Fonctions trigonométriques

Activité 1 page 268

1 Fonctions sinus et cosinus

1.1 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Propriétés :

P_1 • **Continuité** : Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont continues sur $\mathbb{R}$

P_2 • **Périodicité** :
Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π.

P_3 • **Dérivabilité sur** $\mathbb{R}$: Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos'(x) = -sin(x)}$$

P_4 • **Dérivabilité sur I (fonctions composées)** :
Soit u une fonction dérivable sur une intervalle I et, pour tout réel x :
Les fonctions $\sin(u(x))$ et $\cos(u(x)))$ sont dérivable sur I :

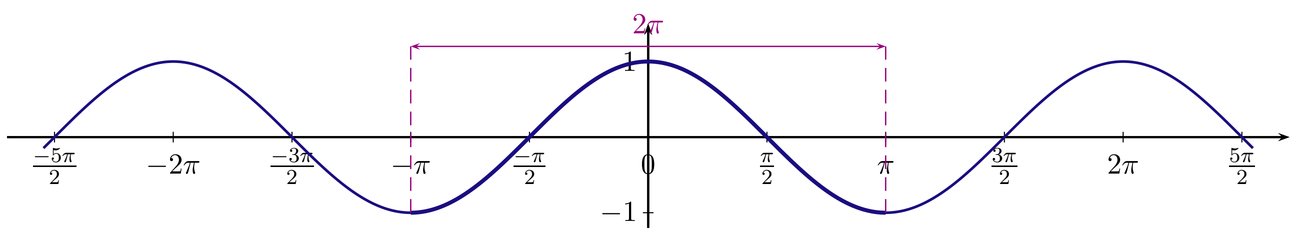
$$\boxed{\sin'(u(x)) = u'(x) \times \cos(u(x))} \ \text{et} \ \boxed{\cos'(u(x)) = -u'(x) \times \sin(u(x))}$$

1.2 Courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus

Pour tracer les courbes des fonctions cosinus et sinus, il suffit de les étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, puis de les dupliquer sur l'intervalle étudié (symétrie et périodicité).

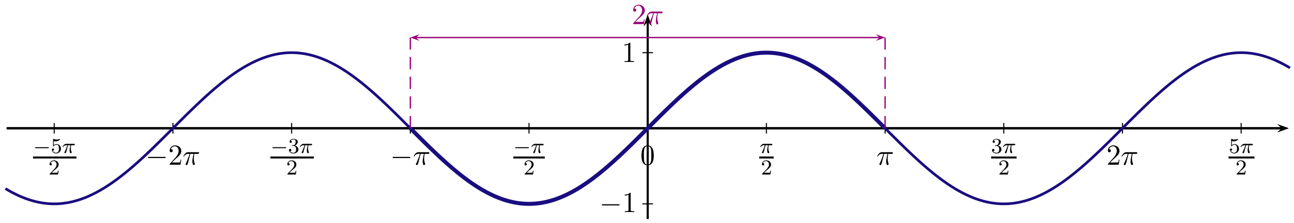
1.2.1 Fonction cosinus

x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	1
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1



1.2.2 Fonction sinus

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



A faire :

• exercices 1 et 2 pages 271 (capacités résolues)

• les exercices 58, 59, 60, 61 et 102 pages 306-307 (entrainement ; corrigés en classe)

• exercices 116 à 122 pages 282-283 (en autonomie, réponses en fin de livre)

2 Équations et inéquations trigonométriques

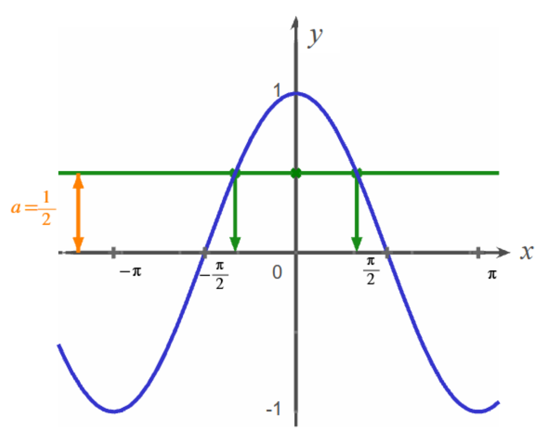
Définition 1.

