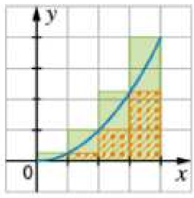
Calcul intégral

Théorème fondamental

f continue et positive sur $[a\,;b]$.
La fonction F_a définie sur $[a\,;b]$ par $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Méthode des rectangles

f continue et positive sur $[a\,;b]$.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut être encadrée par la somme des aires des rectangles hachurés en rouge et colorés en vert.



Méthodes de calcul

- **À l'aide d'une primitive**

f fonction continue sur $[a\,;b]$ et F primitive de f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

- **Intégration par parties**

u et v dérivables sur I, u' et v' continues sur I.
a et b sont deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Valeur moyenne d'une fonction f sur $[a\,;b]$

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriétés de l'intégrale

f et g continues sur $[a\,;b]$, $c\in[a\,;b]$, $k\in\mathbb{R}$.

- **Linéarité**

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Relation de Chasles**

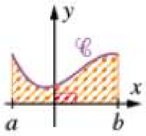
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Positivité :** Si $f(x)\geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.
- **Comparaison :** Si $f(x)\geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\geqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Calcul d'aires

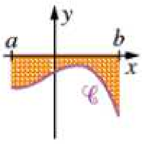
- **f continue et positive sur $[a\,;b]$**

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.



- **f continue et négative sur $[a\,;b]$**

L'aire, en u.a., de la surface hachurée est l'opposé de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



- **Aire entre deux courbes**

$\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$, $\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.