Intégrations

Activité : Encadrer une aire par la méthode des rectangles page 328.

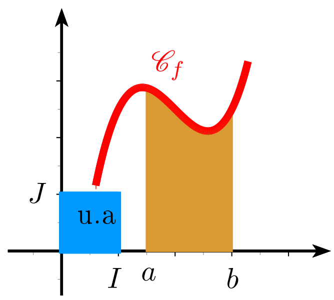
1 Intégrale d'une fonction continue et positive

1.1 Aire d'une fonction continue et positive

Propriété :

Si f est une fonction positive sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ exprimé en unité d'aire. (U.A.)

Pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, cette aire est notée : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.



u.a=unité d'aire = l'aire du rectangle $[OI]$ et $[OJ]$, notée parfois (u.a).

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$" ou encore "somme de a à b de $f(x)\,dx$ ".
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
- La variable x est dite "muette", elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b :

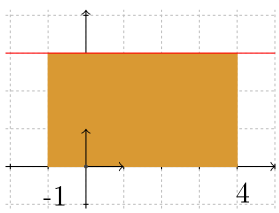
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.

1.2 Encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles

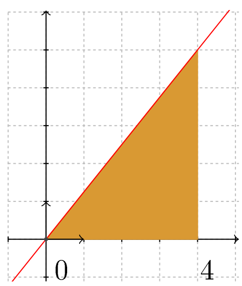
Exemples

1. Avec une fonction constante



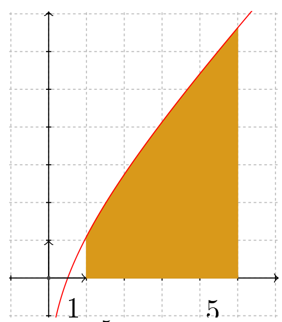
$\displaystyle\int_{-1}^4 f(x)\,dx = ...$

2. Avec une fonction linéaire



$\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = ...$

3. Avec une fonction quelconque



$\displaystyle ... \leqslant \int_1^5 f(x)\,dx \leqslant ...$

2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Théorème fondamental

:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par :

$$F(x) = \int_a^b f(x)\ dx$$

La fonction F est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

2.2 Corolaire

Propriété :
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$.

$$\text{On a } \int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b$$

Remarques :

- Toute fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ admet des primitives sur $[a;b]$.
- Si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors une fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x) = F(x) + k$, k étant un réel, est aussi une primitive de f sur $[a;b]$.
- La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ a pour dérivée f .

A faire :
• exercices 1 à 3 pages 331-333 (capacités résolues)
• les exercices 46, 47, 48, 52 et 54 page 342 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercices 122 à 126 pages 348-349 (en autonomie, réponses en fin de livre)

3 Propriétés et intégration par parties

3.1 Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. a, b, et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

P_1 • on a $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$

P_2 • on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

- **Linéarité :**

$$P_3 \bullet \int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\ dx = \int_a^b \Big(f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\Big)\ dx$$

$$P_4 \bullet \int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$$

P_5 • **Relation de Chasles** : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

P_6 • **Positivité :** Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$

P_7 • **Comparaison :** Si pour tout x de $[a;b]$, : $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b g(x)\ dx$

3.2 Intégration par parties

Propriétés

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soit a et b deux réels de I.

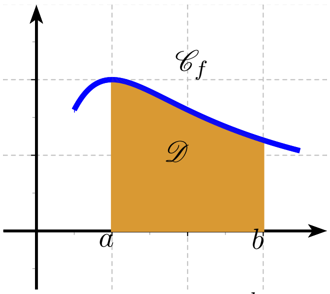
$$\text{alors} \int_a^b u(x)v'(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a b - \int_a^b u'(x)v(x)\ dx$$

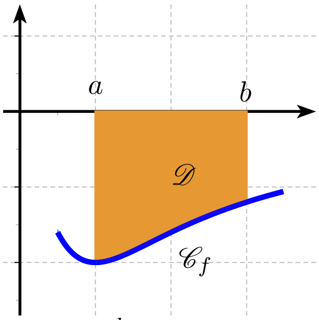
Démonstration :

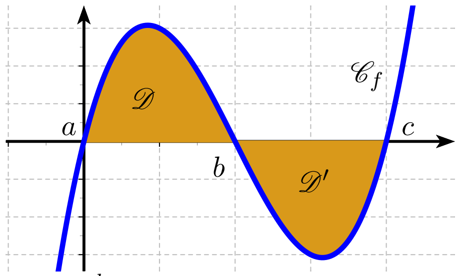
4 Applications du calcul d'intégral

4.1 Calculs d'aires

Une aire est toujours positive.



