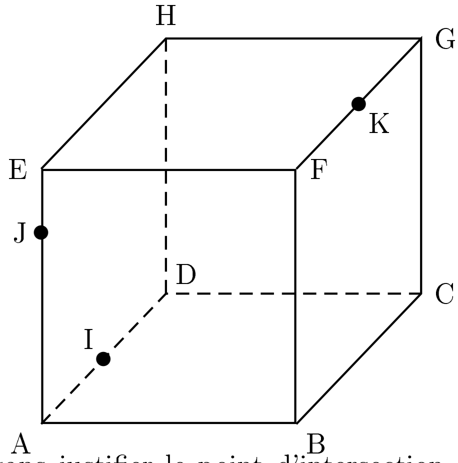
Exos Bac : Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exercice 1

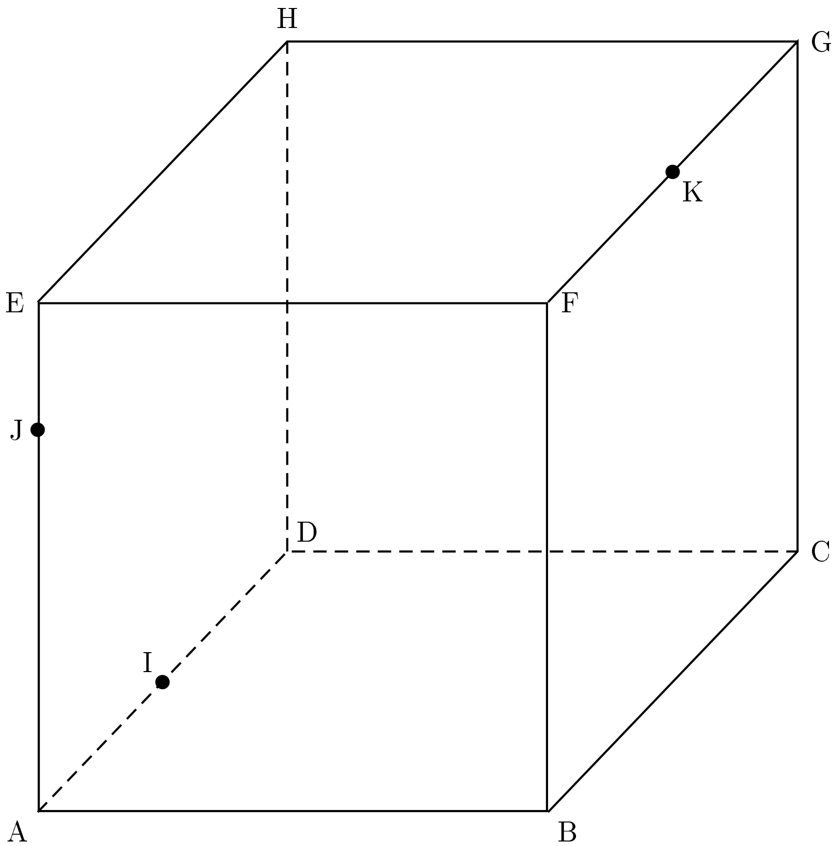
La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

— I est le milieu du segment [AD] ;
— J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;
— K est le milieu du segment [FG].



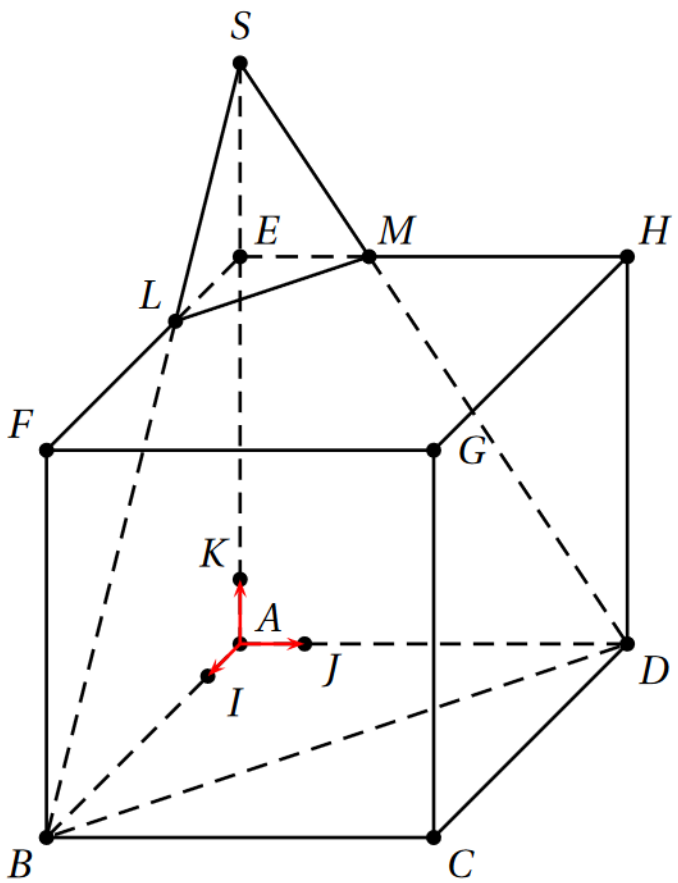
1. Sur la figure donnée en annexe ci-dessous, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).
3. On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   (a) Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

Annexe



Exercice 2

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.

3. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

   (b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\ ;\ 0\ ;\ 9)$.

Exercice 3

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

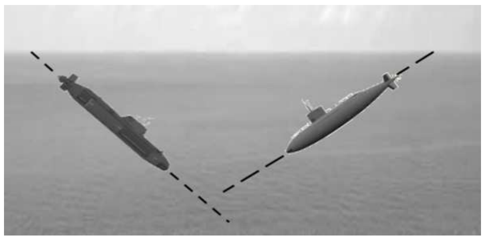
On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.

On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+k \\ y &=& -2k \quad (k \in \mathbb{R}). \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

1. (a) Donner une représentation paramétrique de D_1.
   (b) Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\overrightarrow{u_2}$).
   (c) Le point $A_2(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ appartient-il à D_2 ?
2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. dont l'unité est le mètre.



Le plan défini par $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& 140-60t \\ y(t) &=& 105-90t \\ z(t) &=& -170-30t \end{array}\right.$$
   a) Donner les coordonnées du sous- marin au début de l'observation.
   b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de ce sous-marin ?
   c) Combien de temps a-t-il fallu au sous-marin pour se rendre de la surface au point $S_1(0)$.
2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.

   Déterminer les coordonnées du point $S_2(t)$ en fonction du paramètre t.
3. a) À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?
   b) Les deux sous-marins suivent-ils des trajectoires parallèles, sécantes ou non coplanaires ? Justifier.