Variables aléatoires et loi des grands nombres

Synthèse page 418

Variables aléatoires

Opérations sur les variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires. On définit :

– la variable aléatoire aX, produit de X par un réel a ;

– la variable aléatoire $X+Y$, somme des variables X et Y.

Propriétés

- $E(aX) = a\,E(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $V(aX) = a^2\,V(X)$
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$
- Si les variables X et Y sont indépendantes : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Variables aléatoires indépendantes

- Deux variables aléatoires sont dites indépendantes quand elles sont associées à des épreuves indépendantes.
- Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si, quelles que soient les valeurs x_i et y_j :

$P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$

où X prend les valeurs x_i et Y les valeurs y_j.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Pour tout réel $\delta > 0$, $P\left(|X-\mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

- **Inégalité de concentration**

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable X.

Pour tout réel $\delta > 0$, $P\left(|M_n-\mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V}{n\delta^2}$.

- **Loi faible des grands nombres**

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable X.

Pour tout réel $\delta > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|M_n-\mu| \geqslant \delta\right) = 0$.

Échantillon d'une loi de probabilité

- Un **échantillon de taille** n de la loi de la variable aléatoire X est une liste $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.
- La **variable aléatoire somme** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$E(S_n) = n\,E(X) \qquad V(S_n) = n\,V(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\;\sigma(X)$

- La **variable aléatoire moyenne** est la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}\,S_n$.

$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \dfrac{1}{n}\,V(X) \qquad \sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

- **Loi binomiale** de paramètres n et p : c'est la variable somme de n variables aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre p.

Espérance : np

Variance : $np(1-p)$ Écart-type : $\sqrt{np(1-p)}$