交换律

通过 G 把 $\vec{x}$ 映射到 $G(\vec{x})$，再通过 F 把 $G(\vec{x})$ 映射到 $\vec{y}$，矩阵的乘法 FG 可以如下图所示：



所以**矩阵乘法** FG **实际上就是复合函数：** $FG \to F(G)$

而函数一般是不满足交换律的，比如：$f(x) = sin(x), g(x) = x^2$ 那么：$f(g(x)) = sin(x^2) \neq g(f(x)) = sin^2(x)$ 那么矩阵乘法不满足交换律也很好理解了。

即从复合函数的角度看（矩阵乘法就是复合函数），矩阵乘法不满足交换律是显然的。

2.5 从不同角度理解矩阵

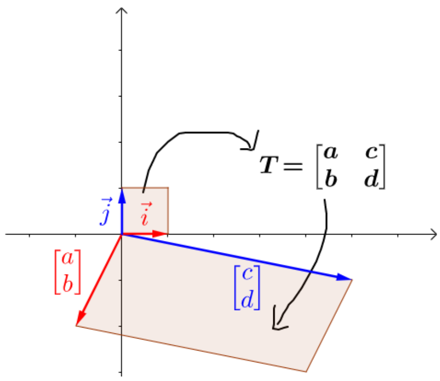
给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，可以有不同的理解：

2.5.1 从”图形“的角度理解

将 A 理解成以 $\vec{c_1}=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix},\vec{c_2}=\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ 为基张成的“**元平行四边形**”，此时 A 的行列式 $det(A)$ 就表示以 c_1,c_2 张成的平行四边形的面积；同理，如果 A 是 3×3 的，则 $det(A)$ 代表平行六面体的体积；

2.5.2 从线性变换的角度理解

将 A 理解成线性变换；单独看 A，可以理解成对标准基进行了线性变换（如图）；将 A 作用在向量 $\vec{x}$ 上表示对向量 $\vec{x}$ 进行了线性变换，此时 $A\vec{x}$ 更应该写成 $A(\vec{x})$；如果记 $\vec{x'}=A\vec{x}$，其中 x 的基为 $\vec{i},\vec{j}$，x' 的基为 $\vec{i'},\vec{j'}$，那么矩阵 A 实际上是改变了基，通过 A 把 $\vec{i}\to\vec{i'},\vec{j}\to\vec{j'}$，或者说矩阵 A 的列就是变换后的 $\vec{i'},\vec{j'}$；



2.5.3 从”运动“的角度理解

将 A 所代表的线性变换进一步理解成一种“运动”（（广义的运动）；对于运动而言，最重要的当然就是运动的速度和方向，那么：

- 特征值就是运动的速度
- 特征向量就是运动的方向

2.5.4 小结 [3]

坐标系是由**线性无关的向量**放在一起构成的，只是表示成**矩阵**的形式而已，而我们将常用的是把**矩阵看成运动（线性代数里常称为变换）的描述**，用乘法来施加，即**矩阵本身描述了一个坐标系，矩阵与矩阵的乘法描述了一个运动**。

换句话说：**如果矩阵仅仅自己出现，那么他描述了一个坐标系，如果他和另一个矩阵或向量同时出现，而且做乘法运算，那么它表示运动！**。

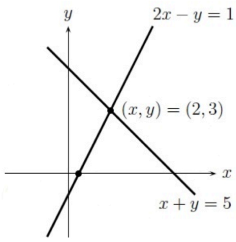
2.6 矩阵与方程组 [3]

当解一个方程组的时候，我们知道，方程组的解只与系数有关。于是，将系数提取出来，放在一起，就构成了矩阵，而矩阵的行变换就相当于解方程时的加减消元过程（也叫高斯消元法）。

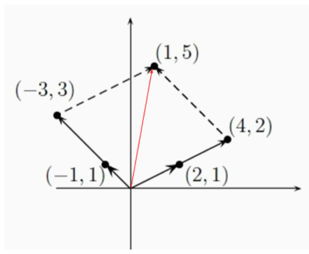
下面我们从方程组解的几何意义来解释方程组 $Ax = b$ 的意义：

- 方程组有解可以理解成空间几何图形有公共交点或者交线（高维度时还可能出现“交面”等情况）
- 方程组有解就说明 b 这个向量能用 A 的列向量线性表示，也可以说 b 这个向量在 A 的列向量所构成的空间中；因为我们可以将矩阵 $A_{n\times m}$ 写成这样列向量的表示形式：$A = [\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}]$，于是，方程就变成了 $x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \cdots + x_n\vec{a_n} = b$，也就是说，如果一个方程组有解，就说明 b 这个向量能用 A 的列向量线性表示，也可以说 b 这个向量在 A 的列向量所构成的空间中。

举一个例子，对于方程组 $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ 的几何意义如下：



第一种解释



第二种解释

那么，无穷解和无解怎么理解呢?

对于第一种解释，无穷解代表有公共相交部分，但是最终形成的不是一个点，而是线或者面或者更高维的东西，而无解代表着没有公共相交的部分。

对于第二种解释，无穷解表示矩阵 A 中的列向量线性相关，所以导致表示方式不唯一。而无解则表示矩阵 A 中的列向量和 b 不在同一个“次元”里，或者说不在一个空间里。如果 A 的列向量和 b 在同一个空间里，那么就需要 A 的维数和 $[A, b]$ 的维数相同。我们知道，矩阵的秩表示向量构成的空间的维数，于是我们知道 $r(A)$ 应该等于 $r([A, b])$，

3 理解线性变换和仿射变换 [4]

3.1 线性变换的要点

线性变换的几何直观有三个要点：

- 变换前是直线的，变换后依然是直线
- 直线比例保持不变
- **变换前是原点的，变换后依然是原点**

比如旋转：对于以原点为中心的正方形，无论怎么旋转，之前的边是直线，之后的边仍然是直线；之前和之后的边长比例保持 1:1；之前中心在原点，之后中心仍然在原点；比如推移：把正方形推移一下（变成平行四边形），直线还是直线；比例还是原来的比例；原点还是原点；比如旋转加推移，仍然保持上面三个性质不变。

3.2 从线性函数到线性变换

3.2.1 线性函数与线性变换的关系

直观地讲，函数就是把 x 轴上的点映射到曲线上。比如函数函数 $y = sin(x)$，把 x 轴上的点映射到了正弦曲线上）；还有的函数，比如 $y = x$，是把 x 轴上的点映射到直线上，我们称为线性函数；

线性函数其实就是线性变换，为了看起来更像是线性变换，我换一种标记法。

比如对于 $y = x$，我们可以认为是把 $(a, 0)$ 点映射到 $(0, a)$ 点，我们称为线性变换 T，记作：

$$T : (a, 0) \to (0, a), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

矩阵的形式很显然如下：

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

这样做最直接的好处是，**我们可以轻易的摆脱 x 轴的限制**。

只要替换 $(a, 0)$ 为平面内所有的点 (a, b)，我们就可以对整个平面做变换，该线性变换记作：

$$T : (a, b) \to (b, a)$$

进而可以写作矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

也就是说整个平面的点都可以被变换。

使用线性代数的记号，有：

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即：

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

进一步，既然 $\vec{x}, \vec{y}$ 都是平面上的点，我们可以认为：

线性变换通过矩阵 A 来表示

而 $y = x$ 只不过是这个 A 的一种特殊情况。

3.2.2 矩阵 A 与基

因为 $y=x$ 是基于直角坐标系的，通过这个转换：

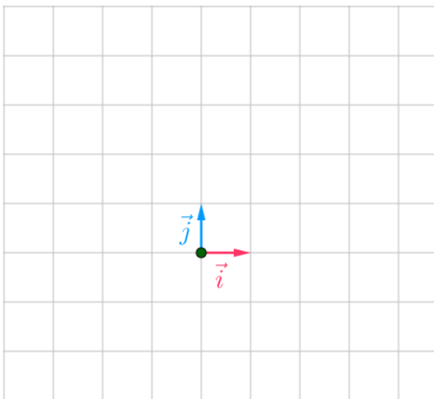
$$y=x \to A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

得到的 A 也是基于直角坐标系的。只是在线性变换中，我们不称为直角坐标系，我们叫做**标准正交基**。

标准正交基是：

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

它们所张成的线性空间如下：



A 在此基下，完成了镜面反转这个线性变换。

因此，让我们补完之前的结论：

线性变换通过指定基下的矩阵 A **来表示**

3.3 线性变换的描述方法

3.3.1 用代数方式描述线性变换

比如给定一个点 A，它的坐标为：(a,b)；

我们也可以把它看做一个矢量和点以示区别，表示为矩阵：$\vec{A}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$；

用旋转矩阵

$$T_{rotate}=\begin{bmatrix}cos(\theta) & -sin(\theta)\\sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}$$

与 $\vec{A}$ 进行矩阵乘法：

$$T_{rotate}\vec{A}=\vec{A'}$$

其中 $\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}$，$\vec{A'}=a\vec{i'}+b\vec{j'}$

对正方形的每个点都运用 T_{rotate} 就完成了旋转。所以实际上 T_{rotate} 是改变了基，通过 T_{rotate} 对基进行了变换：$\vec{i}\rightarrow\vec{i'},\vec{j}\rightarrow\vec{j'}$

详细点说，实际上，**矩阵的列其实就是变换后的 $\vec{i'}\vec{j'}$**，这就是矩阵的真正含义。

即对于旋转矩阵：

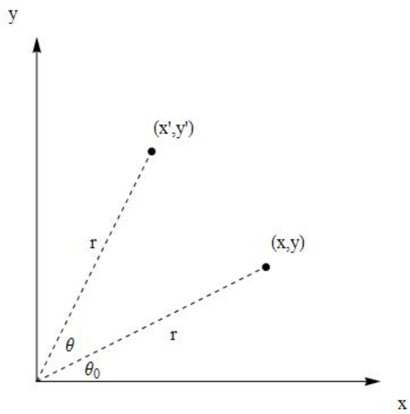
$$T_{rotate}=\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{i'}=\begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \vec{j'}=\begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{bmatrix}$$

我们只需要旋转基，就可以完成正方形的旋转。

总结下来，线性变换是通过矩阵乘法来实现的；换句话说，矩阵变换的其实是基。

旋转矩阵的推导

设点 (x,y) 离坐标原点距离 r，与 x 轴夹角 θ_0 ，将点绕原点逆时针旋转 θ ，旋转之后点的坐标为 (x',y')。显然 (x',y') 与原点距离不变，仍然为 r。



显然如下关系成立：

$$\frac{x'}{r}=\cos\left(\theta_0+\theta\right)=\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta=\frac{x}{r}\cos\theta-\frac{y}{r}\sin\theta$$

$$\frac{y'}{r}=\sin\left(\theta_0+\theta\right)=\sin\theta_0\cos\theta-\cos\theta_0\sin\theta=\frac{y}{r}\cos\theta+\frac{x}{r}\sin\theta$$

整理得到：

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta$$

$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$

把上面这两个方程写成矩阵形式即可得到旋转矩阵的表达式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.4 仿射变换

仿射变换从几何直观只有两个要点：

- 变换前是直线的，变换后依然是直线
- 直线比例保持不变

少了原点保持不变这一条。比如允许平移：平移后，直线还是直线，比例还是那个比例，但是原点却发生了变化。

因此，平移不再是线性变化了，而是仿射变化。

3.4.1 用代数方式描述仿射变换

线性变换是通过矩阵乘法来实现的，仿射变换不能光通过矩阵乘法来实现，还得有加法。

仿射变换表示为：

$$\vec{y} = A\vec{x} + b$$

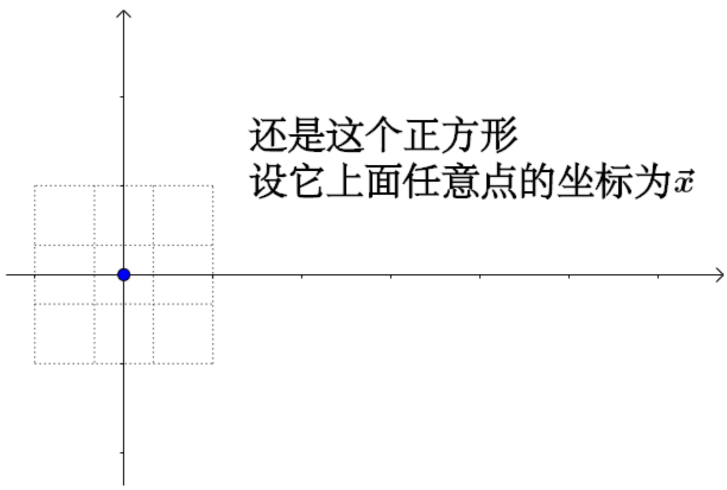
3.5 通过线性变换来完成仿射变换

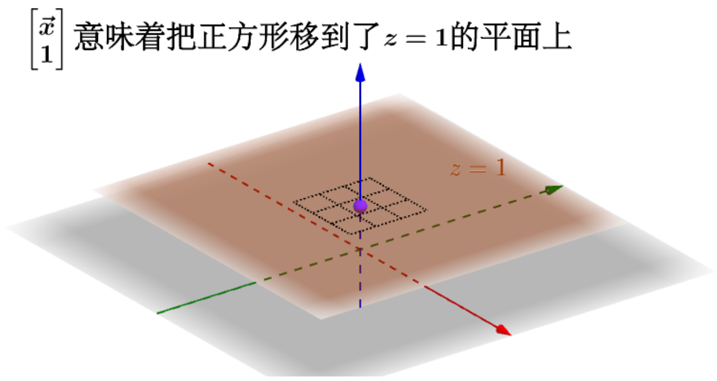
将仿射变换的方程式改写下，可以发现仿射变换和线性变换的关系：

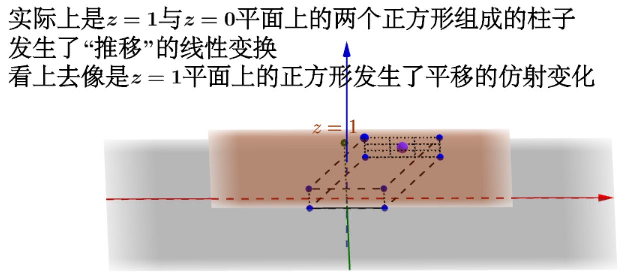
$$\vec{y} = A\vec{x} + b \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

