概率统计基础知识 [1] [2]

July 27, 2020

Contents

1 基础定义

1.1 统计相关的基础知识

横断面研究 (cross-sectional study)：研究某个时间点下样本的情况

纵贯研究 (longitudinal study)：在一段时间内反复观察同一批样本 [4]

1.2 随机变量

随机变量是可以随机地取不同值的变量。例如：抛掷一枚硬币，出现正面或者反面的结果；从一个班级中，随机选一个同学，他的身高值。

随机变量可以是离散的或者连续的。离散随机变量拥有有限（例如正面或者反面）或者可数无限多的状态。连续随机变量伴随着实数值（例如：身高）。

1.3 概率质量函数和概率密度函数

离散型变量的概率分布可以用概率质量函数（Probability Mass Function，简称 PMF）来描述。我们通常用大写字母 P 来表示概率质量函数。

当研究的对象是连续型随机变量时，我们用概率密度函数（Probability Density Function，简称 PDF）来描述它的概率分布。我们通常用小写字母 p 来描述概率密度函数。

1.4 期望

函数 $f(x)$ 关于某分布的期望（Expectation）或者期望值（Expected value）是指：当 x 由 P 产生，f 作用于 x 时，$f(x)$ 的平均值。

对于离散型随机变量，期望值可以通过求和得到：

$$E_{x\sim P[f(x)]} = \sum_x P(x)f(x)$$

对于连续型随机变量，期望值可以通过求积分得到：

$$E_{x\sim p[f(x)]} = \int p(x)f(x)dx$$

1.5 方差与标准差

方差（Variance）衡量的是当我们对 x 依据它的概率分布进行采样时，随机变量 x 的函数值会呈现多大的差异。计算方差的函数如下：

$$Var(f(x)) = E[(f(x) - E[f(x)])^2]$$

方差的平方根称之为标准差（Standard Deviation）。有些资料也称标准差为均方差。

设有一个随机变量 X, 其期望存在为 $E(X)$，方差存在为 $D(X)$，那么有结论：

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

其中，$E(X^2)$ 是 X^2 的期望。

例如，已知 $P(X=1) = 2/3, P(X=0) = 1/6, P(X=-1) = 1/6$，那么：

$$E(X) = 1 * 2/3 + 0 * 1/6 + (-1) * 1/6 = 2/3 - 1/6 = 1/2$$

$$E(X^2) = 1^2 * 2/3 + 0^2 * 1/6 + (-1)^2 * 1/6 = 2/3 + 1/6 = 5/6.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5/6 - (1/2)^2 = 7/12$$

1.5.1 一幅图理解期望和方差

台湾大学李毅宏教授的这节课程:《Where does the error come from?》仅仅通过一幅图就非常好的解释了期望和方差的概念。

结果与期望的偏离称之为偏差(Bias)。通俗的讲,Bias 描述了结果与中心的偏离程度。而方差(Variance)描述了结果互相之间的散列程度。

你可以对比下面这幅图的四种情况来加深理解:

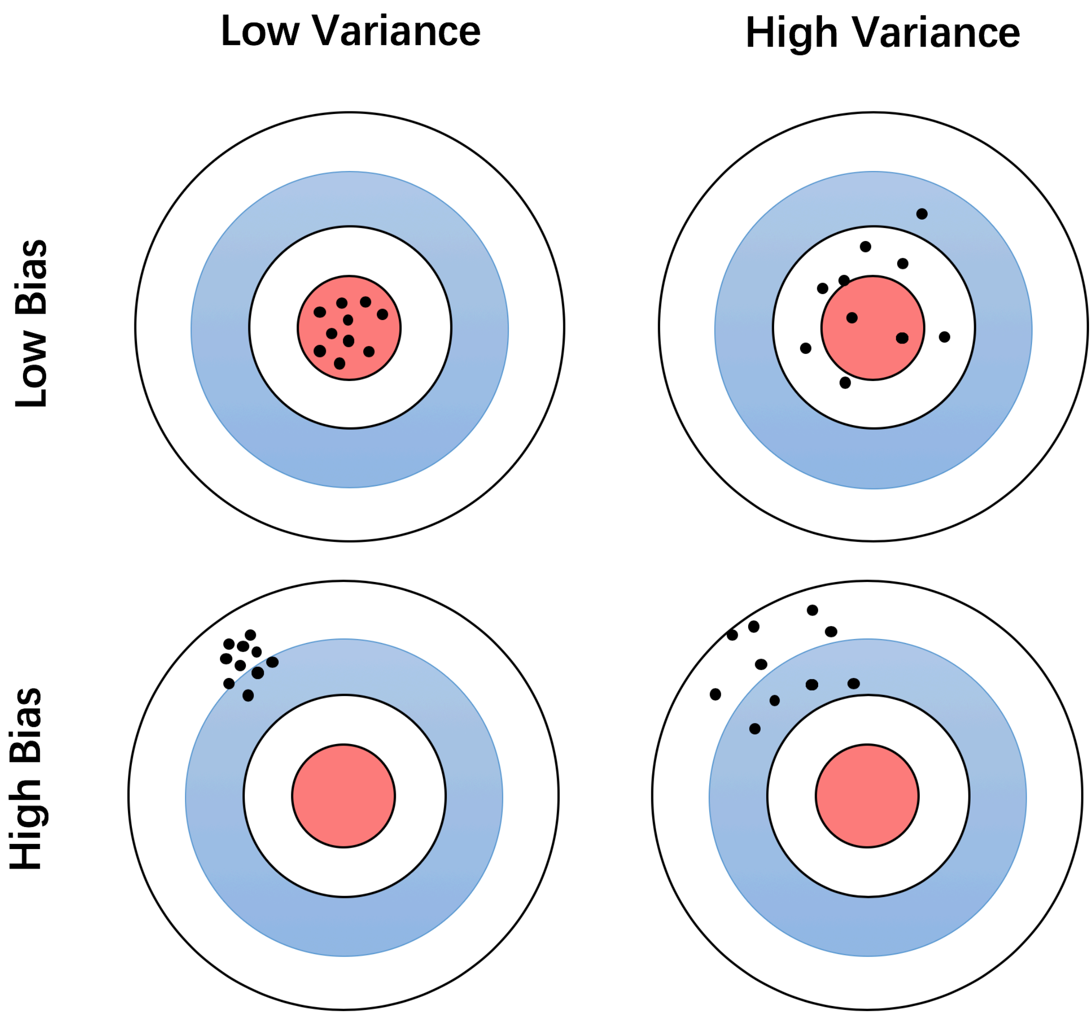


Figure 1: Bias 和方差的比较

从这幅图中我们可以看出:

- 当 Bias 和 Variance 都比较小的时候,结果都比较紧密的集中在预期的值上。
- 当 Bias 较小而 Variance 较大时,意味着结果较靠近预期,但是比较散落。
- 当 Bias 较大而 Variance 较小时,意味着结果集中在一起,但是离预期值偏离较多。
- 当 Bias 和 Variance 都较大时,意味着结果既不靠近预期,也比较散落。

1.5.2 凸函数和 Jensen 不等式 [3]

