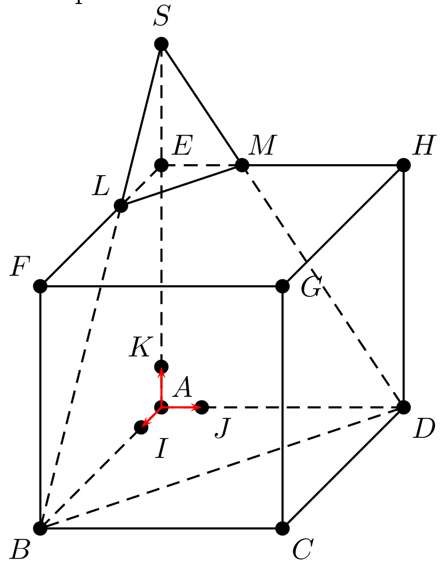
Exos Bac : Orthogonalité dans l'espace

Exercice 1

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et

$AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

— L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
— M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
— S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.
2. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

   (b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\ ;\ 0\ ;\ 9)$.
3. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   (a) Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BDL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BDL).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH).
   (d) Calculer les coordonnées du point M.
4. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

5. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55°et 60°.
   Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

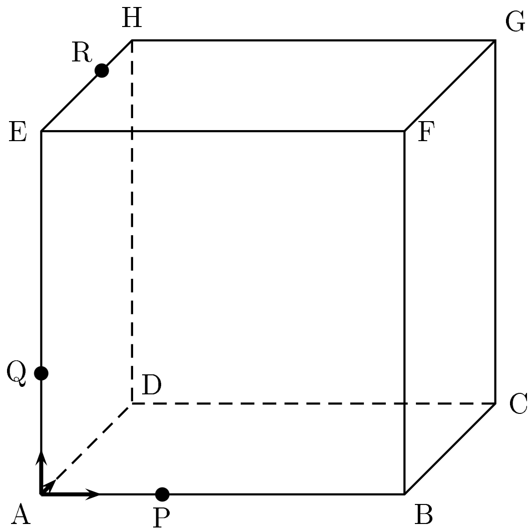
Exercice 2

Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$



$$B(6\ ;\ 0\ ;\ 0), F(6\ ;\ 0\ ;\ 6) \text{ et } R(0\ ;\ 4\ ;\ 6).$$

1. (a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

   (b) Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .

   (c) En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.

2. (a) On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.

   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   (b) En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

   (c) Calculer la distance ΩI.

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.

On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\ ;\ -1\ ;\ 1),\quad B(4\ ;\ -3\ ;\ 0)\ \text{et}\ C(-1\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+8 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Exercice 4

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace.

Les quatre questions sont indépendantes. **Aucune justification n'est demandée.**

1. On considère le plan P d' équation cartésienne $3x+2y+9z-5=0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4t+3 \\ y &=& -t+2 \\ z &=& -t+9 \end{array}\right.$ $, t \in \mathbb{R}$.

   Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3\,;2\,;9)$.

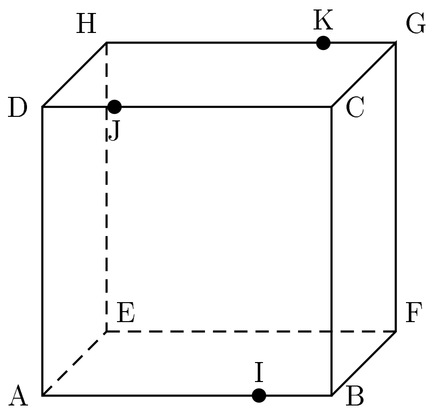
   Affirmation B : le plan P et la droite d sont orthogonaux.

   Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.

   Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353\ ;\ 91\ ;\ 98)$.

2. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

   $$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}.$$

   Affirmation A : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un triangle.

   Affirmation B : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un quadrilatère.

   Affirmation C : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone.

   Affirmation D : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.

3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& t+2 \\ y &=& 2 \\ z &=& 5t-6 \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point $A(-2\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Soit M un point variable de la droite d.

   Affirmation A : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.

   Affirmation B : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.

   Affirmation C : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

   Affirmation D : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ -6)$.

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

   Affirmation A : les plans P et P' sont parallèles.

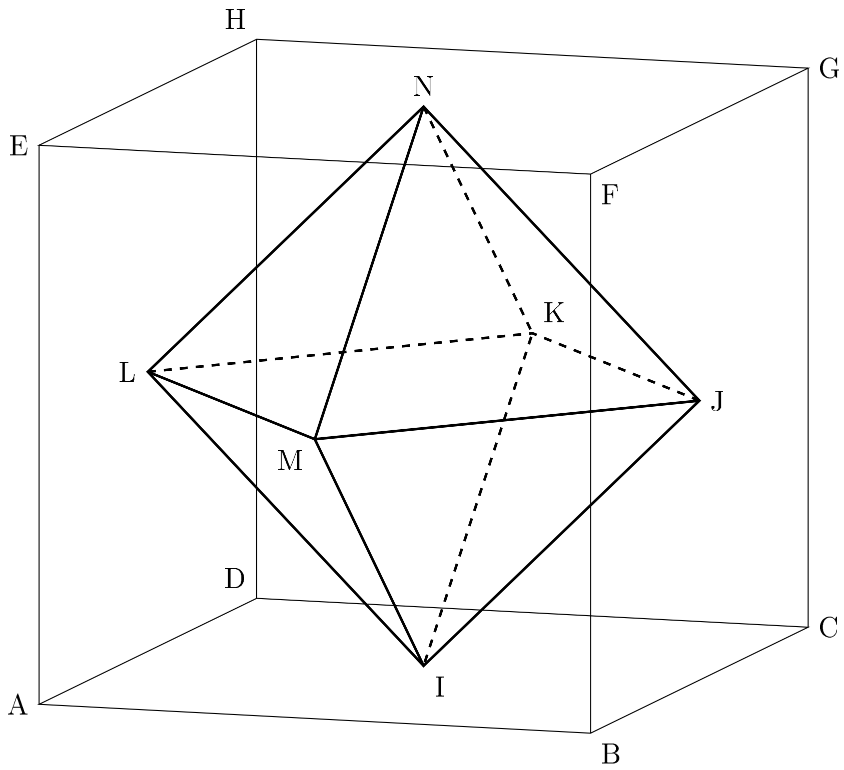
   Affirmation B : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par les points $A(5\,;12\,;10)$ et $B\ (3\,;1\,;2)$.

   Affirmation C : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point $C(2\,;6\,;5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

   Affirmation D : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point $D(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(3\ ;\ 6\ ;\ 5)$.

Exercice 5

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

   Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.

   (b) En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

   (c) Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

3. (a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.

   (b) La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

   (c) Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.