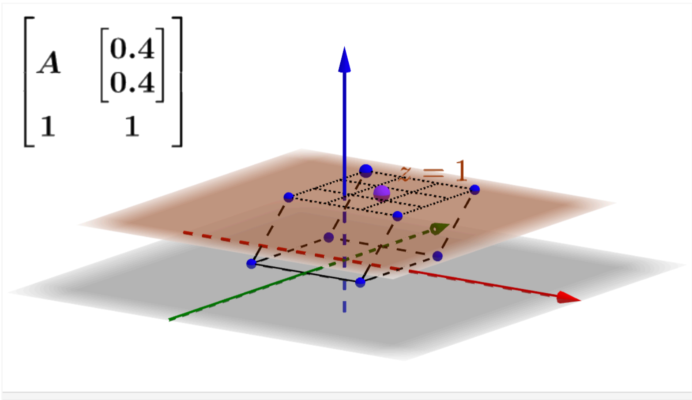
也就是说，增加一个维度后，就可以在高维度通过线性变换来完成低维度的仿射变换。

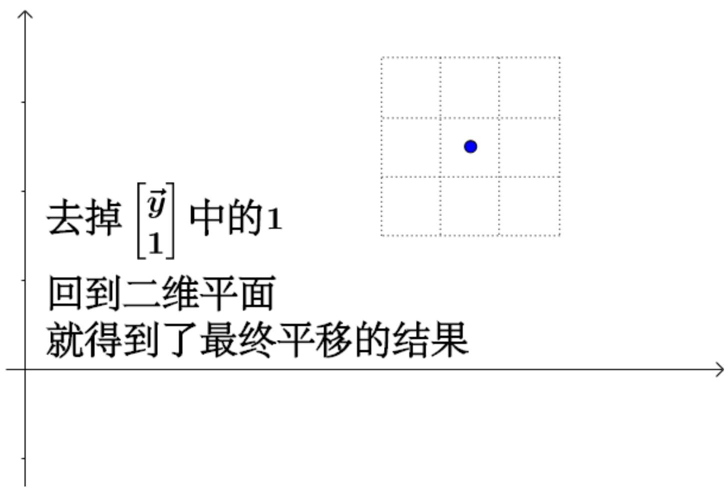
举个例子：











回忆一下计算机图形学：描述三维空间中的物体只需要三维向量，但是计算机图形学变换矩阵都是 4×4 的；这是因为，在计算机图形学里应用的图形变换，实际上是在仿射空间而不是向量空间中进行的。所以计算机图形学的生存空间实际上是仿射空间，而仿射变换的矩阵表示就是 4×4 的 [3]。

4 理解行列式 [5]

4.1 行列式的来历和本质

人们为了解线性方程组，最终总结出了行列式。行列式的本质是线性变换的伸缩因子。

4.2 行列式的本质是线性变换的伸缩因子

我们还是拿旋转矩阵来举例子：

$$T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow |T_{rotate}| = \begin{vmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

T_{rotate} 的行列式恒等于 1，意味着旋转不会改变面积。

同理，对于缩放矩阵：

$$T_{scale} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$T_{scale}\vec{X} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$|T_{scale}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

变换后，$\vec{i}$ 对应的坐标会缩放为 a 倍，$\vec{j}$ 对应的坐标会缩放为 b 倍，面积会缩放为原来的 ab 倍；

掌握了行列式是线性变换的伸缩因子这一点之后，我们就很容易理解各种行列式的值与线性变换的关系。

4.3 行列式大小对变换的影响

4.3.1 行列式 > 0

- 行列式 > 1，对于图形有放大的作用
- 行列式 $= 1$，图形的大小不会变换
- $0 <$ 行列式 < 1，对于图形有缩小的作用

4.3.2 行列式 $= 0$

行列式等于 0，有一个重要的结论是，矩阵不可逆。

还是以旋转矩阵为例，通过旋转矩阵，逆时针旋转 45°，旋转矩阵为：

$$T_{rotate}(45°) = \begin{bmatrix} cos(45°) & -sin(45°) \\ sin(45°) & cos(45°) \end{bmatrix}$$

再通过另外一个旋转矩阵，顺时针旋转 45°，旋转矩阵为：

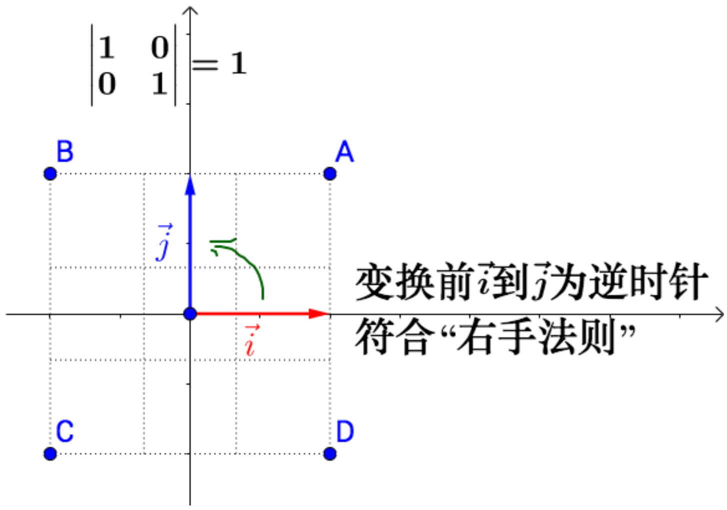
$$T_{rotate}(-45°) = \begin{bmatrix} cos(-45°) & -sin(-45°) \\ sin(-45°) & cos(-45°) \end{bmatrix}$$

两次旋转后，原图形看起来就像没有变换过一样，因此：$T_{rotate}(-45°)$ 和 $T_{rotate}(45°)$ 互为逆矩阵。

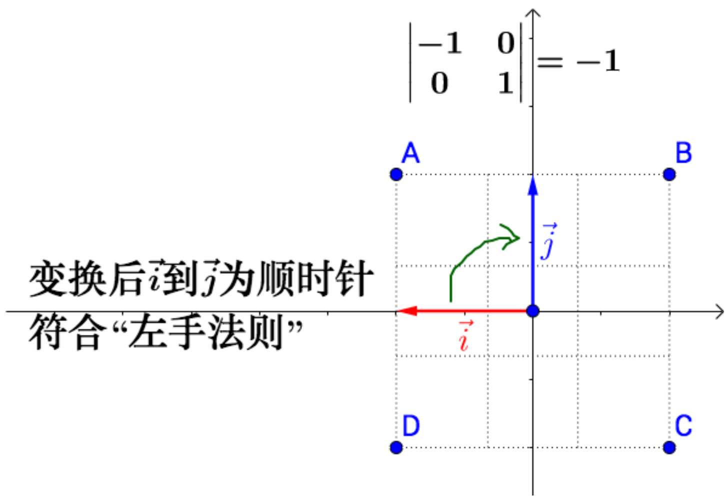
有的线性变换是可逆的，有的不行，比如行列式 =0 这样的线性变换就是不可逆的。从图像上看，图形会缩成一点 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，或者缩成一条直线 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；没有矩阵可以把它们恢复成原来的样子。

4.3.3 行列式 < 0

原始图像是这样的：



被行列式 < 0 的矩阵线性变换后是这样的：



行列式 < 0 其实就是改变了基的“左右手法则”

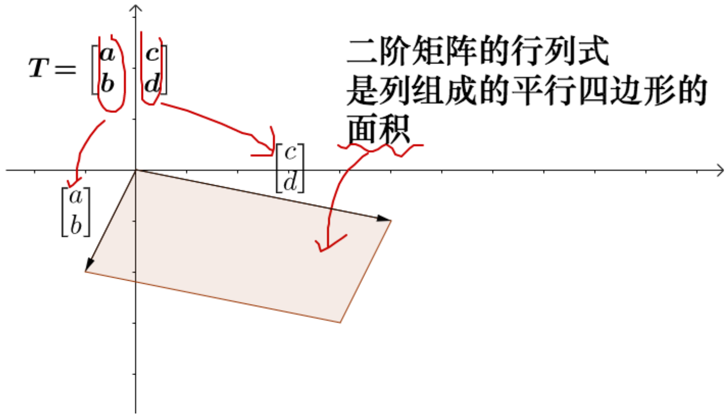
4.4 推论

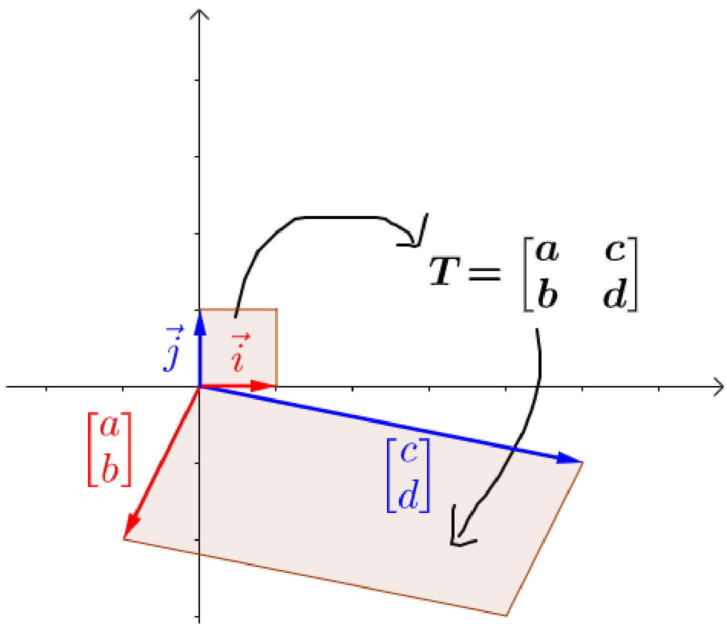
知道了行列式的意义，我们就很容易知道，为什么

- 矩阵乘法不满足交换律：$T_1T_2 \neq T_2T_1$：因为矩阵乘法相当于复合函数
- 但是：$det(T_1T_2) = det(T_2T_1)$：因为面积先缩放为 T_1 倍再缩放为 T_2 倍，与先缩放为 T_2 倍再缩放为 T_1 倍等价

同理，可以知道为什么

- 二阶矩阵的行列式是**列**组成的平行四边形的**面积**（对单位正方形进行了缩放）





- 三阶矩阵的行列式是**列**组成的平行六面体的**体积**（对单位正方体进行了缩放

5 理解正交矩阵 [3]

5.1 正交矩阵的定义

如果：$AA^T = E$（E 为单位矩阵，A^T 表示“矩阵 A 的转置矩阵”）或 $A^TA = E$，则 n 阶实矩阵 A 称为正交矩阵。

5.2 正交矩阵的性质

- A^T 是正交矩阵
- A 的各行是单位向量且两两正交
- A 的各列是单位向量且两两正交
- $|A| = 1$ 或 -1
- **正交矩阵的乘积仍是正交矩阵**

证明正交矩阵的乘积仍是正交矩阵。

假定 M, N 是正交矩阵，即：

$$MM^T = MM^{-1} = E, NN^T = NN^{-1} = E$$

那么：

$$(MN)(MN)^T = (MN)(N^TM^T) = MNN^TM^T = MEM^T = E$$

即 MN 仍是正交矩阵。

5.3 正交矩阵的直观理解

正交矩阵是方块矩阵，行向量和列向量皆为正交的单位向量。

正交矩阵的定义“行向量和列向量皆为正交的单位向量”带来了另一个好处：**正交矩阵的转置就是正交矩阵的逆，比普通矩阵求逆矩阵简单多了**。即：

$$MM^{-1} = MM^T = E$$

举例证明上述结论：给定正交矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \vec{x_1}, & \vec{x_2}, & \vec{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{y_1} \\ \vec{y_2} \\ \vec{y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

因为每行（每列）都是单位长度向量，所以每行点乘自己（每列点乘自己）的结果为 1：

$$\vec{x_i} \cdot \vec{x_i} = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\vec{y_i} \cdot \vec{y_i} = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

因为任意两行（两列）正交，所以就是两行（两列）点乘结果为 0：

$$\vec{x_i} \cdot \vec{x_j} = 0, \quad i \neq j$$

$$\vec{y_i} \cdot \vec{y_j} = 0, \quad i \neq j$$

并且 M 的转置为：

$$M^T = \begin{bmatrix} \vec{x_1} \\ \vec{x_2} \\ \vec{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{y_1} & \vec{y_2} & \vec{y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}$$