凸函数

凸函数是一个定义在某个向量空间的凸子集 C（区间）上的实值函数 f，如果在其定义域 C 上的任意两点 $x1, x2x, 0 \leq t \leq 1$ ，有

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

就是说凸函数任意两点的割线位于函数图形上方，这也是 **Jensen 不等式的两点形式**。

Jensen 不等式

若对于任意点集 $\{xi\}$，若 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_i \lambda_i = 1$，则凸函数 $f(x)$ 满足：

$$f(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(x_i)$$

使用数学归纳法证明如下：

当 $i = 1$ 或 $i = 2$ 时，根据凸函数的定义，显然成立；

假设当 $i = M$ 时不等式成立，现在证明当 $i = M + 1$ 时不等式也成立：

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{M+1} \lambda_i x_i) &= f(\lambda_{M+1} x_{M+1} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i x_i) \\ &= f(\lambda_{M+1} x_{M+1} + (1 - \lambda_{M+1}) \sum_{i=1}^{M} \eta_i x_i) \end{aligned}$$

其中，

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{M+1}}$$

注意到 λ_i 满足：

$$\sum_{i=1}^{M+1} \lambda_i = 1$$

所以：

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1 - \lambda_{M+1}$$

所以 η_i 满足：

$$\sum_{i=1}^{M} \eta_i = \frac{\sum_{i=1}^{M} \lambda_i}{1 - \lambda_{M+1}} = 1$$

所以：

$$\sum_{i=1}^{M} f(\eta_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{M} \eta_i f(x_i)$$

所以命题得证：

$$f(\sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i x_i) \leq \lambda_{M+1}f(x_{M+1}) + (1-\lambda-M+1)\sum_{i=1}^{M}\eta_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{M+1}\lambda_i f(x_i)$$

1.5.3 Jensen 不等式和期望

在概率论中，如果把 $_i$ 看成取值为 x_i 的离散变量 x 的概率分布，那么 Jensen 不等式就可以写成：

$$f(E[x]) \leq E[f(x)]$$

对于连续变量，Jensen 不等式给出了积分的凸函数值和凸函数的积分值间的关系：

$$f(\int xp(x)dx) \leq \int f(x)p(x)dx$$

一道关于概率论的不等式问题：已知 $X_1, X_2, X_3 > 0$ 是某个概率空间上的随机变量，证明：

$$E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]E[\frac{X_3}{X_1}] \geq 1$$

证明：先看有两个变量的情况：

令 $g(x) = \frac{1}{x}$， $x > 0$，则 $g(x)$ 是右半空间上的凸函数。所以根据 Jensen 不等式，有：

$$E[g(x)] \geq g(E[x]) = \frac{1}{E[x]}$$

令 $x = \frac{X_1}{X_2}$，则有：

$$E[g(\frac{X_1}{X_2})] \geq g(E[\frac{X_1}{X_2}]) = \frac{1}{E[\frac{X_1}{X_2}]}$$

$$E[\frac{X_1}{X_2}]E[g(\frac{X_1}{X_2})] \geq E[\frac{X_1}{X_2}]\frac{1}{E[\frac{X_1}{X_2}]} = 1$$

更进一步，有（?? 如何证明??）：

$$E[\frac{X_1}{X_3}] = E[\frac{X_1}{X_2}\frac{X_2}{X_3}] \leq E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]$$

那么对于三个元的情况类似得可以按以下方式处理，

$$E[\frac{X_1}{X_2}]E[\frac{X_2}{X_3}]E[\frac{X_3}{X_1}] \geq E[\frac{X_1}{X_3}]E[\frac{X_3}{X_1}] =\geq 1$$

1.5.4 期望和协方差的关系

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E[X-E[X]]\cdot E[Y-E[Y]] \\
&= E[XY]-E[XE[Y]+YE[X]]+E[E[X]E[Y]] \\
&= E[XY]-2E[X]E[Y]+E[X]E[Y] \\
&= E[XY]-E[X]E[Y]
\end{aligned}$$

1.5.5 偏度 (skewness) 和皮尔逊中值偏度系数 (Pearson's median skewness coefficient) [4]

偏度是度量分布函数不对称程度的统计量。对于一个给定的序列 x_i，样本偏度的定义为：

$$g_1 = m_3/m_2^{\frac{3}{2}}$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i-\mu)^2$$

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i-\mu)^3$$

负的偏度表示分布向左偏，此时分布函数的左边会比右边延伸的更长；正的偏度表示分布函数向右偏。

偏度受异常值的影响比较大。更好的比较方式是比较均值和中位数的大小。因为均值更容易受到极端值的影响，但是中位数不易受到影响。

皮尔逊中值偏度系数的定义如下：

$$g_p = 3(\mu-\mu_{\frac{1}{2}})/\sigma$$

其中，μ 为均值，$\mu_{\frac{1}{2}}$ 为中位数。

皮尔逊中值偏度系数是偏度的一个鲁邦估计，对异常值的影响不敏感。

1.6 相关性

1.6.1 协方差 (Covariance) [4]

协方差用来衡量相关变量的变化趋势是否相同。假设我们有两列序列 X 和 Y，他们与其均值的离差为：

$$dx_i = x_i - \mu_x$$

$$dy_i = y_i - \mu_y$$

协方差就是这些乘积结果的平均值:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum dx_i dy_i$$

n 表示序列的长度（X 和 Y 必须有相同的长度)。

1.7 皮尔逊相关系数

$$p_i = \frac{(x-\mu_x)}{\sigma_x}\frac{(y_i-\mu_y)}{\sigma_y}$$

皮尔逊相关系数定义为:

$$\rho = \frac{1}{n}\sum p_i$$

相关系数 ρ 的取值为-1 到 1 之间，简单的证明如下:

$$\rho = \frac{1}{n}\sum p_i = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

将离差项带入公式，有

$$\rho = \frac{\sum dx_i dy_i}{\sum dx_i \sum dy_i}$$

利用著名的柯西-施瓦兹不等式 (Cauchy-Schwarz innequality) 即可证明 $\rho^2 <= 1$，即 $-1 <= \rho <= 1$

ρ 描述了两个变量相关的程度，当 $\rho = 1$ 时，两个变量完全相关，即如果我们知道了其中一个变量的值，就可以精确预测另一个变量的值。$\rho = -1$ 时表示两个变量是完全负相关的。

皮尔逊相关系数受异常值的影响比较大。

2 离散型分布

2.1 伯努利分布（零一分布）

伯努利（Bernoulli）分布是最基本，也是我们最常见的分布。伯努利分布在生活中非常的常见。例如，抛掷一枚硬币的结果就是符合伯努利分布的：结果只会是正面或者反面。

伯努利分布亦称“零一分布”、“两点分布”：它的结果只会是两种可能性中的一种，且这两种结果互相对立，必居其一。因此，我们也常常称结果是成功的，或者失败的。

好几种其他的分布都与伯努利分布有一定的关系。

假设伯努利实验成功的概率是 p，则伯努利分布的概率质量函数如下：

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{(1-x)},\ X\in 0,1$$

当然，考虑到 X 只有 0 和 1 两种可能，我们也可以直接写成：

$$P(X=x)=\begin{cases}p\ (x=1)\\ \\ 1-p\ (x=0)\end{cases}$$

伯努利分布的期望值是 p，方差是 $p(1{-}p)$。

2.2 二项分布

我们可以很自然的可以将一次伯努利实验扩展到多次，此时其结果符合二项（Binomial）分布。
二项分布的概率质量函数如下：

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

通过这个函数，我们可以计算出在进行 n 次的伯努利实验中，有 k 次出现正面结果的概率。
很显然，当 n 为 1 时，这个函数和伯努利的概率质量函数是一样的。
二项分布的期望值是 np，方差是 $np(1-p)$。
期望的推导过程：

