卷积 [1]

July 1, 2020

1 基础定义

我们称 $(f*g)(n)$ 为 f,g 的卷积。

其连续的定义为：

$$(f*g)(n)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)d\tau$$

其离散的定义为：

$$(f*g)(n)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)$$

这两个式子有一个共同的特征：

$$n=\tau+(n-\tau)$$

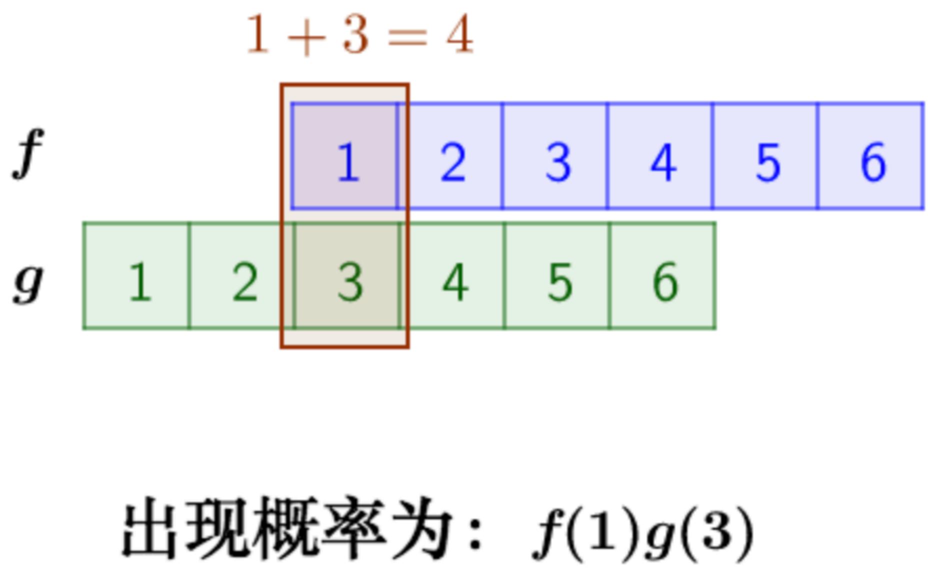
如果我们令 $x=\tau,y=n-\tau$，那么 $x+y=n$，是一族斜率为 -1 的直线。如果遍历这些直线，就好比，把毛巾沿着角卷起来。或许，这就是“卷”积名字的来源吧。

1.1 离散卷积的例子：丢骰子

如果同时掷了两枚骰子，那么两枚骰子的点数加起来为 4 的概率是多少？

这里问题的关键是，两个骰子加起来要等于 4，这正是卷积的应用场景。我们把骰子各个点数出现的概率表示出来：

其中，$f(1)$ 表示第一颗骰子掷出 1 的概率；$g(1)$ 表示第二颗骰子掷出 1 的概率。那么，两个骰子加起来等于 4 可以用下图表示：



即：两枚骰子点数加起来为 4 的概率为：$f(1)g(3) + f(2)g(2) + f(3)g(1)$

符合卷积的定义，把它写成标准的形式就是：

$$(f * g)(4) = \sum_{m=1}^{3} f(m)g(4-m)$$

1.2 连续卷积的例子：做馒头

楼下早点铺子生意太好了，供不应求，就买了一台机器，不断的生产馒头。假设馒头的生产速度是 $f(t)$，那么一天后生产出来的馒头总量为：$\int_0^{24} f(t)dt$。

馒头生产出来之后，就会慢慢腐败，假设腐败函数为 $g(t)$，比如，10 个馒头，24 小时会腐败：$10 * g(t)$

想想就知道，第一个小时生产出来的馒头，一天后会经历 24 小时的腐败，第二个小时生产出来的馒头，一天后会经历 23 小时的腐败。

如此，我们可以知道，一天后，馒头总共腐败了：$\int_0^{24} f(t)g(24-t)dt$ 这就是连续的卷积。

1.3 在图像上的例子

回忆一下在图像上，卷积的计算过程，也是符合卷积的公式的。

References

[1] “如何通俗地理解卷积？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/32/