Primitives et équations différentielles

Activité 2 page 294

1 Primitives d'une fonction

1.1 équation différentielle $y' = f$

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'une fonction F est une s**olution de l'équation différentielle** $y' = f$ sur I si et seulement si F est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

- Résoudre sur I **l'équation différentielle** $y' = f$, c'est trouver les fonctions F dérivables sur I telles que $F'(x) = f(x)$.

1.2 Primitive d'une fonction

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f.

C'est à dire $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemples : Exprimer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = 2\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

- Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.
- Soit f une fonction continue sur I et G une primitive de f sur I.
  Les primitives de f sur I (c'est à dire les solutions de l'équation $y' = f$) sont les fonctions F définies sur I par

$$\boxed{F(x) = G(x) + C}, \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

2 Recherche des primitives d'une fonction

2.1 Tableau des primitives des fonctions de références

Fonction f	Primitive $F(x)$	f définie sur
$f(x) = k (k = constante)$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \leq -2$ ou $n \geq 1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ et $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n \leq -2$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

2.2 Primitives de fonction ayant des formes remarquables

Propriétés :
Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I.

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

2.3 Tableau récapitulatif .

Fonction f	Primitive F	Condition
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n<-1$, $u(x)\neq 0$ pour tout réel x de I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x)\neq 0$ pour tout réel x de I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\mid u\mid)$	$u(x)>0$ pour tout réel x de I ou $u(x)<0$ pour tout réel x de I
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x)>0$ pour tout réel x de I
$u'e^u$	e^u	pour tout réel x de $\mathbb{R}$
$(v'\circ u)\times u'$	$v\circ u$	v est une fonction dérivable sur J et $u(x)\in J$ pour tout réel x de I

Exemples : Trouver les primitives F et G des fonction suivantes :

a) $f(x)=(2x-1)^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ telle que $G(2)=2$ définie sur $]1+\infty[$.

A faire :
- exercices 1, 2, 3 et 4 pages 297-299 (capacités résolues)
- les exercices 53, 54, 55, 56, 69 et 81 pages 306-307 (entrainement ; corrigés en classe)
- exercices 131, 134 et 135 page 312 (en autonomie, réponses en fin de livre)

3 Équations différentielles

Une **équation différentielle**, souvent appelée équa.diff., est une égalité où il y a une fonction avec ses dérivées. C'est aussi une égalité ou l'inconnue est une fonction.

Exemple : $f'(x) - 3f(x) = 5$ simplifiée par l'écriture $y'(x) - 3y(x) = 5$ puis par $y' - 3y = 5$.

3.1 Équation différentielle $y' = ay$

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $\boxed{y' = a\ y}$, où a est un nombre réel et y est une fonction de x sur $\mathbb{R}$, sont les **fonctions** :

$$\boxed{y = C\ e^{ax}}\text{, où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Exemple 1: Résoudre l'équation différentielle $y' - 5y = 0$.

3.2 Équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété :
Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère l'équation $(E) : y' = ay + b$.

- (E) admet une **unique solution particulière** constante, qui est la fonction

$$f_0 = -\frac{b}{a} \text{ notée aussi } p(x) = -\frac{b}{a}.$$

- Les **solutions** sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $\boxed{y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$, où C est une constante réelle.
- Quels que soient les nombres réels x_0 et y_0, l'équation (E) admet une unique solution g vérifiant la condition initiale $g(x_0) = y_0$.

3.3 Équation différentielle $y' = ay + f$

Propriété :
Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Toute solution dans I de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ est la somme d'une solution quelconque de l'équation $y'ay$ et d'une solution particulière de (E).

Exemple 2 :

Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 5$.

A faire :
- exercices 5, 6 et 7 page 301 (capacités résolues)
- les exercices 106, 115 et 124 pages 309-311 (entrainement ; corrigés en classe)
- exercices 140, 141, 143 et 147 page 313 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Primitives et équations différentielles

Synthèse page 312

Primitives d'une fonction

Primitive d'une fonction f sur I : fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Si F est une primitive de f sur I, toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante.

Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Primitive F
$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1 ; 0\}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$

Primitives des fonctions composées

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u
$u'u^n$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1 ; 0\}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$ $(u>0)$	$\ln(u)$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ $(u>0)$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Équations différentielles

- L'équation $y' = f$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où F est une primitive de f et C une constante.
- L'équation $y' = ay$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$.
- L'équation $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + f_0(x)$, où $k \in \mathbb{R}$ et f_0 est la solution constante de cette équation.
- L'équation (**E**) $y' = ay + f$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + p(x)$, où $k \in \mathbb{R}$ et p est une solution particulière de (**E**).