Exos Bac : Loi binomiale

Exercice 1

Pour tous évènements E et F, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E, $P(E)$ la probabilité de E et, si F est de probabilité non nulle, $P_F(E)$ la probabilité de E sachant F.
On arrondira les résultats au millième si besoin.

Partie A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :
— 53 % de ses clients ont plus de 50 ans ;
— 32 % de ses clients sont intéressés par des placements dits *risqués* ;
— 25 % de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits *risqués*.
On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les évènements suivants :
— A : « Le client a plus de 50 ans » ;
— R : « Le client est intéressé par des placements dits risqués ».

1. Donner $P(R)$ et $P_A(R)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré. Cet arbre pourra être complété par la suite.
3. Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits risqués est 0,132 5.
4. Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, quelle est la probabilité qu'il ait plus de 50 ans ?
5. Calculer $P\left(\overline{A} \cap R\right)$ puis en déduire $P_{\overline{A}}(R)$.
   Interpréter les deux résultats obtenus.

Partie B

L'une des agences de cette banque charge ses conseillers de proposer un placement dit *risqué*, R_1 à tous ses clients.

Elle promet à ses conseillers une prime de 150€ s'ils convainquent au moins 10 clients d'effectuer ce placement en un mois et une prime supplémentaire de 150€ s'ils convainquent au moins 15 clients d'effectuer ce placement en un mois.

L'une des conseillères de cette banque, Camille, reçoit 45 clients ce mois-ci.

1. On admet que la probabilité que Camille réussisse à placer ce produit auprès de l'un de ses clients est de $0,23$ et que la décision d'un client est indépendante de celles des autres clients.
   (a) Déterminer la probabilité que Camille place le produit R_1 auprès de 10 clients exactement ce mois-ci.
   (b) Calculer la probabilité que Camille ait 300€ de prime.
   (c) Montrer que la probabilité que Camille ait 150€ exactement de prime est environ de $0,532$.
2. Le placement R_1 a rapporté 30 % d'intérêt sur les 5 dernières années.Calculer le taux d'intérêt annuel moyen du placement R_1 sur ces 5 dernières années.

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de sur réservation afin d'abaisser les coûts.

Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie.

Partie A

Une étude réalisée par la compagnie a établi que, sur cette ligne, pour une réservation en agence, 5 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement alors que, pour une réservation par Internet, 2 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement.

Les réservations en agence représentent 30 % de l'ensemble des réservations.

Pour un embarquement donné et une réservation prise au hasard, on considère les évènements suivants :

- A : « la réservation a été faite en agence » ;
- I : « la réservation a été faite par Internet » ;
- E : « le passager se présente à l'embarquement ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Démontrer que la probabilité qu'un client ne se présente pas à l'embarquement est de $0,029$.
3. Calculer la probabilité que la réservation ait été faite en agence sachant que le client ne s'est pas présenté à l'embarquement.

Partie B

Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations.

On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

1. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
2. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
3. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

Partie C

Cette compagnie affirme que 98 % de ses clients sont satisfaits.

Sur les 400 réponses à une enquête de satisfaction, il y a 383 réponses exprimant leur satisfaction.

Ce résultat contredit-il l'affirmation de la compagnie ?

Exercice 3

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.

40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.

Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.

Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

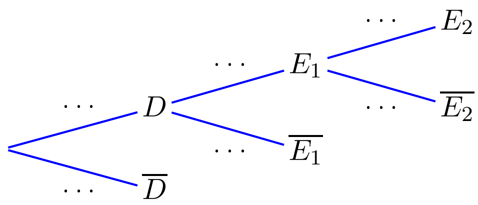
   On considère les évènements suivants :

   — D : « Le candidat est retenu sur dossier »,

   — E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,

   — E_2 : « Le candidat est recruté ».

   (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

   (b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

   (c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   (b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 4

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.
   Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   (a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
   (c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) Justifier l'égalité : $p\left(Y_k = 5\right) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
   (b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2. On note $\mathrm{E}(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k
   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}(Y_k)$ est strictement positive.
   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.