Exos Bac : Fonctions logarithmes

Exercice 1

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

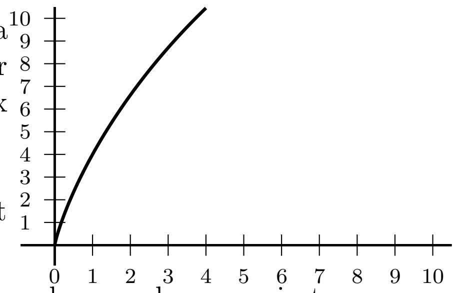
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. (a) On rappelle que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x \to 0} x\ln x = 0.$$

   (b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. (a) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Exercice 3

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30$ m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

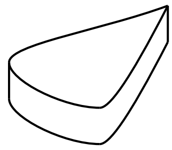
On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. (a) Interpréter le nombre $0,245$ dans la cellule D3.
   (b) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à $1,30$ m du sol vaut 27 cm.
3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
   (a) Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
   (b) Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Exercice 4

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

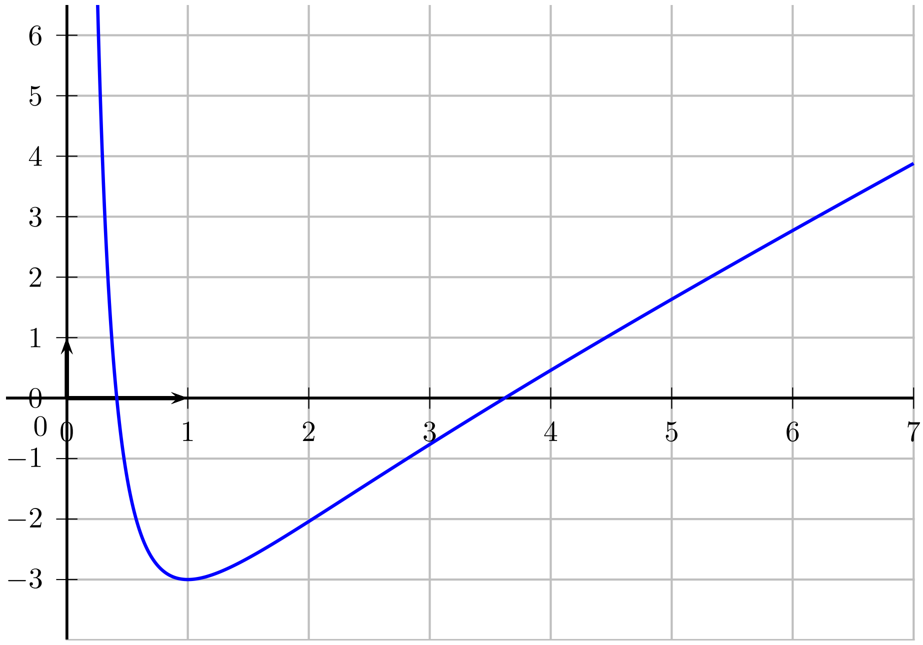


Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

   (a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

   (b) Étudier les variations de φ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Montrer que sur $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
   En déduire le tableau de variation de f.

   (c) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,1]$.
   Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\ ;\ +\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

   $$f(x) = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

   (b) En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{\ln(x)\big(2 - \ln(x)\big)}{x^2}.$$

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

   (c) Calculer $f(1)$ et $f\left(e^2\right)$.

   On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.