Exos Bac : Continuité et théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ définie sur l'intervalle $[-2; 2]$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$.

2. Déterminer un encadrement par la méthode de balayage avec la calculatrice de α à 10^{-2}.

3. On considère l'algorithme suivant écrit en langage naturel.

```
a ← −2
b ← −1
Tant que (b − a) > 0,1
    m ← (a + b)/2
    p ← f(a) × f(m)
    Si p ⩽ 0 alors
        b ← m
    Sinon
        a ← m
```

Compléter les trois dernières lignes du tableau ci-dessous :

	m	$f(m)$	$f(a)$	Signe de p	a	b	$b-a$	$b-a>0.1$
Initialisation					-2	-1	1	Vrai
1er passage	-1,5	1,375	-1	négatif	-2	-1.5	0,5	Vrai
2e passage								
3e passage								
4e passage								

4. On donne ci-dessous le code suivant en langage Python codant l'algorithme de la question 2. Compléter le programme pour qu'il renvoie les valeurs finales de a et b.

```python
def f(x):
    y=.......................
    return y
def dichotomie(a,b,p):
    while ............. :
        m=..............
        p=...........
        if .....  :
            ...........
        else:
            ........
    return ....
```

5. Que renvoie l'appel dans la console de : dichotomie(-2,-1,0.1) ?

6. Interpréter le résultat.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

   On note α la solution.

   (c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.
   De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

   (a) Sur le graphique représenté dans l'annexe page 3, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

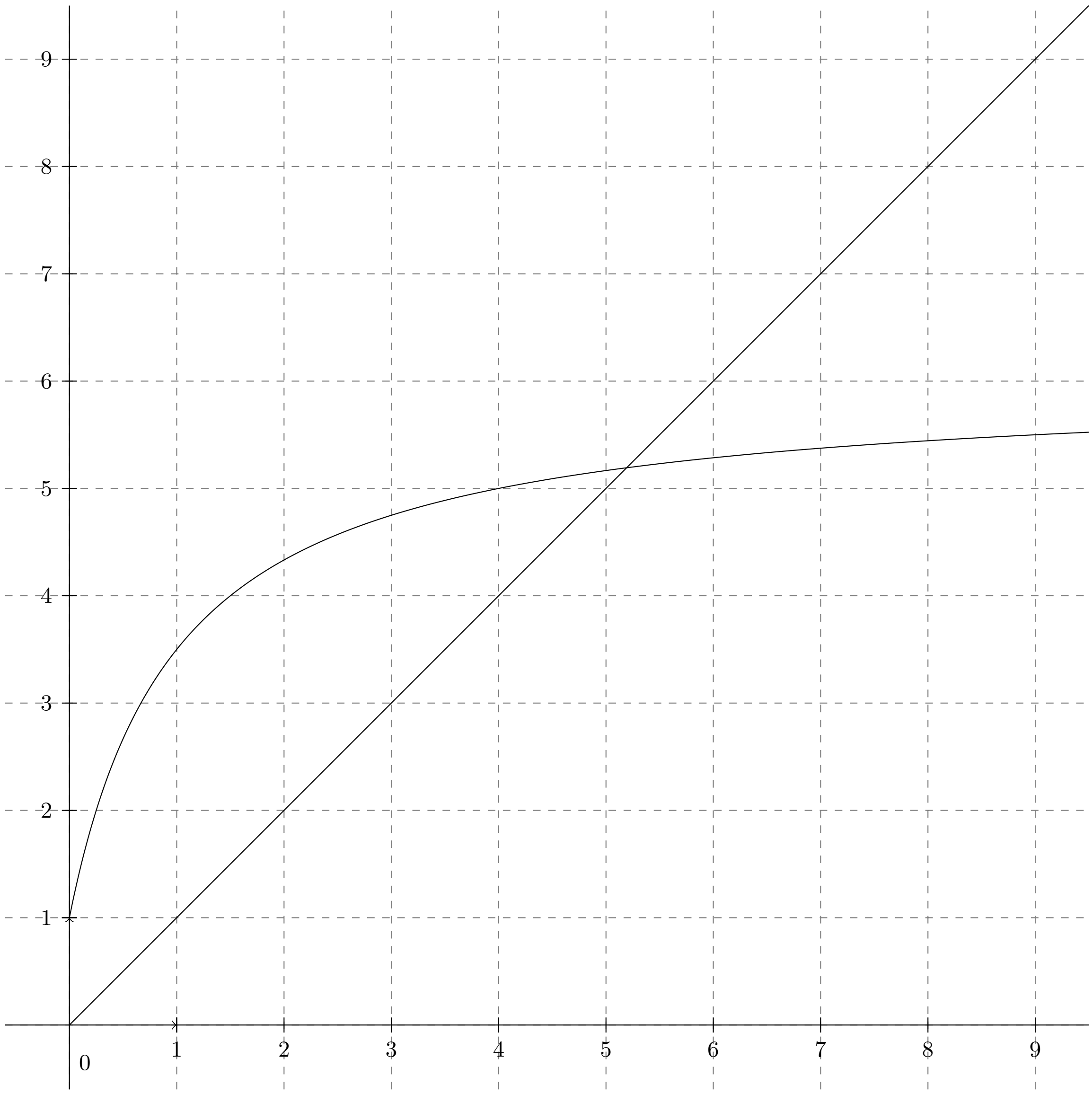
   (b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Annexe 2 (Exercice 1, question 2. a.)



