Fiche synthèse sur les limites des suites

Récurrence

Soit une propriété $P(n)$ définie sur $\mathbb{N}$. Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

- **Initialisation** : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0. (n_0 désigne un entier naturel).
- **Hérédité** : si la propriété $P(k)$ est vraie pour un nombre $k \geqslant n_0$, alors $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : La propriété $P(n)$ est vraie au premier rang n_0, et elle héréditaire, donc $P(n)$ elle est vraie pour tout entier naturel, c'est dire .....(on annonce la propriété).

Comportement global d'une suite équivaut à l'étude du signe $u_{n+1} - u_n$

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **croissante** si est seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- **décroissante** si est seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Trois méthodes pour étudier la monotonie , algébrique, fonctionnelle ou par récurrence.

Limite d'une somme de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

Limite d'un produit de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**

Limite d'un quotient de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	**FI**

Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel et n un entier naturel.
La limite de la suite géométrique q^n est :

- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

Suite majorée, minorée et bornée

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **majorée** si, il existe un réel M tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
M **majorant** de (u_n).

- **minorée** si, il existe un réel m tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
m **minorant** de (u_n).

- **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone

- Si une suite (u_n) est **croissante** et **majorée**, alors (u_n) **converge**.
- Si une suite (u_n)est **décroissante** et **minorée**
alors (u_n) **converge**.

- Si une suite (u_n) est **croissante** et **non majorée**, alors (u_n) **diverge** vers $+\infty$.
- Si Une suite (u_n) est **décroissante** et **non minorée**, alors (u_n) **diverge** vers $-\infty$.

Théorème de comparaison

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang

$$u_n \leqslant v_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang

$$u_n \leqslant v_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si (u_n) et (w_n) **convergent** vers le réel ℓ, alors (v_n) **converge** vers ℓ.