```python
import numpy as np
from IPython.display import display, Latex
import matplotlib.pyplot as plt
```

Lista 1 - PRP41

Leonardo Antonio Lugarini

Questao 1. Calcule o Δv de um EPL com Mu = 200 kg, Mp = 3000 kg, ε = 70% e Isp = 290 s.

$$\Delta v = cln(\Lambda) = I_{sp}g_0 ln(\frac{M_u + M_e + M_p}{M_u + M_e})$$

$$\epsilon = M_p/(M_p + M_e)$$

```python
def delta_v_from_Mu_Mp_eps_Isp(Mu, Mp, eps, Isp, g0):
    Me = (Mp/eps) - Mp
    Lambda = (Mu + Me + Mp)/(Mu + Me)
    c = Isp*g0
    delta_v = c*np.log(Lambda)
    display(Latex(f"$O \ valor \ de \ \Delta v \ é \ igual \ a \ {delta_v:.2f} \  m/s$"))
    return delta_v

Mu, Mp, eps, Isp, g0 = 200, 3000, 0.7, 290, 9.81

delta_v_Q1  = delta_v_from_Mu_Mp_eps_Isp(Mu, Mp, eps, Isp, g0)
```

$O\ valor\ de\ \Delta v$ é $igual\ a\ 3143.62\ m/s$

Questão 2. Considere um EPL de Mu = 200 kg , ε = 70% e Isp = 290 s, calcule a massa de propelente necessária para atingir:

(a) Δv = 1000 m/s; (b) Δv = 3400 m/s; (c) Δv = 5000 m/s;

```python
def Mp_from_Mu_eps_Isp_deltaV(Mu, eps, Isp, delta_v,g0):
    c = Isp*g0
    Lambda = np.exp(delta_v/c)
    factor1 = Lambda- 1
    factor2 = (1-eps)/eps
    Mp = (factor1*Mu)/(1 - factor1*factor2)
    if Mp > 0:
        display(Latex(f"$O \ valor \ de \ M_p \ é \ igual \ a \ {Mp:.2f} \  kg$"))
    else:
       print('Não é possível atingir a velocidade necessária.')

    return Mp

Mu, eps, Isp, g0 = 200, 0.7, 290, 9.81

#(a)
delta_v_a = 1000
Mp_a = Mp_from_Mu_eps_Isp_deltaV(Mu, eps, Isp, delta_v_a, g0)
```

$O\ valor\ de\ M_p$ é $igual\ a\ 102.80\ kg$

```python
#(b)
delta_v_b = 3400
Mp_b = Mp_from_Mu_eps_Isp_deltaV(Mu, eps, Isp, delta_v_b, g0)
```

$O\ valor\ de\ M_p$ é $igual\ a\ 36601.26\ kg$

```python
#(c)
delta_v_c = 5000
Mp_c = Mp_from_Mu_eps_Isp_deltaV(Mu, eps, Isp, delta_v_c, g0)
```

Não é possível atingir a velocidade necessária.

Questao 3. Calcule a maxima carga util com a qual um EPL de ε = 70%, Isp = 290 s e Mp = 10000 kg ainda consegue cumprir a missao de Δv = 3 km/s.

```python
def Mu_from_Mp_eps_Isp_deltaV(Mp, eps, Isp, delta_v, g0):
    c = Isp*g0
    Lambda = np.exp(delta_v/c)
    factor1 = Lambda-1
    factor2 = (1-eps)/eps
    Mu = (Mp/factor1)*(1 - factor1*factor2)
    display(Latex(f"$O \ valor \ de \ M_u \ é \ igual \ a \ {Mu:.2f} \  kg$"))
    return Mu

Mp,eps, Isp, g0, delta_v = 10000, 0.7, 290, 9.81, 3000

Mu = Mu_from_Mp_eps_Isp_deltaV(Mp, eps, Isp,delta_v, g0)
```

