Fonctions : limites de fonctions

Activité : conjecturer une limite à l'aide d'un tableau de valeurs

1. Soit une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

   (a) Peut-on calculer l'image de 2 par f ? Donner l'ensemble de définition de f.

   ...

   (b) A l'aide du tableau de valeurs sur votre calculatrice, compléter les tableaux suivants :

x	Valeur approchée de $f(x)$
1	
1,5	
1,9	
1,99	
1,999	
1,99999	

x	Valeur approchée de $f(x)$
3	
2,5	
2,1	
2,01	
2,0001	
2,00001	

   (c) Que devient $f(x)$ lorsque x prend des valeurs infiniment proches de 2 ? En déduire les limites

   ...

   • limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \ldots$ et • limite à droite $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \ldots$

   Conclusion :

2. Le tableau de variation de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\ldots$ ‖ $\ldots$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\ldots$ ‖ $\ldots$	$\searrow$	1

   (a) A l'aide de la question 1. compléter le tableau de variation de f.

   (b) Lire les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   ...

   Conclusion :

1 Limites d'une fonction et asymptotes

1.1 Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 1.

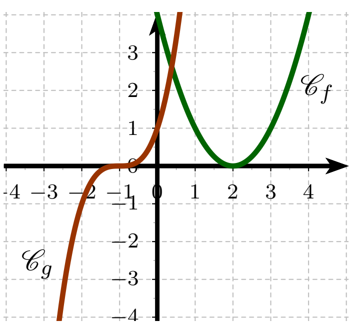
Soit f une fonction définie sur un intervalle non borné à droite.
• On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (où A est un réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle non borné à gauche.
• On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$ (où B est un réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

• **Exemple 1**



- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \dots$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dots$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \dots$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \dots$

• **Asymptote horizontale**

Définition 2.

• On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote (horizontale)** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si ,

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$ (respectivement $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell}$).

• **Exemple 2**

Soit la fonction inverse f définie sur $\mathbb{R}*$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \dots$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \dots$
- Que peut-on conclure de l'équation $y = 0$?

1.2 Limite finie en un réel a

Définition 3.

• Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert borné par a.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a si, et seulement si, tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$(où A est un réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$$

• Soit a un réel. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert borné par a.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si, et seulement si, tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$(où B est un réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$

• **Asymptote verticale**

Définition 4.

• On dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote (verticale)** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si ,

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}.$$

• **Exemple 3**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dont le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	4	↘	$-\infty$

1. Donner les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et en -1 à droite et à gauche.
2. Préciser le type de chaque asymptote ainsi qu'une équation correspondante

A faire :

• exercice 1 et 2 page 167 (résolus)

• les exercices 51 à 55 page 180(entrainement ; corrigés en classe)

• exercice 149, 150 page 187 (en autonomie, réponses en fin de livre)

2 Opérations sur les limites

2.0.1 Limites des fonctions de référence

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- Pour tout entier $n > 0$:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ -\infty & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ • $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty & \textit{si } n \textit{ pair} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty & \textit{si } n \textit{ impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k = k$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Somme de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) =$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

Produit de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell(\ell\neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) =$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty(*)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

Quotient de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell(\ell\neq 0)$	ℓ	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell'(\ell'\neq 0)$	0	$\pm\infty$	ℓ'	0	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty(*)$	0	$+\infty$ ou $-\infty(*)$	**F.I**	**F.I**

A faire :

- exercices 3 à 5 pages 169 et 171 (résolus)
- les exercices 56, 64, 72, 73 et 74 pages 180 à 182 (entrainement ; corrigés en classe)
- les exercices 145, 147, 151 et 152 page 187 (en autonomie, réponses en fin de livre)

2.0.2 Limites d'une fonction composée

Définition 5.

