抽象代数的脉络 [?]

leolinuxer

July 7, 2020

Contents

1 抽象代数

1.1 相关概念

1.1.1 算术 (arithmetic)

算术研究数的性质及其运算。算术运算不仅仅指加减乘除，还可以是百分比、平方根、取幂和对数；算法的对象包括自然数、整数、有理数和实数 (兴许还包括复数)；进制不仅仅是十进制，还可以是二进制、十六进制、六十进制。个人认为，算术的最大特点是关注具体数字。

1.1.2 初等代数 (elementary algebra) 和高等代数

用符号 (成了变量) 代替具体的数字，就可以得到更一般化 (generalization) 的等式，举例如下：

$$
\begin{aligned}
(2+3)^2 &= 2^2 + 2\times 2\times 3 + 3^2 \\
(3+5)^2 &= 3^2 + 2\times 3\times 5 + 5^2 \\
&\Rightarrow \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2\times a\times b + b^2
\end{aligned}
$$

初等代数 (elementary algebra) 是古老算术的推广与发展。在古代，算术积累了大量数量问题的解法，为寻求更系统、更普遍的求解各种数量关系方法，就产生了以解方程为中心的初等代数。从实际问题的数量关系 (即代数式：整式、分式、根式)、等量关系 (或者不等式) 列出列出方程或者方程组。方程 (组) 包括一元/二元一次方程 (linear equations with one/two variable)、一元二次方程 (quadratic equations)、指数和对数方程 (exponential and logarithmic equations)、无理方程 (radical equations)、线性方程组 (system of linear equations)。

高等代数相对于初等代数而言，本质上是一个东西，只是更加系统 (深度 + 广度)。

1.1.3 抽象代数 (abstract algebra)

初等代数再进一步推广 (generalization)，那就是抽象代数了。抽象代数 (abstract algebra)、近世代数、现代代数 (modern algebra) 指的都是同一个意思 (甚至直接称为代数学)。抽象代数主要研究对象是代数结构，包括群、环、域、向量空间。

1.1.4 线性代数

线性代数是抽象代数特殊的一类，其代数结构为：向量空间 (vector spaces，也叫线性空间) + 线性变换 (linear mappings)。很容易将线性代数和矩阵理论等同起来，但其实是不一样的，讨论线性变换是基于选定一组基的前提下。摘抄 mathoverflow 上的一个回答 (原文在 (`http://mathoverflow.net/questions/11669/what-is-the-difference-between-matrix-theory-and-linear-algebra`))：

> 线性代数和矩阵理论的区别：
>
> 矩阵允许讨论第 i 行第 j 列的元素；
>
> 线性代数讨论的是线性变换，线性变换不是一堆数构成的矩阵，只是用矩阵来表示线性变换比较方便而已；线性代数需要给定一组基，所以讨论对应矩阵的第 i 行第 j 列的元素是不被允许的；只允许讨论不基于基的概念，比如秩、迹、行列式、特征值集合等。
>
> 来源于：http://mathoverflow.net/questions/11669/what-is-the-difference-between-matrix-theory-and-linear-algebra

1.2 代数结构 (algebraic structure)

抽象代数研究对象是代数结构，转载如下：

> 代数主要研究的是运算规则。一门代数，其实都是从某种具体的运算体系中抽象出一些基本规则，建立一个公理体系，然后在这基础上进行研究。一个集合再加上一套运算规则，就构成一个代数结构 (想想计算机的数据结构：数据 + 操作)。
>
> 来源于：http://sparkandshine.net/mit-mathematical-formalism/

1.3 初等代数 → 抽象代数

抽象代数将初等代数的一些概念延伸：

1. 数–> 集合

2. “+ ”-> 二元运算

加号“+”被抽象为二元运算 *(binary operation)，**对两个元素作二元运算，得到的新元素仍然属于该集合，这叫封闭性 (closure)**。实际上，加减乘除都叫二元运算 (二元指的是两个操作数)。

3. 0/1 -> 单位元

0 和 1 被抽象成单位元 (identity elements)，0 为加法单位元，1 为乘法单位元。单位元是集合的一个特殊元素 (跟二元运算有关)，满足单位元与其他元素相结合时，不改变该元素，即满足 $a*e = a$ 与 $e*a = a$。可见，单位元取决于元素与二元运算，如矩阵的加法单位元是零矩阵，矩阵的乘法单位元是单位矩阵。值得注意的是，有些集合不存在单位元，如正整数集合没有加法单位元

