题目汇总 II

leolinuxer

August 21, 2020

Contents

1 高效寻找素数

`https://github.com/labuladong/fucking-algorithm/blob/master/%E9%AB%98%E9%A2%91%E9%9D%A2%E8%AF%95%E7%B3%BB%E5%88%97/%E6%89%93%E5%8D%B0%E7%B4%A0%E6%95%B0.md`

高效解决这个问题的核心思路是：

首先从 2 开始，我们知道 2 是一个素数，那么 $2 \times 2 = 4, 3 \times 2 = 6, 4 \times 2 = 8...$ 都不可能是素数了。

然后我们发现 3 也是素数，那么 $3 \times 2 = 6, 3 \times 3 = 9, 3 \times 4 = 12...$ 也都不可能是素数了。

看到这里，你是否有点明白这个排除法的逻辑了呢？先看我们的第一版代码：

```
int countPrimes(int n) {
    boolean[] isPrim = new boolean[n];
    // 将数组都初始化为 true
    Arrays.fill(isPrim, true);

    for (int i = 2; i < n; i++)
```

```
        if (isPrim[i])
            // i 的倍数不可能是素数了
            for (int j = 2 * i; j < n; j += i)
                    isPrim[j] = false;

    int count = 0;
    for (int i = 2; i < n; i++)
        if (isPrim[i]) count++;

    return count;
}
```

还有两个细微的地方可以优化：

首先，回想刚才判断一个数是否是素数的 isPrime 函数，由于因子的对称性，其中的 for 循环只需要遍历 [2,sqrt(n)] 就够了。这里也是类似的，我们外层的 for 循环也只需要遍历到 sqrt(n)：

```
for (int i = 2; i * i < n; i++)
    if (isPrim[i])
```

除此之外，很难注意到内层的 for 循环也可以优化。我们之前的做法是：

```
for (int j = 2 * i; j < n; j += i)
    isPrim[j] = false;
```

这样可以把 i 的整数倍都标记为 false，但是仍然存在计算冗余。

比如 $n = 25$，$i = 4$ 时算法会标记 $4 \times 2 = 8$，$4 \times 3 = 12$ 等等数字，但是这两个数字已经被 $i = 2$ 和 $i = 3$ 的 2×4 和 3×4 标记了。

我们可以稍微优化一下，让 j 从 i 的平方开始遍历，而不是从 2 * i 开始：

```
for (int j = i * i; j < n; j += i)
    isPrim[j] = false;
```

这样，素数计数的算法就高效实现了，其实这个算法有一个名字，叫做 Sieve of Eratosthenes。看下完整的最终代码：

```
int countPrimes(int n) {
    boolean[] isPrim = new boolean[n];
    Arrays.fill(isPrim, true);
```

```
    for (int i = 2; i * i < n; i++)
        if (isPrim[i])
            for (int j = i * i; j < n; j += i)
                isPrim[j] = false;

    int count = 0;
    for (int i = 2; i < n; i++)
        if (isPrim[i]) count++;

    return count;
}
```

该算法的时间复杂度比较难算，显然时间跟这两个嵌套的 for 循环有关，其操作数应该是：

$n/2 + n/3 + n/5 + n/7 + ... = n \times (1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7...)$

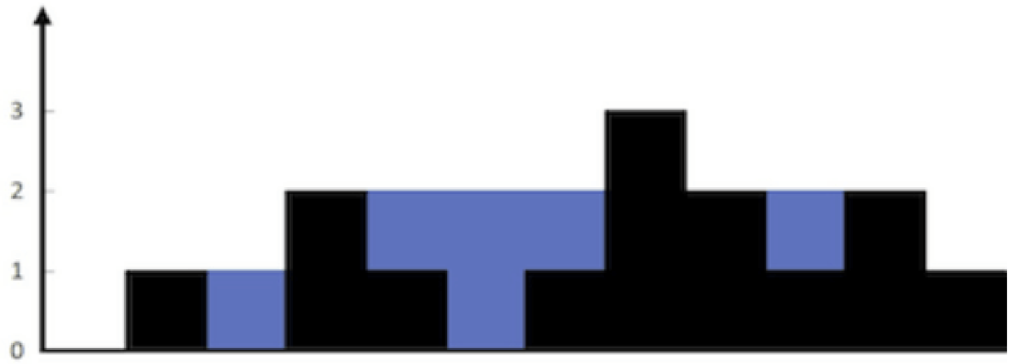
括号中是素数的倒数。其最终结果是 O(N * loglogN)，有兴趣的读者可以查一下该算法的时间复杂度证明。

