信息论 [1]

August 11, 2020

Contents

1 信息熵

1.1 热力学中的熵

熵的概念最早起源于物理学，用于度量一个热力学系统的无序程度，也就是系统混乱程序。

熵增定律指出：在一个孤立系统里，如果没有外力做功，其总混乱度（熵）会不断增大。

1.2 信息论中的熵

在信息论中，熵的概念和热力学中是类似的，描述的是“信息的不确定程度”。

- 热力学熵：**系统的混乱程度**
- 信息熵：**信息的不确定性的度量**

所以信息中的不确定性类似于热力学中系统的混乱程度。也就是说，信息的不确定程度越大，信息熵也就越大。那什么样的信息不确定程度大呢?

比如抛一枚硬币，如果我来猜正反的话，那么我基本只能靠瞎蒙，因为不确定程度很大，正反的概率都是 0.5。对于抛一次硬币猜正反这类事件来说，它的不确定程度很大，信息熵也很大。

如果中国男足和巴西男足比赛，让我来猜胜负，那么我几乎可以断言，巴西队一定会赢。也就是巴西队和中国队胜负这个事件的不确定程度很小，信息熵也就很小。如果比赛前我告诉你一条信息“巴西队肯定会赢“，那么这条信息的信息量几乎为零，因为这条信息并没有降低信息的不确定度。

1.3 信息、信息熵、信息量的关系

上面提到了信息熵、信息、信息量，它们之间的比较如下:

- 凡是在一种情况下能减少不确定性的任何事物都叫**信息**，否则叫作废话。比如经常会碰到有人絮絮叨叨，不知所云，说了好久不知道要表达什么。从信息论的角度来看，这些话就不包含信息。

- **信息熵**是一个绝对值，用来衡量信息不确定程度的绝对大小。

- **信息量**是一个相对值，表示的是在给出一条信息后，信息熵前后的减小值。如果信息熵减小的越大，说明这条信息的信息量越大。比如福彩 35 选 7，如果有人直接告诉你这 7 个数字，那么这条信息的信息量就超级大，因为它直接将信息熵降为 0。

1.4 信息熵的定量表述

香农把随机变量 X 的熵值 定义如下:

$$H(X) = -\sum_i P(x_i) \log_b P(x_i)$$

b 是对数所使用的底。当 $b = 2$，熵的单位是 bit。

P 为 X 的概率质量函数（probability mass function），我们可以理解为事件 x_i 发生的概率。

公式看起来可怕，其实非常简单。让我们用抛硬币来举例，“抛一次硬币得到正面或者反面”这个随机变量 X 的信息熵为:

$$H(X) = -(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}) = -\log_2\frac{1}{2} = 1$$

也就是抛一次硬币是正面还是反面这个事件的信息熵只需要 1 bit，也就是只需要用 1 位的二进制数就可以表示这个信息大小。也就是说，在计算机中，我们给抛硬币这个事件进行编码，只需要 1 个 bit 的信息就可以描述了，比如 0 带代表反面，1 代表正面。

2 信息论的一个例子

1000 桶水，其中一桶有毒，猪喝毒水后会在 15 分钟内死去，想用一个小时找到这桶毒水，至少需要几头猪？

这道题看起来像是一道算法题，本质上却是披着羊皮的信息论问题。解答这道题并不是我的目的，我的目的是用信息论的思维来思考，达到触类旁通，一通百通。

用信息论去思考的另一个好处就是，信息论给了这类问题的一个边界，让我们在边界范围内思考问题。很难想象，70 多年前的香农已经用严格的理论证明为这类问题设定了一个极限，任何想逾越这个极限去解决问题的人最后都会被证明是徒劳的。

这也是理论武装头脑的好处，当别人还在尝试是否有更优的解法时，你可以直接给出最优答案，用信息论降维打击。即使我可能暂时无法想出具体的方案，但我知道这类问题的一个理论极限在哪里，没有必要为超越极限做无用功。

2.1 题目的简化版本

在我们学习了信息熵的知识以后，让我们再来看题目。原题其实略微复杂一些，先将题目简化一下：1000 桶水，其中一桶有毒，猪喝毒水后会在 15 分钟内死去，想用 15 分钟内找到这桶毒水，至少需要几头猪?

