Fonctions continues et limites

1 Continuité

1-1 Définitions et propriétés

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I.

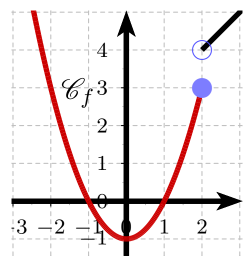
- Dire que f est continue en a signifie que f a une limite en a égale à $f(a)$ soit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>0}} = f(a)$$

- Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout nombre réel de I.

- **Exemple**

La fonction f n'est pas continue en 2.
La fonction f est continue en tout point d'abscisse $x < 2$.



Propriété : Pour toute fonction définie sur un intervalle I :

- si f est **dérivable en un nombre réel** a de I, alors f est **continue en** a;
- si f est **dérivable sur** I, alors f est **continue sur** I.

- **Remarques**
  - Ces propriétés sont souvent utilisées dans leur forme contraposées.
  - Les réciproques de ces propriétés sont fausses.

    Par exemple : les fonctions valeur absolue et racine carrée ne sont pas dérivables en 0 mais sont continues en 0.

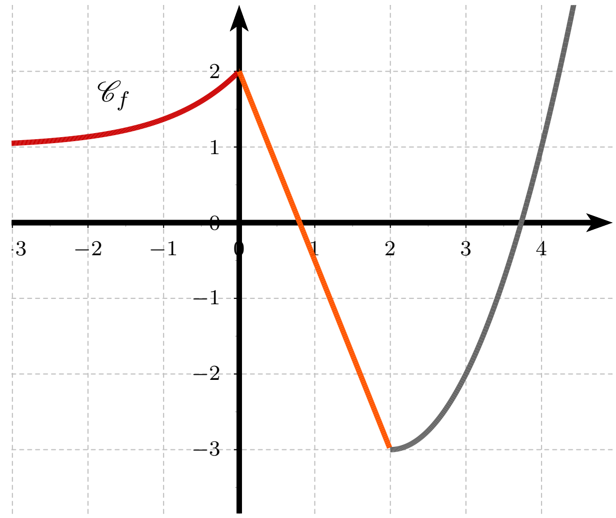
Conséquences :

- Les fonctions **polynomes** (affine, carré, cube, ...), la fonction **inverse**, la fonction **racine carrée**, la fonction **exponentielle** et les fonctions **cosinus** et **sinus** sont continues sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- Toute fonction définie sur un intervalle I et égale à une somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues est continue sur I.

1-2 Application 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & si\ x \leqslant 0 \\ ax + 2 & si\ x \in \,]0;2[\,,\ a \in \mathbb{R} \\ x^2 - 4x + 1 & si\ x \geqslant 2 \end{cases}$$



1. Etudier la continuité de la fonction f en 0.
2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

A faire :

• exercice 1 page 203 (résolu)
• les exercices 43 à 46 page 214 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercice 96 page 220 (en autonomie, réponse en fin de livre)

2 Fonction continue et suite convergente

2-1 Image d'une suite convergente par une fonction continue

Propriété :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

• Si (u_n) est une suite convergente vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle I et f est continue en ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ .

2-2 Limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

• Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

2-3 Application 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 0,15x^2 + 0,4x$.

1. sur le graphique suivant, sont représentées la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

   Représenter les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.

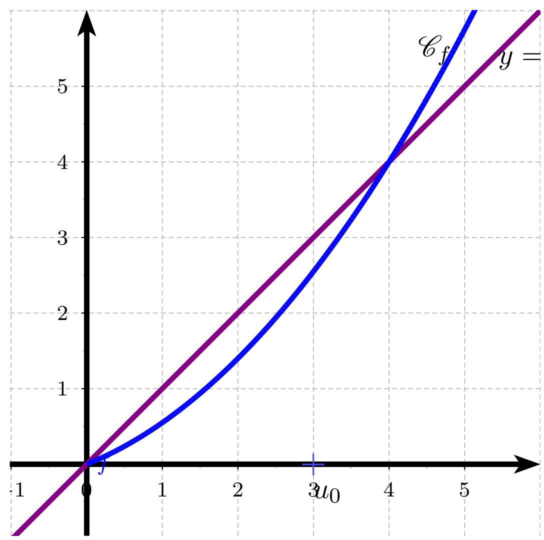
2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$0 < u_{n+1} < u_n < 4$$

   .

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

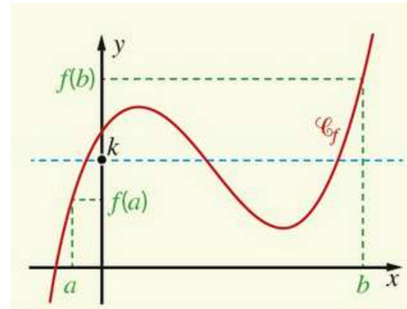


A faire :
• les exercices 47 et 48 pages 214(entrainement ; corrigés en classe)
• exercice 97 page 220 (en autonomie, réponse en fin de livre)

3 Équation $f(x) = k$ avec f continue

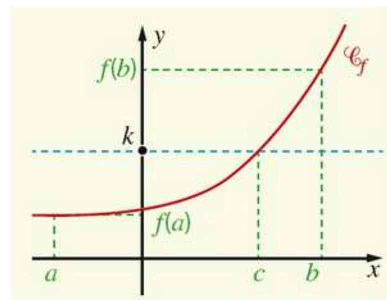
3-1 Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b sont deux nombres réel de I tels que $a < b$, alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre réel c (**solution** de $f(x) = k$) compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



3-2 Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction définie, **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$



3-3 Application 3

On donne ci-dessous le tableau de variation de de la fonction $f(x) = 0,5x^3 - 2,25x^2 - 6x + 20$ définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 7]$:

x	-4	-1	4	7
$f(x)$	-24 ↗	23.25 ↘	-8 ↗	39.25

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 10$ admet trois solutions sur l'intervalle $[-4\ ;\ 7]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 25$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[4\ ;\ 7]$.
   A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α au centième.

A faire :
• exercices 3 et 4 page 205 (résolus)
• les exercices 53 et 55 pages 215 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercices 99,100 et 101 page 221 (en autonomie, réponses en fin de livre)