2 接雨水问题详解

https://github.com/labuladong/fucking-algorithm/blob/master/%E9%AB%98%E9%A2%91%E9%9D%A2%E8%AF%95%E7%B3%BB%E5%88%97/%E6%8E%A5%E9%9B%A8%E6%B0%B4.md

先看一下题目：

给定 *n* 个非负整数表示每个宽度为 1 的柱子的高度图，计算按此排列的柱子，下雨之后能接多少雨水。



上面是由数组 [0,1,0,2,1,0,1,3,2,1,2,1] 表示的高度图，在这种情况下，可以接 6 个单位的雨水（蓝色部分表示雨水）。 **感谢 Marcos** 贡献此图。

示例:

```
输入: [0,1,0,2,1,0,1,3,2,1,2,1]
输出: 6
```

就是用一个数组表示一个条形图，问你这个条形图最多能接多少水。

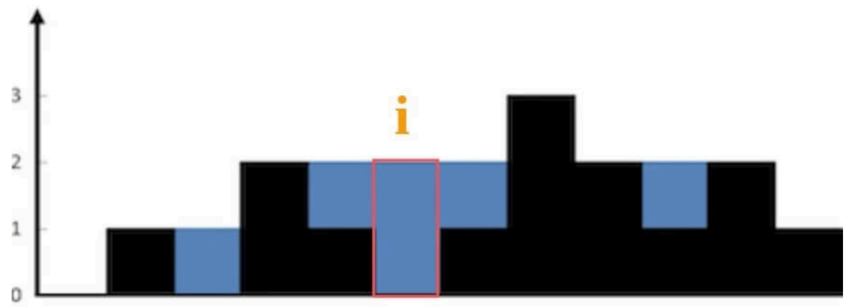
```java
int trap(int[] height);
```

下面就来由浅入深介绍暴力解法 -> 备忘录解法 -> 双指针解法，在 O(N) 时间 O(1) 空间内解决这个问题。

2.1 核心思路

我第一次看到这个问题，无计可施，完全没有思路，相信很多朋友跟我一样。所以对于这种问题，我们不要想整体，而应该去想局部；就像之前的文章处理字符串问题，不要考虑如何处理整个字符串，而是去思考应该如何处理每一个字符。

这么一想，可以发现这道题的思路其实很简单。具体来说，仅仅对于位置 i，能装下多少水呢?