Corrigé

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   (a) Sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:
   $$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0; \quad \text{la fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[$$
   (b) Résolution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$:
   $$f(x) = x \Longleftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Longleftrightarrow \frac{6x+6-5}{x+1} = x \Longleftrightarrow 6x+1 = x^2 + x \Longleftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0$$
   $$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 29; \quad \text{donc} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \simeq 5,193 \in [0\ ;\ +\infty[\\ \beta = \frac{5-\sqrt{29}}{2} \simeq -0,193 \notin [0\ ;\ +\infty[\end{array} \right.$$
   (c) La fonction f étant croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$:
   $$0 \leqslant x \leqslant \alpha \Longleftrightarrow 0 < 1 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant \alpha = f(\alpha)$$
   De même :
   $$x \geqslant \alpha \Longleftrightarrow f(x) \geqslant \alpha = f(\alpha)$$
2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$.
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$
   (a) Voir annexe 2.
   Conjectures peut-on émettre quant au sens de variations et à la convergence de la suite (u_n) : la suite (u_n) est croissante et converge vers α.
   (b) Pour tout entier naturel $n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
   récurrence : $\forall n, n \in \mathbb{N},\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
   — $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \Longrightarrow 0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant u_1 = 1 \leqslant \alpha \simeq 5,193$
   — Supposons que pour un n donné, on ait : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. La fonction f étant croissante sur $[0\,;\,\alpha]$:
   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \Longleftrightarrow 0 < 1 = f(0) \leqslant u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leqslant \alpha = f(\alpha)$$
   — Ainsi, $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   (c) La suite (u_n) étant croissante et majorée par α, elle est convergente vers ℓ.
   La fonction f étant continue sur $[0\,;\,\alpha]$, ℓ vérifie :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = u_{n+1} = f(\ell) \Longrightarrow f(\ell) = \ell$$
   Nous savons que seul α vérifie $f(x) = x$ sur $[0\,;\,+\infty[$. Ainsi :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$$
3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0
   — Si $u_0 \in [o\,;\,\alpha[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α.

— Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante et égale à α.
— Si $u_0 \in]\alpha\,; +\infty[$, la suite est décroissante et converge vers α.

Les démonstrations se font de la même manière que pour $u_0 = 0$.

Annexe 2 (Exercice 2, question 2. a.)