所以，有：

$$MM^T = \begin{bmatrix} \vec{y_1} \cdot \vec{y_1} & \vec{y_1} \cdot \vec{y_2} & \vec{y_1} \cdot \vec{y_3} \\ \vec{y_2} \cdot \vec{y_1} & \vec{y_2} \cdot \vec{y_2} & \vec{y_2} \cdot \vec{y_3} \\ \vec{y_3} \cdot \vec{y_1} & \vec{y_3} \cdot \vec{y_2} & \vec{y_3} \cdot \vec{y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

不难验证，旋转矩阵

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

也是正交矩阵，从而有：旋转矩阵的逆矩阵是它的转置矩阵，即：

$$TT^{-1} = TT^T = E$$

一个矩阵是旋转矩阵，当且仅当它是正交矩阵并且它的行列式是单位 1。

正交矩阵的行列式是 ± 1；如果行列式是 -1，则它包含了一个反射而不是真旋转矩阵。

对于旋转矩阵乘幂，我们可以知道，就是一直旋转，乘了几次就是旋转了几次。当好多个旋转矩阵（可以不同）连乘时，我们就能理解了，这是把一个向量沿着多个方向旋转的叠加。

6 理解矩阵的「秩」[6]

「秩」是图像经过矩阵变换之后的空间维度

「秩」是列空间的维度

6.1 「秩」是图像经过矩阵变换之后的空间维度

比如给定原始图像为以原点为中心的正方形，通过旋转矩阵 $T_1 = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ 进行变换，变换后的图像是旋转后的正方形（二维）；因此，旋转矩阵的「秩」为 2。

再通过矩阵 $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 进行变换，变换后的图像是一根一维的直线；因此，该变换矩阵的「秩」为 1（想象一下 T_2 的基，是长度相等方向相反的两个向量，是线性相关的）。

再通过矩阵 $T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 进行变换，变换后的图像是一个零维的点；因此，该变换矩阵的「秩」为 0（想象一下 T_3 的基，是重合的两个原点）。

6.2 「秩」是列空间的维度

6.2.1 列空间

我们通过旋转矩阵来解释什么是列空间；给定旋转矩阵

$$T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

该旋转矩阵的列向量分别是 $\vec{i} = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{bmatrix}$ 和 $\vec{j} = \begin{bmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{bmatrix}$ 这两个向量不在一条直线上，我们称其为线性无关。

通过改变 a, b 的值，可以用 $a\vec{i} + b\vec{j}$ 来表示二维平面上的所有点。

所以，**列空间就是矩阵的列向量所能张成（即通过 $a\vec{i} + b\vec{j}$ 来表示）的空间**。

列空间的维度就是「秩」；旋转矩阵的列空间是二维的，所以「秩」就为 2。

6.2.2 矩阵的变换目标是列空间

给定矢量 $\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，同时，矢量 $\vec{A}$ 也可以表示为 $a\vec{i} + b\vec{j}$，其中 $\vec{i}, \vec{j}$ 为基向量。用基来表示的原因是因为矩阵变换的其实是基。

举例子来看看，比如给定旋转矩阵 T_{rotate} 作用在矢量 $\vec{A}$ 上，有：

$$\vec{A'} = T_{rotate}\vec{A}$$

其中，$\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$，$\vec{A'} = a\vec{i'} + b\vec{j'}$

所以实际上是 T_{rotate} 是改变了基，通过 T_{rotate} 把 $\vec{i} \to \vec{i'}$，$\vec{j} \to \vec{j'}$。

如果要说详细点，实际上矩阵的列就是变换后的 $\vec{i'}, \vec{j'}$，这就是矩阵的真正含义。

所以：$\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}\Rightarrow\vec{A'}=a\vec{i'}+b\vec{j'}$ 实际上是变换到了 T_{rotate} 的列空间。

6.2.3 两种定义方式的联系

用旋转矩阵对二维的正方形进行线性变换，实际上是一个二维空间到另外一个二维空间的变换：

比如对于旋转矩阵，图像从 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 张成的空间，变换到 $\vec{i'}$，$\vec{j'}$ 张成的空间。因为都是二维，所以图像维度不变。

但是对于矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ 他的列空间是一维的；因此，这个矩阵的「秩」就是 1，用它对二维的正方形进行线性变换，实际上是一个二维空间到另外一个一维空间的变换（即二维正方形会被压缩到一维直线上）；

同理，矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 他的列空间是一个点，所以它的「秩」就是 0。

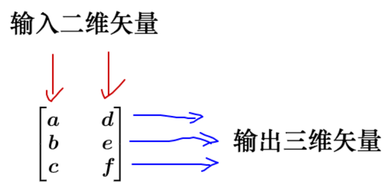
6.3 关于严格性的一个问题

上面说矩阵的「秩」是列空间的维度，这并非完全正确的。

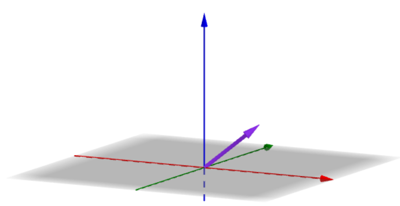
列空间的维度准确来说，是「列秩」，行空间的维度是「行秩」，但是，还好有，「秩」=「列秩」=「行秩」是恒成立的。所以直接把「列秩」称为「秩」也不算错误。

了解了秩，就很容易回答下面的问题。

我们知道矩阵是做线性变换的，比如说一个 3×2 的矩阵，



从图像上看，平面上的一个矢量被一个 3×2 的矩阵变换到了三维空间：



那么，通过 3×2 的矩阵能否把一个二维正方形变换为一个三维正方体呢？

答案是不行。三方的立方体需要存在于用三个正交的基张成的列空间中；如果把 $3X2$ 的向量变换成 $\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \end{bmatrix}$；可以看出来，它的第三个列空间是 0 维的，所以，用该矩阵进行线性变换后，只能将原向量变换到另一个二维的平面上，不能变换到一个三维的空间中。

6.4 理解行秩和列秩的关系 [7]

TBD

7 理解相似矩阵 [8]

相似矩阵的定义是：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P，使：

$$P^{-1}AP = B$$

则称 B 是 A 的相似矩阵，或说 A 和 B 相似。

7.1 通俗解释

观看同样一部电影，坐在不同的位置，各自眼中看到的电影因为位置不同而有所不同（比如清晰度、角度），所以说，“第一排看到的电影”和“最后一排看到的电影”是“相似”的。

那么背后什么是不变的呢？是线性变换。

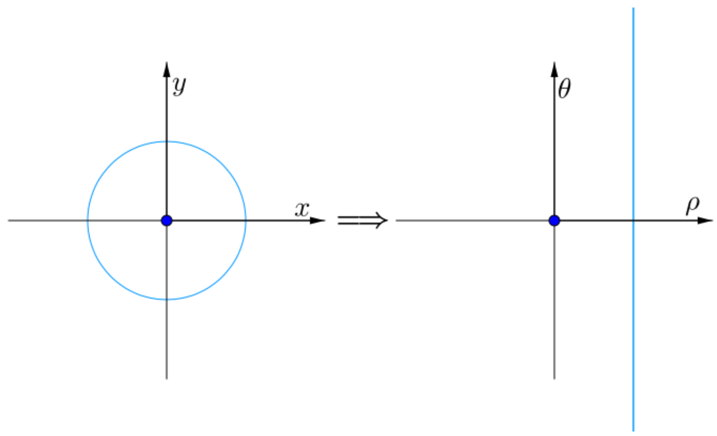
7.2 坐标转换

从数学角度上看，相似变换就是进行了坐标转换。

坐标转换是数学中的常用伎俩，目的是简化运算。比如常见的，把直角坐标系（xy 坐标系）的圆方程换元为极坐标（$\rho\theta$ 坐标系）下：

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} \rho = a \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

图像也从左边变为了右边：



换元之后的代数式和图像都变简单了。相似变换也是这样的目的。

7.3 相似矩阵

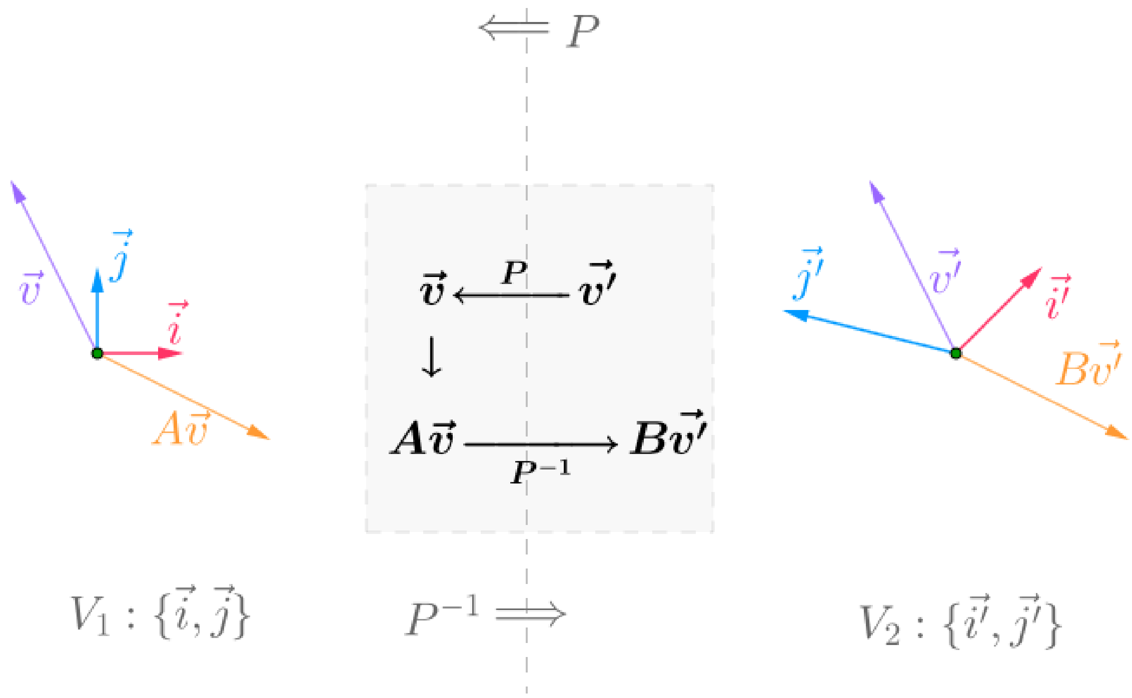
回到开头给出看电影的例子，同一部“电影”，不同基“看到”的就是不同的矩阵，也就是说：

相同线性变换，不同基下的矩阵，称为相似矩阵

那怎么得到不同基下的矩阵呢？让我们来看看变换的细节。

7.3.1 变换的细节

先上一张图，说明不同基下的矩阵的变换思路，这个图有点复杂，请参照之后的解释一起来看：



下面是对图的解释：

- 有两个基：$V_1 : \{\vec{i}, \vec{j}\}$ 和 $V_2 : \{\vec{i}', \vec{j}'\}$

- $V_1 \to V_2$，可以通过 P^{-1} 转换
- $V_2 \to V_1$，可以通过 P 转换

整个转换的核心，就是上图正中的文字，解释下：

- $\vec{v'}$ 是 V_2 下的点
- $\vec{v'}$ 通过 P 变换为 V_1 下的点，即 $P\vec{v'}$
- 在 V_1 下，通过矩阵 A 完成线性变换，即 $AP\vec{v'}$
- 通过 P^{-1} 重新变回 V_2 下的点，即 $P^{-1}AP\vec{v'}$

综上，我们可以有：

$$B\vec{v'} = P^{-1}AP\vec{v'}$$

那么 B 和 A 互为相似矩阵。

注意，这里的 P 只进行了坐标基之间的变换，**所以** $det(P) = \pm 1$；但是 A 是线性变换，**所以可以有** $det(A) \neq \pm 1$。

7.3.2 对角矩阵

那么为什么我们需要相似矩阵呢？

比如这个矩阵 A：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

可以这样分解：

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $P = P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

B 就是对角矩阵，看上去就很清爽，所以说相似变换就是坐标转换，转换到一个更方便计算的简单坐标系。

8 理解二次型 [9]

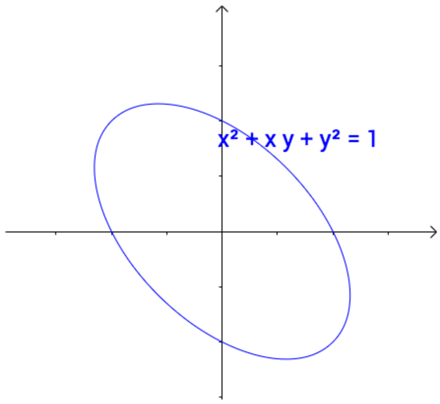
二次型就是通过矩阵研究二次函数。

通过矩阵来研究二次函数（方程），这就是线性代数中二次型的重点。

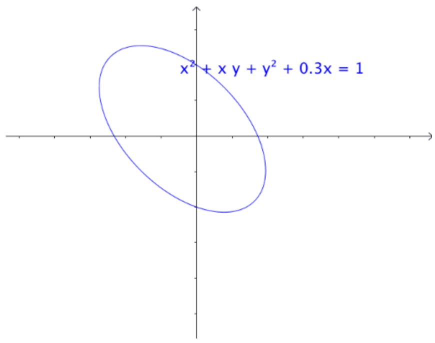
8.1 二次函数（方程）的特点

最简单的一元二次函数就是：$y = x^2$，给它增加一次项和常数项：$y = x^2 + px + q$ 不会改变它的形状（只会改变对称轴的位置和在 y 轴的截距）