首先，“1000 桶水其中有一桶有毒”可以用随机变量 X 来描述（$X = i$ 表示第 i 桶水有毒），那么这个随机变量 X 的信息熵为：

$$H(X) = -\sum_{i}^{N} P(X_i)\log_2 P(X_i) = -\sum^{1000} \frac{1}{1000}\log_2 \frac{1}{1000} = -\log_2 \frac{1}{1000} = 9.966$$

也就是说，在计算机中，我们给“哪通水有毒”这个事件进行编码，只需要 10 个 bit 的信息就可以描述了，比如 0000000001 代表第一桶水有毒。

1 只猪喝水以后的要么活着，要么死去，一共有两种状态，所以”1 只猪喝完水以后的状态“这个随机变量 Y 的信息熵为

$$H(Z) = -(\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2}) = -\log_2 \frac{1}{2} = 1$$

n 只猪喝完水会有 2^n 种状态，即”n 只猪喝完水以后的状态” 这个随机变量 Y 的信息熵为：

$$H(Y) = \sum_{i=1}^{2^n} P(y_i)I(y_i) = -\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n}\log_2 \frac{1}{2^n} = -\log_2 \frac{1}{2^n} = n$$

所以，按照题目要求，如果至少需要 n 头猪能够找到这桶毒水，那么随机变量 Y 的信息熵必须要大于随机变量 X 的信息熵，也就是 $H(Y) >= H(X)$，即 $n >= 9.966$，所以 $n = 10$。

其实，上面的信息熵计算的简化版本可以写成如下更好理解的形式：

$$2^n >= 1000$$

同样可以解得 $n = 10$ ，虽然形式简单，但我们一定要记住它背后的原理是信息熵。

2.2 简化后题目的具体方案

Figure 1: 编码方式

我们将 1000 桶水按照 2 进制编码，如图第一行，需要 10 位二进制数。于是有

- 第 1 桶水对应上图最右侧位置 1 的数字是 1，其它数字都是 0，也就是 00000 00001b，其中 b 代表二进制数。
- 第 10 桶水对应上图位置 4 和位置 2 的数字是 1，其它数字都是 0，也就是 00000 01010b。
- 同理，任意一桶水，都可以对应上面唯一的一个二进制数。

于是，我按照如下方案让猪进行喝水，如上图所示：

- 1 号猪喝位置 1 的数字是 1 的水，也就是 1、3、5、7、9 ...
- 2 号猪喝位置 2 的数字是 1 的水，也就是 2、3、6、7、10 ...
- ……

如果 15 分钟后 1，3，5 号猪被毒死，那么对应的二进制编码就是 00000 10101b，也就是 21 号水桶有毒。更一般的，猪死的任何一种排列方式都对应了二进制的唯一编码。

2.3 原题目

1000 桶水，其中一桶有毒，**猪喝毒水后会在 15 分钟内死去，想用一个小时找到这桶毒水**，至少需要几头猪?

有了前面简化的版本的理解，我们容易得知

”1000 桶水其中有一桶有毒“这个随机变量 X 的信息熵为:

$$H(X) = -\log_2 \frac{1}{1000} = 9.966$$

而对于猪的状态就不太一样了，我们可以想象一下，一只猪在一个小时内会有几种状态?

- 在第 0 分钟的时候喝了一桶水以后，第 15 分钟死去。
- 第 15 分钟依然活着，喝了一桶水以后，第 30 分钟死去。
- 第 30 分钟依然活着，喝了一桶水以后，第 45 分钟死去。
- 第 45 分钟依然活着，喝了一桶水以后，第 60 分钟死去。
- 第 45 分钟依然活着，喝了一桶水以后，第 60 分钟依然活着。

