线性代数基础知识

leolinuxer

July 1, 2020

1 线性代数解决什么问题 [1]

线性代数研究的是**如何解决线性问题**；如何**把复杂问题线性化**是别的学科的内容，比如《微积分》、《信号与系统》等。

线性代数讨论的线性问题包括：

- 向量、向量空间：
- **关于向量、向量空间的函数**，也称为矩阵函数；矩阵可以对向量进行变换
- 对矩阵函数进行坐标变换

举个简单的例子 [2]，线性的”东西“（立方体、直线、平面等）可以用向量；矩阵可以对向量进行变换，比如通过旋转矩阵可以让某个正方形变换为旋转后的正方形；行列式代表的是矩阵变换前后的面积（体积）之比；

给定旋转矩阵：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

很显然旋转正方形不会导致面积改变，所以旋转矩阵变换前后的面积之比为 1，或者说行列式为 1：

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\sin(\theta) = 1$$

2 矩阵名称的来源

2.1 高斯消元法

已知线性方程组：

$$\begin{cases} 1x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

从几何上来讲，两个方程都是直线，求解方程组就是找到两根直线的交点；因为都是直线，所以我们称为线性方程组。求解的思路几乎是句废话，即找到交点的 x, y 坐标。也就是把方程化成这个样子：

$$\begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$$

这就是高斯消元法的目标。

2.2 高斯消元法的思路 [3]

要达到这个目标，高斯消元法的思路是，把原线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = d_2 \\ c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z = d_3 \end{cases}$$

转换为如下形式：

$$\begin{cases} a_{11}x + 0y + 0z = d_1' \\ 0x + b_{12}y + 0z = d_2' \\ 0x + 0y + c_{13}z = d_3' \end{cases}$$

2.3 标记法

英国数学家阿瑟 · 凯莱（1821 - 1895）对于看似简单的高斯消元法进行了研究，得出了惊人的结果。他当时研究矩阵的动机出于对线性方程组计算的简化。

对于上面的线性方程组，在固定未知数的顺序（x 出现在第一个位置，y 出现在第二个位置，常数在等号右边）后，且保证每个未知数都出现 (不出现时，系数为 0)，方程组就只需要系数来表示了。按照上面的规定，方程组可以简写为如下数块：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

阿瑟 · 凯莱在 1858 年的《矩阵理论纪要》的论文中，给这个数块以合法的数学地位，取了一个名字：**矩阵**。

3 理解矩阵 [4]

正确的观点是把矩阵看作函数，这样很多疑惑就可以迎刃而解。

3.1 矩阵是一个函数

3.1.1 直线函数与矩阵

我们熟悉的直线函数 $ax=y$，把点 $(x,0)$ 映射到点 $(0,ax)$。我们通过矩阵：$A\vec{x}=\vec{y}$ 也可以完成这个映射，令：

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & 0\end{pmatrix}$$

也可以完成：

$$A\vec{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ ax\end{pmatrix}$$

3.1.2 矩阵的优点

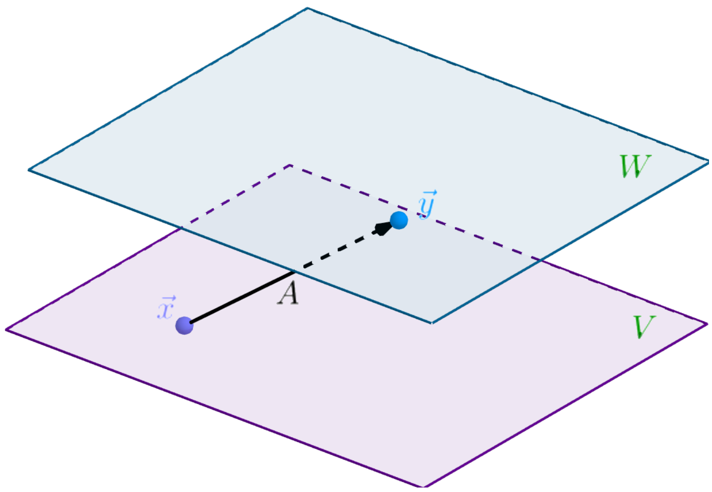
对于：$ax=y,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}$ 只能完成实数到实数的映射：$x\to y \implies \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

但是对于：$A\vec{x}=\vec{y},\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\vec{y}\in\mathbb{R}^m$ 可以完成更广泛的映射：$\vec{x}\to\vec{y} \implies \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

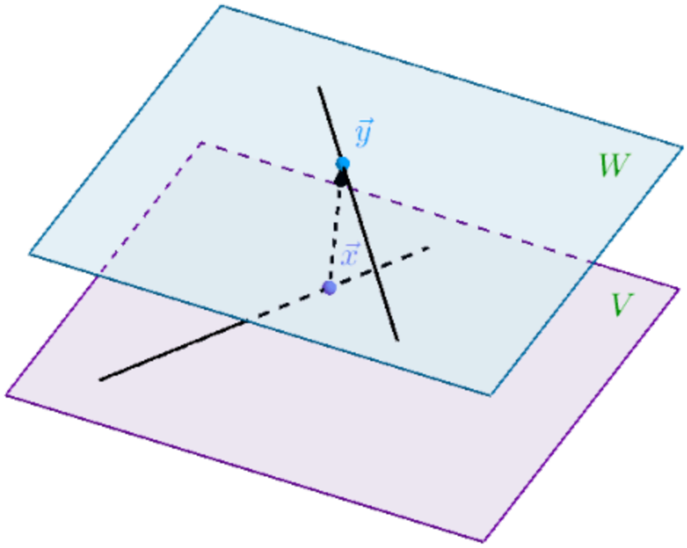
为了完成这一点，矩阵 A 就不再是系数 a 了，而是一个函数（或者说是映射）。

或许写成这样，矩阵乘法看起来更像是函数：$A(\vec{x})=\vec{y}$

假设 $\vec{x}$ 所在平面为 V，而 $\vec{y}$ 所在平面为 W，$\vec{x}$ 通过矩阵 A 映射到了 $\vec{y}$，可以如下表示：



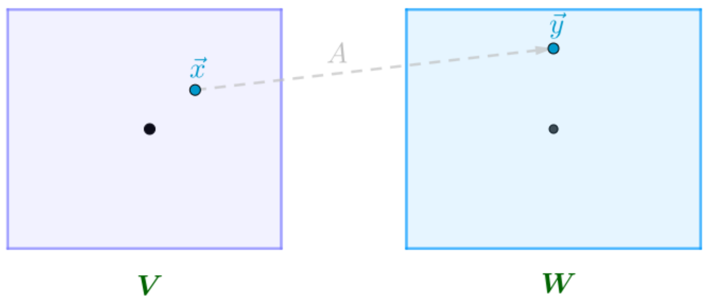
A 这个映射的特殊之处是，V 上的直线通过 A 映射到 W 上也是直线：



所以矩阵也被称为线性映射。

3.2 矩阵函数的工作方式

我们来看看矩阵 A 是如何工作的。为了方便后面的讲解，把之前表示线性映射的 3D 图变为 2D 图：



为了画图方便，$\vec{x}$ 所在平面为 V、$\vec{y}$ 所在平面为 W，都是二维平面，即 $\mathbb{R}^2$。

3.2.1 坐标

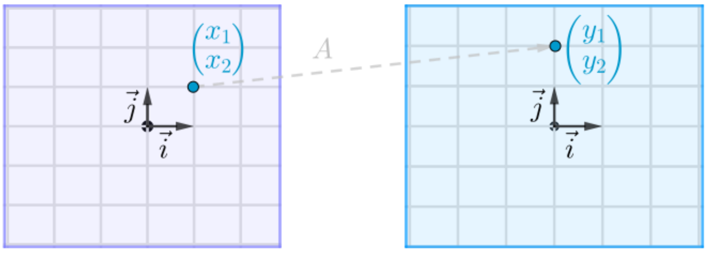
研究线性映射，最重要的是搞清楚当前处在哪个基下。我们先来看看：$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 的基。

$\vec{x},\vec{y}$ 的基默认为各自向量空间下的自然基，其自然基为（即 $\mathbb{R}^2$ 下的自然基）：

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

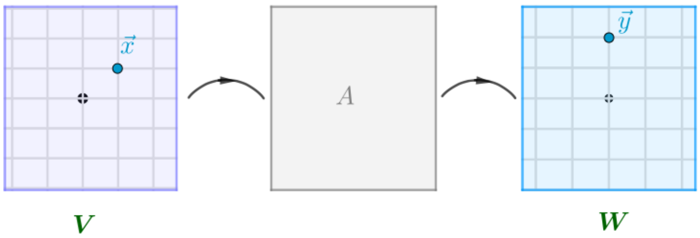
所以：

$$\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}\qquad\vec{y}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}$$

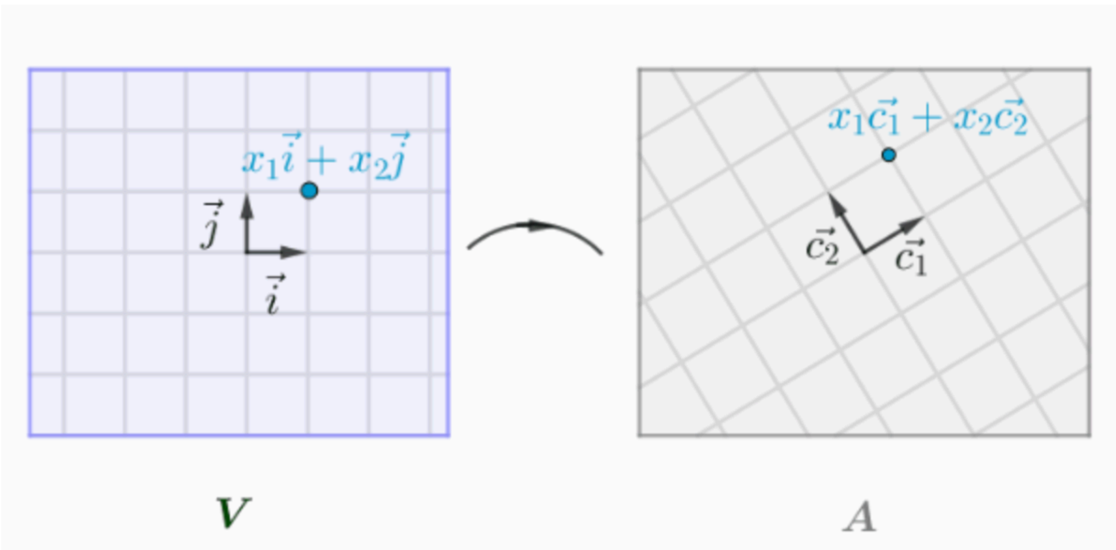


3.2.2 映射法则的工作原理

为了说清楚映射法则 A 是怎么工作的，我们把 A 也用一个空间表示，V 会通过 A 映射到 W：



若：$A = \begin{pmatrix} \vec{c_1}, & \vec{c_2} \end{pmatrix}$ 其中 $\vec{c_1}, \vec{c_2}$ 为 A 的列向量。根据矩阵乘法的规则有：$A\vec{x} = x_1\vec{c_1} + x_2\vec{c_2}$ 则 $A\vec{x}$ 相当于在 A 空间中，以 $\vec{c_1}, \vec{c_2}$ 为基，坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 的向量：