再看二元二次方程：$x^2 + xy + y^2 = 1$



给它增加一次项也不会改变形状 $x^2 + xy + y^2 + 0.3x = 1$，只是看上去有些伸缩：



所以，对于二次函数或者二次方程，**二次部分是主要部分，往往研究二次这部分就够了**。

8.2 通过矩阵来研究二次方程

因为二次函数（方程）的二次部分最重要，为了方便研究，我们把含有 n 个变量的二次齐次函数：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x \end{aligned}$$

或者二次齐次方程称为二次型。

8.2.1 二次型矩阵

实际上我们可以通过矩阵来表示二次型：

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

其中，$\left[\begin{smallmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{smallmatrix}\right]$ 就是二次型。

更一般的：

$$ax^2+2bxy+cy^2=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=1$$

可以写成更线代的形式：

$$\left.\begin{array}{c}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=1\\[2em] X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\\[2em] A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow X^TAX$$

所以有下面一一对应的关系：

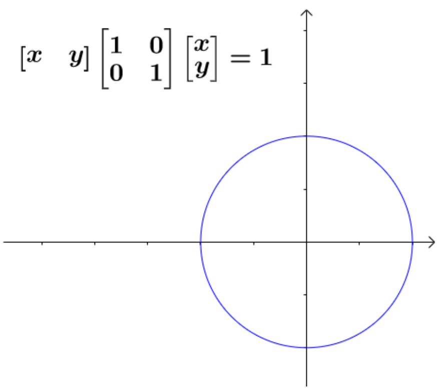
$$\textbf{对称矩阵} \iff \textbf{二次型矩阵} \iff \textbf{二次型矩阵}$$

在线代里面，就是通过一个对称矩阵，去研究某个二次型。

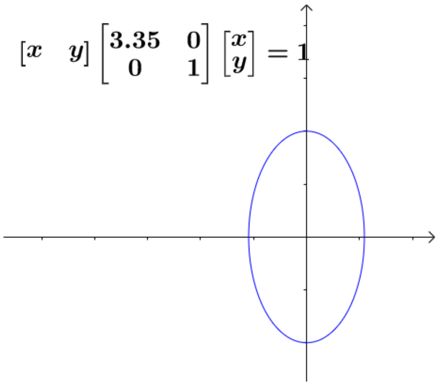
8.2.2 通过矩阵来研究有什么好处

圆锥曲线

我们来看下，这是一个圆：

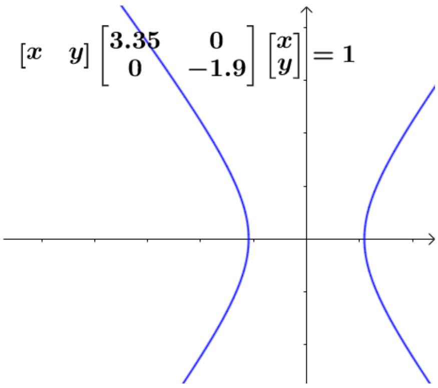


然后看改变一下二次型矩阵：



所以原来椭圆和圆之间是线性关系（通过矩阵变换就可以从圆变为椭圆）。

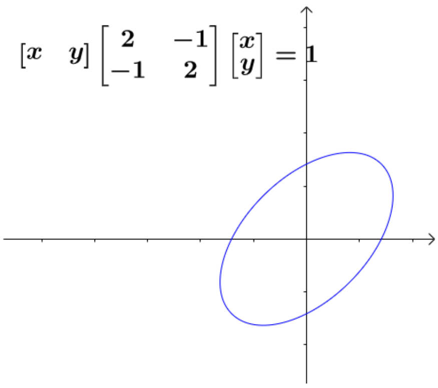
继续：



双曲线和圆之间也是线性关系（准确的说是仿射的）。其实圆、椭圆、双曲线之间关系很紧密的，统称为圆锥曲线，都是圆锥体和平面的交线。一个平面在圆锥体上运动，可以得到圆、椭圆、双曲线，这也是它们之间具有线性关系的来源（平面的运动是线性的、或者是仿射的）。

规范化

再改变下矩阵：



这个椭圆看起来有点歪，不太好处理，我们来把它扶正，这就叫做**规范化**。如果我们对矩阵有更深刻的认识，那么要把它扶正很简单。

首先，矩阵代表了运动，包含：

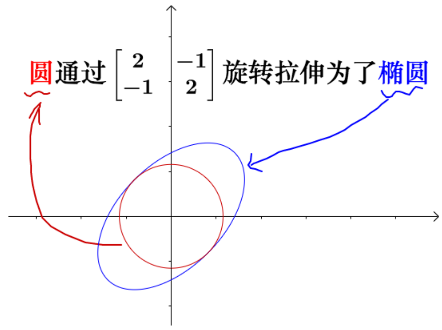
- 旋转

- 拉伸
- 投影

对于方阵，因为没有维度的改变，所以就没有投影这个运动了，只有

- 旋转
- 拉伸

具体到上面的矩阵：



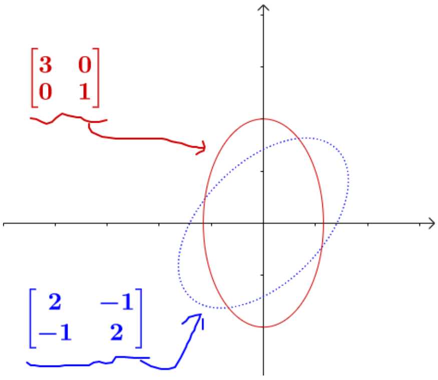
我把这个矩阵进行特征值分解：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{\text{列向量是单位特征向量并且互相正交}} \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{对角矩阵}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

对于二次型矩阵，都是对称矩阵，所以特征值分解总可以得到正交矩阵与对角矩阵。特征值分解实际上就是把运动分解了：

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{即有旋转} \\ \text{也有拉伸}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{\text{只有旋转（列向量是单位并且正交）}} \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{只有拉伸}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{\text{只有旋转（列向量是单位并且正交）}}$$

那么我们只需要保留拉伸部分，就相当于把矩阵扶正（图中把各自图形的二次型矩阵标注出来了）：



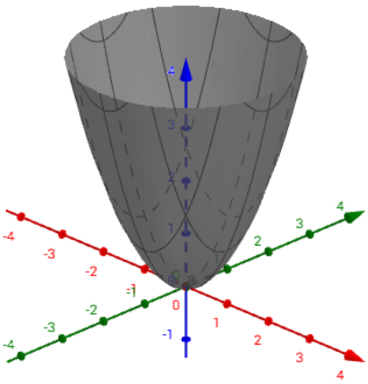
所以，用二次型矩阵进行规范化是非常轻松的事情。

正定

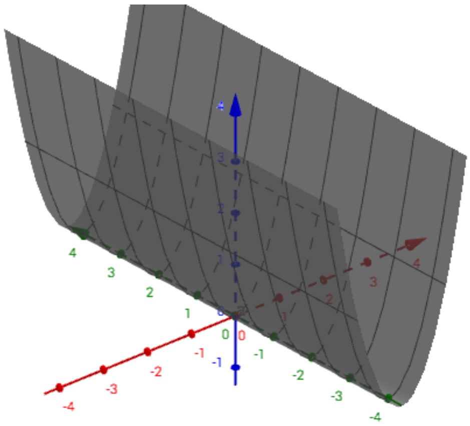
正定是对二次函数有效的一个定义，对方程无效。对于二次型函数，$f(x) = x^T Ax$：

- $f(x) > 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则 f 为正定二次型，A 为正定矩阵
- $f(x) \geq 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则 f 为半正定二次型，A 为半正定矩阵
- $f(x) < 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则 f 为负定二次型，A 为负定矩阵
- $f(x) \leq 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则 f 为半负定二次型，A 为半负定矩阵
- 以上皆不是，就叫做不定

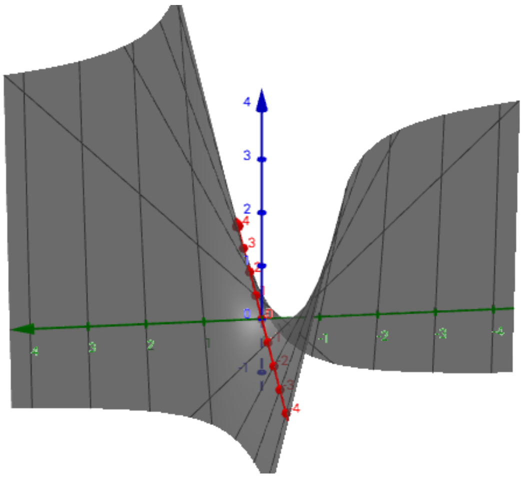
从图像上看，这是正定：



半正定：



不定：



既然二次型用矩阵来表示了，那么我们能否通过矩阵来判断是否正定呢？**如果矩阵的特征值都大于0，则为正定矩阵**。

9 理解矩阵特征值和特征向量 [10]

假设我们有一个 n 阶的矩阵 A 以及一个实数 λ，使得我们可以找到一个非零向量 $\vec{x}$，满足：

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

如果能够找到的话，我们就称 λ 是矩阵 A 的特征值，非零向量 $\vec{x}$ 是矩阵 A 的特征向量。

先给一个简短的回答，如果把矩阵看作是运动，对于运动而言，最重要的当然就是运动的速度和方向，那么（我后面会说明一下限制条件）：

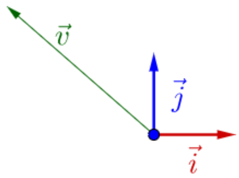
- 特征值就是运动的速度
- 特征向量就是运动的方向

既然运动最重要的两方面都被描述了，特征值、特征向量自然可以称为运动（即矩阵）的特征。

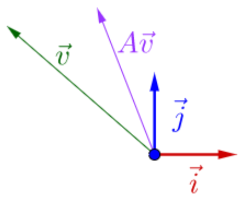
注意，由于矩阵是数学概念，非常抽象，所以上面所谓的运动、运动的速度、运动的方向都是广义的，在现实不同的应用中有不同的指代。

9.1 几何意义

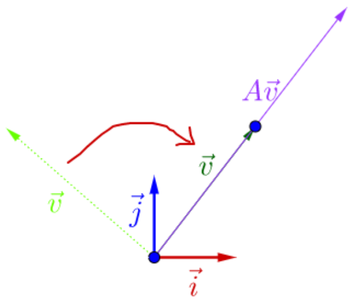
给定标准基 $\vec{i},\vec{j}$ 和向量 $\vec{v}$:



随便左乘一个矩阵 A，图像看上去没有什么特殊的:



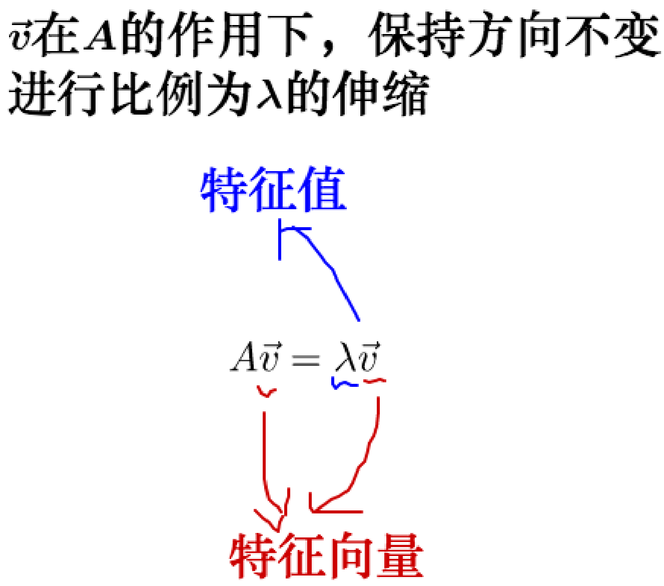
但是调整下 $\vec{v}$ 的方向，图像看上去就有点特殊了:



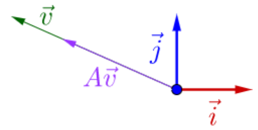
可以观察到，调整后的 $\vec{v}$ 和 $A\vec{v}$ 在同一根直线上，只是 $A\vec{v}$ 的长度相对 $\vec{v}$ 的长度变长了。

此时，我们就称 $\vec{v}$ **是** A **的特征向量，而** $A\vec{v}$ **的长度是** $\vec{v}$ **的长度的** λ **倍，**λ **就是特征值**。

从而，特征值与特征向量的定义式就是这样的：

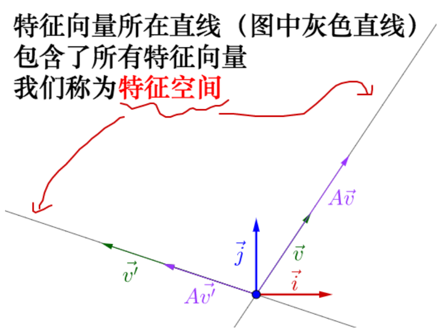


其实之前的 A 不止一个特征向量，还有另一个特征向量：



容易从 $A\vec{v}$ 相对于 $\vec{v}$ 是变长了还是缩短看出，这两个特征向量对应的特征 λ 值，一个大于 1，一个小于 1。

从特征向量和特征值的定义式还可以看出，特征向量所在直线上的向量都是特征向量：



9.2 从公式进一步理解特征值 [11]