$O\ valor\ de\ M_u$ é $igual\ a\ 1060.18\ kg$

Questao 4. Considere um EPL de Mu = 200 kg, Isp = 290 s, calcule a eficiencia estrutural m ınima permissıvel para atingir a missao de Δv = 5 km/s.

```python
#realizando aproximação numérica

def epsMin_from_Mu_Isp_deltaV(Mu,Isp, delta_v, g0):
    c = Isp*g0
    Lambda = np.exp(delta_v/c)
    factor1 = Lambda/(Lambda-1)
    def eps(Mu, Mp):
        return Mp/(Mp*factor1 - Mu)

    Mp_vec = np.linspace(0, 1e20, 1000)
    eps_array = np.zeros(len(Mp_vec))

    for i in range(0,len(Mp_vec)):
        eps_array[i] = eps(Mu, Mp_vec[i])

    return eps_array[-1]


Mu, Isp, delta_v, g0 = 200, 290, 5000 , 9.81

eps_min = epsMin_from_Mu_Isp_deltaV(Mu, Isp, delta_v, g0)

display(Latex(f"$O \ valor \ de \ \epsilon \ minimo \  é \ igual \ a \ {eps_min:.2%} $%$ \ $"))
```

$O\ valor\ de\ \epsilon\ minimo$ é $igual\ a\ 82.75\%$

Questao 5. Considere um foguete de N estagios, com impulsos especıficos Isp_,_i e eficiencias estruturais ε_i, i ∈ {1, . . . , n}.

(a) Demonstre que o Δvi do i−esimo estagio e dado por

Δv_i = −Isp_i g0 ln(λiεi + 1 − εi),

sendo λi = Mu,i/M0,i a razao de carga paga do estagio.

(b) Demonstre que a razao de carga paga total λ = Mu/M0 ́e igual ao produto das razoes de carga paga λi de todos os estagios.

(c) Deduza as equacoes polinomiais que permitem o calculo da distribuicao otima de massa dos estagios do foguete, isto ́e, quais sao os λi que maximizam o Δv final do foguete, sujeitos a Πi, λi = λ.

(d) Obtenha explicitamente a expressao dos λi para o caso particular em que todos os impulsos especıficos e eficiencias estruturais sao iguais. Interprete o resultado obtido.

---

a) Definindo as equações necessárias:

$$\Lambda_i = \frac{M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i}}{M_{u,i} + M_{e,i}} (1);$$

$$\lambda_i = \frac{M_{u,i}}{M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i}} (2); \epsilon_i = \frac{M_{p,i}}{M_{p,i} + M_{e,i}} (3);$$

Assim, de (1):

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \frac{M_{u,i} + M_{e,i}}{M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i}}$$

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \frac{M_{u,i} + M_{e,i}}{M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i}} (\frac{M_{p,i} + M_{e,i}}{M_{p,i} + M_{e,i}})$$

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \frac{M_{u,i}M_{p,i} + M_{e,i}M_{u,i} + M_{p,i}M_{e,i} + M_{e,i}^2}{(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})(M_{p,i} + M_{e,i})}$$

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \frac{M_{u,i}M_{p,i}}{(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})(M_{p,i} + M_{e,i})} + \frac{M_{e,i}M_{u,i} + M_{p,i}M_{e,i} + M_{e,i}^2}{(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})(M_{p,i} + M_{e,i})}$$

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \frac{M_{u,i}M_{p,i}}{(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})(M_{p,i} + M_{e,i})} + \frac{M_{e,i}(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})}{(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})(M_{p,i} + M_{e,i})}$$

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \frac{M_{u,i}M_{p,i}}{(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})(M_{p,i} + M_{e,i})} + \frac{M_{e,i}}{M_{p,i} + M_{e,i}}$$

De (2) e (3):