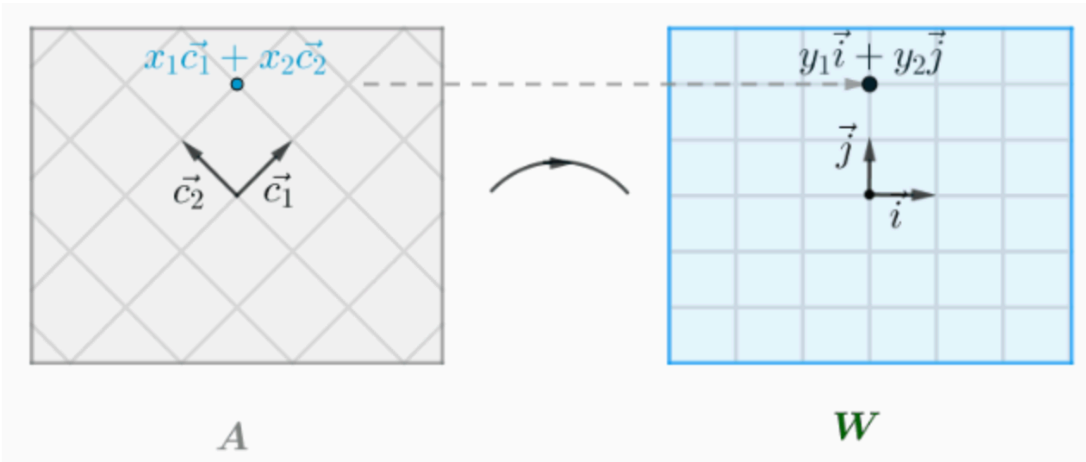


举例说明 $A\vec{x} = x_1\vec{c_1} + x_2\vec{c_2}$:

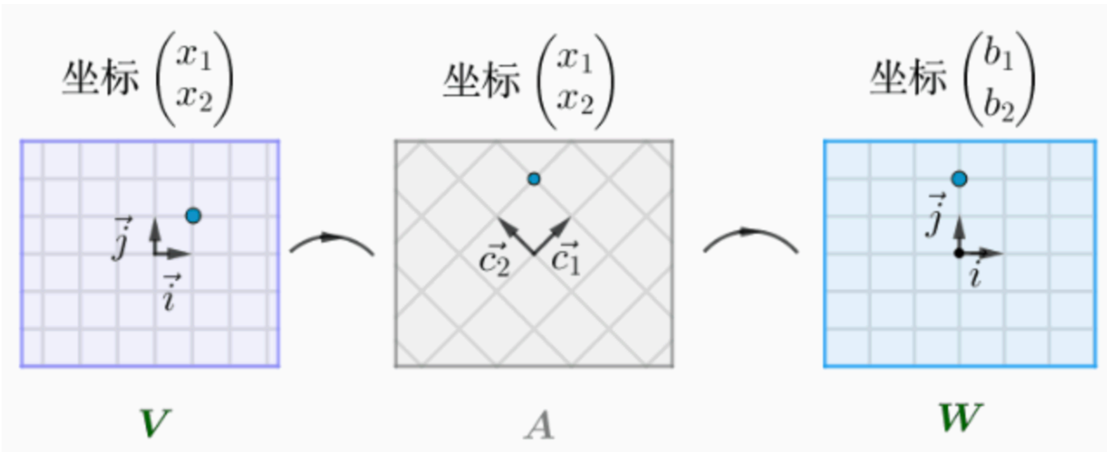
$$A = \begin{pmatrix} \vec{c_1}, & \vec{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{21}, & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{21}, & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1, & c_{12}x_2 \\ c_{21}x_1, & c_{22}x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = x_1\vec{c_1} + x_2\vec{c_2}$$

再将 $A\vec{x}$ 向量用自然基表示:



整体来说，就是**基改变，导致向量的坐标发生变化:**

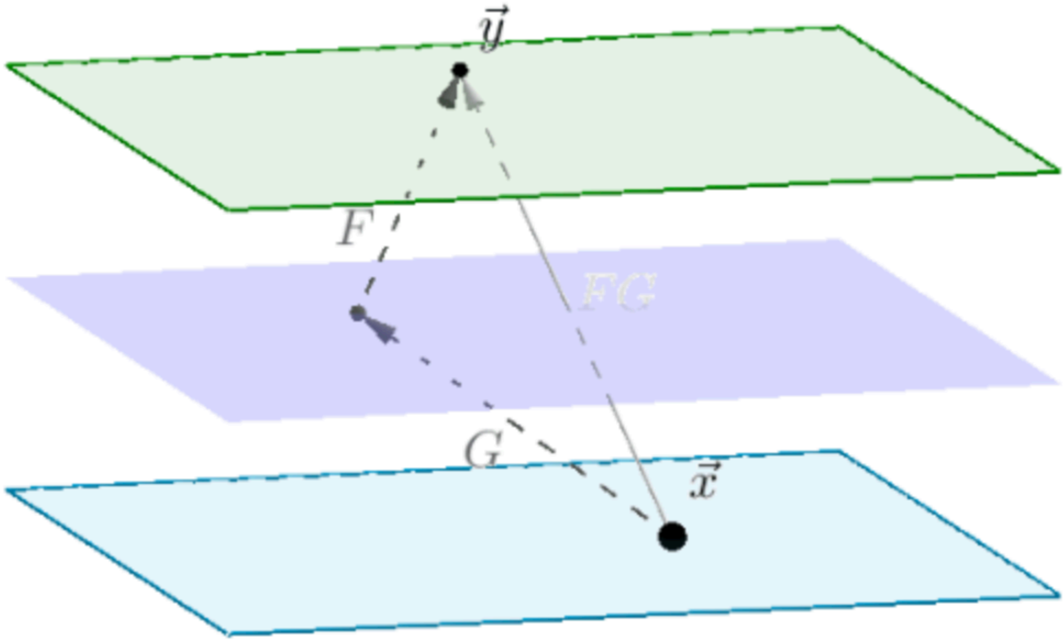


3.2.3 传送门

A 有点像可以穿越空间的传送门，它的传送规则是，根据你进入传送门的时空坐标，把你送到另外一个时空对应的位置。

3.3 复合函数和乘法交换律

通过 G 把 $\vec{x}$ 映射到 $G(\vec{x})$，再通过 F 把 $G(\vec{x})$ 映射到 $\vec{y}$，矩阵的乘法 FG 可以如下图所示:



所以**矩阵乘法 FG 实际上就是复合函数：** $FG \to F(G)$

而函数一般是不满足交换律的，比如：$f(x) = sin(x) \quad g(x) = x^2$ 那么：$f(g(x)) = sin(x^2) \neq g(f(x)) = sin^2(x)$ 那么矩阵乘法不满足交换律也很好理解了。

即从复合函数的角度看（矩阵乘法就是复合函数），矩阵乘法不满足交换律是显然的。

4 理解线性变换和仿射变换 [5]

4.1 线性变换

线性变换的几何直观有三个要点：

- 变换前是直线的，变换后依然是直线
- 直线比例保持不变
- **变换前是原点的，变换后依然是原点**

比如旋转：对于以原点为中心的正方形，无论怎么旋转，之前的边是直线，之后的边仍然是直线；之前和之后的边长比例保持 1:1；之前中心在原点，之后中心仍然在原点；

比如推移：把正方形推移一下（变成平行四边形），直线还是直线；比例还是原来的比例；原点还是原点；

比如旋转加推移，仍然保持上面三个性质不变。

4.1.1 代数方式描述线性变换

比如给定一个点 A，它的坐标为：(a, b)；

我们也可以把它看做一个矢量和点以示区别，表示为矩阵：$\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$；

用旋转矩阵

$$T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

与 $\vec{A}$ 进行矩阵乘法：

$$T_{rotate}\vec{A} = \vec{A'}$$

对正方形的每个点都运用 T_{rotate} 就完成了旋转。

总结下来，线性变换是通过矩阵乘法来实现的。

4.2 仿射变换

仿射变换从几何直观只有两个要点：

- 变换前是直线的，变换后依然是直线
- 直线比例保持不变

少了原点保持不变这一条。；比如允许平移：平移后，直线还是直线，比例还是那个比例，但是原点却发生了变化。

因此，平移不再是线性变化了，而是仿射变化。

4.2.1 代数方式描述仿射变换

线性变换是通过矩阵乘法来实现的，仿射变换不能光通过矩阵乘法来实现，还得有加法。

把平移前的中心点称为 O 点，平移后的中心点称为 b 点；令 O 点坐标为 $\vec{x}$，先对 $\vec{x}$ 进行线性变换，$A\vec{x}$，因为是原点，所以任意线性变换都保持不变。

