Jensen 不等式

leolinuxer

August 13, 2020

Contents

1 Jensen 不等式

Jensen 不等式：若对于任意点集 $\{x_i\}$，若 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_i \lambda_i = 1$，则凸函数 $f(x)$ 满足：

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i)$$

使用数学归纳法证明如下：

当 $i = 1$ 或 $i = 2$ 时，根据凸函数的定义，显然成立；

假设当 $i=M$ 时不等式成立，现在证明当 $i=M+1$ 时不等式也成立：

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i x_i) &= f(\lambda_{M+1}x_{M+1}+\sum_{i=1}^{M}\lambda_i x_i) \\ &= f(\lambda_{M+1}x_{M+1}+(1-\lambda_{M+1})\sum_{i=1}^{M}\eta_i x_i) \end{aligned}$$

其中，

$$\eta_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}$$

注意到 λ_i 满足：

$$\sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i=1$$

所以：

$$\sum_{i=1}^{M}\lambda_i=1-\lambda_{M+1}$$

所以 η_i 满足：

$$\sum_{i=1}^{M}\eta_i=\frac{\sum_{i=1}^{M}\lambda_i}{1-\lambda_{M+1}}=1$$

所以：

$$\sum_{i=1}^{M}f(\eta_i x_i)\le\sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)$$

所以命题得证：

$$f(\sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i x_i)\le\lambda_{M+1}f(x_{M+1})+(1-\lambda-M+1)\sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i)=\sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i f(x_i)$$

2 从“Jensen 不等式”导出几个著名不等式

https://zhuanlan.zhihu.com/p/55307171

2.1 加权 AG 不等式

对 $a_i>0,\alpha_i>0$，有：

$$\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_n a_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\ge(a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}$$

证明：记

$$\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

因为对数函数为凹函数，使用加权琴生不等式，可得：

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) &\geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n \\ &= \ln {x_1}^{\lambda_1} {x_2}^{\lambda_2} \cdots {x_n}^{\lambda_n} \\ \therefore \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n &\geq {x_1}^{\lambda_1} {x_2}^{\lambda_2} \cdots {x_n}^{\lambda_n} \\ \therefore \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} &\geq (a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}} \end{aligned}$$

2.2 Young 不等式

若 $x > 0, y > 0, p > 1, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则：

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

证明：利用上述加权 AG 不等式有：

$$\begin{aligned} x_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \cdot x_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} &\leq \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \text{记 } \frac{1}{p} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{1}{q} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \therefore x_1^{\frac{1}{p}} \cdot x_2^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ &= \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q} \end{aligned}$$

令 $x = x_1^{\frac{1}{p}}, y = x_2^{\frac{1}{1}}$，即有：

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

注意，推导过程中得到的下式也很有用：

$$x_1^{\frac{1}{p}} \cdot x_2^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}$$

2.3 AG 不等式

假设上述加权 AG 不等式中 $\alpha_i = 1$ 则得 AG 不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

2.4 哈代不等式

若对下列正数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n, \alpha, \beta$$

有:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

那么有如下不等式成立:

$$\sum_k^n x_k y_k \leq (\sum_k^n x_k^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (\sum_k^n y_k^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

证明: 由加权 AG 不等式或 Young 不等式，得:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_k^\alpha}{\sum_i^n x_i^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{y_k^\beta}{\sum_i^n y_i^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x_k^\alpha}{\sum_i^n x_i^\alpha} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{y_k^\beta}{\sum_i^n y_i^\beta} \\
\therefore \frac{\sum_k^n x_k y_k}{(\sum_i^n x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (\sum_i^n y_i^\beta)^{\frac{1}{\beta}}} &\leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \\
\therefore \sum_k^n x_k y_k &\leq (\sum_k^n x_k^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (\sum_k^n y_k^\beta)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

2.5 柯西不等式

对下列正数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$$

有如下不等式成立:

$$(\sum_{k=1}^n x_k y_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{k=1}^n y_k^2)$$

证明: 在哈代不等式中，令 $\alpha = \beta = 2$ 即可证明柯西不等式。

二维形式:

$$ac + bd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

等号成立条件: 当且仅当 $ad = bc$ (即 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$)

向量形式

$$|a|\cdot|b|\geq|a\cdot b|,\quad a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),b=(b_1,b_2.\cdots,b_n)$$

三角形式

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

概率论形式

$$\sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}\geq|E[XY]|$$

变形

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_iy_y)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

以 Ψ_i/u_i 替换 x_i^2，u_i 替换 y_i^2，$(\Psi_i,u_i>0)$ 有：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\Psi_i}{u_i}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Psi_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}u_i}$$