回到特征值和特征向量的定义：

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

可以看出来该公式有如下特点：

- A 为 (作用) 方阵；
- v 是 A 的特征向量；
- λ 是 A 的特征值，为纯量，就是一个数，可以表示为对角阵。

让我们根据这个式子展开想象：

矩阵的乘法都是线性变换，式子想说明，特征向量在 A 的作用下进行线性变换，效果是特征向量的 λ 倍伸缩。注意：

- 并不是所有向 A 都能被伸缩，只有 $\vec{v}$ 中的向量（特征向量）能被其伸缩；
- 伸缩的尺度 λ 体现 A 的变换能力。

这样的话，**如果我们知道了一个方阵的特征值和特征向量，就知道了这个方阵的线性变换能力。**

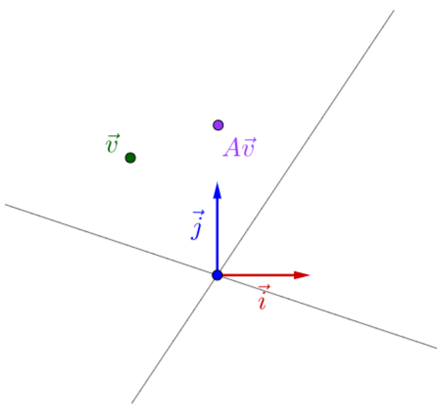
放到应用场景中就是，我们通过特征值就能掌握当前数据在对应方向上的变换能力。所以某些场景中，我们选取较大的特征值们来代表原数据的变换能力，例如：PCA 分析、数据压缩。

9.3 特征值、特征向量与运动的关系

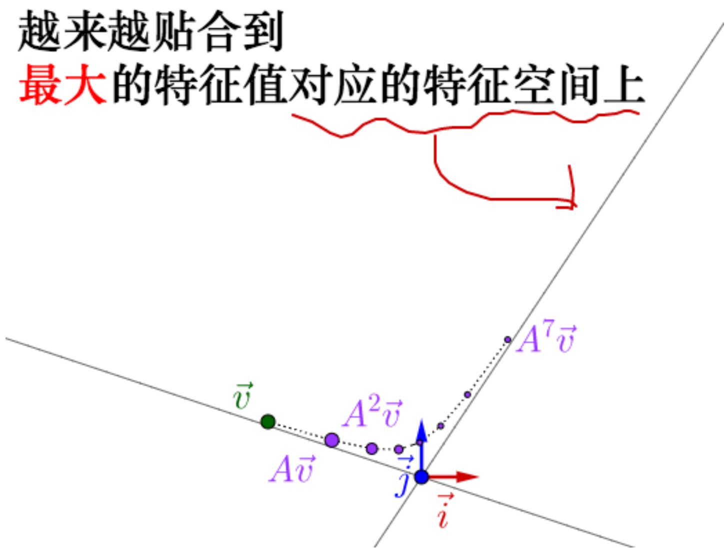
9.3.1 矩阵的混合

一般来说，矩阵我们可以看作某种运动，而二维向量可以看作平面上的一个点（或者说一个箭头）。对于点我们是可以观察的，但是运动我们是不能直接观察的。要观察矩阵所代表的运动，需要把它附加到向量上才观察的出来。

单独做一次矩阵的左乘（运动）：



似乎还看不出什么。但是如果我反复运用矩阵乘法的话：



也就是说，反复运用矩阵乘法，矩阵所代表的运动的最明显的特征，即速度最大的方向，就由最大特征值对应的特征向量展现了出来。

但是，上面的推论有一个重要的条件：特征向量正交，这样变换后才能保证变换最大的方向在基方向。如果特征向量不正交就有可能不是变化最大的方向。所以我们在实际应用中，都要去找正交基。但是特征向量很可能不是正交的，那么我们就需要奇异值分解了。

9.4 特征值分解

我们知道，对于矩阵 A 可以对角化的话，可以通过相似矩阵进行下面这样的特征值分解：

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

其中 Λ 为对角阵，P 的列向量是单位化的特征向量。

证明方法：

给定矩阵 A_{n*n} 的 n 个线性无关的特征向量，按列组成方阵，即：

$$S : [\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}]$$

那么有:

$$
\begin{aligned}
AS &= A[\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}] \\
&= [\lambda_1 \vec{x_1}, \lambda_2 \vec{x_2}, \cdots, \lambda_n \vec{x_n}] \\
&= [\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}]\Lambda \\
&= S\Lambda
\end{aligned}
$$

其中 Λ 为特征值组成的对角矩阵，因为假设组成特征向量矩阵 S 的 n 个特征向量线性无关，所以 S 可逆，从上式中就可以推导出对角化以及特征值分解的公式:

$$
S^{-1}AS = \lambda
$$

$$
A = S^{-1}\lambda S
$$

说的有点抽象，我们拿个具体的例子来讲:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

按照后文的特征值的计算方法计算后可知:

$$
\lambda_1 = 3 \Rightarrow \vec{x_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\lambda_2 = 1 \Rightarrow \vec{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
$$

所以有:

对角矩阵

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
$$

列向量是单位特征向量
并且互相正交

对于方阵而言，矩阵不会进行维度的升降，所以矩阵代表的运动实际上只有两种：旋转和拉伸，所

以最后的运动结果就是这两种的合成。

我们再回头看下刚才的特征值分解，实际上把运动给分解开了：

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}}_{\text{即有旋转也有拉伸}}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}^{\text{只有拉伸}}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

只有旋转（列向量是单位并且正交）

9.4.1 特征值分解的条件

矩阵可以被特征值分解的条件为：

1. **矩阵是方阵**。(**SVD 分解无此要求**)；
2. 方阵 $A_{n\times n}$ 可以做特征值分解的充要条件是其有 n 个线性无关的特征向量。

9.5 特征值、特征向量的应用

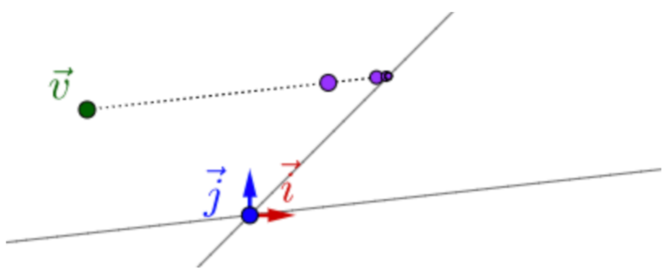
特征值越大，说明矩阵在对应的特征向量上的方差越大，功率越大，信息量越多。

应用到最优化中，意思就是对于 R 的二次型，自变量在这个方向上变化的时候，对函数值的影响最大，也就是该方向上的方向导数最大。

应用到数据挖掘中，意思就是最大特征值对应的特征向量方向上包含最多的信息量，如果某几个特征值很小，说明这几个方向信息量很小，可以用来降维，也就是删除小特征值对应方向的数据，只保留大特征值方向对应的数据，这样做以后数据量减小，但有用信息量变化不大。

9.5.1 控制系统

当 $\lambda=1$，系统最终会趋于稳定。



9.5.2 图片压缩

比如说，有下面这么一副 512×512 的图片（方阵才有特征值，所以找了张正方形的图）：

这个图片可以放到一个矩阵里面去，就是把每个像素的颜色值填入到一个 512×512 的矩阵 A 中。

根据之前描述的有：

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

其中，Λ 是对角阵，对角线上是从大到小排列的特征值。

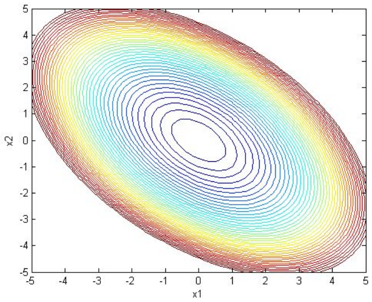
我们在 [公式] 中只保留前面 50 个的特征值（也就是最大的 50 个，其实也只占了所有特征值的百分之十），其它的都填 0，重新计算矩阵后，恢复为下面这样的图像：

效果还可以，其实一两百个特征值之和可能就占了所有特征值和的百分之九十了，其他的特征值都可以丢弃了。

9.5.3 二次型最优化问题

二次型 $y = x^T Rx$，其中 R 是已知的二阶矩阵，$y = [1, 0.5; 0.5, 1]$，x 是二维列向量，$x = [x_1; x_2]$，求 y 的最小值。

求解很简单，讲一下这个问题与特征值的关系。对 R 特征分解，特征向量是 $[-0.7071; 0.7071]$ 和 $[0.7071; 0.7071]$，对应的特征值分别是 0.5 和 1.5。然后把 y 的等高线图画一下：



从图中看，函数值变化最快的方向，也就是曲面最陡峭的方向，归一化以后是 [0.7071；0.7071]，嗯哼，这恰好是矩阵 R 的一个特征值，而且它对应的特征向量是最大的。因为这个问题是二阶的，只有两个特征向量，所以另一个特征向量方向就是曲面最平滑的方向。这一点在分析最优化算法收敛性能的时候需要用到。二阶问题比较直观，当 R 阶数升高时，也是一样的道理。

9.6 特征值的计算方法

我们对原式来进行一个很简单的变形：

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

这里的 I 表示单位矩阵，如果把它展开的话，可以得到一个 n 元的齐次线性方程组。这个我们已经很熟悉了，这个齐次线性方程组要存在非零解，那么需要系数行列式

$$|A - \lambda I| = 0$$

（原文疑似有误，这里已修正，待验证）

我们将这个行列式展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}-\lambda \end{vmatrix}$$

这是一个以 λ 为未知数的一元 n 次方程组，n 次方程组在复数集内一共有 n 个解。我们观察上式，可以发现 λ 只出现在正对角线上，显然，A 的特征值就是方程组的解。因为 n 次方程组有 n 个复数集内的解，所以矩阵 A 在复数集内有 n 个特征值。

我们举个例子，尝试一下：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}$$

那么 $f(\lambda)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=\lambda^2-(a_{11}+a22)\lambda+|A|$，我们套入求根公式可以得出使得 $f(\lambda)=0$ 的两个根 λ_1,λ_2，有：

$$\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}$$
$$\lambda_1\lambda_2=|A|$$

这个结论可以推广到所有的 n 都可以成立，也就是说对于一个 n 阶的方阵 A，都可以得到：

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$
$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

参考 [12]，对于 2×2 的矩阵 $A=[A_{11},A_{12};A_{21},A_{22}]$，有：

行列式和迹：

$$det(A)=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}$$

$$Tr(A)=Tr(A_{11})+Tr(A_{11})$$

特征值：

$$\lambda^2-\lambda\cdot Tr(A)+det(A)=0$$

$$\lambda_1=\frac{Tr(A)+\sqrt{Tr(A)^2-4det(A)}}{2}\quad \lambda_2=\frac{Tr(A)-\sqrt{Tr(A)^2-4det(A)}}{2}$$

$$\lambda_1+\lambda_2=Tr(A)\quad \lambda_1\lambda_2=det(A)$$

特征向量：

$$v_1\propto\begin{bmatrix}A_{12}\\ \lambda_1-A_{11}\end{bmatrix}\quad v_2\propto\begin{bmatrix}A_{12}\\ \lambda_2-A_{11}\end{bmatrix}$$

逆：

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\begin{bmatrix}A_{22} & -A_{12}\\ A_{21} & A_{11}\end{bmatrix}$$

9.7 旋转矩阵只有复数特征值

可以想一下，对于旋转矩阵，除了零向量。没有其他向量可以在平面上旋转而不改变方向的，所以旋转矩阵对应的矩阵没有实数特征值和实数特征向量，但是有复数特征特征值和特征向量。而且特征值和特征向量是成对出现的。将特征值写成指数形式，它的幅值代表伸长或者缩小的程度，相角代表 Ax 和 x 之间的夹角。

例如，当 $\theta = 30°$ 时，对应的旋转矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

求解 $|T - \lambda I| = 0$，有：

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} i$$

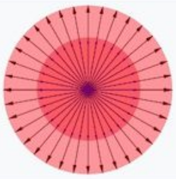
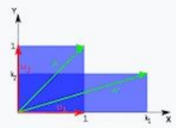
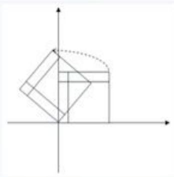
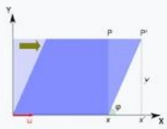
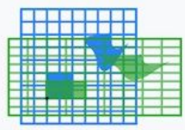
更通用的形式：

$$T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

求解 $|T - \lambda I| = 0$，有：

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm bi$$

9.8 常见变换对应的特征值和特征向量

	Scaling	Unequal scaling	Rotation	Horizontal shear	Hyperbolic rotation
Illustration					
Matrix	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ $c = \cos\theta$ $s = \sin\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & s \\ s & c \end{bmatrix}$ $c = \cosh\varphi$ $s = \sinh\varphi$
Characteristic polynomial	$(\lambda - k)^2$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)$	$\lambda^2 - 2c\lambda + 1$	$(\lambda - 1)^2$	$\lambda^2 - 2c\lambda + 1$
Eigenvalues, λ_i	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1$ $\lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = e^{\mathbf{i}\theta} = c + s\mathbf{i}$ $\lambda_2 = e^{-\mathbf{i}\theta} = c - s\mathbf{i}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = e^{\varphi}$ $\lambda_2 = e^{-\varphi}$,
Algebraic mult., $\mu_i = \mu(\lambda_i)$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$
Geometric mult., $\gamma_i = \gamma(\lambda_i)$	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$
Eigenvectors	All nonzero vectors	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +\mathbf{i} \end{bmatrix}$	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

