求解五次以下方程的方法 [1]

leolinuxer

July 1, 2020

Contents

1 一次、二次、三次、四次方程的求解

1.1 一次方程

一次方程:

$$px + q = 0, p, q \in Z, p \neq 0$$

的解为:

$$x = -\frac{q}{p}$$

1.2 二次方程

一般的二次方程形式为:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

方程的解为:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.3 三次方程

一般的三次方程形式为:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, a \neq 0$$

可以转化为:

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

这种最高次项的系数为 1 的方程，称为**首 1（多项式）方程**。

对方程进行变量替换：$y = x - \frac{a}{3}$，有:

$$(x - \frac{a}{3})^3 + a(x - \frac{a}{3})^2 + b(x - \frac{a}{3}) + c = 0$$
$$x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} + ax^2 - \frac{2a^2}{3}x + \frac{a^3}{9} + bx - \frac{ab}{3} + c = 0$$

也就是说，转换成了:

$$x^3 + px + q = 0$$

类型的方程。这是简化后的三次方程。

令 $x = u + v$，代入后化简可得:

$$(u^3 + v^3) + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

x 是一个未知数，而 u,v 是 2 个未知数，为此我们对 u,v 再加一个约束条件：$3uv=-p$，于是上式可化简为：

$$u^3+v^3+q=0$$

以 $v=\frac{-p}{3u}$ 代入，可得：

$$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$$

$$v^6+qv^3-\frac{p^3}{27}=0$$

因此 u,v 都是同一个六次方程的根。该六次方程的根很容易看出来是：

$$u^3=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

即原问题可求解，可得到卡丹公式如下：

$$x=u+v=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

解方程：$x^3-15x-126=0$

此时 $p=-15,q=-126$，有 $u^3=125$，u **有三个解：** $u_1=5,u_2=5(\cos(120^\circ)+i\sin(120^\circ)),u_3=5(\cos(240^\circ)+i\sin(240^\circ))$，令 $\cos(120^\circ)+i\sin(120^\circ)=\omega$，即 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，有 $u_2=5\omega,u_3=5\omega^2$，于是从：$v=\frac{-p}{3u}$，有 $v_1=1,v_2=\omega^2,v3=\omega$，最后有：$x_{1,2,3}=6,5\omega+\omega^2,5\omega^2+\omega$。

1.4 四次方程

对于一般首 1 的四次方程：

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$$

先进行变量替换 $y=x-\frac{a}{4}$，化为如下一般首 1 的简化四次方程：

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

令：

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+kx+l)(x^2+nx+m)$$

比较两边的各项系数，可以得到：

$$n=-k,\quad l+m-k^2=p,\quad k(m-l)=q,\quad lm=r$$

如果能解出 k,l,m,n，就可以通过求解两个二次方程来得到原四次方程的解。

为此，可以得到：

$$2m = k^2 + p + q/k, \quad 2l = k^2 + p - q/k$$

于是，有：

$$k^6 + 2pk^4 + (p^2 - 4r)k^2 - q^2 = 0$$

这是关于 k^2 的三次方程，因此 k 是可解的，于是 m,l,n 也可解，于是得到 x 的解。

2　有关方程的一些理论

2.1　韦达与根和系数的关系

韦达定理：若 a_1,a_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，则：$x^2+px+q=(x-a_1)(x-a_2)$，从而有：

$$a_1 + a_2 = -p, \quad a_1 \cdot a_2 = q$$

同理，对于三次方程：$x^3+rx^2+px+q=0$，有：

$$a_1 + a_2 + a_3 = -r, \quad a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1 = p, \quad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = -q$$

更进一步，可以证明，如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一般首 1 的 n 次方程 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$ 的 n 个根，则有：

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = -b_1 \\
&\sigma_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n = b_2 \\
&\quad \cdots \\
&\sigma_n = a_1a_2\cdots a_n = (-1)^n b_n
\end{aligned}$$

这里的 $\sigma_k, k=1,2,\cdots,n$ 表示所有可能的 k 个 a_i 的乘积之和。

2.2 牛顿与牛顿定理

对于两个变量 a_1, a_2 而言，表达式 $\sigma_1 = a_1 + a_2, \sigma_2 = a_1 \cdot a_2$ 都是**对称多项式**，因为它们在 a_1 变为 a_2，a_2 变为 a_1 的同时置换下都保持不变。$a_1 \to a_2, a_2 \to a_1$ 可以形象地表示为：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

或更简单的表示为：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

当然它们在变换：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

下也不变，容易看出 $a_1^2 + a_2^2$ 在

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

下也是不变的，因此 $a_1^2 + a_2^2$ 也是对称多项式，进而从：

$$a_1^2 + a_2^2 = (a_1 + a_2)^2 - 2a_1a_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