Une **équation trigonométrique** est une équation où l'inconnue intervient dans l'expression d'un sinus, d'un cosinus, d'une tangente ou d'une cotangente.

2.1 Résolution de l'équation $\cos(x) = a$

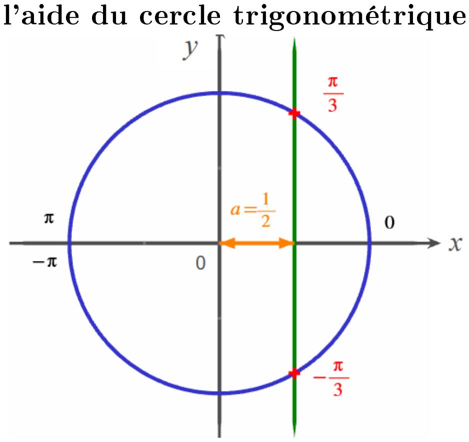
Exemple : $\cos(x) = \frac{1}{2}$

A l'aide de la courbe



$S=\{-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\}$ sur $[-\pi ; \pi]$

A l'aide du cercle trigonométrique



Les réels associés aux points d'intersection entre la droite d'équation $x = a$ et le cercle trigonométrique sont les solutions de l'équation $\cos x = a$

Propriétés

Soit α une solution sur l'intervalle I de :

P_5 • $\cos(x) = a$ alors, $S = \{x : x = \alpha + 2k\pi \ ou\ x = -\alpha + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{R}\}$

P_6 • $\sin(x) = a$ alors $S = \{x : x = \alpha + 2k\pi \ ou\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{R}\}$

Résolution de l'équation $\cos(x) \leq a$

Exemple : $\cos(x) \leqslant -\dfrac{1}{2}$

On place les deux points A et B d'abscisse $-\frac{1}{2}$ du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

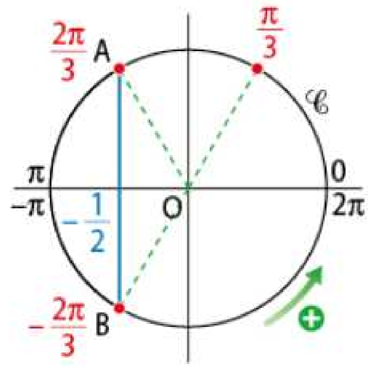
$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, donc $-\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$.

Les réels associés aux points A et B sont $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

On colore ensuite en rouge l'ensemble des points de $\mathscr{C}$. tels que $\cos(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.

On en déduit l'ensemble des solutions :

$\left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.



Propriétés à connaitre

Pour tout réels x :

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

A faire :