最后一列貌似有问题，见下方证明

证明：

$$M_1=[k,0;0,k] \to (k-\lambda)^2=0 \to \lambda_1=\lambda_2=k$$

$$M_2=[k_1,0;0,k_2] \to (k_1-\lambda)(k_2-\lambda)=0 \to \lambda_1=k_1,\lambda_2=k_2$$

$$M_3=[c,-s;s,c], c=\cos\theta, s=\sin\theta \to \lambda^2-2c\lambda+1=0 \to \lambda_1=c+s\mathbf{i},\lambda_2=c-s\mathbf{i}$$

$$M_4=[1,k;0,1], \to (\lambda-1)^2=0 \to \lambda_1=\lambda_2=1$$

$$M_5=[c,s;s,c], c=\cos\theta, s=\sin\theta \to \lambda^2-2c\lambda+c^2-s^2=0 \to \lambda_1=c+s,\lambda_2=c-s$$

9.9 特征值的性质 [13]

9.9.1 特征值和迹、行列式的关系

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)$$

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=det(A)$$

9.9.2 特征值的幂

已知：

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

有：

$$A^2\mathbf{x}=A(A\mathbf{x})=A(\lambda\mathbf{x})=\lambda(A\mathbf{x})=\lambda^2\mathbf{x}$$

也就是 A^2 特征值为 λ^2 ，特征向量跟 A 相同，还可以继续推出：

$$A^k\mathbf{x}=\lambda^k\mathbf{x}$$

$$A^{-1}\mathbf{x}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$$

同时这里我们可能会想要注意 $\lambda\neq 0$ ，但实际上如果 $\lambda=0$，那就是 $A\mathbf{x}=0$ ，A 不可逆。
还有：

$$e^{At}\mathbf{x}=e^{\lambda t}\mathbf{x}$$

这个式子的推导可以用泰勒展开：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

实际上最早特征值和特征向量就是为了解决微分方程出现的。

还有：如果 $n \times n$ 矩阵有 n 个特征向量，我们当然就可以用它来做一组基，可以把空间中任何向量写成：

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x} + \cdots + c_n\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} A^k\mathbf{v} &= A^k c_1\mathbf{x_1} + \cdots + A^k c_n\mathbf{x_n} \\ &= c_1A^k\mathbf{x_1} + \cdots + c_nA^k\mathbf{x_n} \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{x_1} + \cdots + c_n\lambda_1^k\mathbf{x_n} \end{aligned}$$

9.10 矩阵的特征值和”谱“ [3]

矩阵的特征值有时会被称为谱，这和特征值的物理意义有关。如果你学过线性系统理论或者振动分析类的课程，就会知道，一阶线性微分方程组对应的矩阵的特征值，就是系统的固有频率。我们知道，凡是叫谱的东西，都是可以分解的，比如光谱。那么这个矩阵可不可以分解呢？答案是肯定的：我们可以将一个具有良好性能的矩阵分解成多个作用的叠加。

在数学中有一个谱定律（Spectral theorem），也叫谱分解或者特征值分解。它的核心内容如下：一个矩阵 A 可表示为如下线性组合

$$A = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 + \lambda_3P_3 + \cdots$$

其中，$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 称为 A 的谱族，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ 等表示特征值。

这里做了两个假设：1) 矩阵 A 是可以对角化的；2) 所有特征值都是不同的（这个不是必须的，只是为了结果比较清晰)。

对于可对角化的矩阵 A 我们可以将它表示成这样：

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

这里将 P 拆成列向量，P^{-1} 拆成行向量：$P = [p_1, p_2, \cdots, p_n], P^{-1} = [q_1, q_2, \cdots, q_n]^T$，于是可以得到

矩阵：

$$P_1 = p_1 q_1, P_2 = p_2 q_2, \cdots, P_n = p_n q_n,$$

如果特征值相同，只要矩阵 A 可对角化，上面的分解也是可以进行的。把相同特征值的块合并在一起就可以，从它的应用角度来说这样处理是合理的。

从这里我们可以看出，**一个变换（矩阵）可由它的所有特征值和谱族完全表示。特征值和谱族的乘积就代表了它对矩阵 A 的贡献率**——说的通俗一点就是能量（power）或者权重 (weight)。这样，能量多的、权重大的部分当然重要，问题的主要矛盾就凸显出来了！当然，也可以这样理解：把特征值看成坐标，谱族看成基。于是，一组基 + 一组坐标就表示了一个对象——矩阵 A。

10 理解迹 [14]

线性代数中，把方阵的对角线之和称为“迹”，即对于给定的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Tr(A) = \sum_{i}^{n} a_{ii}$$

“迹”就是线性变换藏在矩阵中痕迹。

10.1 迹的性质

已知 A, B 是两个 $n \times n$ 的矩阵，k 是一个常数，则：

- $tr(kA) = k \cdot tr(A)$
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
-

11 再论相似矩阵

11.1 相似矩阵的“迹”、行列式、特征值的关系

给定矩阵 A、B，已知 A, B 互为相似矩阵，即 $B = P^{-1}AP$，那么：

11.1.1 迹

相似矩阵的“迹”都相等。证明如下：

$$
\begin{aligned}
B = P^{-1}AP \Rightarrow \\
tr(B) &= tr(P^{-1}AP) \\
&= tr(P^{-1}(AP)) \\
&= tr((AP)P^{-1}) \\
&= tr(A)
\end{aligned}
$$

11.1.2 行列式

因为 A, B 代表同一个线性变换，而根据行列式的意义，行列式代表的是线性变换的伸缩比例。既然是比例，那么也和坐标无关，即：

$$det(A) = det(B) = 1$$

所以行列式是一个相似不变量。

11.1.3 特征值

根据特征值分解的定义，特征值矩阵 Λ：

$$\Lambda = Q^{-1}AQ$$

这里用 Q 是为了和之前的 P 进行区别。可见，Λ 和 A，B 也是相似矩阵。所以：
对 A, B 求特征值矩阵都得到的是同一个 Λ（特征向量有所不同，因为在不同的基下）

11.1.4 结论

更一般的，可以得到这两个相似不变量和特征值的关系分别为：

- 迹 $= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$
- 行列式 $= \lambda_1 \cdot \lambda_1 \cdots$

12 理解奇异值 [15]

奇异值与特征值相对应。特征值固然方便使用，但其对原矩阵为**方阵**的限制为实际情况下所难得的。自然，我们就需要一种更一般化的特征提取方式，这里的特征我们叫奇异值 (singular value)，而这种

方式正是奇异值分解 (singular-value decomposition (SVD))。所以，该分解和结果的意义与特征值类似，但拓展了适用范围 [11]。

12.1 定义

$$M = U\Sigma V^* \Rightarrow \begin{cases} M : m \times n\text{矩阵} \\ N : m \times m\text{酉矩阵，}U\text{的列是}M\text{的正交}\textbf{输出}\text{基向量} \\ \Sigma : m \times n\text{的对角阵，对角元素非负 (奇异值)；其余元素均为 0} \\ V^* : n \times n\text{酉矩阵，是}V\text{的转置，}V\text{的列是}M\text{的正交}\textbf{输入}\text{基向量} \end{cases}$$

注: N 和 V 都是酉矩阵 (unitary matrix)，即满足:

$$U^TU = I, V^TV = I$$

需要注意的是，**奇异值分解结果并不唯一**。

12.1.1 与特征值分解的关系 [16]

首先，矩阵可以认为是一种线性变换，而且这种线性变换的作用效果与基的选择有关。以 $Ax = b$ 为例，x 是 m 维向量，b 是 n 维向量，m, n 可以相等也可以不相等，表示矩阵可以将一个向量线性变换到另一个向量，这样一个线性变换的作用可以包含**旋转**、**缩放和投影**三种类型的效应。

奇异值分解正是**对线性变换这三种效应的一个析构**。给定奇异值分解 $A = \mu\Sigma\sigma^T$，μ, σ 是**两组正交单位向量**，Σ 是对角阵，表示奇异值；它表示我们找到了 μ, σ 这样两组基，A 矩阵的作用是将一个向量从 σ 这组正交基向量的空间**旋转**到 μ 这组正交基向量空间，并对每个方向进行了一定的**缩放**，缩放因子就是各个**奇异值**。如果 σ 维度比 μ 大，则表示还进行了投影。可以说奇异值分解将一个矩阵原本混合在一起的三种作用效果，分解出来了。

而特征值分解其实是**对旋转和缩放两种效应的归并**（有投影效应的矩阵不是方阵，没有特征值）。特征值，特征向量由 $Ax = \lambda x$ 得到，它表示如果一个向量 v 处于 A 的特征向量方向，那么 Av 对 v 的线性变换作用只是一个**缩放**。也就是说，求特征向量和特征值的过程，我们找到了这样一组基，在这组基下，矩阵的作用效果仅仅是存粹的**缩放**。对于实对称矩阵，特征向量正交，我们可以将特征向量式子写成 $A = x\lambda x^T$，这样就和奇异值分解类似了，就是 A 矩阵将一个向量从 x 这组基的空间旋转到 x 这组基的空间，并在每个方向进行了缩放，由于前后都是 x，就是没有旋转或者理解为旋转了 0 度。

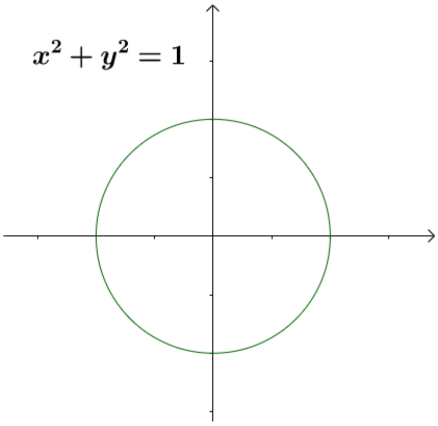
总结一下，特征值分解和奇异值分解都是**给一个矩阵（线性变换）找一组特殊的基**：

- 特征值分解找到了特征向量这组基，在这组基下该线性变换只有缩放效果。
- 奇异值分解则是找到另一组基，这组基下线性变换的旋转、缩放、投影三种功能独立地展示出来了

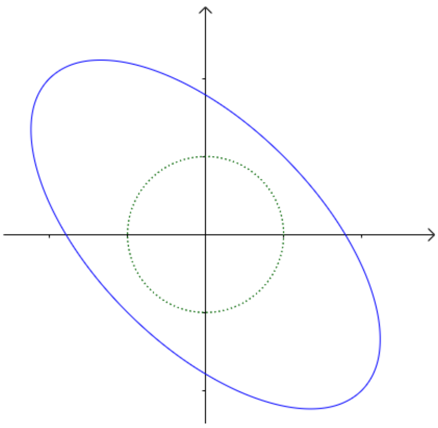
特征值分解其实是一种找特殊角度，让旋转效果不显露出来，所以并不是所有矩阵都能找到这样巧妙的角度。仅有缩放效果，表示、计算的时候都更方便，但是这样的基很多时候不再正交了，又限制了一些应用。

12.2 通俗理解奇异值分解

给定一个变换矩阵 $A = [1, -2; 1, 2]$，通过一个单位圆来观察：



把这个单位圆的每一点都通过 A 进行变换，得到一个椭圆（我把单位圆保留下来了，作为一个比较）：



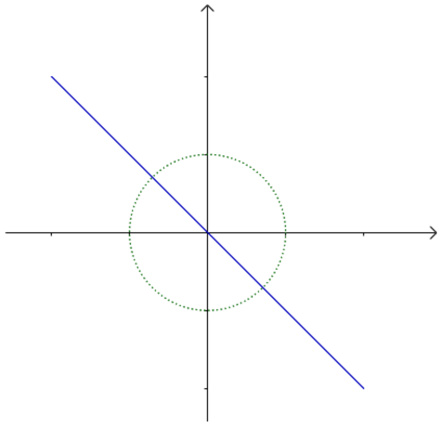
对 A 进行奇异值分解：

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.828 & 0 \\ 0 & 1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

实际上，将 A 分为了两个“分力”：

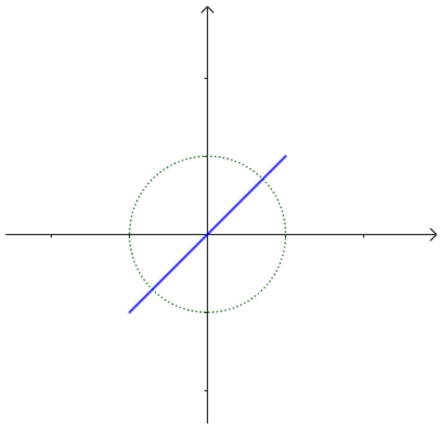
$$
A = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.828 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

我们来看看第一个“分力”，$\begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.828 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，作用在单位圆这个“橡皮筋”上的效果：