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}k &(1)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kp^k(1-p)^{n-k} &(2)\\ &=\sum_{k=1}^{n}np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} &(3)\\ &=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} &(4)\\ &=np &(5)\end{aligned}$$

这里有两个变换：

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=(p+1-p)^{(n-1)}=1$$

附：该式的推导，已知二次函数

$$(a+b)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}b^{n-1-i}a^{i}$$

可以看出来，$i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$

令 $k=i+1$，所以 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，且有：

$$(a+b)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}b^{n-k}a^{k-1}$$

进一步可以推导出：

$$(a+b)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n-2}{k-2}b^{n-k}a^{k-2}$$

方差的推导过程：

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad \text{令 1-p = q} \tag{6}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \tag{7}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}nk\binom{n-1}{k-1}p^kq^{n-k} \tag{8}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}n(k-1+1)\binom{n-1}{k-1}p^kq^{n-k} \tag{9}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}n(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^kq^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k} \tag{10}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}n(n-1)p^2\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}q^{n-k}+np \tag{11}$$

$$=n(n-1)p^2+np \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 && (13)\\
&= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 && (14)\\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 && (15)\\
&= np - np^2 && (16)\\
&= np(1-p) && (17)
\end{aligned}
$$

2.3 几何分布

几何（Geometric）分布也是进行多次的伯努利实验。

它指的是：在 n 次伯努利试验中，试验 k 次才得到第一次成功的机率。或者说，就是：前 k-1 次皆失败，第 k 次成功的概率。

几何分布的概率质量函数如下：

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \{1,2,3,\cdots,\}$$

几何分布的期望是 $\frac{1}{p}$，方差是 $\frac{(1-p)}{p^2}$

期望的推导过程：

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

令 $q = 1-p$，$S = \sum_{k=1}^{\infty} k(q)^{k-1}$，有：

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + kq^{k-1} && (18)\\
qS &= q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots + kq^k && (19)\\
S - qS &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} - kq^k && (20)\\
S &= \frac{1-q^k}{(1-q)^2} - \frac{kq^k}{1-q} && (21)\\
&= \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{这里因为} k \to \infty && (22)\\
&= \frac{1}{p^2} && (23)
\end{aligned}
$$

$$E(X) = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

方差的推导过程：

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}$$

令 $q=1-p$，有

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} \tag{24}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (kq^k)' \quad '\text{表示求导} \tag{25}$$
$$= [\sum_{k=1}^{\infty} (kq^k)]' \tag{26}$$
$$= [(\frac{q}{1-q})^2]' \tag{27}$$
$$= \frac{(1-q)^2 + 2(1-q)q)}{(1-q)^4} \tag{28}$$
$$= \frac{2p-p^2}{p^4} \tag{29}$$
$$= \frac{2-p}{p^3} \tag{30}$$

所以:

$$E(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - (\frac{1}{p})^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

2.4 多项分布

进一步的，我们可以将二项分布扩展到多项（Multinomial）分布。

多项分布的结果有超过 2 种的更多种情况。例如：抛掷一枚骰子，其结果可能是 1 6 中的某个数值。

假设有 X_1 到 X_k 种结果，每种结果发生的概率是 p_1 到 p_k，多项分布的概率质量函数如下：

$$P(X_1 = n_1, ..., X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!...n_k!} p_1^{n_1}...p_k^{n_k},\ (\sum_{i=1}^{k} x_i = n)$$

对于每个 X_i 来说，其数学期望是 $E(X_i) = np_i$，其方差是 $Var(X_i) = np_i(1-p_i)$

2.5 离散均匀分布

特别地，当我们仅仅进行一次多项实验，并且多项的各项结果是等可能的，那么这个时候就得到的就是离散均匀（Discrete Uniform）分布。

其概率密度函数如下：

$$P(X=x) = \frac{1}{N}\ (x = 1, ..., N)$$

例如，抛掷一枚均匀的骰子，出现 6 个数中任意一个的概率都是 $\frac{1}{6}$。

离散均匀分布的期望值是 $\frac{N+1}{2}$，方差是 $\frac{(N+1)(N-1)}{12}$

期望的推导过程：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}k=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k=\frac{1}{N}\frac{(1+N)N}{2}=\frac{N+1}{2}$$

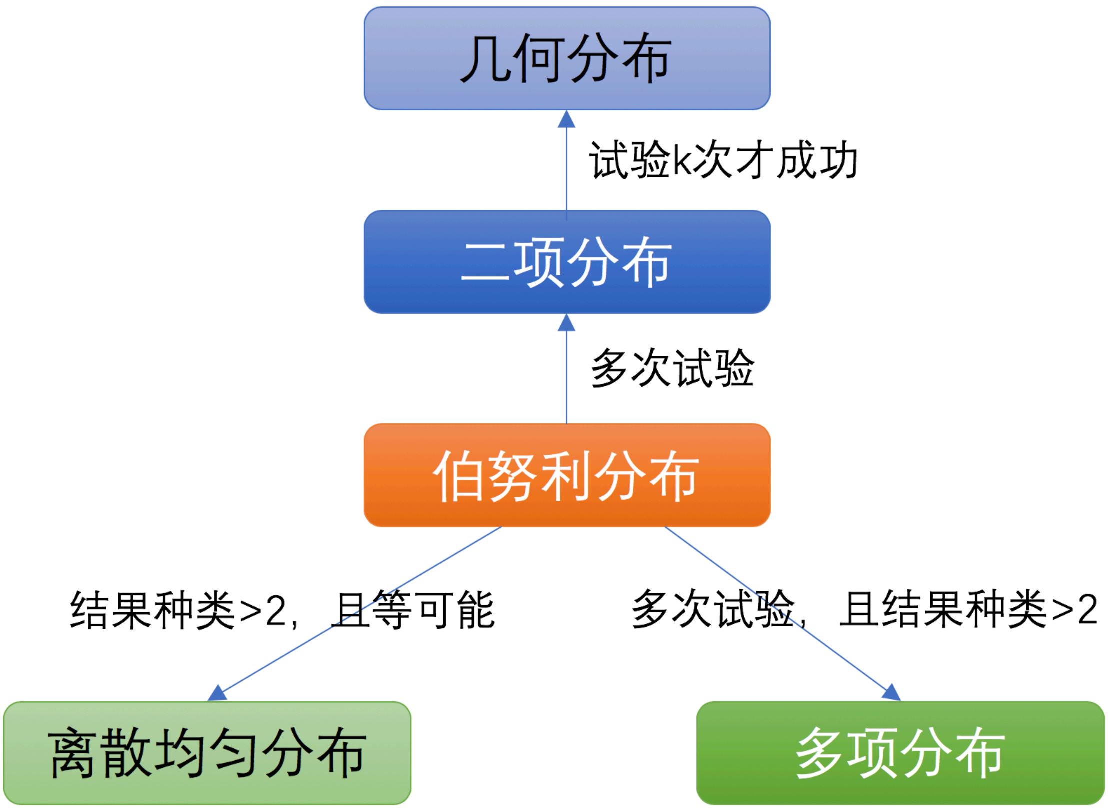
方差的推导过程：

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}k^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k^2=\frac{1}{N}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