4. 负数-> 逆元素

负数推广到逆元素 (inverse element)，对于加法，a 的逆元素是-a；对于乘法，a 的逆元素是倒数 a−1。直观地说，逆元可以撤销操作，如加了一个数 a，再加上该数的逆元-a(相当于撤消操作)，结果还是一样。

5. 结合律 (Associative property)

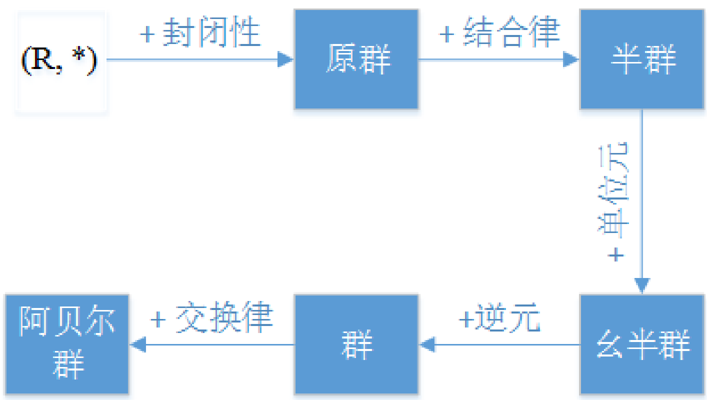
结合律是某些二元运算的性质，有些二元运算没有结合律 (如减法、除法、八元数)

6. 交换律 (Commutative property)

交换律，改变二元运算符两边的元素不影响结果。并不是所有二次元运算都满足交换律 (如矩阵的乘法)。

2 Group-like

代数结构 (R, *)，二元运算根据封闭性、单位元、逆元、结合律、交换律，可以归纳成不同的群。本节介绍的 group-like，从最不严格到严格 (依次添加限制条件)，其关系图如下：



2.1 原群 (magma)

原群 (magma) 是一种基本的代数结构，只要满足两元素作二元运算得到新元素仍属于该集合，即封闭性。

2.2 半群 (magma)

半群 (Semigroup)，满足结合律 (associative property) 的代数结构。$V =< S * >$，其中二元运算 * 是可结合的，即 $(a * b) * c = a * (b * c)$，则称 V 是半群。

2.3 幺半群 (monoid)

幺半群在半群的基础上，还需要满足有一个单位元。

2.4 群 (group)

群 (group) 是两个元素作二元运算得到的一个新元素，需要满足群公理 (group axioms)，即：

- 封闭性：$a{*}b$ 仍然属于该集合
- 结合律：$(a{*}b){*}c = a{*}(b{*}c)$
- 单位元：$a{*}e = ae{*}a = a$
- 逆元：加法的逆元为 $-a$，乘法的逆元为倒数 $1/a$，$\cdots$(对于所有元素)

如整数集合，二次元运算为加法就是一个群 (封闭性是显然的，加法满足结合律，单位元为 0，逆元取相反数-a)。

2.5 阿贝尔群 (交换群)(Abelian Group)

阿贝尔群在群的基础上，还需满足交换律。如整数集合和加法运算，$(Z, +)$，是一个阿贝尔群。即：

- 群公理
- 逆元：加法的逆元为 $-a$，乘法的逆元为倒数 $1/a$，$\cdots$(对于所有元素)

3 环论

环在交换群基础上，进一步限制条件。环、交换环、域间的关系如下：

3.1 环 (ring)

环在阿贝尔群 (也叫交换群) 的基础上，添加一种二元运算 · (虽叫乘法，但不同于初等代数的乘法)。一个代数结构是环 $(R, +, \cdot)$，需要满足环公理 (ring axioms)。环公理如下：

1. $(R, +)$ 是交换群
   - 封闭性：$a*b$ 仍然属于该集合
   - 结合律：$(a*b)*c = a*(b*c)$
   - 单位元：$a*e = a$ & $e*a = a$
   - 逆元：加法的逆元为 $-a$，乘法的逆元为倒数 $1/a$，···(对于所有元素)
   - 交换律：a + b = b + a
2. $(R, \cdot)$ 是幺半群
   - 结合律：$(a\ b)\ c = a\ (b\ c)$
   - 单位元：乘法的单位元为 1，$a * 1 = a$ & $1 * a = a$
3. 乘法对加法满足分配律
   - $a\ (b + c) = (a\ b) + (a\ c)\ \forall a, b, c \in R$
   - $(b + c)\ a = (b\ a) + (c\ a)\ \forall a, b, c \in R$

3.2 交换环 (commutative ring)

交换环 (commutative ring) 在环的基础上，二元运算乘法还满足交换律。

3.3 整环 (integral domain)