$Ax + b$ 就可以把 $A\vec{x}$ 移动到 b 点。

所以我们表示仿射变换为：

$$\vec{y} = A\vec{x} + b$$

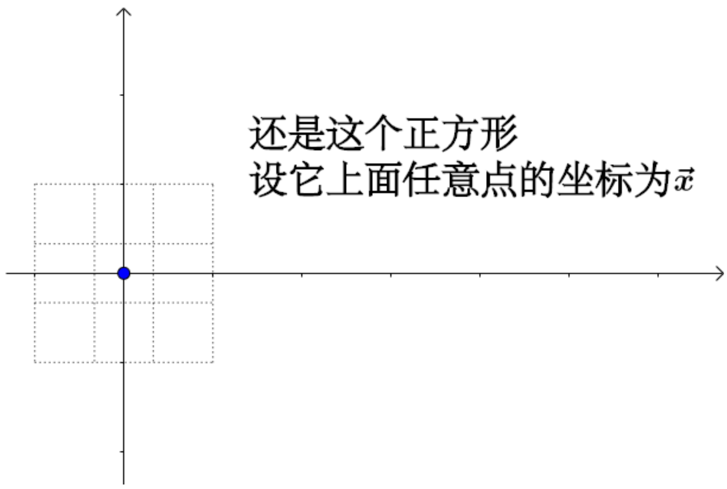
4.3 通过线性变换来完成仿射变换

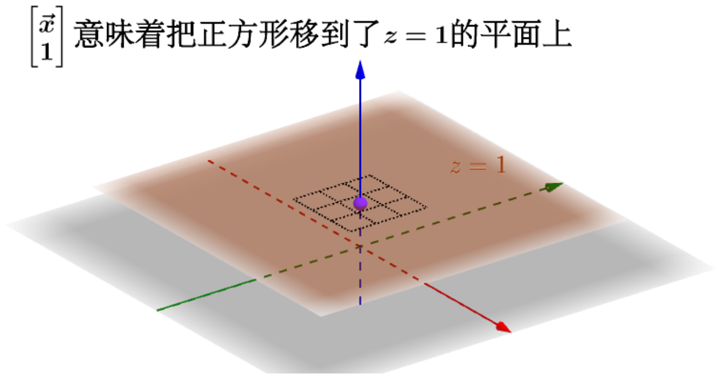
将仿射变换的方程式改写下，可以发现仿射变换和线性变换的关系：

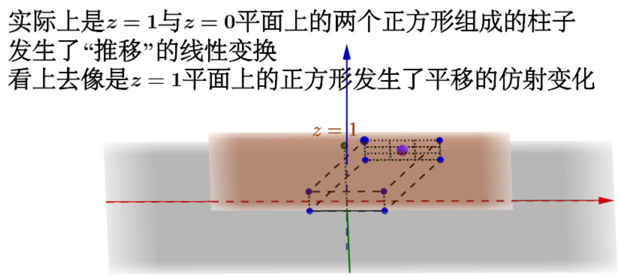
$$\vec{y} = A\vec{x} + b \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

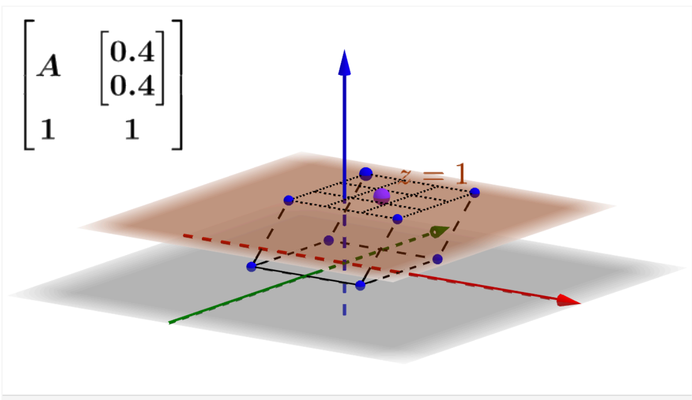
也就是说，增加一个维度后，就可以在高维度通过线性变换来完成低维度的仿射变换。

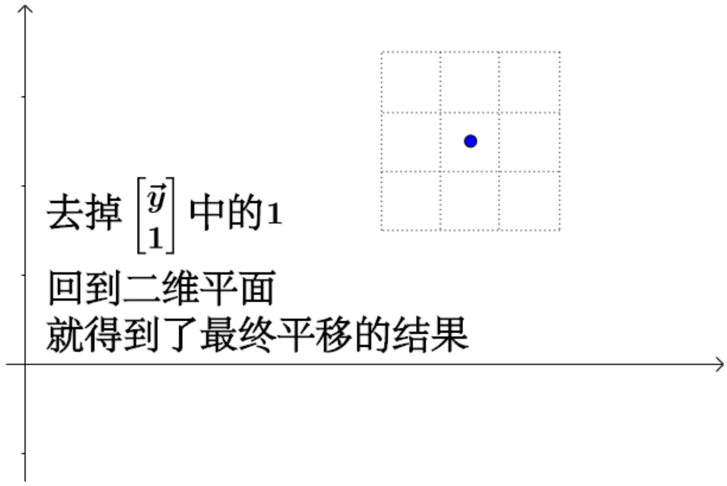
举个例子：


还是这个正方形
设它上面任意点的坐标为$\vec{x}$


$\begin{bmatrix}\vec{x}\\1\end{bmatrix}$意味着把正方形移到了$z=1$的平面上
$z=1$


实际上是$z=1$与$z=0$平面上的两个正方形组成的柱子
发生了“推移”的线性变换
看上去像是$z=1$平面上的正方形发生了平移的仿射变化
$z=1$


$\begin{bmatrix}A & \begin{bmatrix}0.4\\0.4\end{bmatrix}\\1 & 1\end{bmatrix}$
$z=1$



5 理解行列式 [6]

5.1 行列式的来历和本质

人们从解线性方程组开始，最终总结出了行列式。**行列式的本质是线性变换的伸缩因子。**

5.2 实现线性变换的矩阵

比如给定一个点 A，它的坐标为：(a, b)；

我们也可以把它看做一个矢量和点以示区别，表示为矩阵：$\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$；

同时，还可以把 $\vec{A}$ 写成 $a\vec{i} + b\vec{j}$，其中 $\vec{i}, \vec{j}$ 为基向量；

5.2.1 矩阵变换的其实是基

举例子来看看，比如旋转（旋转矩阵 $T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$）：

$$T_{rotate}\vec{A} = \vec{A'}$$

其中 $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$，$\vec{A'} = a\vec{i'} + b\vec{j'}$

所以实际上 T_{rotate} 是改变了基，通过 T_{rotate} 对基进行了变换：$\vec{i} \to \vec{i'}, \vec{j} \to \vec{j'}$

如果要说详细点，实际上，**矩阵的列其实就是变换后的** $\vec{i'}\vec{j'}$，这就是矩阵的真正含义。

即对于旋转矩阵：

$$T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{i'} = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \vec{j'} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{bmatrix}$$

我们只需要旋转基，就可以完成正方形的旋转。

5.3 行列式

5.3.1 行列式是线性变换的伸缩因子

我们还是拿旋转矩阵来举例子：

$$T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow |T_{rotate}| = \begin{vmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

T_{rotate} 的行列式恒等于 1，意味着旋转不会改变面积。

同理，对于缩放矩阵：

$$T_{scale} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$T_{scale}\vec{X} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$|T_{scale}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

变换后，$\vec{i}$ 对应的坐标会缩放为 a 倍，$\vec{j}$ 对应的坐标会缩放为 b 倍，面积会缩放为原来的 ab 倍；

掌握了行列式是线性变换的伸缩因子这一点之后，我们就很容易理解各种行列式的值与线性变换的关系。

5.3.2 行列式大小对变换的影响

行列式 > 0

- 行列式 > 1，对于图形有放大的作用
- 行列式 $= 1$，图形的大小不会变换
- $0 <$ 行列式 < 1，对于图形有缩小的作用

行列式 $= 0$

行列式等于 0，有一个重要的结论是，矩阵不可逆。

还是以旋转矩阵为例，通过旋转矩阵，逆时针旋转 45°，旋转矩阵为：

$$T_{rotate}(45^\circ) = \begin{bmatrix} cos(45^\circ) & -sin(45^\circ) \\ sin(45^\circ) & cos(45^\circ) \end{bmatrix}$$

再通过另外一个旋转矩阵，顺时针旋转 45°，旋转矩阵为：

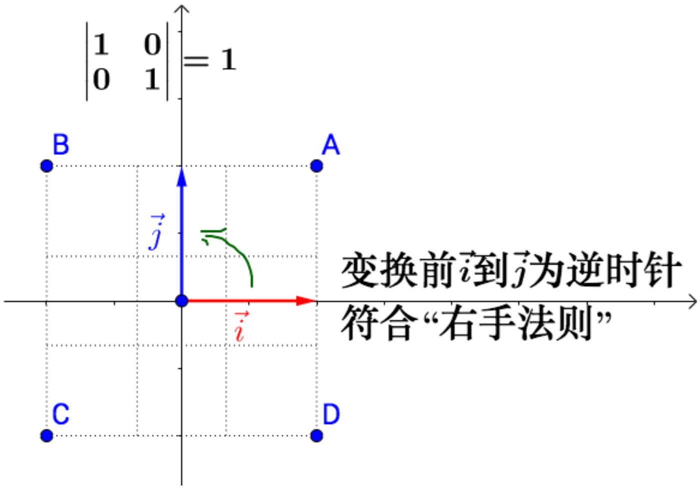
$$T_{rotate}(-45^\circ) = \begin{bmatrix} cos(-45^\circ) & -sin(-45^\circ) \\ sin(-45^\circ) & cos(-45^\circ) \end{bmatrix}$$

两次旋转后，原图形看起来就像没有变换过一样，因此：$T_{rotate}(-45^\circ)$ 和 $T_{rotate}(45^\circ)$ 互为逆矩阵。

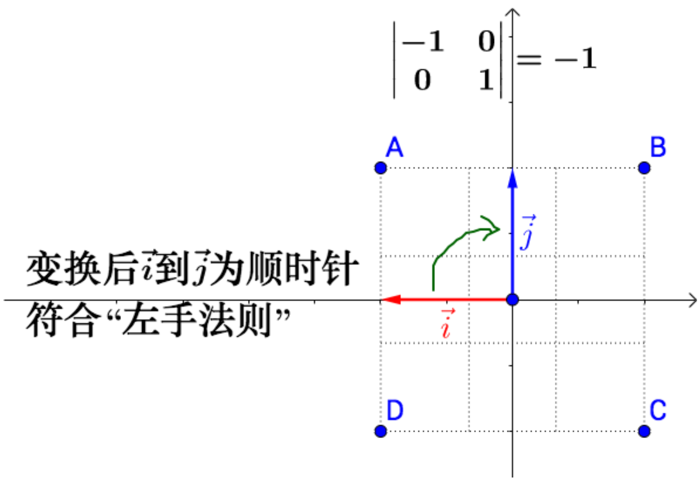
有的线性变换是可逆的，有的不行，比如行列式 =0 这样的线性变换就是不可逆的。从图像上看，图形会缩成一点 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，或者缩成一条直线 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；没有矩阵可以把它们恢复成原来的样子。