2.6 上述几种分布的关系

很显然，上面几种分布都与伯努利分布存在一定的关系，下面这幅图描述了它们之间的关系：



2.7 泊松分布

泊松（Poisson）分布是另外一种很常见的概率分布，由法国数学家西莫恩·德尼·泊松（Siméon-Denis Poisson）在 1838 年时发表。

我们可以回想一下，生活中很多事情都以特定频率的反复发生的，例如：

- 某个医院平均每天有 100 个新生儿；

- 某个客服号码每个小时会接到 50 个来电；
- 某一班公交每个小时会 5 次经过其中一个站点；
- 等等等等；

过去发生的平均频度我们是可以计算的，但是我们永远无法精确计算该事件下一次发生的时间点。

泊松分布描述的是：在已知过去发生频率的基础上，预测在接下来一段特定的时间内，该事件发生特定次数的概率。

泊松分布的概率质量函数如下：

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\ ,\lambda \geq 0$$

这里的 e 是一个常量，约等于 2.71828。λ 是过去单位时间内发生的频率，k 是预测发生的次数。

我们通过一个具体的例子就很容易理解泊松分布了。

以公交为例，假设我们知道过去它每个小时平均会 5 次经过其中一个站点（$\lambda = 5$），那么接下来的一个小时，它经过的次数很可能是 4 6 次。不太可能是 1 次或者 10 次。我们可以根据概率质量函数，计算它接下来一个小时分别经过 1 次，4 次，5 次，10 次的概率。

- 当 $k = 1$ 时，$P(1) = \frac{e^{-5}5^1}{1!} \approx 0.034$
- 当 $k = 4$ 时，$P(4) = \frac{e^{-5}5^4}{4!} \approx 0.175$
- 等等

泊松分布的期望值和方差都是 λ。

期望的推导过程：

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \tag{31}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{k!} \tag{32}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \tag{33}$$

$$= \lambda \tag{34}$$

这里也有一个变换 (就是 e^x 的泰勒展开式)：

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

方差的推导过程：

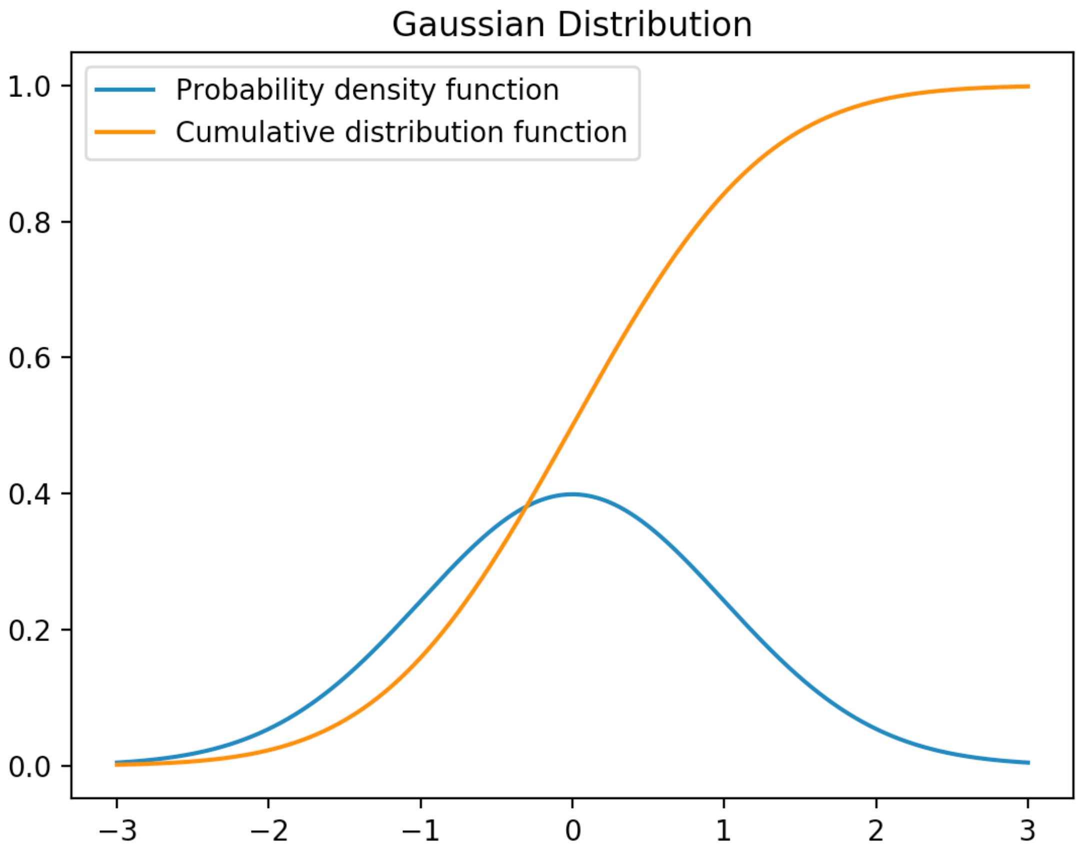
$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} && (35)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda}\lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} && (36)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1)\lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} && (37)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} && (38)\\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda && (39)\\
&= \lambda^2 + \lambda && (40)
\end{aligned}
$$

$$D(X) = \lambda^2$$

3 连续性分布 [5]

3.1 高斯分布

高斯（Gaussian）分布又称正态（Normal）分布。高斯分布的概率密度函数曲线呈钟形，因此人们又经常称之为钟形曲线。高斯分布的概率密度函数和累积分布函数如下图所示：



从这个图中我们可以看出，对于高斯分布来说，随机变量处于中间的概率是比较大的，而其取非常大或者非常小的值的概率都很小。我们现实中人们的身高，体重，收入等特点都符合这个模型。

高斯分布的概率密度函数如下：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

对于符合高斯分布的随机变量，我们也经常记做下面这样：

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

在这个函数中，μ 决定了高斯分布的中心位置，σ 决定了钟型曲线的胖瘦程度。实际上，μ 就是高斯分布的期望，而 σ^2 就是方差。

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时，我们称之为标准正态分布。

期望的推导过程：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx && (41)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad 令\frac{x-\mu}{\sigma}=t && (42)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t+\mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt && (43)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad 第一部分为奇函数 && (44)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{t}{\sqrt{2}})^2} d(\frac{t}{\sqrt{2}}) && (45)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu\sqrt{2}\sqrt{\pi} && (46)\\
&= \mu && (47)
\end{aligned}
$$

最后一步利用了积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

方差的推导过程：

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx && (48)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad 令\frac{x-\mu}{\sigma}=t && (49)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t+\mu)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt && (50)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 t^2 + 2\mu\sigma t + \mu^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt && (51)\\
&= \cdots && (52)\\
&= \sigma^2 + \mu^2 && (53)
\end{aligned}
$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$$

3.2 均匀分布

均匀（Uniform）分布要简单很多，它指的就是：随机变量在某个区间内，取任意一个值都是等可能的。

其概率密度函数如下：

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a \le x \le b$$

很显然，如果我们将这个函数画成图形，那就是两个区间之间的一个水平线。

均匀分布的期望值是 $\frac{b+a}{2}$，方差是 $\frac{(b-a)^2}{12}$。

期望的推导过程：

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}[\frac{1}{2}x^2]_a^b=\frac{b+a}{2}$$

