Fonction logarithme népérien

1 Logarithme népérien d'un réel strictement positif

1.1 Définition

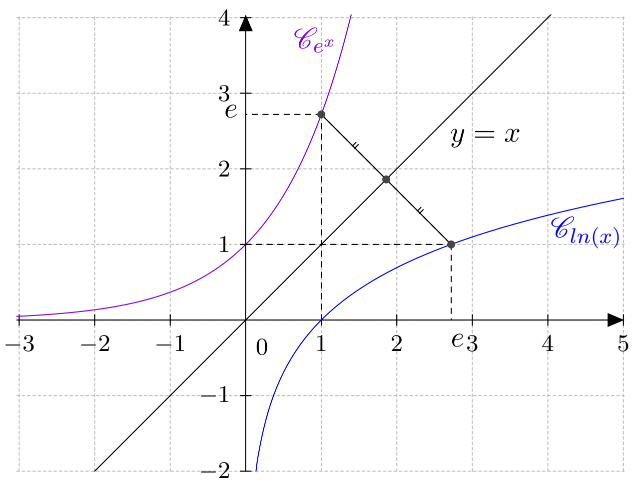
Définition 1.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe le réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle est x.

$$\text{Pour tout } x>0, \quad \ln(x)=y \quad \Longleftrightarrow \quad x=e^y$$

1.2 Fonction réciproque de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle e^x admet une fonction réciproque appelée **fonction logarithme**, notée $\ln(x)$. Elles sont réciproques l'une de l'autre car $(x=\ln(e^x)=e^{\ln(x)})$.
- Leur courbes respectives sont **symétriques** par rapport la droite d'équation $y=x$.



Propriétés [admises]

- Pour tout $x>0$, $\boxed{e^{\ln x}=x}$,
- Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x)=x}$,
- $\boxed{\ln(1)=0}$ et $\boxed{\ln(e)=1}$,

  sont des **valeurs remarquables**

Positions relatives : Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a $\boxed{\ln(x)<x<e^x.}$

1.3 Relations fonctionnelles

Propriétés [admises] Pour $x>0$ et $y>0$:

- **Produit :** $\boxed{\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)}$.
- **Quotient 1 :** $\boxed{\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)}$.
- **Quotient 2 :** $\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln(x)}$.
- **Racine carrée :** $\boxed{\ln(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}\ln(x)}$.
- **Puissance :** Pour $x>0$ et n entier relatif,

  $\boxed{\ln(x^n)=n\ln(x)}$.

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Sens de variation et représentation graphique de $f(x) = \ln(x)$

Théorème :

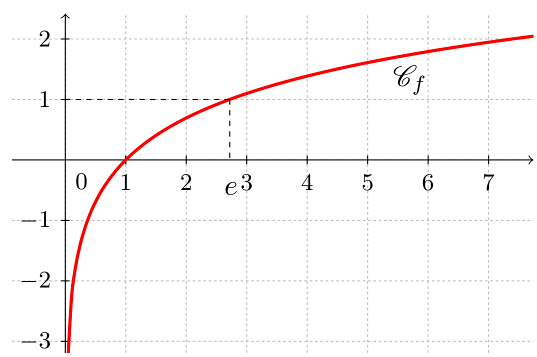
La fonction **logarithme** $\ln(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et **sa dérivée** est la fonction inverse sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour tout } x > 0, \boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

2.1.1 Tableau de variation

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln(x))'$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\ln(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

2.1.2 Courbe graphique de $ln(x)$



2.2 Propriétés

- La fonction $f(x) = \ln(x)$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$
- La fonction ln est **concave** sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2.3 Fonctions composées avec la fonction logarithme népérien

Propriété :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ pour tout réel x de I.
La fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I, \boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \iff (\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

2.4 Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

Propriétés Pour tout nombres réels x et y strictement positif :

- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$ et $\ln(x) < \ln(y) \iff x < y$
- $\ln(x) = 0 \iff x = 1$; $\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$ et $\ln(x) > 0 \iff x > 1$

A faire :
- exercices 1, 2, 3 et 4page 237-239 (résolus)
- les exercices 57, 58, 75, 76, 95, 97, 108, 109 et 116 page 246-250 (entrainement ; corrigés en classe)
- exercices 142, 146, 148 et 157 page 252 (en autonomie, réponses en fin de livre)

3 Limites liées à la fonction logarithme ln

3.1 Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln

Propriétés 1 et 2 :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty}$$

3.2 Croissance comparée du ln et x^n

Propriétés 3 et 4 :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0}$$

Propriétés 5 et 6 : Pour tout nombre entier n strictement positif, on a :

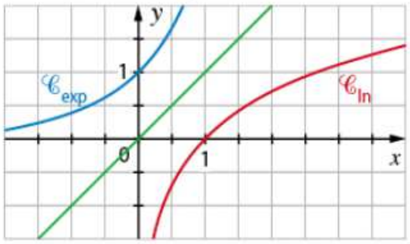
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n\ln(x) = 0}$$

Démonstrations faites en cours.

A faire :
- exercices 5 et 6 page 241 (résolus)
- les exercices 122 et 129 page 246-250 (entrainement ; corrigés en classe)
- exercices 152 à 155 page 253 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Synthèse ; Fonction logarithme
page 252

Courbe représentative



- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de ln.

Lien avec la fonction exponentielle

- Pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$, ce qui s'écrit $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$, ce qui s'écrit $e^{\ln(x)} = x$.
- $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ et pour tout entier n, $\ln(e^n) = n$.

Relation fonctionnelle Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Logarithme népérien

- **La fonction logarithme népérien** que l'on note **ln** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
  Pour $x > 0$, $y = \ln(x)$ équivaut à $e^y = x$.
- La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$.

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0$

Pour tout entier n strictement positif

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n\ln(x) = 0$

Fonction dérivée

- Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$.

Pour tout réel x de I, on a $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Variations et conséquences

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$.
- $0 < x < 1$ équivaut à $\ln(x) < 0$.
- $x > 1$ équivaut à $\ln(x) > 0$.