可见，1 只猪 1 个小时以后会有 5 种状态，所以” 1 只猪 1 个小时后的状态 “这个随机变量 Z 的信息熵为:

$$H(Z) = -(5 \times \frac{1}{5}\log_2 \frac{1}{5}) = \log_2 5 = 2.3219$$

n 只猪 1 个小时后会有 5^n 种状态，即”n 只猪 1 个小时以后的状态” 这个随机变量 Y 的信息熵为:

$$H(Y) = \sum_{i=1}^{5^n} P(y_i)I(y_i) = -\sum_{i=1}^{5^n} \frac{1}{5^n}\log_2 \frac{1}{5^n} = -\log_2 \frac{1}{5^n} = n\log_2 5 = 2.3219n$$

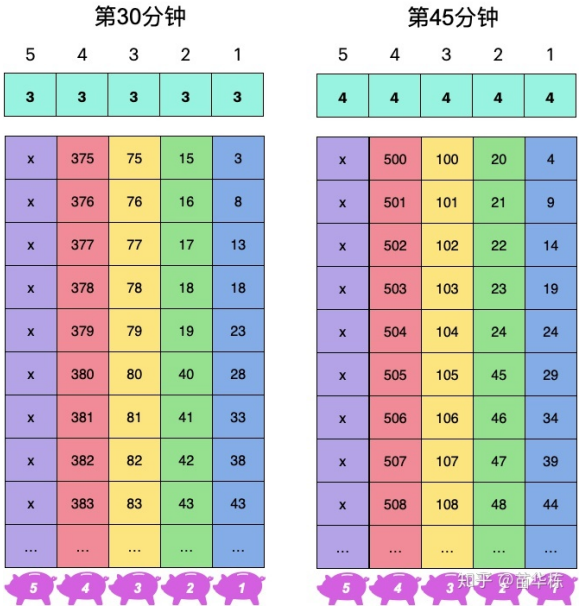
所以，按照题目要求，如果至少需要 n 头猪能够找到这桶毒水，那么随机变量 Y 的信息熵必须要大于随机变量 X 的信息熵，也就是：$H(Y) >= H(X)$，即 $n >= 9.966/2.3219 = 4.292$，所以 $n = 5$。

事实上，对于 n = 5 来说，不仅可以检测 1000 桶水，甚至检测 3000 桶水都是没有问题的。有兴趣的童鞋可以试着计算一下。

到此，香农给了我们一个理论极限，但是具体的方案还是需要我们自己进行构造。得出 n=5 是依靠我们的理论功底，而得出具体的方案就是我们的工程水平了。

根据前面简化版本的二进制编码方式的思路，我们是不是可以利用猪的 5 种状态构造一个 5 进制编码方式呢? 如下图所示。

(a) 第一张



(b) 第二章

Figure 2: 编码方式

首先，将 1000 桶水按照 5 进制编码的方式排列，如上图所示，需要 5 位 5 进制数。然后按照如下方案让猪进行喝水，如上图所示：

- 1 号猪第 0 分钟喝位置 1 的数字是 1 的水，如图所示，也就是 1、6、11、16、21...
- 如果第 15 分钟活着，喝位置 1 的数字是 2 的水，如图所示，也就是 2、7、12、17、22...
- 如果第 30 分钟活着，喝位置 1 的数字是 3 的水，如图所示，也就是 3、8、13、18、23...
- 如果第 45 分钟活着，喝位置 1 的数字是 4 的水，如图所示，也就是 4、9、14、19、24...
- 类似的，2 号猪喝位置 2 的水...

上面，猪的编号代表 5 进制编码数字所在的位数，1 号猪代表最末位，5 号猪代表最高位。而第几分钟死代表当前位数的权重，15 分钟死表示权重是 1，30 分钟死表示权重是 2，... ，60 分钟死表示权重是 4，60 分钟依然活着表示权重是 0。

如果 1 号猪第 30 分钟死了，2 号猪第 15 分钟死了，3 号猪第 45 分钟死了，4，5 号都活到了最后。则毒水对应的 5 进制编码是

$$0 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 2 \times 5^0 = 82$$

也就是第 82 桶水有毒。

References

[1] “1000 桶水，其中一桶有毒，猪喝毒水后会在 15 分钟内死去，想用一个小时找到这桶毒水，至少需要几头猪.” [Online]. Available: https://daily.zhihu.com/story/9724781