常见公式

leolinuxer

July 14, 2020

1 初等数学

1.1 排列组合

$$A_n^m = n(n-1)(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{(n-m)}$$

二项式定理：

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

2 三角函数

和差角

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta))}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta))}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

和差化积

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\tan(\alpha)+\tan(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

$$\tan(\alpha)-\tan(\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

积化和差

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=-\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

二倍角公式

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1=1-2\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

万能公式设

$$\tan(\frac{\alpha}{2})=t,\quad \alpha\neq 2k\pi+\pi, k\in Z$$

$$\sin(\alpha)=\frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)+\cos^2(\alpha/2)}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)+\cos^2(\alpha/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan(\alpha)=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1-\tan^2(\alpha/2)}=\frac{2t}{1-t^2}$$

就是说 $\sin(\alpha),\cos(\alpha),\tan(\alpha)$ 都可以用 $\tan(\alpha/2)$ 来表示, 当要求一串函数式最值的时候, 就可以用万能公式, 推导成只含有一个变量的函数, 最值就很好求了.

$f(x)=\sin(2x)+2\sin(x)$，求最大值

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |2\sin(x)\cos(x)+2\sin(x)| \\
&= 2|\sin(x)(\cos(x)+1)| \\
&= 2|2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\cdot 2\cos^2(\frac{x}{2})| \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{(3\sin^2(\frac{x}{2}))(\cos^2(\frac{x}{2}))(\cos^2(\frac{x}{2}))(\cos^2(\frac{x}{2}))} \\
&\le \frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{[\frac{(3\sin^2(\frac{x}{2}))+(\cos^2(\frac{x}{2}))+(\cos^2(\frac{x}{2}))+(\cos^2(\frac{x}{2}))}{4}]^4} \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{9}{16} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

另，采用万能公式计算：

$$f(x)=\sin(2x)+2\sin(x)$$

$$f(t)=2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\cdot\frac{2t}{1+t^2}=\cdots=\frac{8t}{(1+t^2)^2}$$

$$f'(t)=\frac{8t}{(1+t^2)^2}-\frac{32t^2}{(1+t^2)^3}=\frac{8-32t^2}{(1+t^2)^3}$$

令 $f'(t)=0$，有 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以 $f(t)_{max}=f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3 复数

复数的**代数表示式**：

$$z=a+bi,\quad a,b\in R$$

复数的**三角表示式**：

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

复数的**指数表示式（欧拉公式）**：

$$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

令 $\theta=\pi$，可以得到**欧拉魔幻等式**：

$$e^{i\pi}+1=0$$

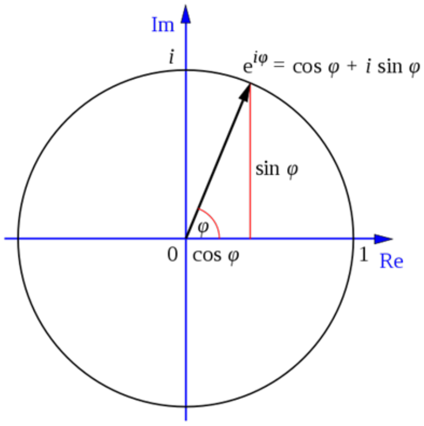
利用指数表示式，有：

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

同时，有：

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

圆上的欧拉公式如下图：



4 极限和微积分相关

4.1 一些级数的和

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.2 圆周率 π 的相关公式

圆周率 π 的公式：

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

4.3 关于 e

$$e = (1 + \frac{1}{n})^n \quad n \to \infty$$

4.4 积分运算的规则

$$\int_a^b [cf(x) + dg(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

利用上式参数变换的思想，有：

$$\int_1^b f(x)dx = \int_0^{b-1} du \quad x = x' + 1$$

例：若 $n > 0$，证明 $(1+x)^n$ 从 -1 到 z 的积分等于 $\frac{(1+z)^{n+1}}{n+1}$
证明：令 $x' = 1 + x$，那么有：

$$\int_{-1}^{z} (1+x)^n dx = \int_0^{z+1} x'^n dx' = [\frac{x'^{n+1}}{n+1}]_0^{z+1} = \frac{(1+z)^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