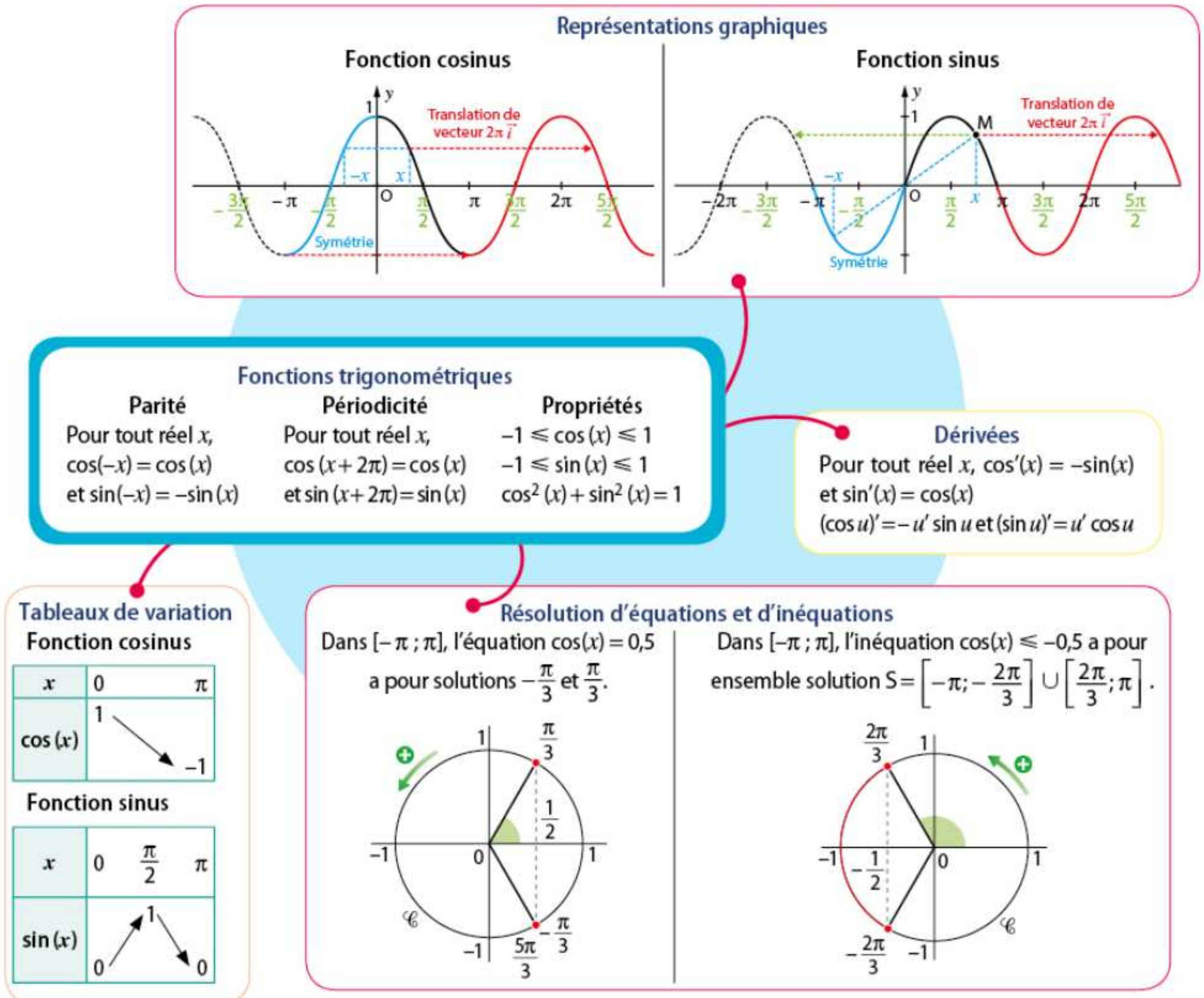
• exercices 3 et 4 page 273 (résolus)

• les exercices 83, 84, 85, 94, 95 et 115 pages 279-281 (entrainement ; corrigés en classe)

• exercices 123 à 131 page 283 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Fonctions trigonométriques

Synthèse page 282



Représentations graphiques

Fonction cosinus — Translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ — Symétrie

Fonction sinus — Translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ — Symétrie

Fonctions trigonométriques

Parité	Périodicité	Propriétés
Pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$	Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$	$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$; $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

Dérivées

Pour tout réel x, $\cos'(x)=-\sin(x)$ et $\sin'(x)=\cos(x)$

$(\cos u)'=-u'\sin u$ et $(\sin u)'=u'\cos u$

Tableaux de variation

Fonction cosinus

x	0	π
$\cos(x)$	1 ↘	-1

Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0

Résolution d'équations et d'inéquations

Dans $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos(x)=0{,}5$ a pour solutions $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Dans $[-\pi\,;\pi]$, l'inéquation $\cos(x)\leqslant -0{,}5$ a pour ensemble solution $S=\left[-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$.