可知，对称多项式 $a_1^2 + a_2^2$ 可以用对称多项式 σ_1, σ_2 的多项式来表示，这似乎表明 σ_1, σ_2 更基本一些，为此，我们把 σ_1, σ_2 称为**基本对称多项式或初等对称多项式**。

对于 3 个变量 a_1, a_2, a_3 而言，表达式 $\sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3, \sigma_2 = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1, \sigma_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ 就是初等对称多项式，而在多项式 $5a_1^3 + 5a_2^3 + 5a_3^3 - 15a_1a_2a_3$ 中，a_1, a_2, a_3 的“地位”是完全一样的，因此它就是 a_1, a_2, a_3 的对称多项式。用严格的数学语言来说，这指的是它在下面 6 个**变量**或**置换**下是**不变的**：

$$\begin{aligned} S_3 = &\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ = &\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\} \end{aligned}$$

此外，从

$$5a_1^3+5a_2^3+5a_3^3-15a_1a_2a_3=5(a_1+a_2+a_3)^3-15(a_1+a_2+a_3)(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)=5\sigma_1-15\sigma_1\sigma_2$$

可知，$5a_1^3+5a_2^3+5a_3^3-15a_1a_2a_3$ 可用初等多项式 σ_1,σ_2 的多项式表出。

牛顿定理：任何一个关于变量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的对称多项式，都可以唯一的表示为初等多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的一个多项式。

> 一类常见的问题：不解方程 $x^2+bx+c=0$，求 $x_1^2+x_2^2$ 的值
>
> 该问题的解题过程就是在验证牛顿定理；把 $x_1^2+x_2^2$ 用初等对称多项式 $\sigma_1=x_1+x_2=-b,\sigma_2=x_1\cdot x_2=c$ 表示出来

2.3 欧拉与复数

复数的**代数表示式**：

$$z=a+bi,\quad a,b\in R$$

复数的**三角表示式**：

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

同时，有：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

所以有复数的**指数表示式**：

$$z=e^{i\theta}$$

令 $\theta=\pi$，可以得到**欧拉魔幻等式**：

$$e^{i\pi}+1=0$$

利用指数表示式，有：

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

同时，有：

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$$

2.4 1 的根

方程：

$$x^n-1=0$$

的根，可以利用公式 $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ 求得。设 $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则从 $x^n = 1$ 可得，$r = 1$，且 $n\theta = 2k\pi, k = 0, 1, \cdots, n-1$，所以方程的解为：

$$1, \zeta = e^{i2\pi/n}, \zeta^2 = e^{i4\pi/n}, \cdots, \zeta^{n-1} = e^{i2\pi(n-1)/n}$$

一般来说，上述解是用指数式或三角式表示的，还不是根式解，不过，对于 $n = 1, 2, 3, 4$，不难求得下列各解：

$$1; 1, -1; 1, \omega, \omega^2; 1, i, -1, -i$$

其中，$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$，且满足：

$$1 + \omega + \omega^2 = 0, \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$$

同时，因为 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$，$\zeta$ 是 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ 的根，也是 $x^n - 1 = 0$ 的根，所以对于 ζ，有：

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0, \quad \zeta^i \cdot \zeta^{n-i} = 1, i = 1, 2, \cdots, n$$

3 范德蒙与“根的对称式表达”方法

3.1 范德蒙方法

以方程 $x^2 + bx + c = 0$ 为例，设方程的根为：a_1, a_2，由 $x^2 = 1$ 有解 ± 1，且 $(+1) + (-1) = 0$，有：

$$a_1 = \frac{1}{2}[(a_1 + a_2) + (a_1 - a_2)]$$

$$a_2 = \frac{1}{2}[(a_1 + a_2) - (a_1 - a_2)]$$

其中，$a_1 + a_2 = \sigma = -b$ 是根的初等对称多项式，而 $a_1 - a_2$ 却不是根的对称多项式，不过注意到

$$[\pm(a_1 - a_2)]^2 = (a_1 + a_2)^2 - 4a_1a_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 = b^2 - 4c$$

因此，$(b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}} = \pm(a_1 - a_2)$，如果 $b^2 - 4c \geq 0$，且符号 $\sqrt{b^2 - 4c}$ 表示算术根的话，就可以得到：

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2a}$$

3.2 用范德蒙方法解三次方程

设 $x^3+px+q=0$ 的根为 a_1,a_2,a_3，注意到 $x^3=1$ 有三个根 $1,\omega,\omega^2$ 满足 $1+\omega+\omega^2=0$，$w^3=1$，则:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{3}[(a_1+a_2+a_3)+(a_1+\omega a_2+\omega^2 a_3)+(a_1+\omega^2 a_2+\omega a_3)],\\
a_2 &= \frac{1}{3}[(a_1+a_2+a_3)+\omega^2(a_1+\omega a_2+\omega^2 a_3)+\omega(a_1+\omega^2 a_2+\omega a_3)],\\
a_2 &= \frac{1}{3}[(a_1+a_2+a_3)+\omega(a_1+\omega a_2+\omega^2 a_3)+\omega^2(a_1+\omega^2 a_2+\omega a_3)],
\end{aligned}
$$

