微分方程

leolinuxer

July 1, 2020

1 基本概念及分类 [1]

1.1 基本概念

微分方程指的是：含有未知函数及其导数的方程。

常微分方程（Ordinary Differential Equation，ODE）指的是：仅含有一个独立变量的微分方程。

偏微分方程指的是：微分方程中的未知函数包含两个或两个以上的独立变量。

微分方程的阶数取决于方程中出现的最高次导数阶数。

特解指的是满足微分方程的某一个解；通解指的是满足微分方程的一组解。一些微分方程有无穷多解，而有的微分方程无解，有的微分方程则仅有有限个解。

1.2 初值问题和边界值问题

在给微分方程添加附加条件时，如果附加条件中未知函数及其导数的独立变量取值相同，则为初值问题；如果附加条件中未知函数及其导数的独立变量取值不同，则为边界值问题。

一个初值问题或边界值问题的解 $y(x)$ 不仅要满足微分方程，还要满足所有附加条件。

1.3 一阶微分方程的常见形式

1.3.1 标准及微分形式

一阶微分方程的标准形式是：

$$y' = f(x, y)$$

其中，微分部分仅出现在方程的左侧。大部分（不是所有）一阶微分方程都可以通过代数方法写为以上形式。

上式的右侧也可以写为两个函数 $M(x, y)$ 和 $-N(x, y)$ 的商的形式。那么整体就可写为微分形式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{-N(x, y)}$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

1.3.2 线性方程

对于一阶方程的标准形式，如果标准形式的右侧 $f(x,y)$ 可以写为:

$$f(x,y) = -p(x)y + q(x)$$

即，一个关于 x 的函数乘以 y ，再加上一个关于 x 的函数。那么该微分方程即为线性微分方程，一阶线性微分方程可以写为以下形式：

$$y' + p(x)y = q(x)$$

1.3.3 伯努利方程

伯努利方程是具有以下形式的微分方程：

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

其中，n 为实数。当 $n = 0$ 或 $n = 1$ 时，伯努利方程将退化为线性方程形式。

1.3.4 齐次方程

对于一阶微分方程，如果对于任意实数 [公式] 满足：

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

则为齐次方程。注意：此处的“齐次”概念狭义上仅针对一阶微分方程成立，且与齐次线性微分方程中的“齐次”并非同一概念，注意区分。

1.3.5 可分离变量方程

对于前面提到的微分方程的微分形式：

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

如果其满足 $M(X,y) = M(x)$（即为只与 [公式] 有关的函数）和 $N(X,y) = N(y)$，（即为只与 [公式] 有关的函数)。那么该微分方程即为可分离变量的微分方程：

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

1.3.6 恰当方程

对于微分方程的微分形式：

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

如果满足以下条件：

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

则称其为恰当方程。

2 一阶常微分方程的解法 [2]

2.1 可分离变量方程 Separable Equations

对于一阶可分离变量的微分方程：

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

为求其解，只需两端积分：

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = 0$$

其中，C 代表任意常数。

在实际情况中，上式的积分结果往往无法得到解析表达式。因此，通常采用数值方法得到近似解。就算上式的积分结果可以得到解析表达式，也可能得不到 y 关于变量 x 的显式表达式，那么解将保留隐式表达式。

