Loi binomiale

1 Succession d'épreuves indépendantes

Propriétés ;

P1 • Lors de la **succession d'épreuves** indépendantes, la probabilité d'une issue $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i, pour i entier allant de 1 à n.

P2 • La **succession** de deux **épreuves indépendantes** d'univers respectifs E_1 et E_2 a pour univers le **produit cartésien** $E_1 \times E_2$.

1.1 Exemple

Un menu propose deux entrées e_1 et e_2, trois plats p_1, p_2 et p_3, et un dessert d.
Un client prend de façon équiprobable une entrée, un plat et un dessert.
On s'intéresse à la composition de son menu. L'ensemble des issues de cette expérience est :

$$\Omega = \{e_1; e_2\} \times \{p_1; p_2; p_3\} \times \{d\}$$

Application 1 :

Un urne contient 3 boules rouges, 7 boules vertes et 1 boule bleue. On note :
• R l'événement "on obtient une boule rouge"
• V l'événement "on obtient une boule verte"
• B l'événement "on obtient une boule bleue"

1. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne.
   (a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage.
2. On ne garde dans l'urne que les 3 boules rouges et les 7 boules vertes. On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne.
   (a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
   (b) Donner l'ensemble des issues sous la forme d'un produit cartésien.
   (c) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge aux deux premiers tirages, puis une boule verte au dernier tirage.

2 Épreuve de Bernoulli

2.1 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition 1.

- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues**.

  Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée **succès** (notée S) et l'autre échec notée ($\overline{S}$).

  La loi de Bernoulli est :

Issues x_i	$S = 1$	$\overline{S} = 0$
Probabilité $P(X = x_i)$	p	1-p

- On dit que la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p.

Propriété P3 :
Les paramètres d'une variable aléatoire X qui suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p sont :

- l'espérance $E(X) = p$.
- la variance $V(X) = p(1-p)$.
- l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

2.2 Répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes

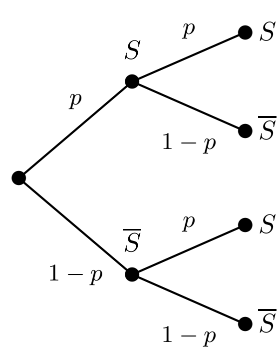
Définition 2.

L'expérience qui consiste à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, une même expérience de Bernoulli de paramètre p est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Définition 3.

On Considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Le nombre de chemins qui contiennent exactement k succès est appelé :
coefficient binomial et noté $\binom{n}{k}$ se lisant "k parmi n"

Exemple de schéma de Bernoulli avec $n = 2$:



Propriétés :
Soit n et k des entiers avec $0 < k < n-1$.

- $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Application 2 :

Un jeu consiste à lancer quatre fois de suite un dé équilibré à six faces.
Le joueur gagne lorsque le 1 apparaît au moins trois fois sur les quatre lancers.

1. Justifier que ce jeu peut être modélisé par un schéma de Bernoulli.
2. Représenter ce jeu par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité ;
   - A: "Le joueur n'obtient aucun 1";
   - B: "Le joueur obtient exactement 1";
   - A: "Le joueur obtient deux 1";

3 Loi binomiale

Définition 4.

On Considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit **la loi binomiale** de paramètres n et p, notée :

$$\mathscr{B}(n;p)$$

Propriété 4 : formule pour calculer la probabilité
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{B}(n;p)$. Pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n$ On a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Propriété 5 : Les paramètres d'une variable aléatoire X suivant qui suit la loi $\mathscr{B}(n;p)$ sont :

- l'espérance
  $E(X) = np$.
- la variance
  $V(X) = np(1-p)$.
- l'écart type
  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Application 3 :

Dans un examen, un QCM comporte huit questions.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte.
Un candidat décide de répondre au hasard à toutes les questions.
La variable aléatoire X donne le nombre total de bonnes réponses.
On arrondira les résultats au millième.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X, interpréter ce résultat.
3. Calculer la probabilité d'avoir :
   a) quatre bonnes réponses;
   b) au plus cinq bonnes réponses;
   c) entre deux et cinq bonnes réponses;

A faire :
- exercices 1 à 7 pages 367, 369 et 370 (résolus dans le manuel)
- exercices 69, 80, 85, 85 et 100 pages 380 - 383. (entrainement corrigés en classe)
- exercices 104, 107, 108, 110 page 384 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Loi binomiale

Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

La probabilité d'une issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i, pour i entier allant de 1 à n.
La succession de deux épreuves indépendantes d'univers respectifs Ω_1 et Ω_2 a pour univers $\Omega_1 \times \Omega_2$.

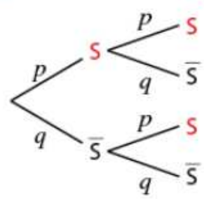
Loi binomiale de paramètres n et p

Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, associe le nombre de succès au cours de ces n épreuves.

- La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $\mathcal{B}(n, p)$.
- Pour tout entier k compris entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, où $q = 1 - p$.

Schéma de Bernoulli

Succession de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, identiques et indépendantes.



- L'univers des issues d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est $\{0,1\}^n$.
- $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre associé à un schéma de Bernoulli.

Épreuve de Bernoulli de paramètre p

Expérience aléatoire présentant deux issues dont l'une, nommée « succès », a pour probabilité p et l'autre, nommée « échec » a pour probabilité $1 - p$.

- La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.
- La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

$E(X) = p$, $\quad V(X) = p(1 - p) \quad$ et $\quad \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.