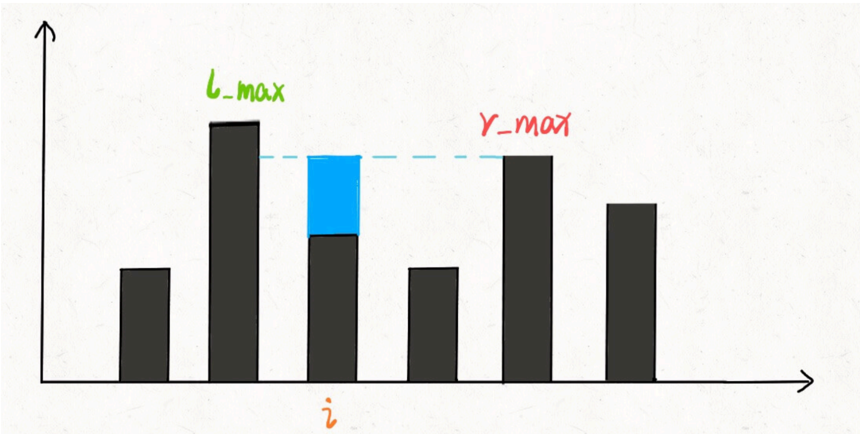


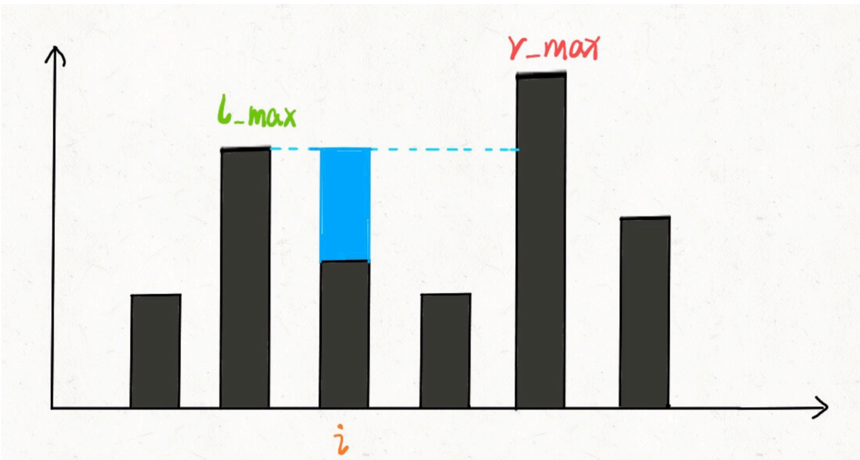
能装 2 格水。为什么恰好是两格水呢？因为 height[i] 的高度为 0，而这里最多能盛 2 格水，2-0=2。

为什么位置 i 最多能盛 2 格水呢？因为，位置 i 能达到的水柱高度和其左边的最高柱子、右边的最高柱子有关，我们分别称这两个柱子高度为 l_max 和 r_max；位置 i 最大的水柱高度就是 min(l_max, r_max)。

更进一步，对于位置 i，能够装的水为：

```
water[i] = min(
               # 左边最高的柱子
               max(height[0..i]),
               # 右边最高的柱子
               max(height[i..end])
            ) - height[i]
```





这就是本问题的核心思路，我们可以简单写一个暴力算法：

```
int trap(vector<int>& height) {
    int n = height.size();
    int ans = 0;
    for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
```

```cpp
        int l_max = 0, r_max = 0;
        // 找右边最高的柱子
        for (int j = i; j < n; j++)
            r_max = max(r_max, height[j]);
        // 找左边最高的柱子
        for (int j = i; j >= 0; j--)
            l_max = max(l_max, height[j]);
        // 如果自己就是最高的话，
        // l_max == r_max == height[i]
        ans += min(l_max, r_max) - height[i];
    }
    return ans;
}
```

有之前的思路，这个解法应该是很直接粗暴的，时间复杂度 $O(N^2)$，空间复杂度 O(1)。但是很明显这种计算 r_max 和 l_max 的方式非常笨拙，一般的优化方法就是备忘录。

2.2 备忘录优化

之前的暴力解法，不是在每个位置 i 都要计算 r_max 和 l_max 吗？我们直接把结果都缓存下来，别傻不拉几的每次都遍历，这时间复杂度不就降下来了嘛。

我们开两个数组 r_max 和 l_max 充当备忘录，l_max[i] 表示位置 i 左边最高的柱子高度，r_max[i] 表示位置 i 右边最高的柱子高度。预先把这两个数组计算好，避免重复计算：

```cpp
int trap(vector<int>& height) {
    if (height.empty()) return 0;
    int n = height.size();
    int ans = 0;
    // 数组充当备忘录
    vector<int> l_max(n), r_max(n);
    // 初始化 base case
    l_max[0] = height[0];
    r_max[n - 1] = height[n - 1];
    // 从左向右计算 l_max
    for (int i = 1; i < n; i++)
        l_max[i] = max(height[i], l_max[i - 1]);
    // 从右向左计算 r_max
    for (int i = n - 2; i >= 0; i--)
        r_max[i] = max(height[i], r_max[i + 1]);
    // 计算答案
    for (int i = 1; i < n - 1; i++)
```

```
        ans += min(l_max[i], r_max[i]) - height[i];
    return ans;
}
```