行列式 < 0

原始图像是这样的：



被行列式 < 0 的矩阵线性变换后是这样的：



行列式 < 0 其实就是改变了基的“左右手法则”

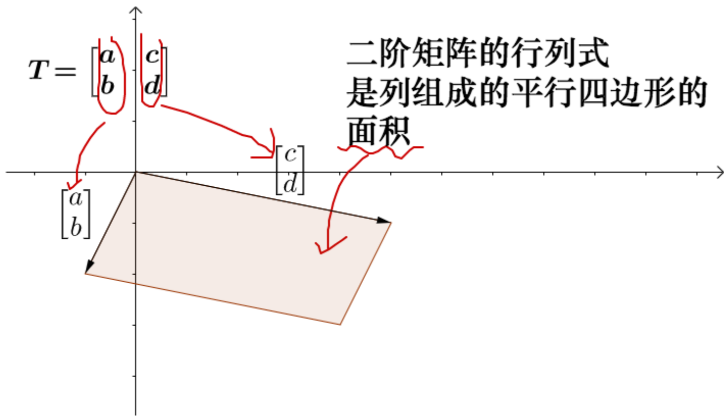
5.4 推论

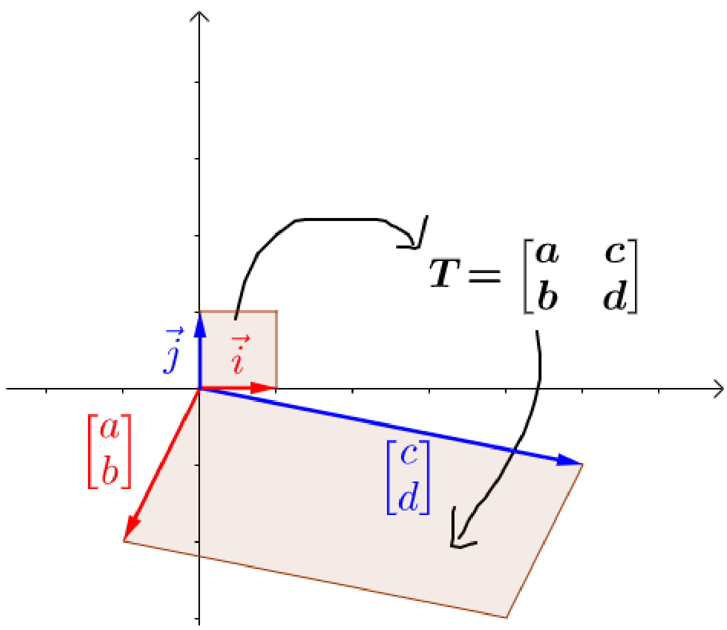
知道了行列式的意义，我们就很容易知道，为什么

- 矩阵乘法不满足交换律：$T_1T_2 \neq T_2T_1$：因为矩阵乘法相当于复合函数
- 但是：$det(T_1T_2) = det(T_2T_1)$：因为面积先缩放为 T_1 倍再缩放为 T_2 倍，与先缩放为 T_2 倍再缩放为 T_1 倍等价

同理，可以知道为什么

- 二阶矩阵的行列式是**列**组成的平行四边形的**面积**（对单位正方形进行了缩放）





- 三阶矩阵的行列式是**列**组成的平行六面体的**体积**（对单位正方体进行了缩放

6 理解矩阵的「秩」[7]

「秩」是图像经过矩阵变换之后的空间维度

「秩」是列空间的维度

6.1 「秩」是图像经过矩阵变换之后的空间维度

比如给定原始图像为以原点为中心的正方形，通过旋转矩阵 $\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ 进行变换，变换后的图像是旋转后的正方形（二维）；因此，旋转矩阵的「秩」为 2。

再通过矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 进行变换，变换后的图像是一根一维的直线；因此，该变换矩阵的「秩」为 1。

再通过矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 进行变换，变换后的图像是一个零维的点；因此，该变换矩阵的「秩」为 0。

6.2 「秩」是列空间的维度

6.2.1 列空间

我们通过旋转矩阵来解释什么是列空间；给定旋转矩阵

$$T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

该旋转矩阵的列向量分别是 $\vec{i} = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{bmatrix}$ 和 $\vec{j} = \begin{bmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{bmatrix}$ 这两个向量不在一条直线上，我们称其为线性无关。

通过改变 a, b 的值，可以用 $a\vec{i} + b\vec{j}$ 来表示二维平面上的所有点。

所以，**列空间就是矩阵的列向量所能张成（即通过 $a\vec{i} + b\vec{j}$ 来表示）的空间**。

列空间的维度就是「秩」；旋转矩阵的列空间是二维的，所以「秩」就为 2。

6.2.2 矩阵的变换目标是列空间

给定矢量 $\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$；

同时，矢量 $\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 也可以表示为 $a\vec{i} + b\vec{j}$，其中 $\vec{i}\vec{j}$ 为基向量。用基来表示的原因是因为矩阵变换的其实是基。

举例子来看看，比如给定旋转矩阵 $T_{rotate} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ 作用在矢量 $\vec{(A)}$ 上，有：

$$\vec{A\prime} = T_{rotate}\vec{A}$$

其中，$\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$，$\vec{A\prime} = a\vec{i\prime} + b\vec{j\prime}$

所以实际上是 T_{rotate} 是改变了基，通过 T_{rotate} 把 $\vec{i} \to \vec{i\prime}$，$\vec{j} \to \vec{j\prime}$。

如果要说详细点，实际上矩阵的列就是变换后的 $\vec{i'}\vec{j'}$，这就是矩阵的真正含义。

所以：$\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} \Rightarrow \vec{A'} = a\vec{i'} + b\vec{j'}$ 实际上是变换到了 T_{rotate} 的列空间。

6.2.3 两种定义方式的联系

用旋转矩阵对二维的正方形进行线性变换，实际上是一个二维空间到另外一个二维空间的变换：

比如对于旋转矩阵，图像从 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 张成的空间，变换到 $\vec{i'}$，$\vec{j'}$ 张成的空间。因为都是二维，所以图像维度不变。

但是对于矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 他的列空间是一维的；因此，这个矩阵的「秩」就是 1，用它对二维的正方形进行线性变换，实际上是一个二维空间到另外一个一维空间的变换（即二维正方形会被压缩到一维直线上）；

同理，矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 他的列空间是一个点，所以它的「秩」就是 0。

6.3 关于严格性的一个问题

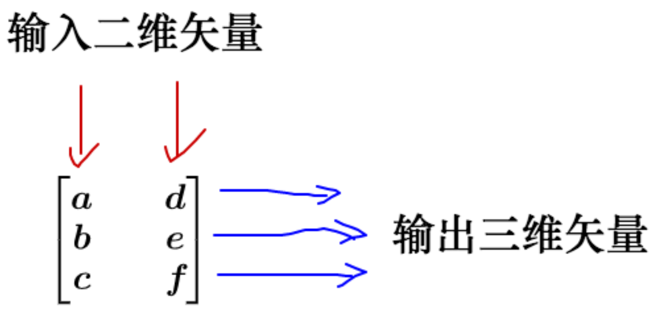
上面说矩阵的「秩」是列空间的维度，这并非完全正确的。

列空间的维度准确来说，是「列秩」，行空间的维度是「行秩」，但是，还好有，「秩」=「列秩」=「行秩」是恒成立的。所以直接把「列秩」称为「秩」也不算错误。

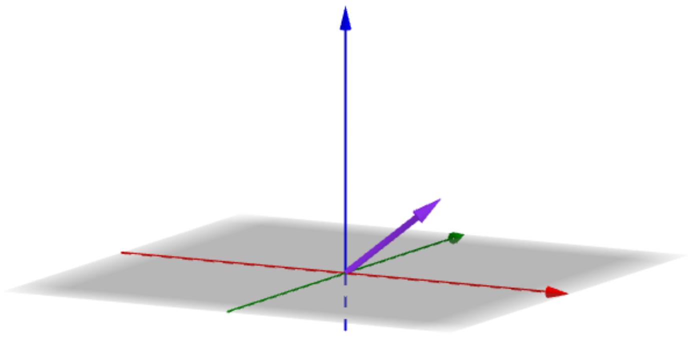
6.4 推论

了解了秩，就很容易回答下面的问题。

我们知道矩阵是做线性变换的，比如说一个 3×2 的矩阵，



从图像上看，平面上的一个矢量被一个 3×2 的矩阵变换到了三维空间：



那么，通过 3×2 的矩阵能否把一个二维正方形变换为一个三维正方体呢?

7 理解行秩和列秩的关系 [8]

TBD

8 理解相似矩阵 [9]

相似矩阵的定义是：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P，使：

$$P^{-1}AP = B$$

则称 B 是 A 的相似矩阵，或说 A 和 B 相似。

8.1 通俗解释

观看同样一部电影，坐在不同的位置，各自眼中看到的电影因为位置不同而有所不同（比如清晰度、角度），所以说，"第一排看到的电影"和"最后一排看到的电影"是"相似"的。

