# Exos Bac : les fonctions trigonométriques

## Exercice 1 :

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

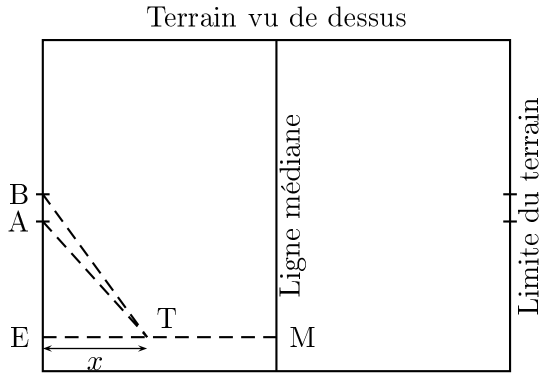
$$f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

1. Montrer que pour tout $x$ réel, on a $-3 \leqslant x \leqslant 3$.
2. Déterminer la parité de la fonction $f$.
3. Montrer que pour tout $x$ réel, $f(x+\pi) = f(x)$.
   En déduire que $f$ est périodique et préciser sa période.
4. Montrer que pour tout $x$ réel, $f'(x) = -6\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
5. (a) Montrer que si $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \in [0\ ;\ \pi]$.
   En déduire le signe de $f'$ sur $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.
   (c) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.
6. Donner l'équation de la tangente en $f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

**Exercice 2 :**

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.




Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note $x$ la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note $\alpha$ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ETA}}$, $\beta$ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ETB}}$ et $\gamma$ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de $x$.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ admet une mesure $\gamma$ appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

   On admet que, pour tous réels $a$ et $b$ de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$,

   $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

   Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.
4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque sa mesure $\gamma$ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,50]$ de la fonction $f$ définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

   Montrer qu'il existe une unique valeur de $x$ pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et déterminer cette valeur de $x$ au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ à $0,01$ radian près.