整环在交换环的基础上，并满足没有零因子 (如此，集合内任意两个元素乘积均不等于 0)

4 域 (Field)

域 (Field) 在交换环的基础上，还增加了二元运算除法，要求元素 (除零以外) 可以作除法运算，即每个非零的元素都要有乘法逆元。由此可见，**域是一种可以进行加减乘除 (除 0 以外) 的代数结构，是数域与四则运算的推广**。整数集合，不存在乘法逆元 (1/3 不是整数)，所以整数集合不是域；有理数、实数、复数可以形成域，分别叫有理数域、实数域、复数域。

5 向量空间 (vector space)

向量空间是一些向量的集合。最熟悉的例子是几何向量或矢量 (Euclidean vectors, geometric vector, spatial vector)，表示具有大小和方向的对象；矢量可以做加法 (addition) 和乘法 (scalar multiplication) 运算

其他例子，还包括坐标空间 (Coordinate spaces)、复数、函数空间 (Function spaces)、线性方程组 (linear equations)。

5.1 8 个公理

给定域 F，向量空间 V 记为 F-向量空间。其二元运算：

- 向量加法：$+ : V \times V \to V$ 记作 $v + w, \exists v, w \in V$
- 标量乘法：$\cdot : F \times V \to V$ 记作 $a \cdot v, \exists a \in F, v \in V$

并且满足如下 8 条公理：

- 向量加法结合律：$u + (v + w) = (u + v) + w$
- 向量加法的单位元：V 存在零向量的 0，$\forall v \in V, v + 0 = v$
- 向量加法的逆元素：$\forall v \in V, \exists w \in V$，使得 $v + w = 0$
- 向量加法交换律：$v + w = w + v$
- 标量乘法与域乘法兼容性 (compatibility): $a(bv) = (ab)v$
- 标量乘法有单位元: $1v = v$, 1 指域 F 的乘法单位元
- 标量乘法对于向量加法满足分配律：$a(v + w) = av + aw$

- 标量乘法对于域加法满足分配律: $(a+b)v = av + bv$

另，若 F 是实数域 $\mathbb{R}$，则 V 称为实数向量空间；若 F 是复数域 $\mathbb{C}$，则 V 称为复数向量空间；若 F 是有限域，则 V 称为有限域向量空间。

6 模 (module)

模是对向量空间的推广，将标量需为域 (向量空间) 推广到任意环 (模)。

7 代数 (algebra)(环论)