例子：求解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{y}$$

此方程可以写为以下形式：

$$(x^2+2)dx - ydy = 0$$

$$\int (x^2+2)dx - \int ydy = C$$

$$\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}y^2 = C$$

为了求解 y，可以先得到解的隐形表达式：

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4x + k \quad k = -2C$$

所以，求解得到 y 的显式表达式：

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k}$$

2.2 齐次方程 Homogeneous Equations

【注意】这里的"齐次"与一般的线性齐次微分方程中的"齐次"不是同一个概念，注意区分。

对于齐次微分方程：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

其具有以下特性：

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

那么其可以通过代换令 $y = xv$，其中，v 也是关于 x 的函数，使之变为可分离变量的微分方程：

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

这样，可以用解可分离变量的方法得到变量 v 与变量 x 之间的关系。再通过"逆代法"求解原方程。

或者，将原式写为：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

并令 $x = yu$ ，相应的微分为：

$$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$$

通过简化得到可分离变量形式。

例子：求解

$$y' = \frac{y + x}{x}$$

该微分方程不是可分离变量的。但它具有以下形式：

$$y' = f(x, y)$$

其中：

$$f(x, y) = \frac{y + x}{x}$$

而且满足：

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

因此，其为齐次微分方程。令 $y=xv$，得到：

$$v+\frac{dv}{dx}=\frac{xv+x}{x}$$

$$x\frac{dv}{dx}=1$$

$$\frac{1}{x}dx-dv=0$$

此时式子就是可分离变量的微分方程了。解为：

$$\int\frac{1}{x}dx-\int vdv=C$$

因此有：

$$v=\ln|x|-C\rightarrow v=\ln|kx|$$

其中，$C=-\ln|k|$

然后通过逆代法，$v=\frac{y}{x}$，则有：

$$y=x\ln|kx|$$

2.3 恰当方程 Exact Equations

对于以下形式的微分方程：

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

如果存在函数 $g(x,y)$ 满足：

$$dg(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

则称为“恰当方程”。

注意，可以验证：

如果 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 都是连续函数且在 xy 平面上的具有一阶连续偏导。当且仅当下式成立时原方程为恰当方程：

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

假设原方程是恰当方程，即存在 $g(x,y)$ 满足：

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

又由于，原方程是：

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

即：

$$dg(x,y(x)) = 0$$

$$\int dg(x,y(x)) = C$$

2.3.1 积分因子

通常而言，原方程不是恰当方程。但是在某种特殊情形下却可以转化为满足恰当方程条件的微分方程。令积分因子 $I(x,y)$ ，如果能够使得下式成为恰当方程。则原方程的解可由下式得到：

$$I(x,y)[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = 0$$

如果有：

$$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) \equiv g(x)$$

即结果仅是 x 的函数。那么：

$$I(x,y) = e^{\int g(x)dx}$$

如果有：

$$\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) \equiv h(x)$$

即结果仅是 y 的函数。那么：

$$I(x,y) = e^{-\int h(y)dy}$$

如果有：

$$M = yf(xy), N = xg(xy)$$

那么：

$$I(x,y) = \frac{1}{xM - yN}$$

通常该积分因子很难找到，如果微分方程不满足上面的可能情况，则需要采用其他方法进行求解。

例子：求解

$$2xydx + (1+x^2)dy = 0$$

令 $M(x,y) = 2xy, N(x,y) = 1 + x^2$，则有:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

则该微分方程为恰当方程。因为该方程是恰当方程，因此，令函数 $g(x,y)$ 满足上式。

对于 $M(x,y) = 2xy$，由于 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

因此有:

$$\int \frac{\partial g}{\partial x} dx = \int 2xydx$$

$$g(x,y) = x^2y + h(y)$$

注意：这里仅针对 x 进行积分，所以常数部分可以与 h 相关。

接着是要确定 $h(y)$。

对于 $N(x,y) = (1+x^2)$，由 $\frac{N(x,y)}{dy} = x^2 + h'(y)$ ，因此有：$h'(y) = 1$

所以有 $h(y) = y + C_1$。

则有:

$$g(x,y) = x^2y + y + C_1$$

令 $g(x,y) = C$，得到微分方程的隐式解:

$$x^2y + y = C_2 \quad (C_2 = C - C_1)$$

显式解为:

$$y = \frac{C_2}{x^2+1}$$

例子：确定下列微分方程是否为恰当方程:

$$ydx - xdy = 0$$

由微分形式微分方程可令：$M(x,y) = y$ 和 $N(x,y) = -x$，因此:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

因此，该微分方程不是恰当方程。

例子：判断 $-\frac{1}{x^2}$ 是否为以下微分方程的积分因子：

$$ydx - xdy = 0$$

从上面的例子可知，原方程不是恰当方程，但是通过乘以 $-\frac{1}{x^2}$ ，可得：

$$\frac{1}{x^2}(ydx - xdy) = 0$$

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

此时有：$M(x,y) = -\frac{y}{x^2}$ 和 $N(x,y) = \frac{1}{x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

即，转化后的方程为恰当方程，所以 $-\frac{1}{x^2}$ 是原微分方程的积分因子。

2.4 线性微分方程 Linear Equations

一阶线性微分方程具有以下形式：

$$y' + p(x)y = q(x)$$

可以先将该标准形式转化为微分形式看看：

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$$

然后，看看是否能转化为恰当方程。

$$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = p(x)$$

发现结果仅仅与 x 有关，所以一阶线性微分方程都可以转化为恰当方程。

3 伯努利方程 Bernoulli Equations

伯努利方程具有以下形式：

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

其中，n 为实数。令：

$$z = y^{1-n}$$

这样就将原伯努利方程转化成了关于函数 $z(x)$ 的一阶线性常微分方程。就可用求解线性微分方程的方法来求解原方程。

References

[1] “微分方程 (1)-基本概念及分类.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/85151812

[2] “微分方程 (2)-一阶常微分方程的解法.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/85229526