这个优化其实和暴力解法差不多，就是避免了重复计算，把时间复杂度降低为 O(N)，已经是最优了，但是空间复杂度是 O(N)。下面来看一个精妙一些的解法，能够把空间复杂度降低到 O(1)。

2.3 双指针解法

这种解法的思路是完全相同的，但在实现手法上非常巧妙，我们这次也不要用备忘录提前计算了，而是用双指针边走边算，节省下空间复杂度。

首先，看一部分代码：

```
int trap(vector<int>& height) {
    int n = height.size();
    int left = 0, right = n - 1;

    int l_max = height[0];
    int r_max = height[n - 1];

    while (left <= right) {
        l_max = max(l_max, height[left]);
        r_max = max(r_max, height[right]);
        left++; right--;
    }
}
```

对于这部分代码，请问 l_max 和 r_max 分别表示什么意义呢？

很容易理解，l_max 是 height[0..left] 中最高柱子的高度，r_max 是 height[right..end] 的最高柱子的高度。

明白了这一点，直接看解法：

```
int trap(vector<int>& height) {
    if (height.empty()) return 0;
    int n = height.size();
    int left = 0, right = n - 1;
    int ans = 0;

    int l_max = height[0];
    int r_max = height[n - 1];
```

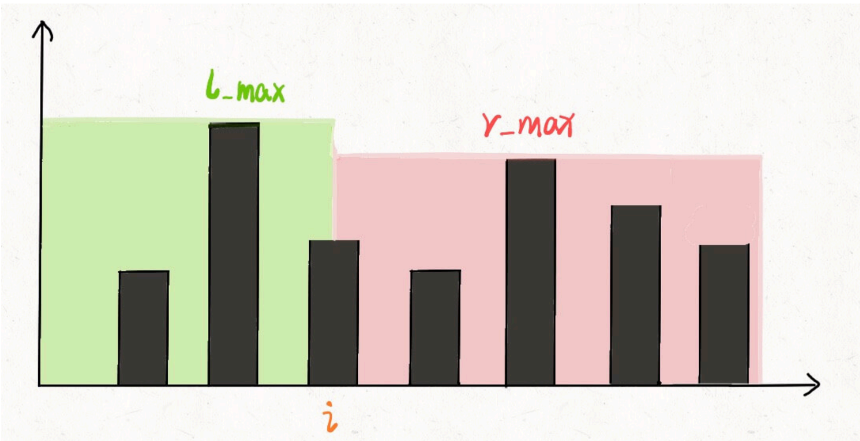
```
    while (left <= right) {
        l_max = max(l_max, height[left]);
        r_max = max(r_max, height[right]);

        // ans += min(l_max, r_max) - height[i]
        if (l_max < r_max) {
            ans += l_max - height[left];
            left++;
        } else {
            ans += r_max - height[right];
            right--;
        }
    }
    return ans;
}
```

你看，其中的核心思想和之前一模一样，换汤不换药。但是细心的读者可能会发现次解法还是有点细节差异：

之前的备忘录解法，l_max[i] 和 r_max[i] 代表的是 height[0..i] 和 height[i..end] 的最高柱子高度。

```
ans += min(l_max[i], r_max[i]) - height[i];
```