那么相似矩阵走进的电影院，放映的是哪部电影？也就是说，什么是不变的呢？是线性变换。

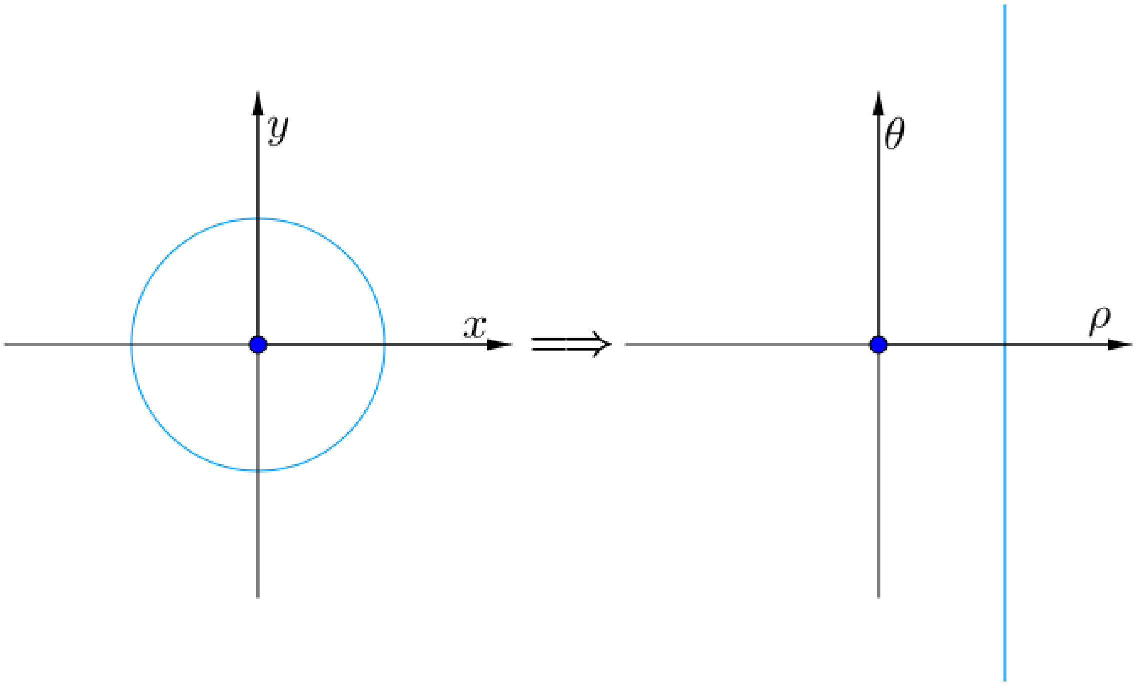
8.2 坐标转换

从数学角度上看，相似变换就是进行了坐标转换。

坐标转换是数学中的常用伎俩，目的是简化运算。比如常见的，把直角坐标系（xy 坐标系）的圆方程换元为极坐标（$\rho\theta$ 坐标系）下：

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} \rho = a \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

图像也从左边变为了右边：



换元之后的代数式和图像都变简单了。相似变换也是这样的目的。

8.3 线性变换

8.3.1 线性函数

函数我们很早就接触了，直观地讲，就是把 x 轴上的点映射到曲线上。比如函数函数 $y = sin(x)$，把 x 轴上的点映射到了正弦曲线上）；还有的函数，比如 $y = x$，是把 x 轴上的点映射到直线上，我们称为线性函数；

8.3.2 从线性函数到线性变换

线性函数其实就是线性变换，为了看起来更像是线性变换，我换一种标记法。

比如之前的 $y = x$，我们可以认为是把 $(a, 0)$ 点映射到 $(0, a)$ 点，我们称为线性变换 T，记作：

$$T : (a, 0) \to (0, a), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

矩阵的形式很显然如下：

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

这样做最直接的好处是，**我们可以轻易的摆脱 x 轴的限制**。

只要替换 $(a, 0)$ 为平面内所有的点 (a, b)，我们就可以对整个平面做变换，该线性变换记作：

$$T : (a, b) \to (b, a)$$

进而可以写作矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

也就是说整个平面的点都可以被变换。

使用线性代数的记号，有：

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即：

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

进一步，既然 $\vec{x}, \vec{y}$ 都是平面上的点，我们可以认为：

线性变换通过矩阵 A 来表示

而 $y = x$ 只不过是这个 A 的一种特殊情况。

8.3.3 矩阵 A 与基

因为 $y = x$ 是基于直角坐标系的，通过这个转换：

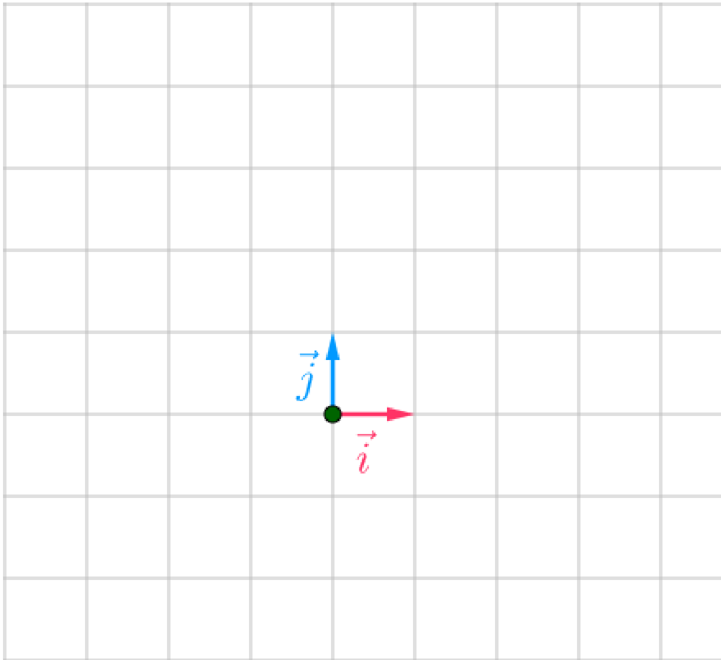
$$y = x \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得到的 A 也是基于直角坐标系的。只是在线性变换中，我们不称为直角坐标系，我们叫做**标准正交基**。

标准正交基是：

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

它们所张成的线性空间如下：



A 在此基下，完成了镜面反转这个线性变换。

因此，让我们补完之前的结论：

线性变换通过指定基下的矩阵 A 来表示

8.4 相似矩阵

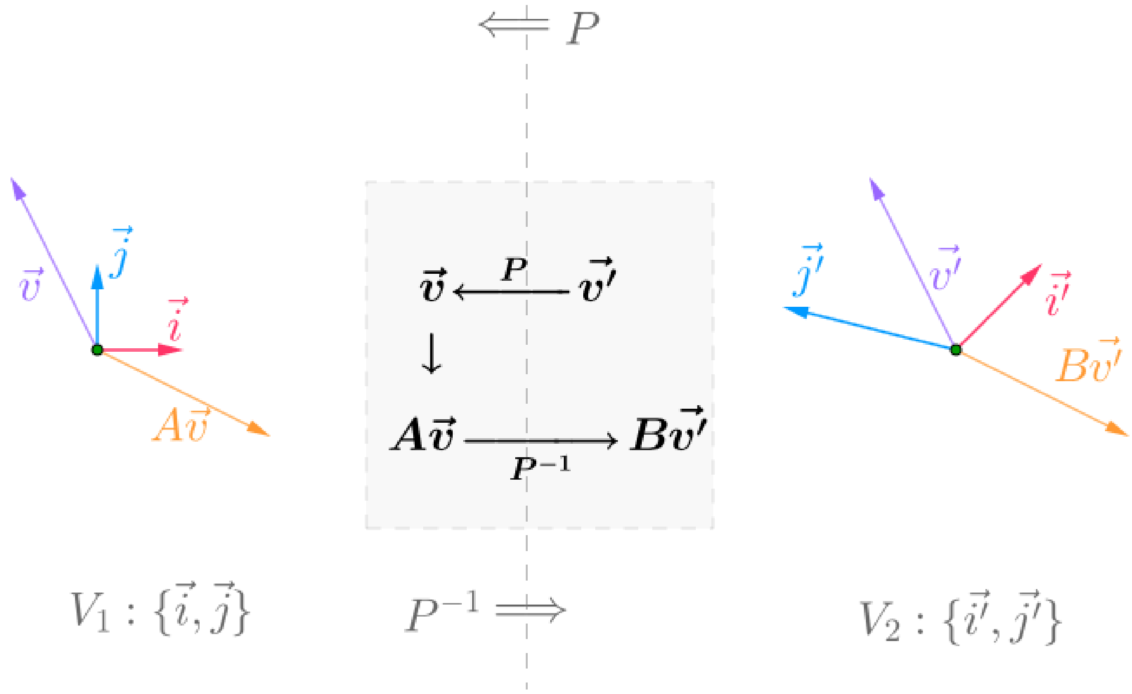
回到开头给出看电影的例子，同一部“电影”，不同基“看到”的就是不同的矩阵：

同一个线性变换，不同基下的矩阵，称为相似矩阵

那怎么得到不同基下的矩阵呢？让我们来看看变换的细节。

8.4.1 变换的细节

先上一张图，说明不同基下的矩阵的变换思路，这个图有点复杂，请参照之后的解释一起来看：



下面是对图的解释：

- 有两个基：$V_1 : \{\vec{i}, \vec{j}\}$ 和 $V_2 : \{\vec{i'}, \vec{j'}\}$
- $V_1 \to V_2$，可以通过 P^{-1} 转换
- $V_2 \to V_1$，可以通过 P 转换

整个转换的核心，就是上图正中的文字，解释下：

- $\vec{v'}$ 是 V_2 下的点
- $\vec{v'}$ 通过 P 变换为 V_1 下的点，即 $P\vec{v'}$
- 在 V_1 下，通过矩阵 A 完成线性变换，即 $AP\vec{v'}$
- 通过 P^{-1} 重新变回 V_2 下的点，即 $P^{-1}AP\vec{v'}$

综上，我们可以有：

$$B\vec{v'} = P^{-1}AP\vec{v'}$$

那么 B 和 A 互为相似矩阵。

注意 [待验证，应该没问题]，这里的 P 只进行了坐标基之间的变换，**所以** $det(P) = \pm 1$；但是 A 是线性变换，**所以可以有** $det(A) \neq \pm 1$。

8.4.2 转换矩阵 P 的计算方法

给定空间中的点 m，它在基 $\vec{i'},\vec{j'}$ 下的坐标 $\vec{v'}$ 可以表示为:

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\vec{i'} + b\vec{j'}$$

如果我们知道了 $\vec{i'},\vec{j'}$ 在 $\vec{i},\vec{j}$ 下的坐标:

$$\vec{i'} = c\vec{i} + d\vec{j}, \vec{j'} = e\vec{i} + f\vec{j}$$

那么有:

$$\begin{aligned}\vec{v'} &= a\vec{i'} + b\vec{j'} \\ &= a(c\vec{i} + d\vec{j}) + b(e\vec{i} + f\vec{j})\end{aligned}$$

此时，实际上 m 点的坐标，已经变到了 $\vec{i},\vec{j}$ 下的 $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= a(c\vec{i} + d\vec{j}) + b(e\vec{i} + f\vec{j}) \\ &= (ac + be)\vec{i} + (ad + bf)\vec{j} \\ &= \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{i'} & \vec{j'} \end{pmatrix} \vec{v'} \\ &= P\vec{v'}\end{aligned}$$

所以 P 其实就是:

$$P = (\vec{i},\vec{j})$$

这里的 $\vec{i'},\vec{j'}$ 是在 $\vec{i},\vec{j}$ 下的坐标。

8.4.3 对角矩阵

那么为什么我们需要相似矩阵呢?

