Complément sur la dérivation et convexité

1 Compléments de dérivation

1.1 Dérivée de la composée

Propriétés :
• Soit n un entier naturel non nul.
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et si lorsque n est strictement négatif, u ne s'annule pas sur I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et

$$\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$$

• Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(\sqrt{u}\ )' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$$

• Applications 1

Calculer les dérivées suivantes :

1. $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$ définie sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = e^{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$

1.2 Dérivée seconde (ou de la composée)

Propriété :

Soit f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I.
On appelle **drivée seconde** de,f sur la fonction dérivée de f', que l'on note f'' la fonction u^n est dérivable sur I et

$$\boxed{f''(x) = f'(f'(x))}$$

A faire :
• exercice 9 et 10 page 175 (résolus)
• les exercices 123 et 135 page 183(entrainement ; corrigés en classe)
• exercices 158 à 164 page 187 (en autonomie, réponses en fin de livre)

2 Convexité d'une fonction

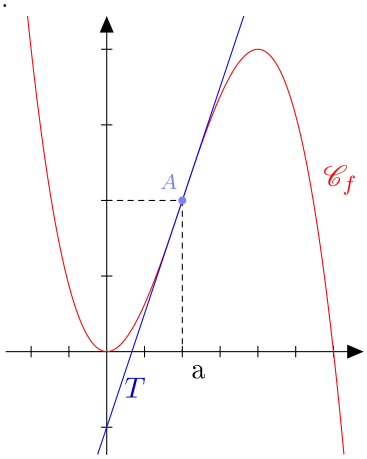
2.1 Convexité

Définition 1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$.

- La fonction f est dite **convexe** sur I lorsque sa courbe est située entièrement **au-dessus** de chacune de ses **tangentes**.
- La fonction f est dite **concave** sur I lorsque sa courbe est située entièrement **en dessous** de chacune de ses **tangentes**.

Exemple :



T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
La fonction f est **convexe** sur l'intervalle $]-\infty; a]$.
La fonction f est **concave** sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

2.2 Avec la dérivée seconde

Théorème 4:
Soit f une fonction définie sur l' intervalle $I =]a; b[$ telle que la **dérivée seconde** f'' existe sur I.

- Si, pour tout réel x de $I =]a; b[$, $f''(x) \geq 0$ alors f est **convexe** sur l'intervalle I.
- Si, pour tout réel x de $I =]a; b[$, $f''(x) \leq 0$ alors f est **concave** sur l'intervalle I.

2.3 Point d'inflexion

Définition 2.

Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique d'une fonction **traverse sa tangente** en ce point.

Théorème 5:
Soit f une fonction définie sur l' intervalle $I =]a; b[$ telle que la **dérivée seconde** f'' existe sur I.

Si f'' s'annule en c changeant de signe, **le point** $A(c; f(c))$ **est un point d'inflexion** de la courbe représentative de f.

Exemple : Sur l'exemple du 2.1, le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion**.

• Applications 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. a) Quels sont les intervalles où la fonction f est convexe ? concave ?
   b) Préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels.
3. Vérifier les résultats à l'aide de votre calculatrice.

A faire :
• exercice 5,6, 7 et 8 pages 207 à 209 (résolus)
• les exercices 68,72, 89 et 95 pages 216 à 219 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercices 102 à 107 page 221 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Dérivées

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	f' fonction dérivée définie sur	f définie et dérivable sur
$f(x)=k(k=constante)$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b \quad (a,b\in\mathbb{R})$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$ $f(x)=x^n \quad (n\in\mathbb{N}, n\neq 0)$	$f'(x)=2x$ $f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ $f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur $]0;+\infty[$	$[0;+\infty[$

Tableau récapitulatif des opérations sur les fonctions dérivées

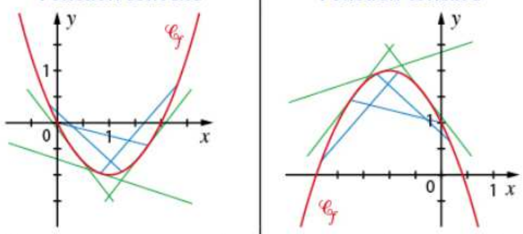
Dans le tableau ci-dessous, u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I

Opération	Fonction f	Fonction dérivée f'
Produit d'une fonction par un nombre k	$ku(k=constante)$	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit	$u\times v$	$u'v+uv'$
Puissance	u^n	$nu'u^{n-1}$
Racine carrée (avec $u>0$)	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Inverse $(u(x)\neq 0)$	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
Quotient $(v(x)\neq 0)$	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Exponentielle $(e^{u(x)})$	e^u	$u'e^u$

Synthèse sur la convexité et complément sur les dérivées page 220

Convexité

Fonction convexe | **Fonction concave**



$\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de ses sécantes et au-dessus de ses tangentes.

$\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de ses sécantes et au-dessous de ses tangentes.

Point d'inflexion : point où la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente ; f change de convexité.

Convexité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I, équivaut à f' est croissante sur I, équivaut à f'' est positive sur I ;
- f est concave sur I, équivaut à f' est décroissante sur I, équivaut à f'' est négative sur I ;
- $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion équivaut à f'' s'annule en changeant de signe en a.

Convexité d'une fonction et dérivabilité

Fonction composée u suivie de v

$v \circ u$ telle que $v \circ u(x) = v(u(x))$

Dérivée de $v \circ u$

- $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ (où $n \in \mathbb{Z}^*$)
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple de calcul d'une limite

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$