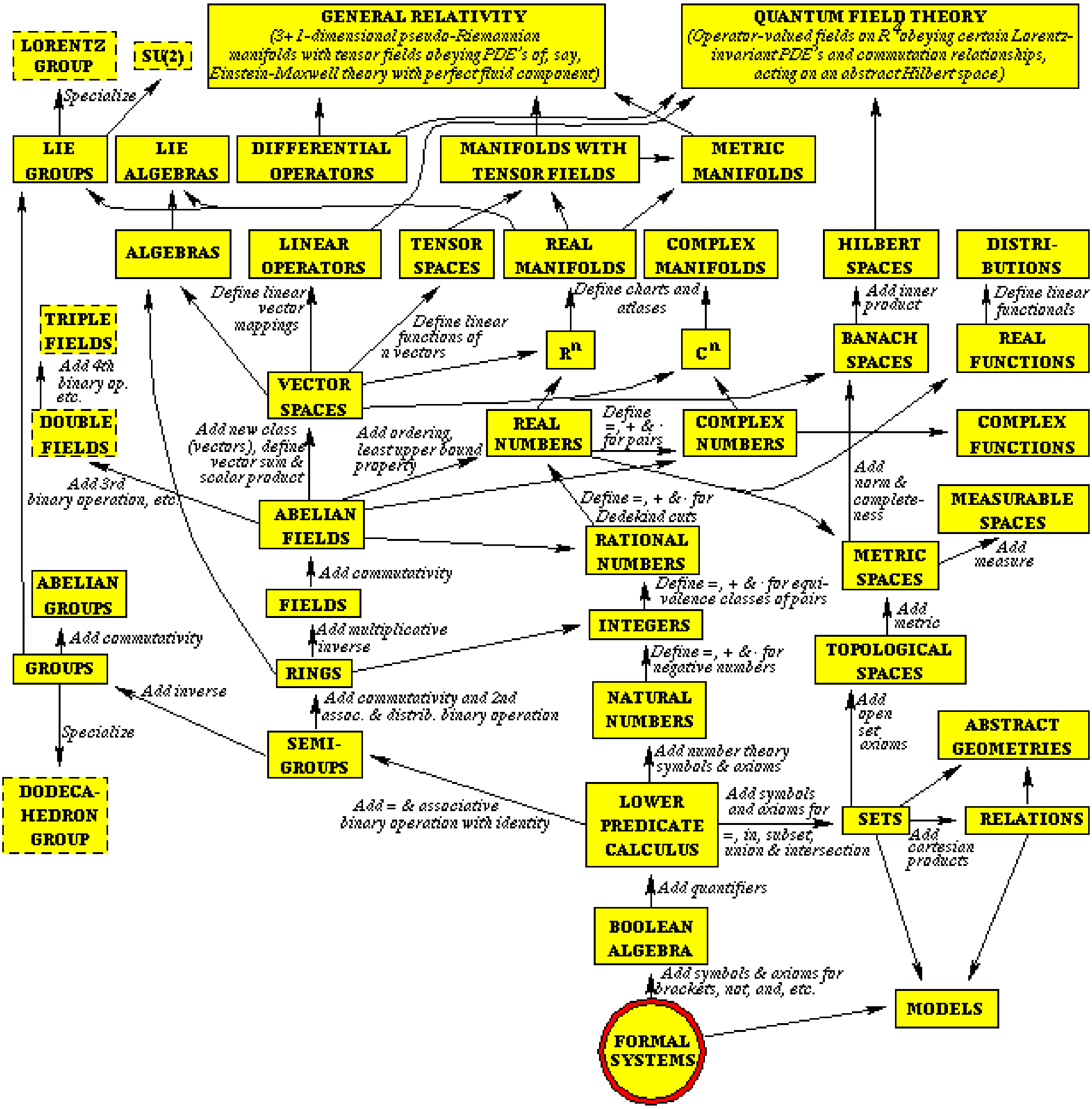
代数将 algebra over a field 中的域推广到交换环。

8 格 (lattice)

格是任意两个元素都有上确界和下确界的偏序集合。

9 总结

是时候，祭出这张图了，图片来源于 (`http://mccabism.blogspot.fr/2007_03_01_archive.html`)



GENERAL RELATIVITY
(3+1-dimensional pseudo-Riemannian manifolds with tensor fields obeying PDE's of, say, Einstein-Maxwell theory with perfect fluid component)
QUANTUM FIELD THEORY
(Operator-valued fields on R⁴ obeying certain Lorentz-invariant PDE's and commutation relationships, acting on an abstract Hilbert space)
LORENTZ GROUP
SU(2)
Specialize
LIE GROUPS
LIE ALGEBRAS
DIFFERENTIAL OPERATORS
MANIFOLDS WITH TENSOR FIELDS
METRIC MANIFOLDS
ALGEBRAS
LINEAR OPERATORS
TENSOR SPACES
REAL MANIFOLDS
COMPLEX MANIFOLDS
HILBERT SPACES
DISTRI-BUTIONS
Define linear vector mappings
Define charts and atlases
Add inner product
Define linear functionals
TRIPLE FIELDS
Define linear functions of n vectors
Rⁿ
Cⁿ
BANACH SPACES
REAL FUNCTIONS
Add 4th binary op. etc.
VECTOR SPACES
DOUBLE FIELDS
Add new class (vectors), define vector sum & scalar product
Add ordering, least upper bound property
REAL NUMBERS
Define =, + & · for pairs
COMPLEX NUMBERS
COMPLEX FUNCTIONS
Add 3rd binary operation, etc.
Add norm & complete-ness
MEASURABLE SPACES
ABELIAN FIELDS
Define =, + & · for Dedekind cuts
RATIONAL NUMBERS
METRIC SPACES
Add measure
ABELIAN GROUPS
Add commutativity
FIELDS
Define =, + & · for equi-valence classes of pairs
Add metric
Add commutativity
Add multiplicative inverse
INTEGERS
TOPOLOGICAL SPACES
GROUPS
RINGS
Define =, + & · for negative numbers
Add inverse
Add commutativity and 2nd assoc. & distrib. binary operation
NATURAL NUMBERS
Add open set axioms
Specialize
SEMI-GROUPS
ABSTRACT GEOMETRIES
Add number theory symbols & axioms
DODECA-HEDRON GROUP
Add = & associative binary operation with identity
LOWER PREDICATE CALCULUS
Add symbols and axioms for =, in, subset, union & intersection
SETS
RELATIONS
Add cartesian products
Add quantifiers
BOOLEAN ALGEBRA
Add symbols & axioms for brackets, not, and, etc.
MODELS
FORMAL SYSTEMS