方差的推导过程：

$$E(X^2)\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}[\frac{1}{3}x^3]_a^b=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b+a)^2}{12}$$

3.3 指数分布

指数（Exponential）分布是描述泊松过程中的事件之间的时间的概率分布，即事件以恒定平均速率连续且独立地发生的过程。举例来说，如果事件在每个时间点发生的概率相同，那么间隔时间的分布就近似于指数分布。

指数分布的概率密度函数如下：

$$f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\ ,x\geq 0,\lambda>0$$

指数分布的期望是 λ，方差是 λ^2。

期望的推导过程：

（注：这里指数分布的概率密度函数定义为: $f(x)=\lambda e^{-x\lambda}$）

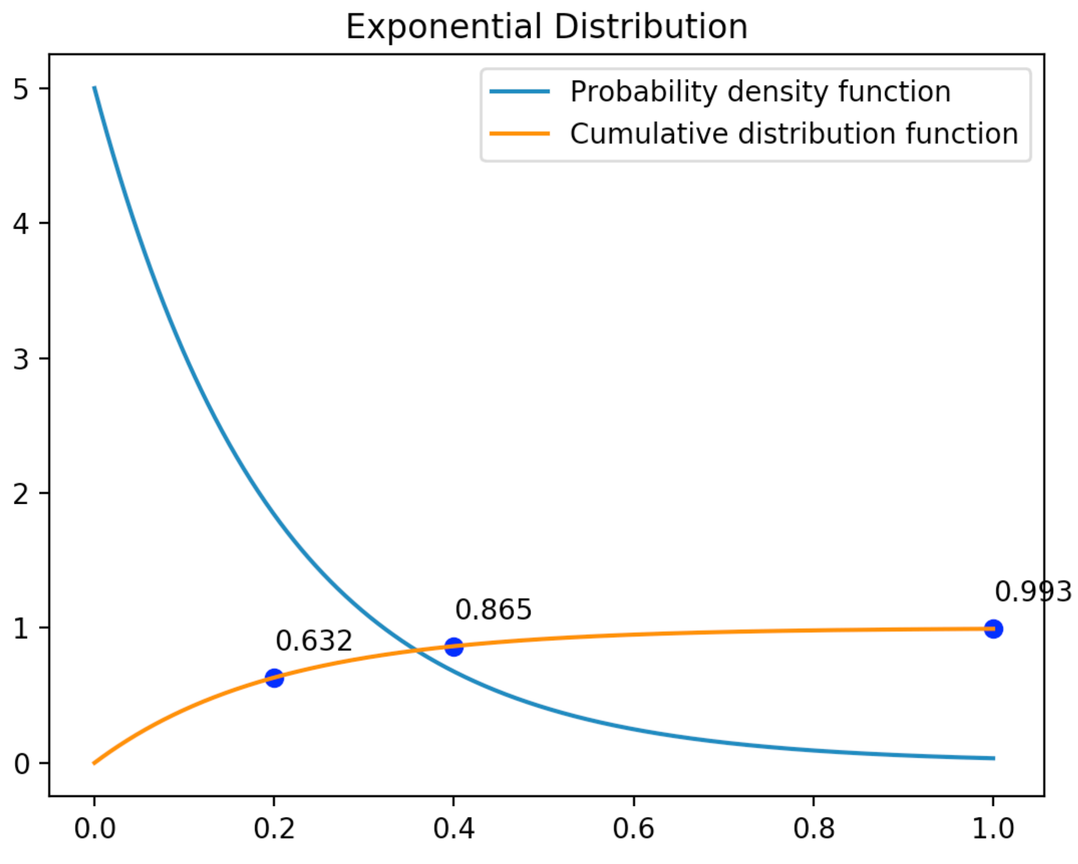
$$\begin{aligned}
E(X)&=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-x\lambda}dx && (54)\\
&=-\int_0^{+\infty} xd(e^{-\lambda x}) && (55)\\
&=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx && (56)\\
&=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} && (57)\\
&=\frac{1}{\lambda} && (58)
\end{aligned}$$

方差的推导过程：

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-x\lambda} dx &(59)\\
&= -\int_0^{+\infty} x^2 d(e^{-\lambda x}) &(60)\\
&= -x^2 e^{-\lambda x}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x} dx &(61)\\
&= -x^2 e^{-\lambda x}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x} dx &(62)\\
&= \frac{2}{\lambda} E(X) &(63)\\
&= \frac{2}{\lambda^2} &(64)
\end{aligned}
$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

指数分布的概率密度函数和分布累积函数如下图：



我们仍然是以前面提到的公交车为例。假设每个小时某班公交平均有 5 次会经过其中一个站点。看上图中我们特意在 0.2，0.4 和 1.0 这三个点上做的标记。从这个图形中我们可以看出，对于这班公交来说，12 分钟（0.2 小时）来车的概率是 0.632，24 分钟（0.4 小时）来车的概率是 0.865。当等待的时间越接近一个小时，新的一班车就几乎肯定要来了。

3.4 帕累托分布 [4]

帕累托分布的累积分布函数（CDF）为:

$$CDF(x) = 1 - (\frac{x}{x_m})^{-\alpha}$$

其中，参数 x_m, α 决定了分布的位置和形状。x_m 是最小值。

TBD

3.5 贝塔 (Beta) 分布

3.5.1 一组通俗的解释 [6]

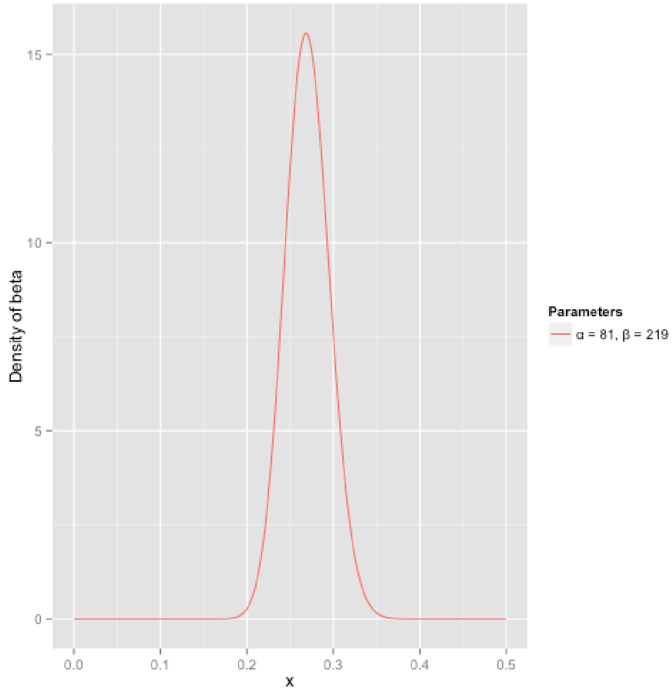
Beta 分布可以看作一个概率的概率分布，当你不知道一个东西的具体概率是多少时，它可以给出了所有概率出现的可能性大小。

举一个简单的例子，熟悉棒球运动的都知道有一个指标就是棒球击球率 (batting average)，就是用一个运动员击中的球数除以击球的总数，我们一般认为 0.266 是正常水平的击球率，而如果击球率高达 0.3 就被认为是非常优秀的。

