Exos Bac : Calcul intégral

Exercice 1 :

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à $0,01$ *près.*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = (3,6x + 2,4)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4.$$

Partie A

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$ on a :

$$f'(x) = (-2,16x + 2,16)\mathrm{e}^{-0,6x}.$$

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
   On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.
3. On admet que la fonction F définie par :

$$F(x) = (-6x - 14)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur numérique approchée.

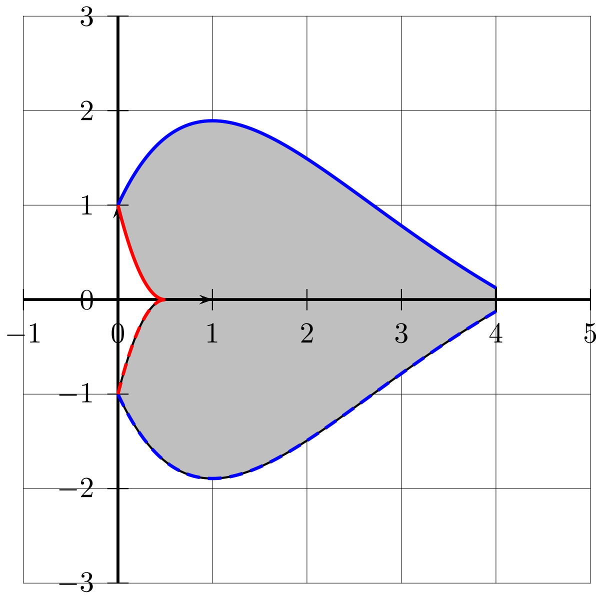
Partie B

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;\,0{,}5]$.

On a tracé ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.
2. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$.
   Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus.
   Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.

Exercice 2 :

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Soit g la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
   Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

   (b) En déduire la valeur de I_1.

   (c) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :
   $$I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n.$$

   (d) Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

$n \leftarrow 1$
$u \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$
Tant que $n < 21$:
$\quad u \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}u$
$\quad n \leftarrow n + 2$
Retourner u

   Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

   (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

   (c) A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (I_n).