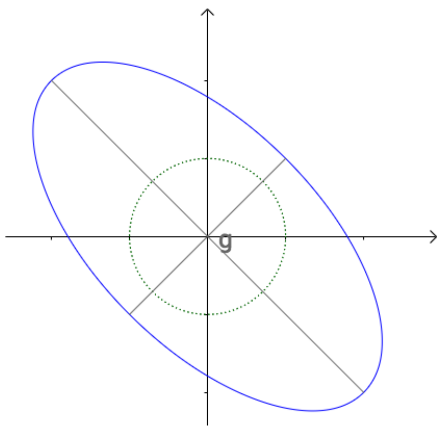
可怜的“橡皮筋”被拉成了一根线段。

我们来看看第二个“分力”，$\begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，作用在单位圆这个“橡皮筋”上的效果：



可怜的“橡皮筋”被拉成了另外一根线段。

这两个“分力”一起作用的时候，可以想象（画面自行脑补），单位圆这个“橡皮筋”被拉成了椭圆：

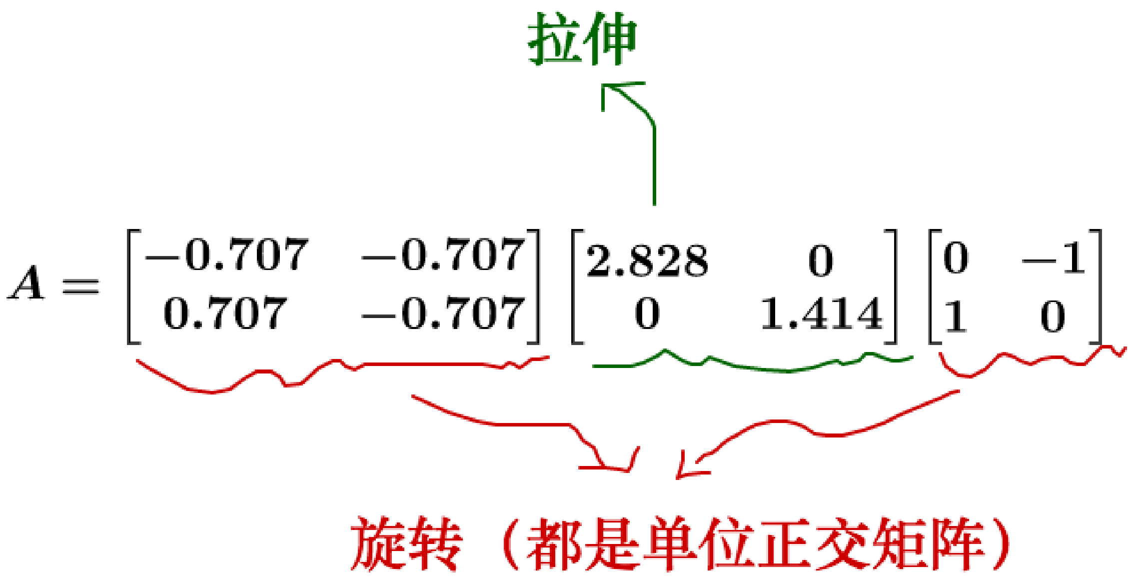


12.2.1 奇异值的物理解释

同上文，奇异值分解实际上把矩阵的变换分为了三部分：

- 旋转
- 拉伸
- 投影

举例子（方阵没有投影，不过不影响这里思考）：



单位圆先被旋转（作用 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$），是没有形变的；

再进行拉伸（作用 $\begin{bmatrix} 2.828 & 0 \\ 0 & 1.414 \end{bmatrix}$），这里决定了单位圆的形状，奇异值分别是椭圆的长轴和短轴；

最后，被旋转到最终的位置（作用 $\begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix}$），这一过程也没有发生形变；

12.2.2 奇异值分解 (SVD) 的方法

给定 $m \times n$ 的矩阵 A，有 $A^T A$ 是 $n \times n$ 的方阵，我们用这个方阵求特征值可以得到：

$$(A^T A) v_i = \lambda_i v_i$$

这里得到的 v_i 就是右奇异向量；此外，可以得到：

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

这里的 σ_i 就是奇异值，u_i 就是左奇异向量；奇异值 σ 和特征值类似，在矩阵 Σ 中也是按照从大小小的顺序排列，而且 σ 的值减小的特别快，在很多情况下，前 10% 甚至 1% 的奇异值之和就占了全部奇异值之和的 90% 以上。也就是说可以用前 r 个大的奇异值来近似描述矩阵，即：

$$A_{m\times n} \approx U_{m\times r} \Sigma_{r\times r} V_{r\times n}^T$$

13 理解线性微分方程 [17]

线性微分方程为什么有"线性"这两个字？为什么线性微分方程的通解包含 e^x？

13.0.1 一个直观的理解 [18]

方程本质是一种约束，微分方程就是在世界上各种各样的函数中，约束出一类函数。对于一阶微分方程

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y$$

我们发现如果我将变量 y 用括号 [] 包围起来，微分运算的结构和线性代数中特征值特征向量的结构竟是如此相似：

$$\frac{d}{dy}[y] = \lambda[y]$$

$$T\{x\} = \lambda\{x\}$$

这就是一个求解特征向量的问题，只不过"特征向量"变成函数。并且我们知道只有 $e^{\lambda t}$ 满足这个式子。为什么选择指数函数而不选择其他函数，因为指数函数是特征函数。为什么指数函数是特征？我们从线性代数的特征向量的角度来解释。

$$T[e^{\lambda t}] = \lambda[e^{\lambda t}]$$

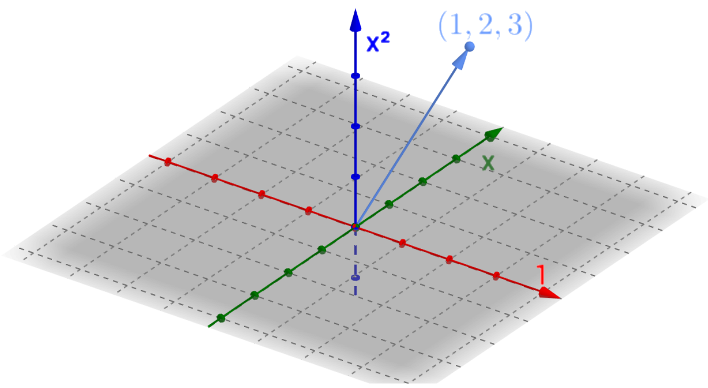
这已经很明显了，$e^{\lambda t}$ 就是"特征向量"。于是，很自然的将线性代数的理论应用到线性微分方程中。那么指数函数就是微分方程（实际物理系统）的特征向量。用特征向量作为基表示的矩阵最为简洁。

13.1 微分算子

对于多项式函数：$f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ 我们以 $\vec{i} = 1, \vec{j} = x, \vec{k} = x^2$ 为基（关于多项式的基，可以参看《线性代数应该这样学》这样的高等代数教材），可以把它转为向量：

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 \Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

画出来图来就是（三个坐标轴分别表示 $1, x, x^2$ 这三个基，当然这里有点不严格，准确来说，三个基并不是两两正交的）：



我们定义 D 为微分算子：$D = \frac{d}{dx}$ 那么有：$D(f(x)) = \frac{df(x)}{dx} = 2 + 6x$ 还可以把 D 写成一个矩阵（对于更高次的多项式，D 的矩阵是类似的）(?? 如何得到??)：$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

然后通过矩阵来完成求导操作：

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow D(f(x)) = 2 + 6x$$

从图像上看，就是把通过 D 矩阵把 $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 投影到 $1 - x$ 平面：

这样看来，**微分算子 D 也是一个线性变换**。

13.2 代数定义

在数学中，只要符合下面两个性质的就是线性变换（T 代表变换）：

- 可加性：$T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$
- 齐次性：$T(a\vec{x}) = aT(\vec{x})$

比如，我们有两个多项式函数：$f(x) = 1 + 2x + 3x^2, g(x) = 2 + 3x + 4x^2$，那么容易验证，$D$ 是一个线性变换：

- 可加性：$D(f(x) + g(x)) = D(f(x)) + D(g(x)) = 5 + 14x$
- 齐次性：$D(af(x)) = aD(f(x)) = a(2 + 6x)$

进一步的，D 的多项式组合：$\mathcal{L} = a_0 + a_1D + a_2D^2 + \cdots + a_nD^n, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ 也是线性变换，这一点可以自行去验证。

13.3 线性微分方程

既然 D 的多项式组合 $\mathcal{L}$ 是线性变换，那么线性微分方程为什么是“线性”的，答案呼之欲出。

13.3.1 线性微分方程的定义

定义下式为常系数（因为 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常数）线性微分方程：$\mathcal{L}(y) = f(x)$

如果，$f(x) = 0$，则为常系数齐次线性微分方程：$\mathcal{L}(y) = 0$

如果，$f(x) \neq 0$，则为常系数非齐次线性微分方程：$\mathcal{L}(y) = f(x), f(x) \neq 0$

如果 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 x 的函数，那么就是变系数线性微分方程，暂不讨论这种情况。

解释一下：$\mathcal{L}(y) = 0$ 可以类比于齐次线性方程：$A\vec{x} = 0$，所以我们称 $\mathcal{L}(y) = 0$ 为齐次线性微分方程。

不光是可以这么类比，实际上解法都是一样的。我们先来看看齐次线性方程是怎么解的。

13.3.2 齐次线性方程的解法

对于齐次线性方程：$A\vec{x} = 0$ 我们怎么解?

我们知道，A 的特征值和特征向量满足下面这个等式：$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \vec{x} \neq 0$

那么特征值 $\lambda = 0$ 对应的特征向量 $\vec{x}$ 必定是 A 的解。

13.3.3 $\mathcal{L}$ 的特征值、特征向量

那么 $\mathcal{L}$ 的特征值和特征向量是多少?

根据特征值和特征向量的定义，对于 $\mathcal{L} = D$ 有：$\mathcal{L}(e^{nx}) = D(e^{nx}) = ne^{nx}$ 所以，其特征值为 $\lambda = n$，特征向量为 e^{nx}。

所以，e^{nx} 出现了，为什么线性微分方程的通解里面有 e^{nx}，是因为 e^{nx} 是 D 的特征向量。

同理，对于 $\mathcal{L} = D^2 - 2D - 8$ 有：$(D^2 - 2D - 8)(e^{nx}) = (n^2 - 2n - 8)e^{nx}$ 所以，其特征值为 $\lambda = n^2 - 2n - 8$，特征向量为 e^{nx}。

13.3.4 解常系数齐次线性微分方程

万事具备，我们开始解方程吧。

对于：$D(y) = 0$ 实在太简单了，$y = C, C \in \mathbb{R}$。

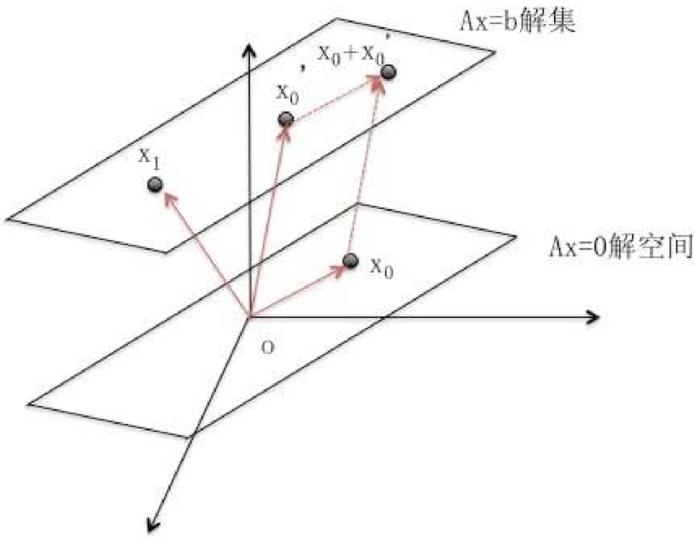
对于：$y'' - 2y' - 8y = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(y) = (D^2 - 2D - 8)(y) = 0$ 对于此 $\mathcal{L}$，求它的 0 特征值：$\lambda = n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow n_1 = 4, n_2 = -2$

对应的特征向量为，e^{4x}, e^{-2x}，这两个特征向量线性无关，因此得到解为：$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$

如果得到的特征值相同，那么就需要另外讨论一下。

13.3.5 解常系数非齐次线性微分方程

对于非齐次线性微分方程：$(D^2 - 2D - 8)(y) = e^{2x}$ 可以类比线性方程的解的结构：



先求出齐次方程的解，然后根据初始条件得到一个特解 y^*，得到：$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} + y^*$

还有一种做法，因为：$(\frac{1}{2}D-1)e^{2x} = 0$ 所以可以得到：$(\frac{1}{2}D-1)\underbrace{(D^2-2D-8)(y)}_{e^{2x}} = 0$ 得到一个新的齐次线性微分方程，然后根据刚才介绍的方法进行求解。不过这样就需要求解三次方程，或许比特解法复杂一些，这里只是展示一下理解了线性微分方程的含义之后，我们可以更灵活的处理。

13.4 总结

- 因为 $\mathcal{L}$ 是线性的，所以线性微分方程是线性的
- 因为 e^{nx} 是 $\mathcal{L}$ 的特征向量，所以通解里面有 e^{nx}

14 理解协方差矩阵 [19]

14.1 方差和协方差的定义

在统计学中，**方差**是用来度量**单个随机变量的离散程度**，而**协方差**则一般用来刻画**两个随机变量的相似程度**，其中，**方差**的计算公式为：

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

其中，n 表示样本量，符号 $\bar{x}$ 表示观测样本的均值。

在此基础上，协方差的计算公式被定义为

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

在公式中，符号 $\bar{x},\bar{y}$ 分别表示两个随机变量所对应的观测样本均值，据此，我们发现：方差 σ_x^2 可视作随机变量 x 关于其自身的协方差 $\sigma(x,x)$。