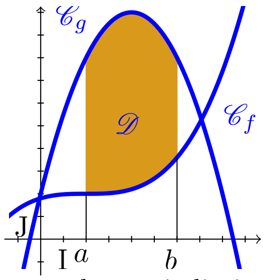




. • $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)$. • $\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)$. • $\mathscr{A} = \int_a^b f(x) - \int_b^c f(x)$

4.2 Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Définition :



Soient f et g deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[a;b]$ telles que pour tout

$$x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$$

L'aire, en unités d'aire du repère, du domaine $\mathscr{D}$ situé entre les deux courbes puis limité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathscr{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx = \int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx$$

4.3 Valeur moyenne d'une fonction

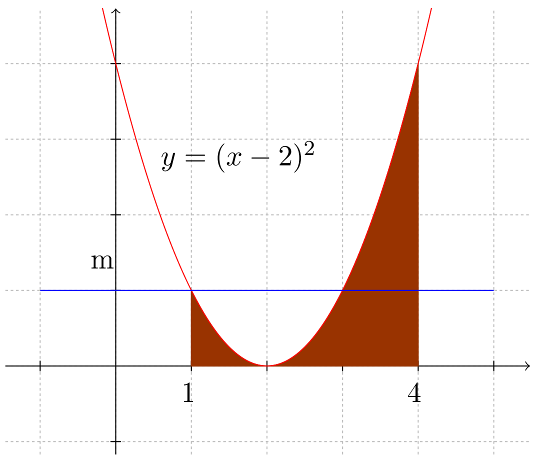
Définition :

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et $a < b$, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel :

$$valeur\ moyenne = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Exemple : Calculer la valeur moyenne de la fonction :

$$f(x) = (x-2)^2 \text{ sur l'intervalle } [1;4]$$



A faire :

• exercices 5 à 9 pages 335-337 (capacités résolues)

• les exercices 76, 81, 90, 102, 118 et 121 pages 343-347 (entrainement ; corrigés en classe)

• exercices 127 à 132 page 349 (en autonomie, réponses en fin de livre)

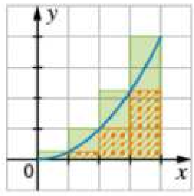
Calcul intégral

Théorème fondamental

f continue et positive sur $[a\,;b]$.
La fonction F_a définie sur $[a\,;b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Méthode des rectangles

f continue et positive sur $[a\,;b]$.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut être encadrée par la somme des aires des rectangles hachurés en rouge et colorés en vert.



Méthodes de calcul

- **À l'aide d'une primitive**

f fonction continue sur $[a\,;b]$ et F primitive de f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- **Intégration par parties**

u et v dérivables sur I, u' et v' continues sur I.
a et b sont deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriétés de l'intégrale

f et g continues sur $[a\,;b]$, $c \in [a\,;b]$, $k \in \mathbb{R}$.

- **Linéarité**

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Positivité :** Si $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- **Comparaison :** Si $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x) \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

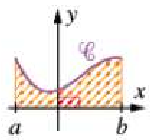
Valeur moyenne d'une fonction f sur $[a\,;b]$

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Calcul d'aires

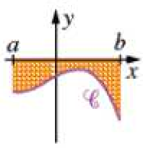
- **f continue et positive sur $[a\,;b]$**

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.



- **f continue et négative sur $[a\,;b]$**

L'aire, en u.a., de la surface hachurée est l'opposé de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



- **Aire entre deux courbes**

$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$, $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.