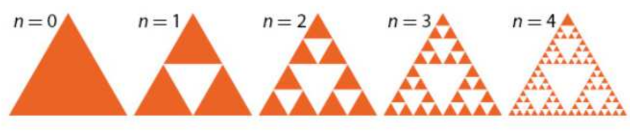
Suites

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Activité (sources ; Internet et Hyperbole)

Le motif qui orne la coquille du Cymbiola innexa, un mollusque indonésien, ne cesse d'intriguer les chercheurs. En effet, celui-ci ressemble étrangement à un motif fractal appelé triangle de Sierpinski.

Dessinez un triangle équilatéral, dont les trois côtés ont la même longueur, puis tracez à l'intérieur un autre triangle dont les pointes se situent au milieu de chaque côté. Vous obtenez un triangle à l'envers ainsi que trois triangles à l'endroit. Répétez l'opération dans chacun des nouveaux triangles ainsi créés tant que vous le pouvez. Et vous aurez dessiné le triangle imaginé en 1915 par le mathématicien polonais Waclav Sierpinski.



On part d'un triangle équilatéral plein de côté 1.

Soit p_n le périmètre total des triangles blancs à la n-ième étape.
$p_0 = 0$ et on admet que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = p_n + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

1. Déterminer p_1 et p_2.

   •

   •

2. On se propose de déterminer que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: " $p_n = 3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$ " est vraie.

   (a) La propriété $P(0)$ est-elle vraie ?

   • .

   (b) On suppose que, pour tout entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie.
   Expliciter cette propriété $P(k)$.

   • .

(c) Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k et démontrer qu'alors la propriété $P(k+1)$ est vraie.

• .

Remarque : ce raisonnement, appelé **raisonnement par récurrence** permet de conclure que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

• .

1.2 Raisonnement par récurrence

Définition 1.

• Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un **verbe** et qui est **soit vraie soit fausse**.

Propriété 2.

Soit une propriété $P(n)$ définie sur $\mathbb{N}$. Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

- **Initialisation** : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0. (n_0 désigne un entier naturel).
- **Hérédité** : si la propriété $P(k)$ est vraie pour un nombre $k \geqslant n_0$, alors $P(k+1)$ est vraie.

Alors pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.
Pour tout entier $k \geqslant n_0$, "$P(k)$ est vraie" implique "$P(k+1)$ est vraie" : $P(k)$ *vraie* $\Rightarrow P(k+1)$ *vraie*.

A faire :
• exercice 1 page 13 (résolu)
• le exercices 39, 40, 41, 42 46 et 48 page 28 (entrainement)
• exercice 100, 101 et 102 page 34 (en autonomie, réponses en fin de livre)

2 Limite finie ou infinie d'une suite

2.1 Limite finie - suite convergente

Définition 3.

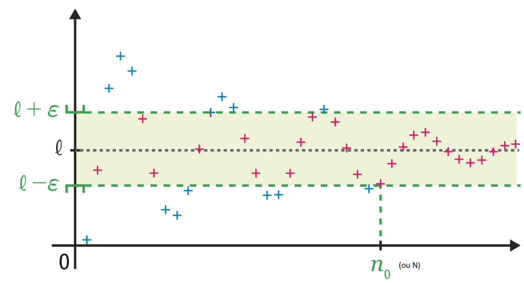
Soit (u_n) une suite et ℓ un réel.
On dit que (u_n) tend vers ℓ (ou admet ℓ comme limite, ou encore converge vers ℓ) si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$$

Alors (u_n) est dite convergente et ℓ est appelé limite de u_n

Cette définition revient à dire que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang n_0 (ou N) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mid u_n - \ell \mid < \epsilon$



2.1.1 Propriétés

- Si une suite (u_n) a pour limite le réel ℓ, alors cette limite est unique.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ • $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ • $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

2.1.2 Théorème de convergence monotone

Définition 4.

Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est dite **majorée** si, et seulement si, il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$. On dit que M est un **majorant** de (u_n). (appelée majoration).
- (u_n) est dite **minorée** si, et seulement si, il existe un réel m tel que, pour tout indice n, $u_n \geqslant m$. On dit que m est un **minorant** de (u_n). (appelée minoration)
- Une suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée. (appelée bornage)

2.1.3 Théorème de convergence monotone

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.

Exemples d'application

Exemple 1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que la suite (u_n) converge vers 5.

Exemple 2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} < 3$
2. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. On admet que $\ell \neq 6$, et que $\ell = \dfrac{9}{6 - \ell}$. Déterminer la valeur de ℓ.

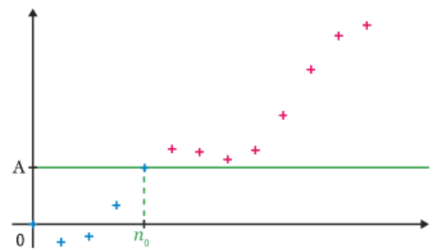
2.2 Limite infinie - suite divergente

Définition 5.

Une **suite** (u_n) est dite **divergente** si elle ne converge pas.
Une suite divergente peut avoir $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite ou ne pas avoir de limite, comme par exemple la suite de terme général $(-1)^n$. On écrit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ (ou admet $+\infty$ comme limite) si, et seulement si, tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (où A est un réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



2.2.1 Propriétés

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 3 On utilisant la définition du cours :
montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3n - 6$ a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit A un nombre réel.
On a $u_n \leqslant A \Leftrightarrow -3n - 6 \leqslant A \Leftrightarrow -3n \leqslant A + 6 \Leftrightarrow n \geqslant -\dfrac{A}{3} - 2$.
Ainsi, en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $-\dfrac{A}{3} - 2$, on a bien $u_n \leqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Propriétés

- $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

  $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} n^k = +\infty$.
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

3 Opérations sur les limites et règles

3.1 Limite d'une somme de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I** (forme indéterminée)

3.2 Limite d'un produit de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I**

3.3 Limite d'un quotient de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	**FI**

3.4 Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel et n un entier naturel. La limite de la suite géométrique q^n est :

- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

A faire :

• exercice 1 à 4 page 131 (résolus)

• les exercices 50, 53, 58, 61 et 63 pages 142 , 143 (entrainement ; corrigés en classe)

• exercice 101 à 106 page 148 (en autonomie, réponses en fin de livre)

4 Limites et comparaison

4.1 Autres Limites

Théorème de comparaison

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang

$$u_n \leqslant v_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty, \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

Appelé : théorème de minotration

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang

$$u_n \geqslant v_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty, \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$$

Appelé : théorème de majoration.

4.2 Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)

Théorème

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si (u_n) et (w_n) **convergent** vers le réel ℓ, alors (v_n) **converge** vers ℓ.

Exemple 4 Étudier la convergence des suites définies ci-dessous :

1. $u_n = 2n - \cos(n)$ pour tout n entier naturel.
2. $v_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+1}$ pour tout n entier naturel.

A faire :

- exercice 5, 6, 7 et 8 pages 133 et 135 (résolus)
- les exercices 64, 70, 82, 88 et 92 pages 143 et 144 (entrainement ; corrigés en classe)
- exercice 113 à 114 115 page 148 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Résumé du chapitre : Les suites
page 148

Suites géométriques à l'infini

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$		0	1	$+\infty$

Théorèmes de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

• Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L, alors (v_n) converge vers L.

Théorème de convergence monotone

(1) Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.

(2) Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.

Limite d'une suite

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$

Règles sur la somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.

Règles sur le produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Règles sur le quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Raisonnement par récurrence

Montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

(1) **Initialisation** : montrer que $P(n_0)$ est vraie.

(2) **Hérédité** : Soit p un entier tel que $p \geqslant n_0$ et $P(p)$ est vraie. Montrer que $P(p+1)$ est vraie.

(3) **Conclure** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.