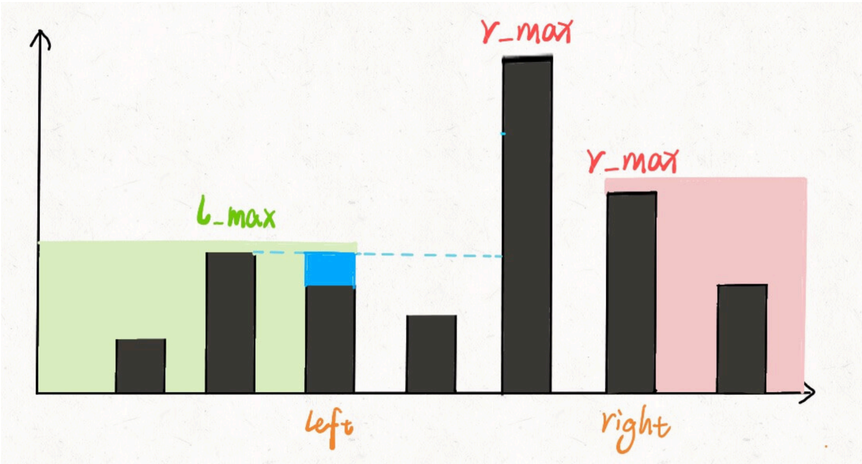
但是双指针解法中，l_max 和 r_max 代表的是 height[0..left] 和 height[right..end] 的最高柱子高度。比如这段代码：

```
if (l_max < r_max) {
    ans += l_max - height[left];
    left++;
```

```
}
```

此时的 l_max 是 left 指针左边的最高柱子，但是 r_max 并不一定是 left 指针右边最高的柱子，这真的可以得到正确答案吗？

其实这个问题要这么思考，我们只在乎 min(l_max, r_max)。对于上图的情况，我们已经知道 l_max < r_max 了，至于这个 r_max 是不是右边最大的，不重要，重要的是 height[i] 能够装的水只和 l_max 有关。



3 如何高效进行模幂运算

https://labuladong.gitbook.io/algo/gao-pin-mian-shi-xi-lie/superpower

LeetCode 372 题 Super Pow：让你进行巨大的幂运算，然后求余数。

```
int superPow(int a, vector<int>& b);
```

要求你的算法返回幂运算 a^b 计算结果与 1337 取模（mod，也就是余数）后的结果。就是你先得计算幂 a^b，但是这个 b 会非常大，所以 b 是用数组的形式表示的。

这个算法其实就是广泛应用于离散数学的模幂算法，至于为什么要对 1337 求模我们不管，单就这道题可以有三个难点：

- **一是如何处理用数组表示的指数**，现在 b 是一个数组，也就是说 b 可以非常大，没办法直接转成整型，否则可能溢出。你怎么把这个数组作为指数，进行运算呢？
- **二是如何得到求模之后的结果**？按道理，起码应该先把幂运算结果算出来，然后做% 1337 这个运算。但问题是，指数运算你懂得，真实结果肯定会大得吓人，也就是说，算出来真实结果也没办法表示，早都溢出报错了。
- **三是如何高效进行幂运算**，进行幂运算也是有算法技巧的，如果你不了解这个算法，后文会讲解。

那么对于这几个问题，我们分开思考，逐个击破。

3.1 如何处理数组指数

首先明确问题：现在 b 是一个数组，不能表示成整型，而且数组的特点是随机访问，删除最后一个元素比较高效。

不考虑求模的要求，以 b = [1,5,6,4] 来举例，结合指数运算的法则，我们可以发现这样的一个规律：

$$
\begin{aligned}
a^{[1,5,6,4]} &= a^4 \times a^{[1,5,6,0]} \\
&= a^4 \times (a^{[1,5,6]})^{10}
\end{aligned}
$$

看到这，我们的老读者肯定已经敏感地意识到了，这就是递归的标志呀！因为问题的规模缩小了：

```
   superPow(a, [1,5,6,4])
=>  superPow(a, [1,5,6])
```

那么，发现了这个规律，我们可以先简单翻译出代码框架：

```cpp
// 计算 a 的 k 次方的结果
// 后文我们会手动实现
int mypow(int a, int k);

int superPow(int a, vector<int>& b) {
    // 递归的 base case
    if (b.empty()) return 1;
    // 取出最后一个数
    int last = b.back();
    b.pop_back();
    // 将原问题化简，缩小规模递归求解
    int part1 = mypow(a, last);
    int part2 = mypow(superPow(a, b), 10);
    // 合并出结果
    return part1 * part2;
}
```