Soit deux fonctions u et v puis a, b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, telles que

$$\text{Si } \lim_{x\to a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X\to b} v(X) = c \text{ , alors } \quad \lim_{x\to a} v\left[u(x)\right] = c$$

$$v \circ u(x) = v\left[u(x)\right]$$

• **Exemples 4**

1) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ pas $f(x) = \sqrt{1-x}$
Déterminer la limite de f quand x tend vers $-\infty$

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pas $h(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$
Déterminer la limite de h quand x tend vers $+\infty$

A faire :
• exercice 6 page 171 (résolu)
• les exercices 91, 96 et 99 page 182 (entrainement ; corrigés en classe)
• exercice 152 page 187 (en autonomie, réponses en fin de livre)

3 Théorèmes de comparaison et croissances comparées

- **Théorème de comparaison**

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$ où A est soit un réel, soit $-\infty$.

- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (Théorème de minoration).
- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (Théorème de majoration).

- **Exemple 5**

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + \sin(x)}{x-1}$.

.

- **Théorème des gendarmes (d'encadrement)**

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A;+\infty[$ où A est soit un réel, soit $-\infty$, soit ℓ un nombre réel.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si g et h ont la même limites ℓ en $+\infty$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

- **Exemple 6**

Déterminer la limite en $+\infty$ da la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos(x)e^{-x}$

.

• **Croissances comparées**

Soit n un entier naturel non nul.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

A faire : voir démonstration page 172

Voir les démonstrations page 9

A faire :

• exercice 7 et 8 page 173 (résolus)

• les exercices 104, 109, 110 et 116 page 183(entrainement ; corrigés en classe)

• exercice 153, 156 page 187 (en autonomie, réponses en fin de livre)

Synthèse sur les limites de fonctions page 186

Limites d'une fonction

Limites

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$;

si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

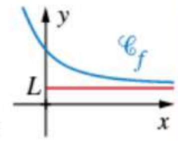
Si n impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$; si n pair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} k = \lim\limits_{x \to +\infty} k = k$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

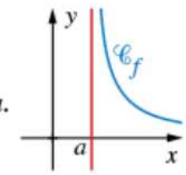
Asymptotes

a et L sont des réels.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ alors asymptote horizontale d'équation $y = L$.



- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors asymptote verticale d'équation $x = a$.



Croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Théorèmes de comparaison

Le réel a peut être remplacé par $-\infty$ ou $+\infty$; $L \in \mathbb{R}$

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$
- Théorème des gendarmes

Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Formes indéterminées

« $\infty - \infty$ » ; « $\infty \times 0$ » ;

« $\frac{\infty}{\infty}$ » ; « $\frac{0}{0}$ »

Fonction composée u suivie de v

$v \circ u$ telle que $v \circ u(x) = v(u(x))$

Exemple de calcul d'une limite

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

Démonstrations

• **Montrons que** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Soit la fonction $f(x) = e^x - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. et $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff x > 0$. D'oû le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $e^x > x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ par comparaison $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$.

Et avec un changement de variable : en posant $X = -x$ on peut déduire:
On a donc $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X} = \frac{1}{\mathrm{e}^X}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$. C'est-à-dire, d'après le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0}$.

• **Montrons que** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

• **Pour** $n = 1$ Soit la fonction $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est $g'(x) = \mathrm{e}^x - x = f(x)$ qui est positive. D'oû le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$			$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que pour tout $x > 0$,
$g(x) > 1 \iff g(x) > 0$,
$e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0 \iff e^x > \dfrac{x^2}{2} \iff \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ par comparaison,
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$.

• **Pour** $n \geqslant 2$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n \times \frac{x}{n}\right)^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{n^n \times \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

Et avec un changement de variable : en posant $X = \dfrac{x}{n}$ on peut déduire

$\left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = \dfrac{e^X}{X}$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = +\infty$.

$\dfrac{1}{n} > 0$, on en déduit $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right) = +\infty$.

De plus $\lim\limits_{X\to+\infty} X^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$. Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty}$.