也可以写为：

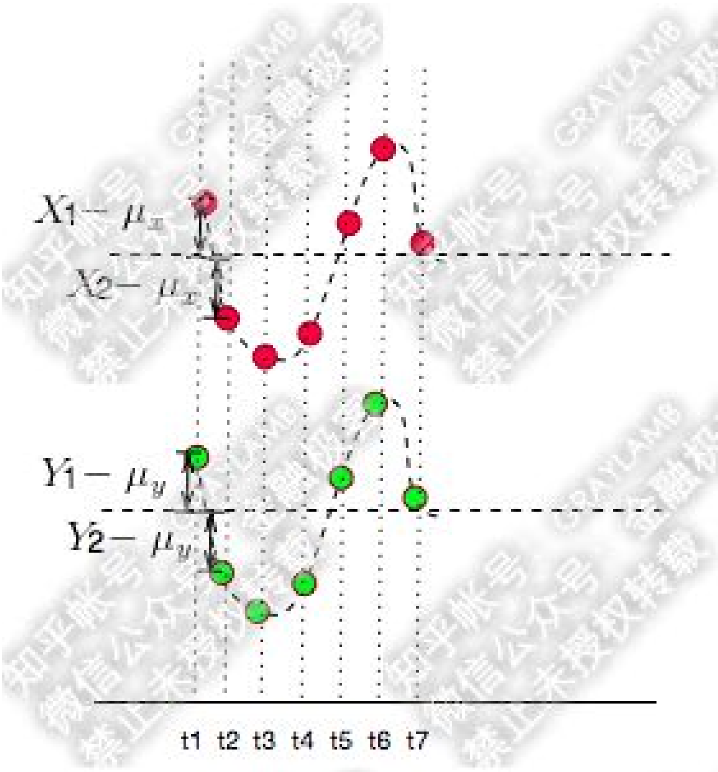
$$Cov(\mathbf{X},\mathbf{Y})=E[(\mathbf{X}-\mu_{\mathbf{x}})(\mathbf{Y}-\mu_{\mathbf{y}})]$$

14.2 直观理解协方差的物理意义

两个变量在变化过程中是同方向变化？还是反方向变化？同向或反向程度如何？两个变量间变换趋势的这种联系，就可以用两个变量的协方差来描述。

- 两个变量同向变化（同时变大或变小），协方差是正的；
- 两个变量反向变化（一个变大，另一个缩小），协方差是负的；

从公式出发来理解一下，给定两个随机变量：



这时，我们发现每一时刻 $\mathbf{X}-\mu_x$ 的值与 $\mathbf{Y}-\mu_y$ 的值的“正负号”一定相同。所以，像上图那样，当他们同向变化时，$\mathbf{X}-\mu_x$ 与 $\mathbf{Y}-\mu_y$ 的乘积为正；同理，如果是反向运动，那么求平均的时候就是负数了；如果是随机运动，则正负可能会抵消掉。

总结一下，如果协方差为正，说明 X，Y 同向变化，协方差越大说明同向程度越高；如果协方差为负，说明 X，Y 反向运动，协方差越小说明反向程度越高。

14.3 相关系数

一般情况下，相关系数的公式为：

$$\rho = \frac{Conv(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sigma_{\mathbf{X}} \sigma_{\mathbf{Y}}}$$

就是用 X、Y 的协方差除以 X 的标准差和 Y 的标准差。

相关系数也可以看成协方差：一种剔除了两个变量量纲影响、标准化后的特殊协方差。

既然是一种特殊的协方差，那它：

1. 也可以反映两个变量变化时是同向还是反向，如果同向变化就为正，反向变化就为负。
2. 由于它是标准化后的协方差，因此更重要的特性来了：它消除了两个变量变化幅度的影响，而只是单纯反应两个变量每单位变化时的相似程度。

14.4 从方差/协方差到协方差矩阵

根据方差的定义，给定 d 个随机变量 $x_k, k = 1, 2, \cdots, d$ ，则这些**随机变量的方差**为：

$$\sigma(x_k, x_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x_k})^2, \quad k = 1, 2, \cdots, d$$

其中，为方便书写，$x_k i$ 表示随机变量 x_k 中的第 i 个观测样本，n 表示样本量，每个随机变量所对应的观测样本数量均为 n。

对于这些随机变量，我们还可以根据协方差的定义，求出**两两之间的协方差**，即

$$\sigma(x_m, x_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{mi} - \bar{x}_m)(x_{ki} - \bar{x}_k)$$

因此，**协方差矩阵**为：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(x_1, x_1) & \cdots & \sigma(x_1, x_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma(x_d, x_1) & \cdots & \sigma(x_d, x_d) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

其中，对角线上的元素为各个随机变量的方差，非对角线上的元素为两两随机变量之间的协方差，根据协方差的定义，我们可以认定：**矩阵 Σ 为对称矩阵 (symmetric matrix)**，其大小为 $d \times d$ 。

14.5 多元正态分布与线性变换

单变量正态分布的公式为：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中，μ 是期望，σ^2 是方差。

假设一个向量 x 服从均值向量为 μ、协方差矩阵为 Σ 的多元正态分布 (multi-variate Gaussian distribution)，则有：

$$p(\mathbf{x}) = |2\pi\Sigma|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

（看得出来，多变量的协方差矩阵 Σ 和单变量的方差 σ^2 是对应的）

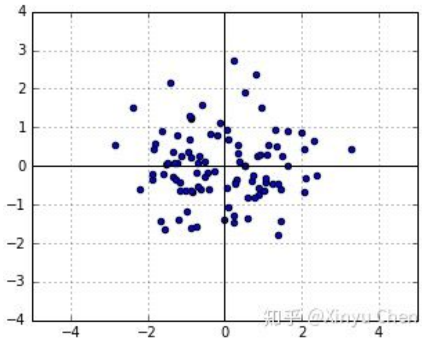
令该分布的均值向量为 $\mu = 0$ ，由于指数项外面的系数 $|2\pi\Sigma|^{\frac{1}{2}}$ 通常作为常数，故可将多元正态分布简化为：

$$p(\mathbf{x}) \propto exp\big(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\Sigma^{-1}\mathbf{x}\big)$$

假定 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$，即 $\mathbf{x}$ 是包含两个随机变量的向量，则协方差矩阵可写成如下形式：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(x_1, x_1) & \sigma(x_1, x_2) \\ \sigma(x_2, x_1) & \sigma(x_2, x_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

用单位矩阵 (identity matrix)I 作为协方差矩阵，随机变量 x_1 和 x_2 的方差均为 1，则生成如干个随机数如图所示。

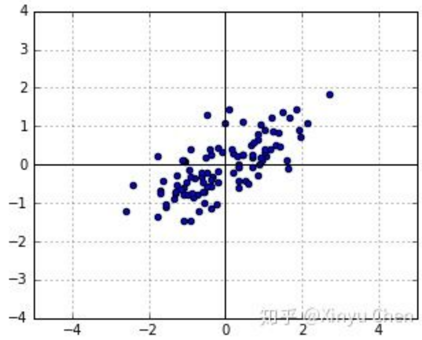


在生成的若干个随机数中，每个点的似然为

$$L(\mathbf{x}) \propto exp\big(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\big)$$

（回忆：似然性是用于在已知某些观测所得到的结果时，对有关事物的性质的参数进行估计。似然函数是给定联合样本值 x 下关于（未知）参数 θ 的函数，即：$L(\theta|x) = f(x|\theta)$。）

对图中的所有点考虑一个线性变换 (linear transformation)：$\mathbf{t} = A\mathbf{x}$ ，我们能够得到：



经过线性变换的二元正态分布，先将原图的纵坐标压缩 0.5 倍，再将所有点逆时针旋转 30° 得到

在线性变换中，矩阵 A 被称为变换矩阵 (transformation matrix)，为了将原图中的点经过线性变换得到我们想要的图，其实我们需要构造两个矩阵：

- 尺度矩阵 (scaling matrix)：$S = \begin{bmatrix} S_{x_1} & 0 \\ 0 & S_{x_2} \end{bmatrix}$
- 旋转矩阵 (rotation matrix) $R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

变换矩阵、尺度矩阵和旋转矩阵三者的关系为：

$$A = RS$$

在这个例子中，尺度矩阵为 $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$，旋转矩阵为 $R = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$，故变换矩阵为

$$A = RS = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

另外，需要考虑的是，经过了线性变换，$\mathbf{t}$ 的分布是什么样子呢？

将 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{t}$ 代入前面的似然 $L(\mathbf{x})$，有 (??? 如何推导出来 t???)：

$$L(\mathbf{t}) \propto exp(-\frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{t})^T(A^{-1}\mathbf{t})) = exp(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T(AA^T)^{-1}\mathbf{t})$$

由此可以得到，多元正态分布的协方差矩阵为

$$\Sigma = AA^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & \frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{3\sqrt{3}}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

按照协方差的公式对比推导一遍结果：

根据题目中的条件，已知 $\bar{x_1}, \bar{x_2} = 0, \sigma(x_1, x_1) = 1, \sigma(x_1, x_2) = 0, \sigma(x_2, x_1) = 0, \sigma(x_2, x_2) = 1$;

因为 $\mathbf{t}=A\mathbf{x}$，设 $A=[a,b;c,d]$ 那么有：$t_1=ax_1+bx_2, t_2=cx_1+dx_2$，则：

$$\sigma(t_1,t_1)=\frac{1}{n-1}\sum_i(t_{1i}-\bar{t_1})(t_{1i}-\bar{t_1})=a^2\sigma(x_1,x_1)+ab\sigma(x_1,x_2)+ab\sigma(x_2,x_1)+b^2\sigma(x_2,x_2)=a^2+b^2$$
$$\sigma(t_1,t_2)=\frac{1}{n-1}\sum_i(t_{1i}-\bar{t_1})(t_{2i}-\bar{t_2})=ac\sigma(x_1,x_1)+ad\sigma(x_1,x_2)+bc\sigma(x_2,x_1)+bd\sigma(x_2,x_2)=ac+bd$$
$$\sigma(t_2,t_1)=\frac{1}{n-1}\sum_i(t_{2i}-\bar{t_2})(t_{1i}-\bar{t_1})=ac\sigma(x_1,x_1)+ad\sigma(x_1,x_2)+bc\sigma(x_2,x_1)+bd\sigma(x_2,x_2)=ac+bd$$
$$\sigma(t_2,t_2)=\frac{1}{n-1}\sum_i(t_{2i}-\bar{t_2})(t_{2i}-\bar{t_2})=c^2\sigma(x_2,x_2)+cd\sigma(x_1,x_2)+cd\sigma(x_2,x_1)+d^2\sigma(x_2,x_2)=c^2+d^2$$

即 $\Sigma=[a^2+b^2,ac+bd;ac+bd,c^2+d^2]$；

同理，按照 $\Sigma=AA^T$ 也可以得到同样的结果。

14.6 协方差矩阵的特征值分解

回顾关于特征值分解的内容：对于对称矩阵 Σ，可能存在一个特征值分解 (eigenvalue decomposition, EVD)：

$$\Sigma=U\Lambda U^T$$

其中，U 的每一列都是相互正交的特征向量，且是单位向量，满足 $UU^T=I$，Λ 对角线上的元素是从大到小排列的特征值，非对角线上的元素均为 0。

当然，这条公式在这里也可以很容易地写成如下形式：

$$\Sigma=(U\Lambda^{\frac{1}{2}})(U\Lambda^{\frac{1}{2}})^T=AA^T$$

其中，$A=U\Lambda^{\frac{1}{2}}$，因此，通俗地说，**任意一个协方差矩阵都可以视为线性变换的结果。**

在上面的例子中，**特征向量构成的矩阵为**：

$$U=R=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

特征值构成的矩阵为：

$$\Lambda=SS^T=\begin{bmatrix}s_y^2 & 0\\ 0 & s_z^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

到这里，我们发现：**多元正态分布的概率密度是由协方差矩阵的特征向量控制旋转 (rotation)，特征值控制尺度 (scale)，除了协方差矩阵，均值向量会控制概率密度的位置**，在原图中，均值向量为 0，

因此，概率密度的中心位于坐标原点。

References

[1] “为什么学习线性代数？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/2112/

[2] “如何理解矩阵乘法？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/555/

[3] 黎文科, 神奇的矩阵.

[4] “如何通俗的解释仿射变换？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/244/

[5] “行列式的本质是什么？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/247/

[6] “如何理解矩阵的「秩」.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/254/

[7] “为什么矩阵行秩等于列秩？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/290/

[8] “如何理解相似矩阵？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/491/

[9] “如何理解二次型？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/271/

[10] “如何理解矩阵特征值和特征向量？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/228/

[11] “备查手册-特征值与奇异值.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/67577324

[12] M. S. P. Kaare Brandt Petersen, *The Matrix Cookbook*. http://matrixcookbook.com.

[13] “特征值和特征向量.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/95836870

[14] “如何理解矩阵的迹？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/483/

[15] “如何通俗地理解奇异值？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/306/

[16] “矩阵的奇异值与特征值有什么相似之处与区别之处.” [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/19666954/answer/54788626

[17] “如何理解线性微分方程？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/513/

[18] 黎文科, 神奇的矩阵-第二季.

[19] “如何直观地理解「协方差矩阵」？.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/37609917