到这里，应该都不难理解吧！我们已经解决了 b 是一个数组的问题，现在来看看如何处理 mod，避免结果太大而导致的整型溢出。

3.2 如何处理 mod 运算

首先明确问题：由于计算机的编码方式，形如 (a * b) % base 这样的运算，乘法的结果可能导致溢出，我们希望找到一种技巧，能够化简这种表达式，避免溢出同时得到结果。

比如在二分查找中，我们求中点索引时用 (l+r)/2 转化成 l+(r-l)/2，避免溢出的同时得到正确的结果。

那么，说一个关于模运算的技巧吧，毕竟模运算在算法中比较常见：

```
(a * b) % k = (a % k)(b % k) % k
```

证明很简单，假设（其中 $A\ B\ C\ D$ 是任意整数），那么：

$$
\begin{aligned}
& ak + B;\ b = Ck + D \\
& \therefore ab = AC * k^2 + AD * k + BC * k + BD \\
& \therefore ab\%k = BD\%k \\
& \because a\%k = B;\ b\%k = D \\
& \therefore (a\%k)(b\%k)\%k = BD\%k = ab\%k
\end{aligned}
$$

综上，就可以得到我们化简求模的等式了。

换句话说，**对乘法的结果求模，等价于先对每个因子都求模，然后对因子相乘的结果再求模**。

那么扩展到这道题，求一个数的幂不就是对这个数连乘么？所以说只要简单扩展刚才的思路，即可给幂运算求模：

```cpp
int base = 1337;
// 计算 a 的 k 次方然后与 base 求模的结果
int mypow(int a, int k) {
    // 对因子求模
    a %= base;
    int res = 1;
    for (int _ = 0; _ < k; _++) {
        // 这里有乘法，是潜在的溢出点
        res *= a;
        // 对乘法结果求模
        res %= base;
    }
    return res;
}

int superPow(int a, vector<int>& b) {
    if (b.empty()) return 1;
    int last = b.back();
    b.pop_back();

```

```
    int part1 = mypow(a, last);
    int part2 = mypow(superPow(a, b), 10);
    // 每次乘法都要求模
    return (part1 * part2) % base;
}
```

你看，先对因子 a 求模，然后每次都对乘法结果 res 求模，这样可以保证 res *= a 这句代码执行时两个因子都是小于 base 的，也就一定不会造成溢出，同时结果也是正确的。

至此，这个问题就已经完全解决了，已经可以通过 LeetCode 的判题系统了。但是有的读者可能会问，这个求幂的算法就这么简单吗，直接一个 for 循环累乘就行了？复杂度会不会比较高，有没有更高效地算法呢？

有更高效地算法的，但是单就这道题来说，已经足够了。

因为你想想，调用 mypow 函数传入的 k 最多有多大？k 不过是 b 数组中的一个数，也就是在 0 到 9 之间，所以可以说这里每次调用 mypow 的时间复杂度就是 O(1)。整个算法的时间复杂度是 O(N)，N 为 b 的长度。

但是既然说到幂运算了，不妨顺带说一下如何高效计算幂运算吧。

3.3 如何高效求幂

快速求幂的算法不止一个，就说一个我们应该掌握的基本思路吧。利用幂运算的性质，我们可以写出这样一个递归式：

$$a^b = \begin{cases} a \times a^{b-1}, \text{ b 为奇数} \\ (a^{b/2})^2, \text{ b 为偶数} \end{cases}$$

这个思想肯定比直接用 for 循环求幂要高效，因为有机会直接把问题规模（b 的大小）直接减小一半，该算法的复杂度肯定是 log 级了。

那么就可以修改之前的 mypow 函数，翻译这个递归公式，再加上求模的运算：

```
int base = 1337;

int mypow(int a, int k) {
    if (k == 0) return 1;
    a %= base;

    if (k % 2 == 1) {
        // k 是奇数
        return (a * mypow(a, k - 1)) % base;
    } else {
        // k 是偶数
```

```
        int sub = mypow(a, k / 2);
        return (sub * sub) % base;
    }
}
```