Orthogonalité dans l'espace

1 Produit scalaire dans l'espace

1.1 Approche géométrique

Définition 1.

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.

- si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}}$.
- si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Propriétés :

P1 • Bilinéarité (associativité et distributivité) et Symétrie :

• $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$. • $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$. • $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

P2 • Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ on a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

.

1.2 Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Définition 2.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux (Noté $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u}$) si, et seulement si,

- l'un des deux est nul, ou
- aucun des deux n'est nul et ils dirigent des droites perpendiculaires.

Propriété P3:
Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

A faire :
• exercices 1 et 2 page 89 (capacités résolues)
• les exercices 56 et 59 page 104 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercices 143 et 144 page 112 (en autonomie, réponses en fin de livre)

2 Produit scalaire dans un repère de l'espace

2.1 Expression analytique

Définition 3.

- On appelle **base orthonormée** (ou **orthonormale**) d'un espace vectoriel toute base $(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k})$ telle que les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux et $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1$.

- Un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k})$ est dit orthonormé si est seulement si la base $(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k})$ est orthonormée.

Propriétés :
Dan un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k})$, on considère $\overrightarrow{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\overrightarrow{v}(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ deux vecteurs et soit $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ deux points :

P3 • $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

P4 • $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x^2 + y^2 + z^2$ donc $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

P5 • $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$

2.2 Formules de polarisation

Propriétés :

P6 • Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$.

P7 • $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

P8 • $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$.

A faire :
• exercices 3 et 4 page 91 (capacités résolues)
• les exercices 63 et 68 page 104 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercices 145 et 146 page 112 (en autonomie, réponses en fin de livre)

3 Orthogonalité de droites et de plans

3.1 Orthogonalité de deux droites

Définition 4.

- Une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et une droite d' de vecteur $\overrightarrow{v}$ sont dites **orthogonales** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux**.

- Deux droites sont dites **perpendiculaires** si et seulement si elles sont **coplanaires et orthogonales**. .

Propriété :

P9 • Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 5.

Une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est **orthogonale** à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathcal{P}$.

Propriétés :

10 • Une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est **orthogonale** à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$.

11 • Une droite d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si d est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$.

12 • Il existe une unique droite d passant par un point A et perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ donné.

12 • Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par un point A et perpendiculaire à une droite d donnée.

A faire :

• exercices 5 et 6 page 93 (capacités résolues)

• les exercices 76 et 80 page 105 (entrainement ; corrigés en classe)

• exercices 148 et 149 page 113 (en autonomie, réponses en fin de livre)

4 Vecteur normal à un plan

4.1 caractérisation d'un plan avec le produit scalaire

Définition 6.

On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Propriétés :

13 • Un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$.

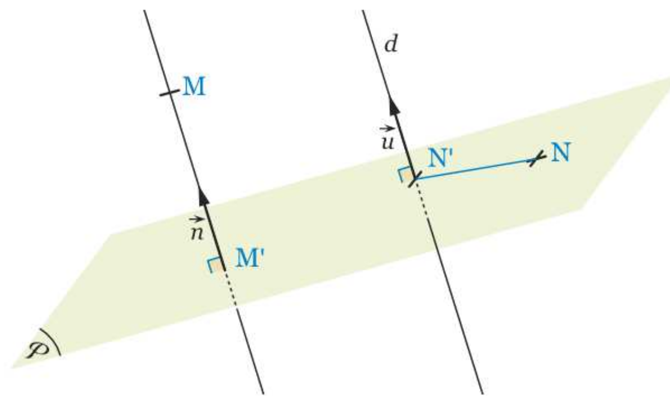
14 • Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

4.2 Projeté orthogonal d'un point

Propriétés :

15 • Le **projeté orthogonal** du point N **sur une droite** d est le point N' de la droite d le plus proche du point N.

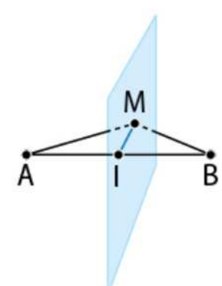
16 • Le **projeté orthogonal** du point M **sur un plan** $\mathcal{P}$ est le point M' du plan $\mathcal{P}$ le plus proche du point M..



4.3 Plan médiateur d'un segment

Définition 7.

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Le **plan médiateur** du segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.



A faire :

• exercices 7 et 8 page 95 (capacités résolues)

• les exercices 85 et 91 page 107 (entrainement ; corrigés en classe)

• exercices 150 et 152 page 113 (en autonomie, réponses en fin de livre)

5 Produit scalaire

5.1 Équation cartésienne d'un plan

Définition 8.

Dans un repère orthonormé, un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

Réciproquement, si les réels a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

5.2 Intersection de droites

Propriétés :
Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

17 • Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux, alors la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

18 • Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, alors :

- si $A \in \mathcal{P}$, alors la droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
- si $A \notin \mathcal{P}$, alors la droite d est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5.3 Intersection de plans

Propriétés :
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$

19 • Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles

20 • Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite.

21 • On se place dans un repère orthonormé.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax + y + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d = 0$ sont sécants si et seulement si, $(a;b;c)$ n'est pas proportionnel à $(a';b';c')$.

A faire :
• exercices 9 à 14 pages 97 à 99 (capacités résolues)
• les exercices 98, 111, 154, 125, 132 et 137 pages 108 ,109, 110 et 111 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercices 154 à 160 page 113 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Orthogonalité dans l'espace

Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et k est un réel, alors :

(1) Bilinéarité : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

(2) Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

(3) Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=\|\vec{u}\|^2$.

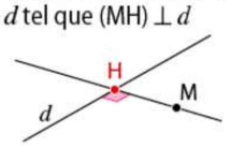
(4) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

(5) Dans un repère orthonormé :
$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ avec $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.

Projeté orthogonal

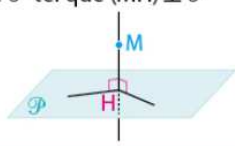
- **Projeté orthogonal de M sur une droite d**

Point H de d tel que $(MH)\perp d$



- **Projeté orthogonal de M sur un plan $\mathcal{P}$**

Point H de $\mathcal{P}$ tel que $(MH)\perp\mathcal{P}$



Produit scalaire de deux vecteurs

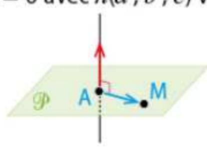
Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$;
- sinon $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

Vecteur normal et équation de plan

$\mathcal{P}$ plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ équivaut à $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
- Dans un repère orthonormé, équation d'un plan $\mathcal{P}$:
$ax+by+cz+d=0$ avec $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ vecteur normal à $\mathcal{P}$.

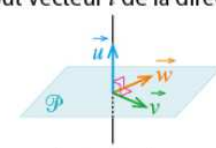


Orthogonalité de droites et de plans

d et d' droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
$\mathcal{P}$ plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

(1) $d\perp d'$ équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$

(2) $d\perp\mathcal{P}$ équivaut à $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=0\\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0\end{cases}$ équivaut à :
$\vec{u}\cdot\vec{t}=0$ pour tout vecteur $\vec{t}$ de la direction de $\mathcal{P}$.



(3) Plan médiateur de [AB] : plan passant par le milieu de [AB] et orthogonal à (AB).