现在有一个棒球运动员，我们希望能够预测他在这一赛季中的棒球击球率是多少。你可能就会直接计算棒球击球率，用击中的数除以击球数，但是如果这个棒球运动员只打了一次，而且还命中了，那么他就击球率就是 100% 了，这显然是不合理的，因为根据棒球的历史信息，我们知道这个击球率应该是 0.215 到 0.36 之间才对啊。

对于这个问题，我们可以用一个二项分布表示（一系列成功或失败），一个最好的方法来表示这些经验（在统计中称为先验信息）就是用 Beta 分布，这表示在我们没有看到这个运动员打球之前，我们就有了一个大概的范围。Beta 分布的定义域是 (0,1) 这就跟概率的范围是一样的。

接下来我们将这些先验信息转换为 Beta 分布的参数，我们知道一个击球率应该是平均 0.27 左右，而他的范围是 0.21 到 0.35，那么根据这个信息，我们可以取 $\alpha = 81, \beta = 219$，可以得到如下 Beta 分布的图形:



之所以取这两个参数是因为：；

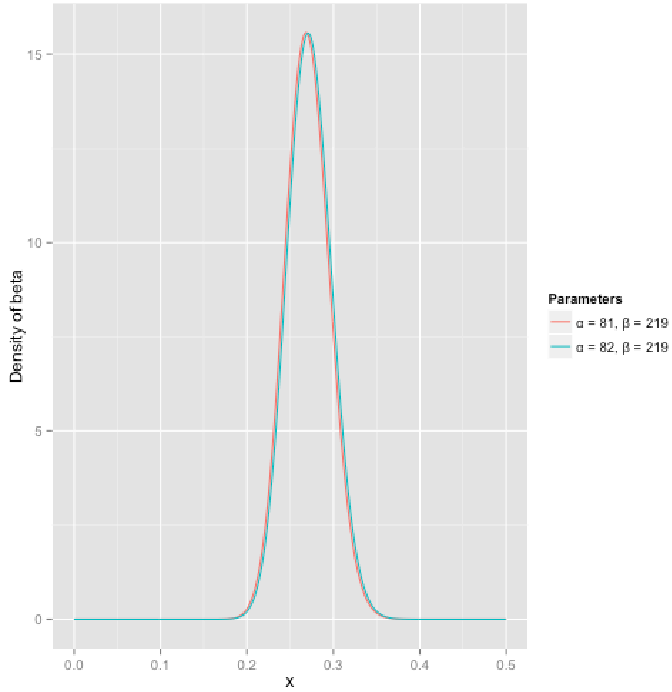
- Beta 分布的均值是 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{81}{81+219} = 0.27$
- 从图中可以看到这个分布主要落在了 (0.2,0.35) 间，这是从经验中得出的合理的范围。

在这个例子里，我们的 x 轴就表示各个击球率的取值，x 对应的 y 值就是这个击球率所对应的概率。也就是说 Beta 分布可以看作一个概率的概率分布。

那么有了先验信息后，现在我们考虑一个运动员只打一次球，那么他现在的数据就是" 1 中;1 击"。这时候我们就可以更新我们的分布了，让这个曲线做一些移动去适应我们的新信息。Beta 分布在数学上就给我们提供了这一性质，他与二项分布是共轭先验的（Conjugate prior）。所谓共轭先验就是先验分布是 Beta 分布，而后验分布同样是 Beta 分布。结果很简单：

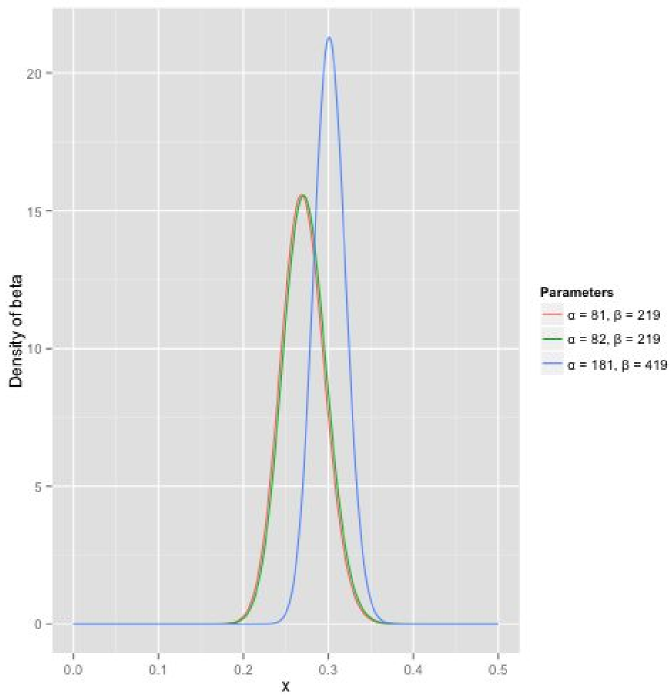
$$\mathrm{Beta}(\alpha_0 + \mathrm{hits}, \beta_0 + \mathrm{misses})$$

其中 α_0 和 β_0 是一开始的参数，在这里是 81 和 219。所以在这一例子里，α 增加了 1(击中了一次)。β 没有增加 (没有漏球)。这就是我们的新的 Beta 分布 Beta(81+1,219)，我们跟原来的比较一下：



可以看到这个分布其实没多大变化，这是因为只打了 1 次球并不能说明什么问题。但是如果我们得到了更多的数据，假设一共打了 300 次，其中击中了 100 次，200 次没击中，那么这一新分布就是：

$$\mathrm{Beta}(81 + 100, 219 + 200)$$



注意到这个曲线变得更加尖，并且平移到了一个右边的位置，表示比平均水平要高。

一个有趣的事情是，根据这个新的 Beta 分布，我们可以得出他的数学期望为：$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{82+100}{82+100+219+200} = 0.303$，这一结果要比直接的估计要小 $\frac{100}{100+200} = 0.333$。你可能已经意识到，我们事实上就是在这个运动

员在击球之前可以理解为他已经成功了 81 次，失败了 219 次这样一个先验信息。

因此，对于一个我们不知道概率是什么，而又有一些合理的猜测时，beta 分布能很好的作为一个表示概率的概率分布。

3.5.2 另一组通俗的解释 [10]

