Exos Bac : Primitives et équations différentielles

Exercice 1 : pompe à chaleur

La température à l'évaporateur est maintenue à 10 °C. Pour une température x, exprimée en degrés Celsius au condenseur, le coefficient de performance C_OP de la pompe à chaleur est donné par :

$$C_OP = \frac{273 + x}{x - 10} \text{ pour } 30 \leq x \leq 60.$$

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[30; 60]$ par :

$$f(x) = \frac{273 + x}{x - 10}.$$

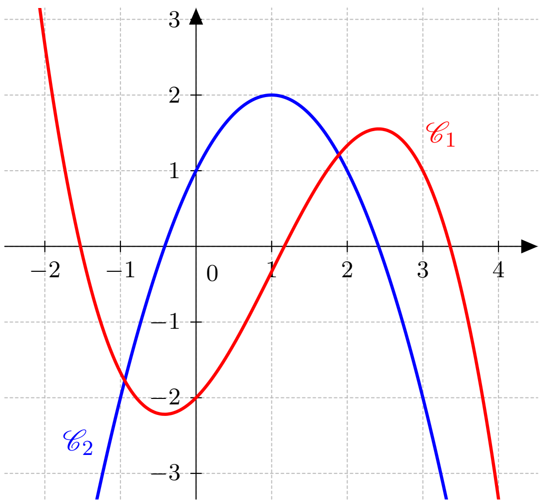
1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. Établir le tableau de variation de f
3. Reproduire et compléter le tableau suivant (valeurs arrondies au dixième).

x	30	35	40	45	50	55	60
$f(x)$							

4. Le plan est rapporté à un repère orthogonal Commençant la graduation en abscisse à 25 et en ordonnée à 5). Représenter graphiquement la fonction f.
5. Déterminer graphiquement l'intervalle de températures correspondant à un C_OP variant de $8,5$ à $13,5$

Exercice 2

Dans le repère (O,I,J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f et la courbe représentative d'une primitive F de f, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.



1. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_2$ est celle de f.
2. On admet que f est une fonction polynôme de degré 2 donc, pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels, et $a \neq 0$.
   a) Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) En déduire les valeurs a, b et c.
3. Pour cette question, on admet que : $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
   a) Déterminer une expression des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
   b) En utilisant un élément du graphique que l'on précisera, déterminer une expression de la fonction F dont la représentation est la courbe $\mathscr{C}_1$.

Exercice 3

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (élément radioactif) provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de 15,3 unités.

À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années).

On admet que f est une solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y' = -0,124y \qquad (E).$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 15,3$.
3. Déterminer la limite de f au voisinage de l'infini.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
4. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à $7,27$ unités.
   Justifier que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à 6 000 ans.
5. Quand la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à $0,3\,\%$ de sa valeur initiale on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14.
   Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

Exercice 4

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y' + 6y = 150$$

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.

   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

   (c) En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.

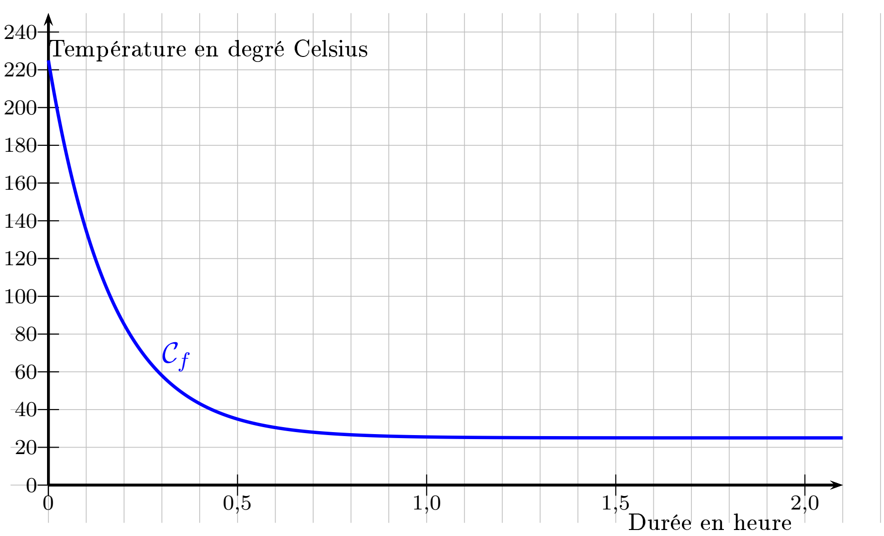
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   — décroît ;
   — tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

   On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire $\mathcal{T}_0$. On donnera une valeur approchée de $\mathcal{T}_0$ sous forme d'un nombre entier de minutes.

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.

La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.
On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.

Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E, P_S et L est donnée par :

$$P_S = P_E \times \mathrm{e}^{-aL}$$

où a est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.

Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.

Dans tout l'exercice :

— la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;
— à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins $0,08$ mW ;
— pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à $0,08$ mW.

Partie A

Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire $a = 0,046$.

Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

Partie B

La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle

$$y' + 0,035y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.
2. (a) Sachant que $g(0) = 7$, vérifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 7\mathrm{e}^{-0,035x}$.

   (b) En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.
3. (a) Étudier le sens de variation de la fonction g.

   (b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. (a) Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?

   (b) Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.