2.6 霍尔德不等式

假设：$a_i\geq0,b_i\geq0,(1\leq i\leq n),\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1$，那么有如下不等式成立：:

$$\sum_{i}^{n}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}\leq(\sum_{i}^{n}a_i)^{\alpha}(\sum_{i}^{n}b_i)^{\beta}$$

证明：由哈代不等式，替换变量可得

多元推广 (符号存疑)

http://blog.sina.com.cn/s/blog_4aeef05d01030w1g.html

设 $a_{ij}>0,(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$, $\alpha_j>0$ 是正实数，且 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_m=1$，则：

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\alpha_j}\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{\alpha_j}\right)$$

2.7 幂平均值不等式

假设：$a_i>0,(1\leq i\leq n),\alpha>\beta>0$，那么有如下不等式成立：

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

证明：使用哈代不等式，令

$$
\begin{aligned}
x_i = 1, \qquad (1 \leq i \leq n) \\
\sum_i^n x_i y_i \leq \Big(\sum_i^n x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_i^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
\therefore \sum_i^n y_i \leq n^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_i^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
\because \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (p > 1, q > 1) \\
\therefore \sum_i^n y_i \leq n^{1-\frac{1}{q}} \Big(\sum_i^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
\therefore \frac{1}{n} \sum_i^n y_i \leq n^{-\frac{1}{q}} \Big(\sum_i^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
\therefore \frac{1}{n} \sum_i^n y_i \leq \Big(\frac{1}{n} \sum_i^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
y_i = a_i^\beta, q = \frac{\alpha}{\beta} > 1 \\
\therefore \frac{1}{n} \sum_i^n a_i^\beta \leq \Big(\frac{1}{n} \sum_i^n a_i^\alpha\Big)^{\frac{\beta}{\alpha}} \\
\therefore \Big(\frac{1}{n} \sum_i^n a_i^\alpha\Big)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \Big(\frac{1}{n} \sum_i^n a_i^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}
$$

2.8 Minkowski 不等式

对 $a_i \geq 0, b_i \geq 0, p > 1$，有如下不等式成立：

$$
\Big(\sum_i^n (a_i + b_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_i^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_i^n b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}
$$

证明：令

$$
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
$$

由哈代不等式，有：

$$\sum_i^n a_i(a_i+b_i)^{p-1} \le \left(\sum_i^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_i^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\because \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\therefore (p-1)q=p$$

$$\therefore \sum_i^n a_i(a_i+b_i)^{p-1} \le \left(\sum_i^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_i^n (a_i+b_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

同理，有：

$$\sum_i^n b_i(a_i+b_i)^{p-1} \le \left(\sum_i^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_i^n (a_i+b_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

两式相加，有：

$$\sum_i^n (a_i+b_i)^p \le \left(\left(\sum_i^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_i^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_i^n (a_i+b_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\therefore \left(\sum_i^n (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_i^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_i^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

3 一些题目

若 $\cos\beta+\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 α,β 的值。

解：依 Jensen 不等式，将成立：

$$\begin{aligned}\cos\beta+\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta) &= \cos\beta+\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha-\beta)\\ &\le 3\cos\left(\frac{\beta+\alpha+\pi-\alpha-\beta}{3}\right)\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

并且可知，当前方程中的 α,β 应满足上述不等式的取等条件，即 $\alpha=\beta=\pi-\alpha-\beta$，所以 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$

附：对于凹函数，根据 Jensen 不等式，当 $n=3$ 时，有：

$$f\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\right) \ge \frac{1}{3}f(x_1)+\frac{1}{3}f(x_2)+\frac{1}{3}f(x_3)$$

$$\therefore f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) \le 3f\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\right)$$

已知 $x,y,z\in(0,+\infty)$，且 $x+y+z=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}+\frac{25}{z}$ 的最小值。

解：根据柯西不等式，有：

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}+\frac{25}{z}\right)\left(x+y+z\right) &\geq \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt{x}+\sqrt{\frac{9}{y}}\sqrt{y}+\sqrt{\frac{25}{z}}\sqrt{z}\right)^2\\ &=(1+3+5)^2=81\\ \therefore \frac{1}{x}+\frac{9}{y}+\frac{25}{z} &\geq 81\end{aligned}$$

取等号的条件：$\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{9}{y}}=\sqrt{\frac{25}{z}}$，即：$x=1/9,y=3/9,z=5/9$