推导思路:

$$
\begin{aligned}
a_i &= \frac{1}{3}[(a_i+a_i+a_i)+(1+\omega+\omega^2)a_j+(1+\omega+\omega^2)a_k]\\
&= \frac{1}{3}[(a_i+a_j+a_k)+(a_i+\omega a_j+\omega^2 a_k)+(a_i+\omega^2 a_j+\omega a_k)]
\end{aligned}
$$

记

$$
U=(a_1+\omega a_2+\omega^2 a_3)^3, V=(a_1+\omega^2 a_2+\omega a_3)^3
$$

因此，这三个根可以统一写成:

$$
x=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)+\sqrt[3]{\frac{U}{27}}+\sqrt[3]{\frac{V}{27}}
$$

上一节中，我们想办法将 a_1-a_2 联系了起来，我们接下来需要想办法将 U,V 和根 a_1,a_2,a_3 的初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 联系起来。

对 U,V 施以 S_3 的各置换，有如下结果:

置换	作用对象	U	V
$g_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	得出结果	U	V
$g_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	得出结果	V	U
$g_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	得出结果	V	U
$g_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	得出结果	V	U
$g_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	得出结果	U	V
$g_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	得出结果	U	V

推导思路:

g_1 : 略

g_2 : 略

g_3 : $U' = (a_3 + \omega a_2 + \omega^2 a_1)^3 = \omega^3(\omega^2 a_1 + \omega a_2 + a_3)^3 = (\omega^3 a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3)^3 = (a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3)^3 = V$

g_4 : $U' = (a_2 + \omega a_1 + \omega^2 a_3)^3 = \omega^6(\omega a_1 + a_2 + \omega^2 a_3)^3 = (\omega^3 a_1 + \omega^2 a_2 + \omega^4 a_3)^3 = (a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3)^3 = V$

g_5 : 略

g_6 : 略

由此可见，U, V 在 S_3 变换下，都不是不变的，而 $U + V, U \cdot V$ 却是 S_3 下不变的。即它们是 a_1, a_2, a_3 的对称多项式，因此根据牛顿定律，可以用:

$$\sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 0, \sigma_2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = p, \sigma_3 = a_1 a_2 a_3 = -q$$

表出，经过一些代数运算后，有:

$$U + V = -27q, U \cdot V = -27p^3$$

因此，U, V 是如下方程的根:

$$t^2 + 27qt - 27p^3 = 0$$

所以，可以解出来 U, V，根据 $x = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) + \sqrt[3]{\frac{U}{27}} + \sqrt[3]{\frac{V}{27}}$ 便能得到卡丹公式:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

$$U = (a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3)^3$$

$$V = (a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3)^3$$

因为 a_1, a_2, a_3 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的解，所以 $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = -p(a_1 + a_2 + a_3) - 3q = -3q$
因为 $1 + \omega + \omega^2 = 0$，所以 $\omega + \omega^2 = -1$

$$
\begin{aligned}
U+V &= 2(a_1^3+a_2^3+a_3^3)+12a_1a_2a_3\omega^3 \\
&+3(\omega a_1^2a_2+\omega^2a_1^2a_3+\omega^4a_2^2a_3+\omega^2a_1a_2^2+\omega^4a_1a_3^2+\omega^5a_2a_3^2) \\
&+3(\omega^2a_1^2a_2+\omega a_1^2a_3+\omega^5a_2^2a_3+\omega^4a_1a_2^2+\omega^2a_1a_3^2+\omega^4a_2a_3^2) \\
&= -6q-12q-3(a_1^2a_2+a_1^2a_3+a_2^2a_3+a_1a_2^2+a_1a_3^2+a_2a_3^2) \\
&= -18q-[(a_1+a_2+a_3)^3-(a_1^3+a_2^3+a_3^3)-6abc] \\
&= -18q-3q-6q=-27q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U\cdot V &= [(a_1+\omega a_2+\omega^2a_3)(a_1+\omega^2a_2+\omega a_3)]^3 \\
&= \cdots \\
&= [(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-p]^3 \\
&= [(a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)-p]^3 \\
&= [-2p-p]^3 \\
&= -27p^3
\end{aligned}
$$

4 拉格朗日和他的预解式方法

略

5 高斯与代数基本定理

5.1 代数基本定理

$n(>0)$ 次多项式方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, a_i\in C, i=1,2,\cdots,n$ 有 n 个复数根。

如果我们一开始就在复数集合中求解方程，由于复系数方程的根仍还是复数，因此就不必再将复数集合扩张了。因此，C 叫做**代数闭域**。

5.2 分圆方程与它的根式求解

略

5.3 开方运算的多值性与卡丹公式

略

References

[1] 冯承天, 从一元一次方程到伽罗瓦理论.