比如这个矩阵 A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

可以这样分解：

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $P = P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

B 就是对角矩阵，看上去就很清爽，所以说相似变换就是坐标转换，转换到一个更方便计算的简单坐标系。

9 理解二次型 [10]

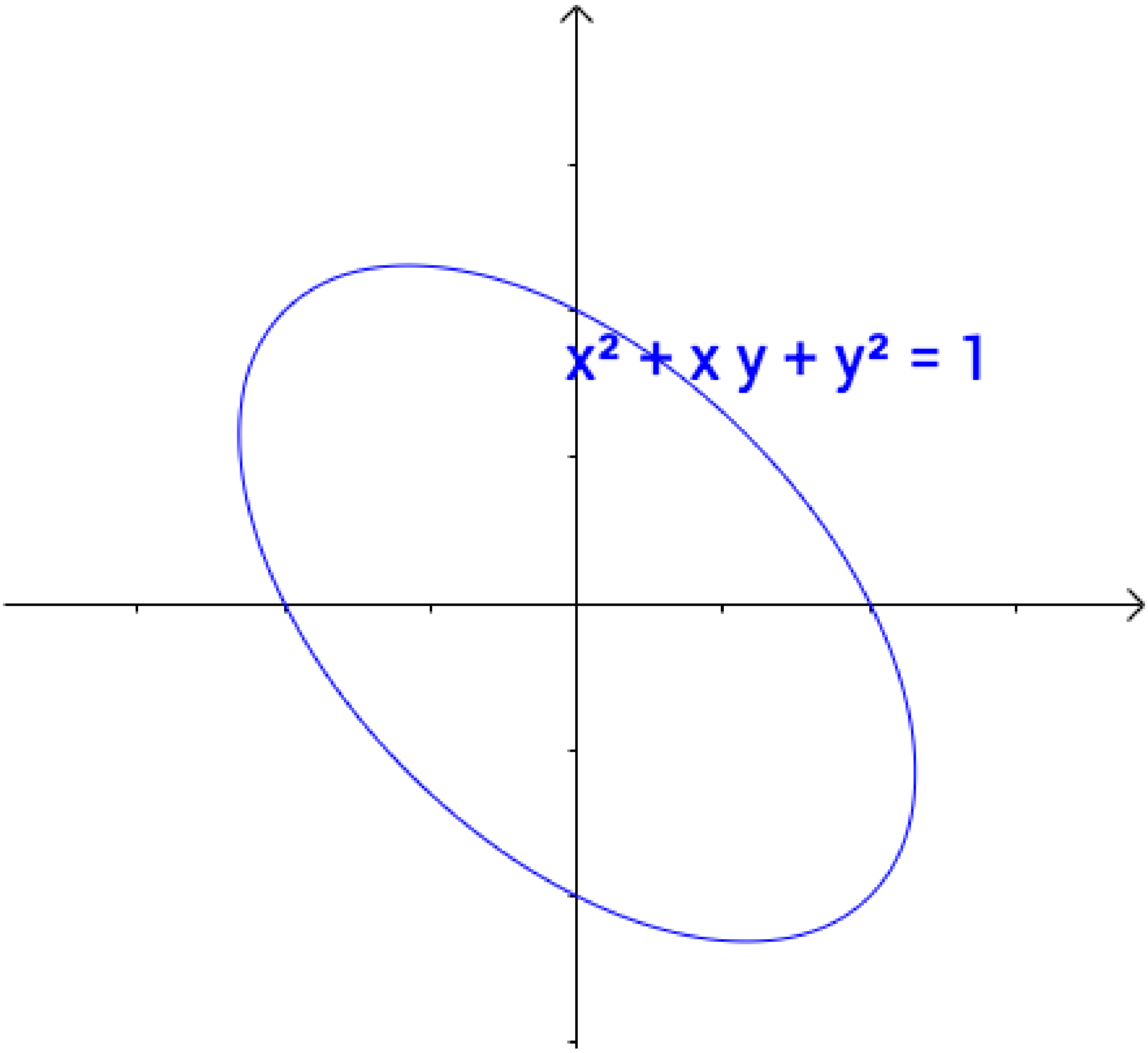
二次型就是通过矩阵研究二次函数。

通过矩阵来研究二次函数（方程），这就是线性代数中二次型的重点。

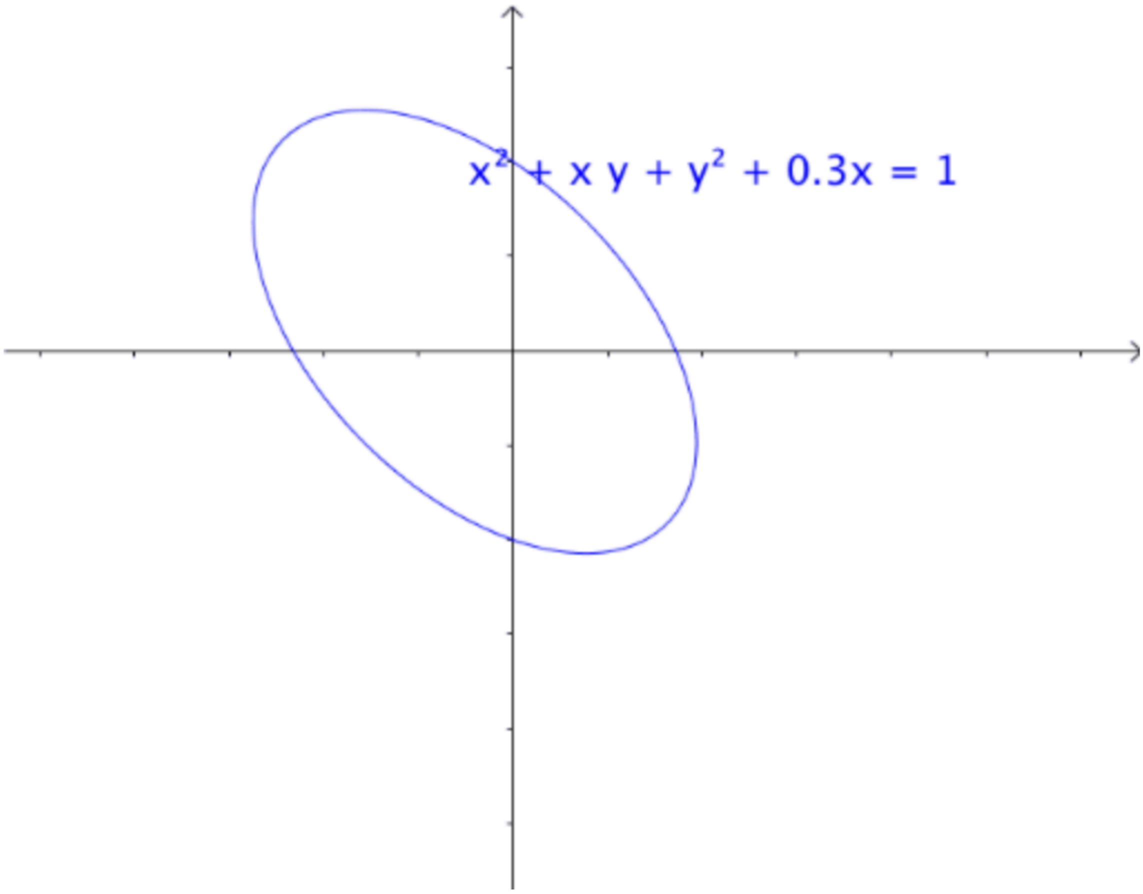
9.1 二次函数（方程）的特点

最简单的一元二次函数就是：$y = x^2$，给它增加一次项和常数项：$y = x^2 + px + q$ 不会改变它的形状（只会改变对称轴的位置和在 y 轴的截距）

再看二元二次方程：$x^2 + xy + y^2 = 1$



给它增加一次项也不会改变形状 $x^2+xy+y^2+0.3x=1$，只是看上去有些伸缩：



所以，对于二次函数或者二次方程，**二次部分是主要部分，往往研究二次这部分就够了**。

9.2　通过矩阵来研究二次方程

因为二次函数（方程）的二次部分最重要，为了方便研究，我们把含有 n 个变量的二次齐次函数：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x \end{aligned}$$

或者二次齐次方程称为二次型。

9.2.1　二次型矩阵

实际上我们可以通过矩阵来表示二次型：

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

其中，$\left[\begin{smallmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 就是二次型。

更一般的：

$$ax^2+2bxy+cy^2=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} {\color{red}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

可以写成更线代的形式：

$$\left.\begin{array}{c} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \\ \\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow X^TAX$$

所以有下面一一对应的关系：

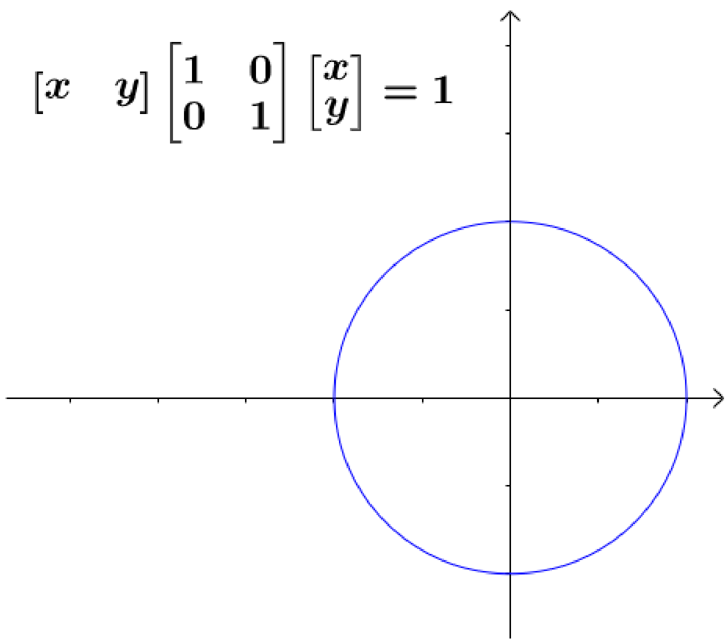
$$\textbf{对称矩阵} \iff \textbf{二次型矩阵} \iff \textbf{二次型矩阵}$$