已知

$$t=\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+2y^2+4z^2}}$$

求 t 的最大值。

解：利用柯西不等式，假设：$t\leq m$，即：

$$(x+y+z)^2\leq(x^2+2y^2+4z^2)\cdot m^2$$
$$令：m^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$
$$\therefore(x^2+2y^2+4z^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\geq(xa_1+\sqrt{2}ya_2+2za_3)^2\triangleq(x+y+z)^2$$
$$\therefore a_1=1,a_2=\frac{\sqrt{2}}{2},a_3=\frac{1}{2}$$
$$即：\frac{(x+y+z)^2}{x^2+2y^2+4z^2}\leq((1)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2)=\frac{7}{4}$$
$$\therefore t\leq\frac{\sqrt{7}}{2}$$

已知 $\frac{3}{2}\leq x\leq 5$，求证：

$$\sqrt{4x+4}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<\sqrt{78}$$

证明：利用柯西不等式，令：

$$
\begin{aligned}
x_1y_1 &= \sqrt{4x+4} = \sqrt{x+1}\cdot 2 \\
x_2y_2 &= \sqrt{2x-3} = \sqrt{2x-3}\cdot 1 \\
x_3y_3 &= \sqrt{15-3x} = \sqrt{15-3x}\cdot 1 \\
\therefore (\sum x_iy_i)^2 &\le (x+1+2x-3+15-3x)(2^2+1^2+1^2) = 78
\end{aligned}
$$

因为当 $\frac{x+1}{4} = 2x-3 = 15-3x$ 时等号成立，此时 x 无解，所以等号不成立。

设 $x, y \ge 0$，n 为正整数，证明：

$$\frac{x^n+y^n}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

证明：因为当 $x \ge 0$ 且 n 为正整数时，$f(x) = x^n$ 是凸函数，所以根据 Jensen 不等式，有：

$$\frac{x^n+y^n}{2} = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Given 2017 positive numbers $x_1, x_2, \cdots, x_n$ such that

$$\sum_{i=1}^{2017} x_i = \sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{x_i} = 2018$$

compute the maximum possible value of $x_1 + \frac{1}{x_1}$

解：By Cauchy-Schwarz,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=2}^{2017} x_i\right)\left(\sum_{i=2}^{2017} \frac{1}{x_i}\right) &\ge \left(\sum_{i=2}^{2017} \sqrt{x_i}\sqrt{\frac{1}{x_i}}\right)^2 = 2016^2 \\
\therefore (2018-x_1)(2018-\frac{1}{x_1}) &= 2016^2 \\
\therefore x_1 + \frac{1}{x_1} &\le \frac{2018^2-2016^2+1}{2018} = \frac{8069}{2018}
\end{aligned}
$$

已知 $a,b>0$，且满足 $2a+b=1$，求 $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值

解：根据变形后的柯西不等式，有：

$$\begin{aligned}\frac{3}{a}+\frac{4}{b}&=\frac{6}{2a}+\frac{4}{b}\\&\geq\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{4})^2}{2a+b}=10+4\sqrt{6}\end{aligned}$$

已知 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n$，且满足 $\sum_i^n x_i=1$，求 $\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}$ 的最小值

解：根据变形后的柯西不等式，有：

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\geq\frac{x_1+\cdots+x_n)^2}{2(x_1+\cdots+x_n)}=\frac{1}{2}$$

一道关于概率论的不等式问题：已知 $X_1,X_2,X_3>0$ 是某个概率空间上的随机变量，证明：

$$E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]E[\frac{X_3}{X_1}]\geq 1$$

证明：先看有两个变量的情况：

令 $g(x)=\frac{1}{x}$, $\quad x>0$，则 $g(x)$ 是右半空间上的凸函数。所以根据 Jensen 不等式，有：

$$E[g(x)]\geq g(E[x])=\frac{1}{E[x]}$$

令 $x=\frac{X_1}{X_2}$，则有：

$$E[g(\frac{X_1}{X_2})]=E[\frac{X_2}{X_1}]\geq g(E[\frac{X_1}{X_2}])=\frac{1}{E[\frac{X_1}{X_2}]}$$

也就是说：

$$E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_1}]\geq 1$$

更进一步，有（?? 如何证明??）：

$$E[\frac{X_1}{X_3}]=E[\frac{X_1}{X_2}\frac{X_2}{X_3}]\leq E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]$$

那么对于三个元的情况类似得可以按以下方式处理，

$$E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]E[\frac{X_3}{X_1}]\geq E[\frac{X_1}{X_3}]E[\frac{X_3}{X_1}]=\geq 1$$

类似地，可以推广到 n 元的情况：

$$E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]\cdots E[\frac{X_n}{X_1}] \geq 1$$

另，根据多元 Holder 不等式，立刻可得：

$$\Big[E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]E[\frac{X_3}{X_1}]\Big]^3 \geq E^3[1^{\frac{1}{3}}]$$