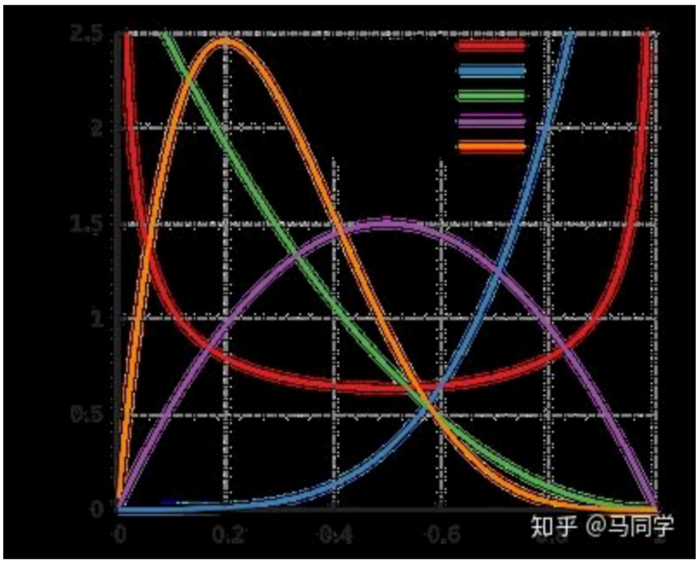
贝叶斯推断

各种假设称为先验分布，结合实验数据，推断出后验分布，这就是贝叶斯推断：

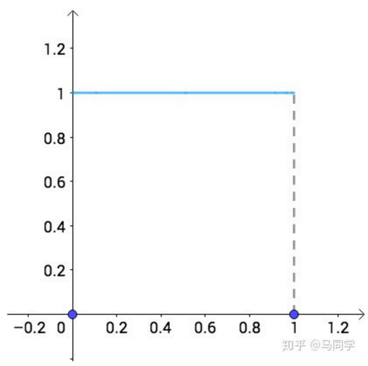
$$先验分布 + 实验数据 \Rightarrow 后验分布$$

先验分布

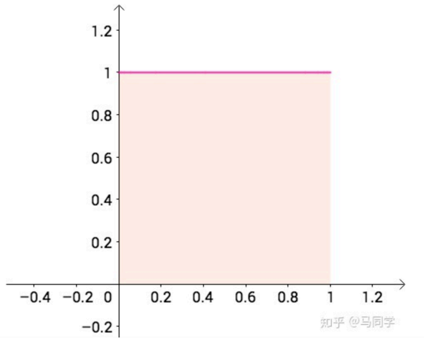
Beta 分布简记为：Beta(a,b)，根据 a, b 参数的不同，Beta 分布的形态各异：



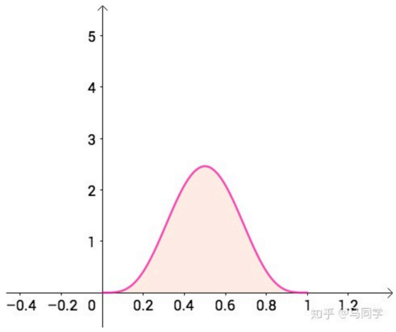
这个特性非常适合用来做先验分布。比如，在韦小宝面前，我们对硬币一无所知。贝叶斯说，一无所知也就是意味着任何概率都是一样的，都是有可能的，所以选用均匀分布



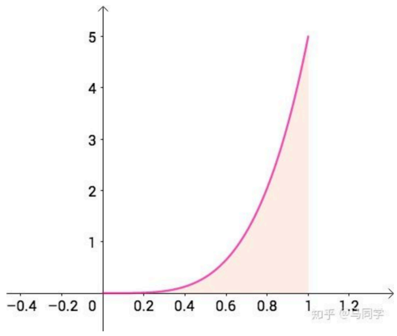
Beta(1,1) 正好就是均匀分布：



正直的陈近南，可能用的是公平硬币，也就是说概率在 0、1 之间（0 表示“字”，1 表示“花”），Beta(5,5) 可以表示这样的分布：



而憨坏的多隆，可能用了两面花，也就是说概率可能集中到 1 附近，Beta(5,1) 可以表示这样的分布：



也就是说可以用 Beta 分布来模拟各种先验分布：

- 一无所知：Beta(1,1)
- 公平硬币：Beta(5,5)
- 两面花：Beta(5,1)

后验分布

用 Beta 分布来模拟扔硬币的先验分布之后，通过贝叶斯推断，得到的后验分布依然是 Beta 分布：

$$\mathrm{Beta(a,b)} + \text{实验数据} \Rightarrow \mathbf{Beta(m,n)}$$

具体到抛硬币的例子，就是：

$$\text{Beta(a,b)} + \text{实验数据} \Rightarrow \textbf{Beta(a+ 花,b+ 字)}$$

代数细节

贝叶斯推断：

$$\text{先验分布} + \text{实验数据} \Rightarrow \textbf{后验分布}$$

应用到二项式分布的数学细节如下。假设实验数据 $X|p$ 服从二项分布：

$$X|p \sim bin(n,p)$$

上面的式子根据贝叶斯定理（离散贝叶斯可以参看“如何理解贝叶斯定理?” https://link.zhihu.com/?target=https%3A//www.matongxue.com/madocs/279.html，连续贝叶斯可以参看https://link.zhihu.com/?target=https%3A//zh.wikipedia.org/wiki/%25E8%25B4%259D%25E5%258F%25B6%25E6%2596%25AF%25E5%25AE%259A%25E7%2590%2586%23cite_note-2）可以表示为：

$$\underbrace{f(p|X=k)}_{\text{后验分布}} = \frac{\overbrace{p(X=k|p)}^{\text{实验数据}}\ \overbrace{f(p)}^{\text{先验分布}}}{\underbrace{P(X=k)}_{\text{常数}}}$$

其中 k 为“花”的次数。分母与实验数据无关，可以视作常数。因此，写成下面这样更容易看清楚重点：

$$\underbrace{f(p|X=k)}_{\text{后验分布}} \propto \overbrace{p(X=k|p)}^{\text{实验数据}}\ \overbrace{f(p)}^{\text{先验分布}}$$

Beta 分布长成这个样子：

$$Beta(a,b) = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

其中，B 为 $Beta$ 函数。随着 a,b 的变换，Beta 分布形态各异

共轭先验：对于二项式分布，用 $Beta$ 分布作为先验分布，通过贝叶斯推断之后，后验分布依然是 $Beta$ 分布，这种特性称为共轭先验。

3.6 伽马分布

TBD

3.7 卡方分布

TBD

3.8 柯西分布

TBD

3.9 概率密度和卷积 [4]

TBD

设两个随机变量 X 和 Y 的累积分布函数分别为 CDF_X 和 CDF_y，并且 $Z = X + Y$，那么 Z 服从什么分布呢?

可证明：两个随机变量的和的分布就等于两个概率密度的卷积，即：

$$PDF_Z = PDF_Y * PDF_X$$

4 特征函数

在概率论中，任何随机变量的特征函数完全定义了它的概率分布。

特征函数定义是：设 X 是实值随机变量，则对任意实数 t，有：

$$\phi(t) = Ee^{itX} = E(\cos(tX) - i\sin(tX)) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))$$

称为随机变量 X 的特征函数。

（特征函数是概率密度函数的连续傅里叶变换的共轭复数）

4.1 特征函数为什么叫做特征函数 [7] [8]

因为一个分布的特征函数是与该分布密度互相决定的，也就是说，特征函数体现了并蕴含着该分布的全部特征。换言之，随机变量 X 和 Y 同分布，当且仅当它们有相同的特征函数（当然，同时也当且仅当它们有相同的分布密度）。

特征函数是随机变量的分布的不同表示形式。一般而言，对于随机变量 X 的分布，大家习惯用概率密度函数来描述。比如说 X 服从正态分布：$X \sim N(\mu, \sigma)$。

虽然概率密度函数理解起来很直观，但是确实随机变量 X 的分布还有另外的描述方式，比如特征函数。

4.2 泰勒级数

根据泰勒级数可知，两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的各阶导数相等的越多，那么这两个函数越相似。

也即是：

$$\textbf{各阶导数都相等} \rightarrow f(x) = g(x)$$

那么，随机变量分布的特征有吗?