4.5 常见导数公式

原函数	导函数
链式法则 $y=f[g(x)]$	$y'=f'[g(x)]\times g'(x)$
反函数求导法则：若 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=g(y)$	$y'=\frac{1}{x'}$
$y=uv$	$y'=u'v+uv'$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$y=c$	$y'=0$
$y=n^x$	$y'=n^x\ln x$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{\ln a}$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos x^2}=\sec x^2$
$y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\sin x^2}=-\csc x^2$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (利用反函数求导法则)
$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=arccotx$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$
$y=arcsecx$	$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y=arccscx$	$y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$	$y'=chx$ 双曲函数
$y=chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$y'=shx$
$y=thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$y'=\frac{1}{chx^2}$
$y=arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y=archx=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y=arthx=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$	$y'=\frac{1}{1-x^2}$

4.6 泰勒公式

$$f(x)=\frac{f(a)}{0!}+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(x)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\quad(|x)<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

4.7 利用积分求无穷级数的和

对于函数 $f(x)$，它在 $x \in [a,b]$ 内的面积，用积分可以表示为：

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

同时，我们将 $x=a$ 到 $x=b$ 的区间分割成 n 个小区间，在每个分点上做垂线，它的高是该垂线的长度，这就构成了 n 个矩形；当 $n \to \infty$ 时，这些矩形的面积之和就等于 S。这些矩形的面积可以组成一个序列：

$$S_1, S_2, S_3, \cdots$$

使得当 n 无限增加、S_n 中最宽的矩形的宽度趋于零时，该序列趋于极限 A，

$$S_n \to A$$

这里，S_n 可以简写成：

$$S_n = \sum_j^n f(x_j)\Delta x$$

也就是说，我们可以看出极限和积分的关系为：

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(x_j)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

根据这个思想，我们可以求解一些无穷级数的和。

例题：证明当 $n->\infty$ 时，

$$S = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \to \frac{1}{k+1}$$

证明：考虑如下积分：

$$S = \int_0^1 x^k dx$$

将其在 $[0,1]$ 的区间内，平均分成 n 份，则每份的宽度为 $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$，且每份的高度分别为：

- $x_1 = \Delta x, y_1 = (\Delta x)^k = (\frac{1}{n})^k$
- $x_2 = 2\Delta x, y_2 = (2\Delta x)^k = (\frac{2}{n})^k$
- $\cdots$
- $x_n = n\Delta x, y_n = (n\Delta x)^k = (\frac{n}{n})^k$

所以，面积的和为:

$$\begin{aligned} S_n &= \Delta x((\Delta x)^k + (2\Delta x)^k + \cdots + (n\Delta x)^k) && (1) \\ &= \frac{1}{n}((\frac{1}{n})^k + (\frac{2}{n})^k + \cdots + (\frac{n}{n})^k) && (2) \\ &= \int_0^1 x^k dx = [\frac{x^(k+1)}{k+1}]_0^1 = \frac{1}{k+1} && (3) \end{aligned}$$

即:

$$S = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \to \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

例题：证明当 $n- > \infty$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}) \to 2(\sqrt{2}-1)$$

证明：考虑如下积分:

$$S = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (注意，积分区间是[0,2])$$

将其在 $[0,2]$ 的区间内，平均分成 $2n$ 份，则每份的宽度为 $\Delta x = \frac{2-0}{2n} = \frac{1}{n}$，且每份的高度分别为:

- $x_1 = \Delta x, y_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$
- $x_2 = 2\Delta x, y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\Delta x}}$
- $x_3 = 3\Delta x, y_1 = \frac{1}{\sqrt{3\Delta x}}$
- $\cdots$
- $x_n = n\Delta x, y_1 = \frac{1}{\sqrt{n\Delta x}}$
- $x_{n+1} = (n+1)\Delta x, y_1 = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\Delta x}}$
- $\cdots$
- $x_{2n} = (2n)\Delta x, y_1 = \frac{1}{\sqrt{(2n)\Delta x}}$

所以，面积的和为:

$$S_n = \Delta x(\frac{1}{\sqrt{\Delta x}} + \frac{1}{\sqrt{2\Delta x}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\Delta x}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)\Delta x}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n)\Delta x}}) \tag{4}$$

$$= \sqrt{\Delta x}(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}) \tag{6}$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 x^{-\frac{1}{2}dx} = [2x^{\frac{1}{2}}]_0^2 = 2\sqrt{2} \tag{7}$$

也就是说，级数:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2}$$

所以，题目中的级数:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$