在线代里面，就是通过一个对称矩阵，去研究某个二次型。

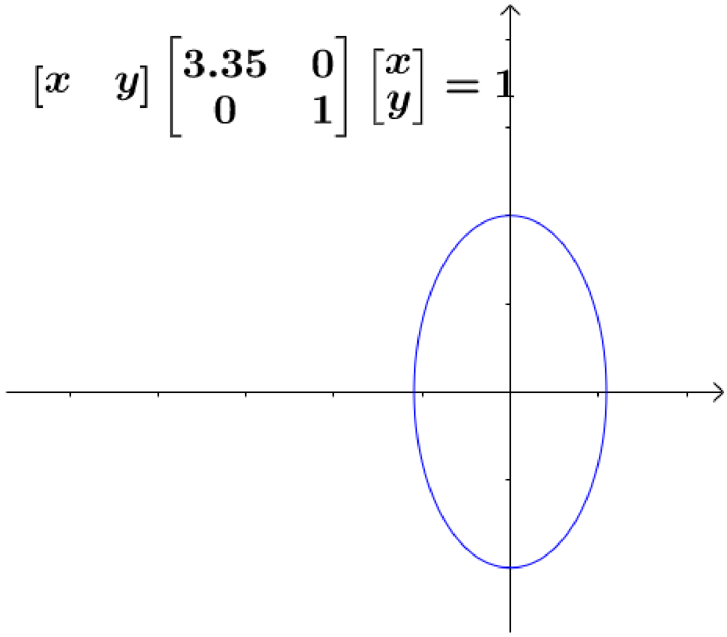
9.2.2 通过矩阵来研究有什么好处

圆锥曲线

我们来看下，这是一个圆：

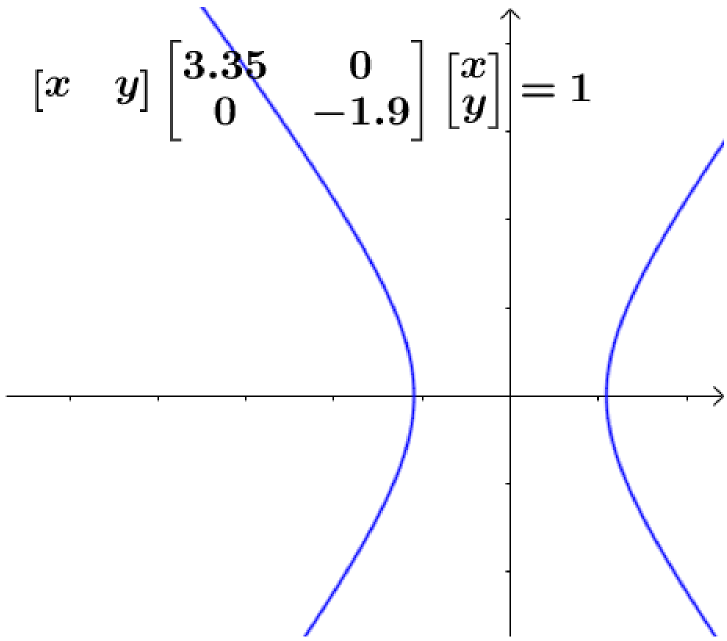


然后看改变一下二次型矩阵：



所以原来椭圆和圆之间是线性关系（通过矩阵变换就可以从圆变为椭圆）。

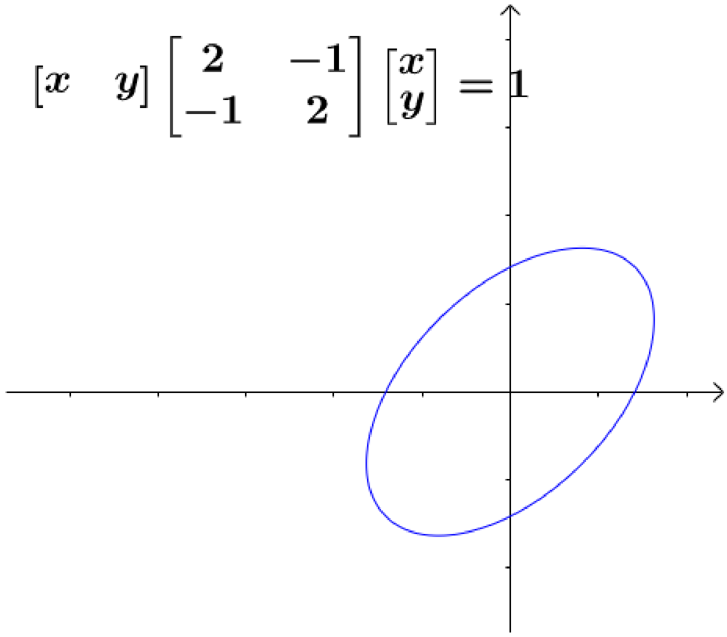
继续：



双曲线和圆之间也是线性关系（准确的说是仿射的）。其实圆、椭圆、双曲线之间关系很紧密的，统称为圆锥曲线，都是圆锥体和平面的交线。一个平面在圆锥体上运动，可以得到圆、椭圆、双曲线，这也是它们之间具有线性关系的来源（平面的运动是线性的、或者是仿射的）。

规范化

再改变下矩阵：



这个椭圆看起来有点歪，不太好处理，我们来把它扶正，这就叫做**规范化**。如果我们对矩阵有更深刻的认识，那么要把它扶正很简单。

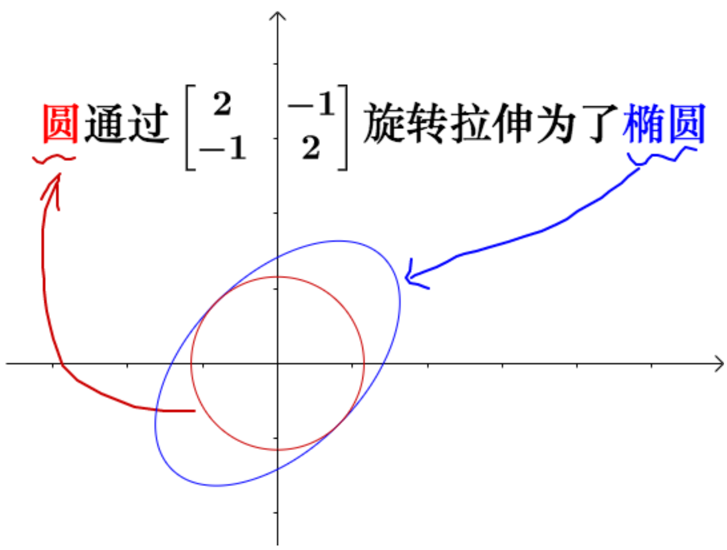
首先，矩阵代表了运动，包含：

- 旋转
- 拉伸
- 投影

对于方阵，因为没有维度的改变，所以就没有投影这个运动了，只有

- 旋转
- 拉伸

具体到上面的矩阵：



我把这个矩阵进行特征值分解：

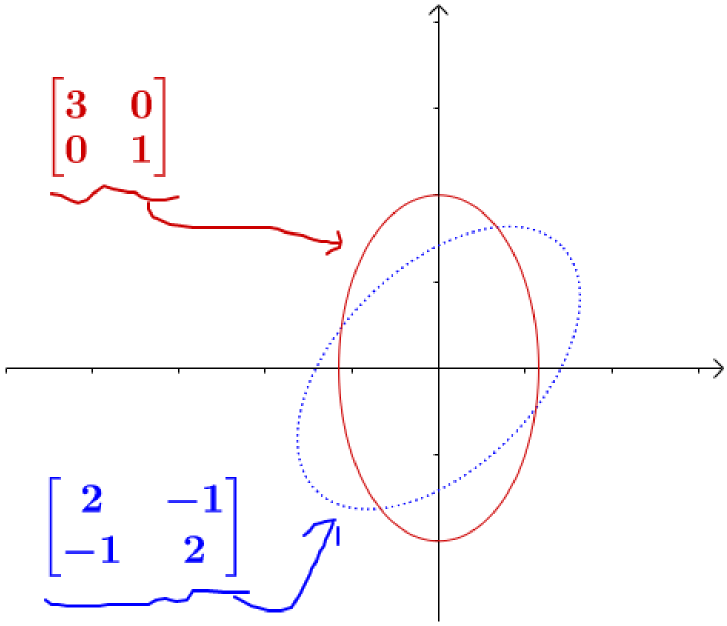
$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}}_{\text{列向量是单位特征向量并且互相正交}}\overbrace{\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}^{\text{对角矩阵}}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

对于二次型矩阵，都是对称矩阵，所以特征值分解总可以得到正交矩阵与对角矩阵。特征值分解实际上就是把运动分解了：

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}}_{\text{即有旋转也有拉伸}}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}^{\text{只有拉伸}}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

只有旋转（列向量是单位并且正交）

那么我们只需要保留拉伸部分，就相当于把矩阵扶正（图中把各自图形的二次型矩阵标注出来了）：



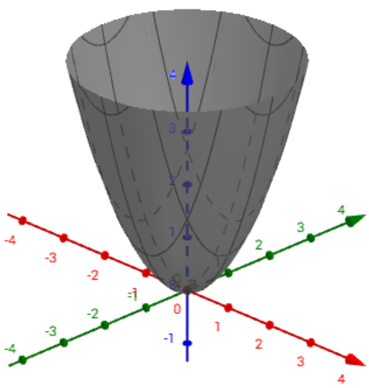
所以，用二次型矩阵进行规范化是非常轻松的事情。

正定

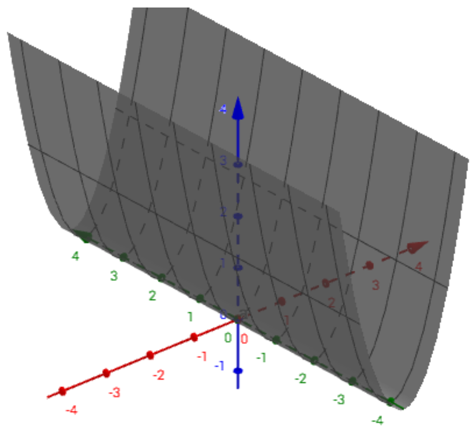
正定是对二次函数有效的一个定义，对方程无效。对于二次型函数，$f(x)=x^TAx$：

- $f(x)>0, x\neq 0, x\in\mathbb{R}$，则 f 为正定二次型，A 为正定矩阵
- $f(x)\geq 0, x\neq 0, x\in\mathbb{R}$，则 f 为半正定二次型，A 为半正定矩阵
- $f(x)<0, x\neq 0, x\in\mathbb{R}$，则 f 为负定二次型，A 为负定矩阵
- $f(x)\leq 0, x\neq 0, x\in\mathbb{R}$，则 f 为半负定二次型，A 为半负定矩阵
- 以上皆不是，就叫做不定