4.3 随机变量分布的特征

随机变量的特征有如下:

- 期望 μ
- 方差 σ^2
- 偏态 $Skewness$
- 峰态 $Kurtosis$
- ……

这些特征具体是什么含义就不解释了，说来话长。不过这些特征都跟随机变量的“矩”有关系（什么是“矩”请参考“如何理解概率论中的矩?”）

如期望对应一阶矩，方差对应二阶矩，偏态对应三阶矩等。

直觉上可以有以下推论（其实还是有条件的，这里先忽略这些严格性，在实际应用中如下思考问题不大）:

各阶矩相等 → 各个特征都相等 → 分布相同

4.4 特征函数

随机变量 X 的特征函数定义为:

$$\phi X(t) = E[e^{itX}]$$

为什么这么定义呢? 首先，e^{itX} 的泰勒级数为:

$$e^{itX} = 1 + \frac{itX}{1!} - \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots + \frac{(it)^nX^n}{n!}$$

代入可以推出:

$$\begin{aligned}
\varphi X(t) &= E[e^{itX}] && (65)\\
&= E(1 + \frac{itX}{1!} - \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots + \frac{(it)^nX^n}{n!}) && (66)\\
&= E(1) + E(\frac{itX}{1!}) - E(\frac{t^2X^2}{2!}) + \cdots + E(\frac{(it)^nX^n}{n!}) && (67)\\
&= 1 + \frac{it\overbrace{E[x]}^{\text{一阶矩}}}{1!} - \frac{t^2\overbrace{E[x^2]}^{\text{二阶矩}}}{2!} + \cdots + \frac{(it)^n\overbrace{E[x^n]}^{\text{n 阶矩}}}{n!} && (68)
\end{aligned}$$

原来特征函数包含了分布函数的所有矩，也就是包含了分布函数的所有特征啊。所以我们可以进一步完善刚才的结论：

$$\varphi X(t)\textbf{相等} \rightarrow \textbf{各阶矩相等} \rightarrow \textbf{各个特征都相等} \rightarrow \textbf{分布相同}$$

所以，特征函数其实是随机变量 X 的分布的另外一种描述方式。

4.5 特征函数和傅里叶变换的关系 [8]

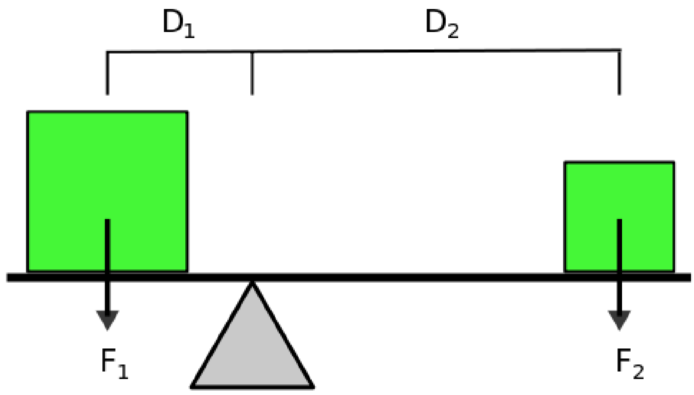
TBD

4.6 如何理解概率论中的"矩"？[9]

对比物理的力矩，你会发现，概率论中的"矩"真的是很有启发性的一个词。

4.6.1 力矩

大家应该都知道物理中的力矩，我这里也不展开说细节了，用一幅图来帮助大家回忆一下：



上图中，两边能保持平衡，只要满足下面的式子就可以了（很粗糙的式子，没把力作为向量来考虑）：

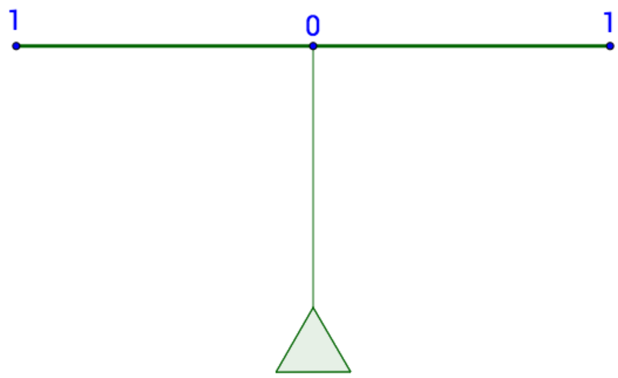
$$F_1D_1 = F_2D_2$$

其中，F_1D_1 和 F_2D_2 都称为力矩。

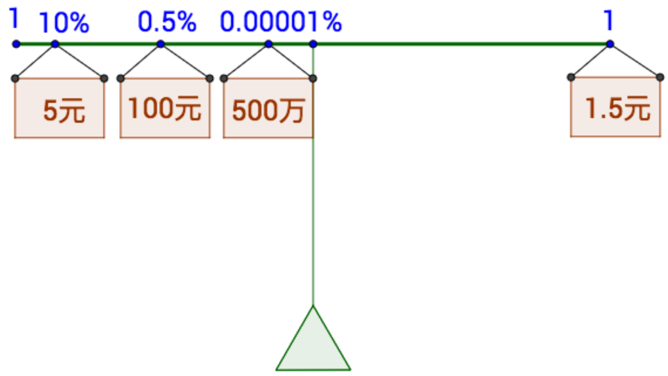
4.6.2 概率论中的"矩"

首先举个彩票的例子：每一注 2 元，中奖概率分别为：5 元：10%，100 元：0.5%，500 万：0.00001%。我们用概率来组装一把"秤"：

中心表示概率为0，两端表示概率为1



把整张彩票都放上去称（秤上的刻度是随便画的，因为相差太悬殊，没有办法按照真是比例来画）：



$1.5 = 5 \times 10\% + 100 \times 0.5\% + 5000000 \times 0.00001\%$ 这张彩票原来只值 1.5 元？血本无归啊！

4.6.3 矩

学过概率的都知道，我们上面计算的就是期望：$E(X) = \sum_i p_i x_i$，其实这就是“矩”，其中：

$$p_i \quad \textbf{是秤上的刻度}$$

$$x_i \quad \textbf{是要称的重量}$$

因为 x 是一次幂，所以也称为“一阶矩”。

再比如方差：$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2$

其中的距离 $(X-\mu)^2$ 也需要称量之后才能使用，所以方差也称为“二阶矩”。

“三阶矩”、“四阶矩”、“高阶矩”，各有用途，但是共同的特点就是称量之后才能使用。

References

[1] “熟悉常见概率分布.” [Online]. Available: https://paul.pub/common-probability-distributions/

[2] “常见概率分布的期望和方差推导.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/145615691

[3] “Jensen 不等式初步理解及证明.” [Online]. Available: https://blog.csdn.net/baidu_38172402/article/details/89090383

[4] A. B.Downey, 统计思维-程序员数学之概率统计 *(Think Stats)*. O’REILLY.

[5] “概率论中常见分布的数学期望、方差及其特征函数推导——连续性随机变量.” [Online]. Available: https://zhuanlan.zhihu.com/p/143837626

[6] “如何通俗理解 beta 分布？ - 小杰的回答 - 知乎.” [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/30269898/answer/123261564

[7] “特征函数为什么叫做特征函数.” [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/28227824/answer/39973416

[8] “如何理解统计中的特征函数.” [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/23686709/answer/376439033

[9] “如何理解概率论中的“矩”？.” [Online]. Available: https://www.matongxue.com/madocs/412.html

[10] “如何通俗理解 beta 分布？——马同学.” [Online]. Available: https://www.zhihu.com/question/30269898/answer/445460286