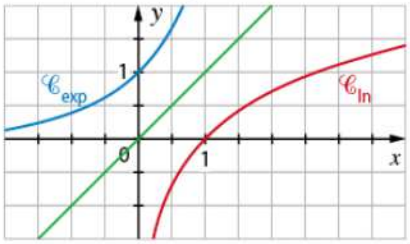
Synthèse ; Fonction logarithme
page 252

Logarithme népérien

- **La fonction logarithme népérien** que l'on note **ln** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
  Pour $x > 0$, $y = \ln(x)$ équivaut à $e^y = x$.
- La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$.

Courbe représentative



- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de ln.

Lien avec la fonction exponentielle

- Pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$, ce qui s'écrit $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$, ce qui s'écrit $e^{\ln(x)} = x$.
- $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ et pour tout entier n, $\ln(e^n) = n$.

Relation fonctionnelle Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0$

Pour tout entier n strictement positif

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n\ln(x) = 0$

Fonction dérivée

- Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$.

Pour tout réel x de I, on a $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Variations et conséquences

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$.
- $0 < x < 1$ équivaut à $\ln(x) < 0$.
- $x > 1$ équivaut à $\ln(x) > 0$.