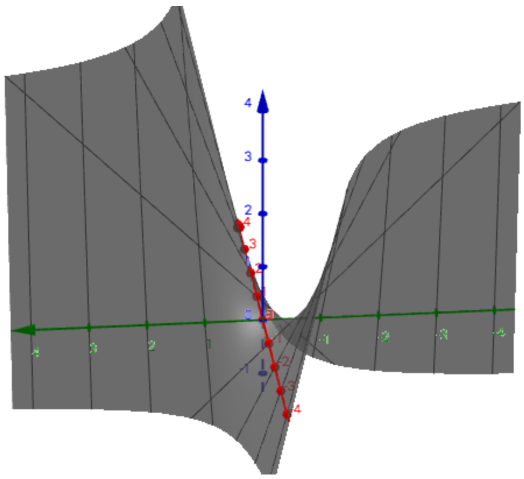
从图像上看，这是正定：



半正定：



不定：



既然二次型用矩阵来表示了，那么我们能否通过矩阵来判断是否正定呢？如果矩阵的特征值都大于0，则为正定矩阵。

10 理解矩阵特征值和特征向量 [11]

先给一个简短的回答，如果把矩阵看作是运动，对于运动而言，最重要的当然就是运动的速度和方向，那么（我后面会说明一下限制条件）：

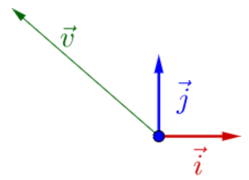
- 特征值就是运动的速度
- 特征向量就是运动的方向

既然运动最重要的两方面都被描述了，特征值、特征向量自然可以称为运动（即矩阵）的特征。

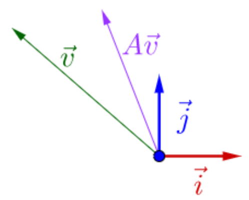
注意，由于矩阵是数学概念，非常抽象，所以上面所谓的运动、运动的速度、运动的方向都是广义的，在现实不同的应用中有不同的指代。

10.1 几何意义

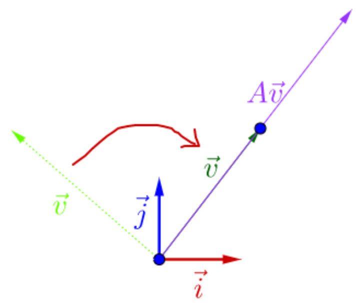
给定标准基 $\vec{i},\vec{j}$ 和向量 $\vec{v}$:



随便左乘一个矩阵 A，图像看上去没有什么特殊的:



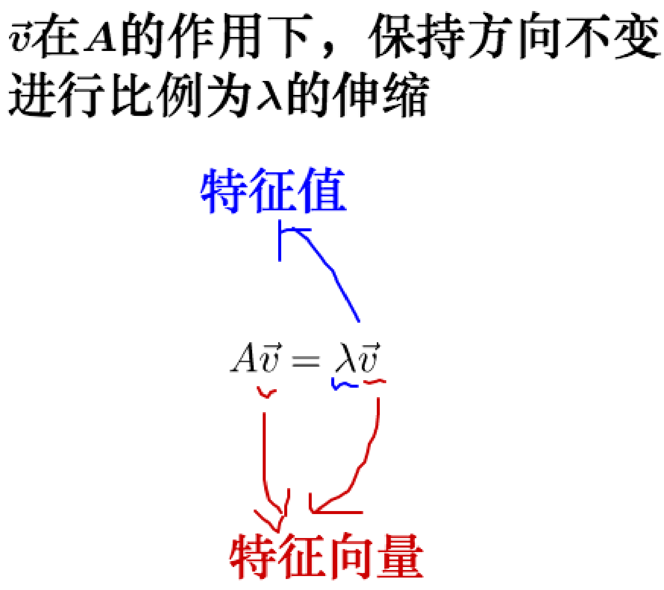
但是调整下 $\vec{v}$ 的方向，图像看上去就有点特殊了:



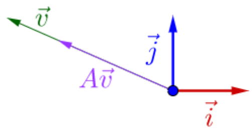
可以观察到，调整后的 $\vec{v}$ 和 $A\vec{v}$ 在同一根直线上，只是 $A\vec{v}$ 的长度相对 $\vec{v}$ 的长度变长了。

此时，我们就称 $\vec{v}$ 是 A 的特征向量，而 $A\vec{v}$ 的长度是 $\vec{v}$ 的长度的 λ 倍，λ 就是特征值。

从而，特征值与特征向量的定义式就是这样的:

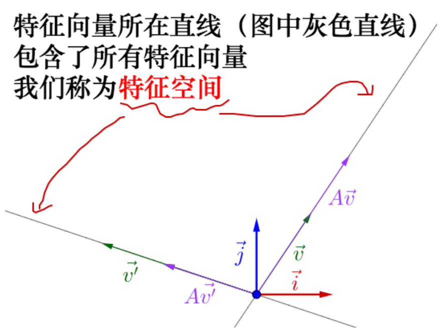


其实之前的 A 不止一个特征向量，还有另一个特征向量：



容易从 $A\vec{v}$ 相对于 $\vec{v}$ 是变长了还是缩短看出，这两个特征向量对应的特征 λ 值，一个大于 1，一个小于 1。

从特征向量和特征值的定义式还可以看出，特征向量所在直线上的向量都是特征向量：

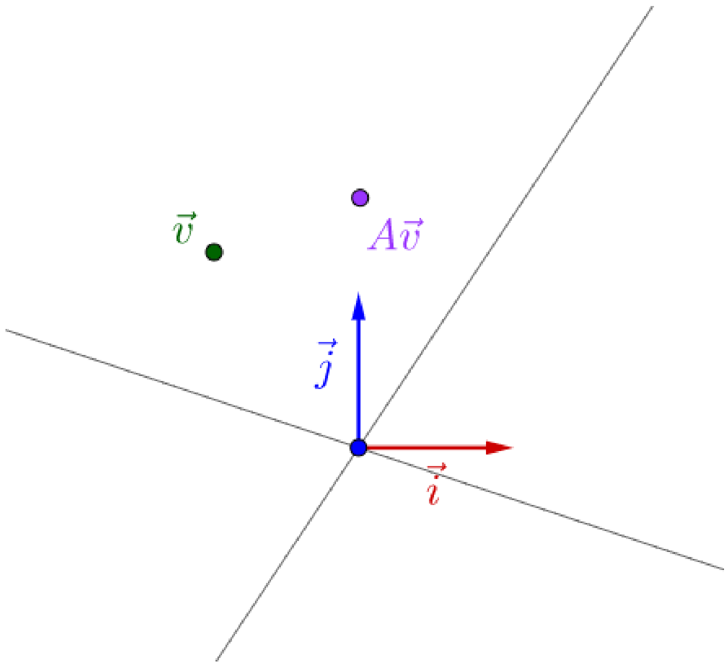


10.2 特征值、特征向量与运动的关系

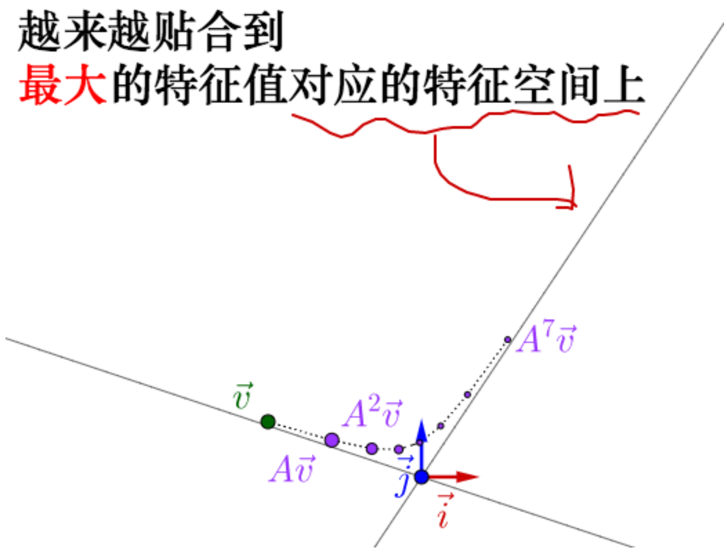
10.2.1 矩阵的混合

一般来说，矩阵我们可以看作某种运动，而二维向量可以看作平面上的一个点（或者说一个箭头）。对于点我们是可以观察的，但是运动我们是不能直接观察的。要观察矩阵所代表的运动，需要把它附加到向量上才观察的出来。

单独做一次矩阵的左乘（运动）：



似乎还看不出什么。但是如果我反复运用矩阵乘法的话：



也就是说，反复运用矩阵乘法，矩阵所代表的运动的最明显的特征，即速度最大的方向，就由最大特征值对应的特征向量展现了出来。

10.3 特征值分解

我们知道，对于矩阵 A 可以对角化的话，可以通过相似矩阵进行下面这样的特征值分解：

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

其中 Λ 为对角阵，P 的列向量是单位化的特征向量。

说的有点抽象，我们拿个具体的例子来讲：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}}_{\substack{\text{列向量是单位特征向量}\\\text{并且互相正交}}}\overbrace{\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}}^{\text{对角矩阵}}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

对于方阵而言，矩阵不会进行纬度的升降，所以矩阵代表的运动实际上只有两种：旋转和拉伸，所以最后的运动结果就是这两种的合成。

我们再回头看下刚才的特征值分解，实际上把运动给分解开了：

$$\boldsymbol{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}}_{\substack{\text{即有旋转}\\\text{也有拉伸}}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}}\overbrace{\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}}^{\text{只有拉伸}}\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}}$$

只有旋转（列向量是单位并且正交）

References

[1] “为什么学习线性代数？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/2112/

[2] “无法理解线性代数怎么办？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/2105/

[3] “从高斯消元法到矩阵乘法.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/755/

[4] “如何理解矩阵乘法？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/555/

[5] “如何通俗的解释仿射变换？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/244/

[6] "行列式的本质是什么？." [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/247/

[7] "如何理解矩阵的「秩」." [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/254/

[8] "为什么矩阵行秩等于列秩？." [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/290/

[9] "如何理解相似矩阵？." [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/491/

[10] "如何理解二次型？." [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/271/

[11] "如何理解矩阵特征值和特征向量?." [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/228/