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \lambda_i \frac{M_{p,i}}{M_{p,i} + M_{e,i}} + \frac{M_{e,i}}{M_{p,i} + M_{e,i}} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{\Lambda_i} = \lambda_i \frac{M_{p,i}}{M_{p,i} + M_{e,i}} - \frac{M_{p,i}}{M_{p,i} + M_{e,i}} + 1$$

$$\Lambda_i^{-1} = \lambda_i\epsilon_i - \epsilon_i + 1\ (4)$$

Sabemos que:

$$\Delta v_i = g_0 I_{sp,i} \ln \Lambda_i$$

Usando (4):

$$\Delta v_i = g_0 I_{sp,i} \ln{(\lambda_i\epsilon_i - \epsilon_i + 1)^{-1}}$$

$$\Delta v_i = -I_{sp,i} g_0 \ln{(\lambda_i\epsilon_i + 1 - \epsilon_i)},\ \text{c.q.d.}$$

---

b) Sabemos que a razão de carga total é:

$$\lambda = \frac{M_u}{M_0}, \text{sendo } M_0 = \sum_{i=1}^{n}(M_{u,i} + M_{p,i} + M_{e,i})$$

Para cada estágio temos:

$$\lambda_i = \frac{M_{u,i}}{M_{0,i}}, \text{sendo } M_{u,i} = M_u + \sum_{j=i+1}^{n}(M_{p,j} + M_{e,j}) = M_{0,i+1}$$

Usando a relação entre a massa útil do estágio i e a carga total do próximo estágio:

$$\lambda_i = \frac{M_{0,i+1}}{M_{0,i}}$$

Para o produto das razões de carga paga de todos os estágios:

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \prod_{i=1}^{n}\frac{M_{0,i+1}}{M_{0,i}} = \frac{M_{0,2}}{M_0}\cdot\frac{M_{0,3}}{M_{0,2}}\cdots\frac{M_{u,n}}{M_{0,n-1}}\cdot\frac{M_u}{M_{0,n}} = \frac{M_u}{M_0}$$

Portanto, após as devidas simplificações:

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda,\ \text{c.q.d.}$$

---

c) Temos, do resultado da letra (a):

$$\Delta v = \sum_{1}^{n}\Delta v_i = -\sum_{1}^{n} I_{sp,i} g_0 \ln{(\lambda_i\epsilon_i + 1 - \epsilon_i)}\ (5)$$

Precisamos determinar os valores de λ_i que maximizem a equação anterior. Do resultado da letra (b) podemos escrever:

$$\ln(\lambda) = \ln(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda_i) - \ln(\lambda) = 0\ (6)$$

Temos então que maximizar (5) dado (6), para isso utilizaremos o multiplicador de Lagrange (ν):

$$F = -\sum_{1}^{n} I_{sp,i} g_0 \ln{(\lambda_i\epsilon_i + 1 - \epsilon_i)} + \nu(\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda_i) - \ln(\lambda))$$

Para o multiplicador de Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0,\ \forall\ i \in [1,..,n]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = -\sum_{i=1}^{n} I_{sp,i} g_0 \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(\ln{(\lambda_i\epsilon_i + 1 - \epsilon_i)}) + \nu(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \lambda_i}(\ln(\lambda_i)) - \frac{\partial}{\partial \lambda_i}(\ln(\lambda))) = 0$$

$$-\sum_{i=1}^{n} I_{sp,i} g_0 \frac{\epsilon_i}{(\lambda_i\epsilon_i + 1 - \epsilon_i)} + \nu(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{\nu}{\lambda_i} - \frac{I_{sp,i} g_0 \epsilon_i}{(\lambda_i\epsilon_i + 1 - \epsilon_i)}) = 0$$

$$\frac{I_{sp,i} g_0 \epsilon_i}{(\lambda_i\epsilon_i + 1 - \epsilon_i)} = \frac{\nu}{\lambda_i}$$

$$I_{sp,i} g_0 \epsilon_i \lambda_i = \nu\lambda_i\epsilon_i + \nu(1 - \epsilon_i)$$

$$\lambda_i = \frac{\nu(1 - \epsilon_i)}{(I_{sp,i} g_0 - \nu)\epsilon_i}\ (7)$$

De (6) e (7):

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\nu(1 - \epsilon_i)}{(I_{sp,i} g_0 - \nu)\epsilon_i} = \lambda$$

$$\prod_{i=1}^{n}\nu(\frac{1}{\epsilon_i} - 1) = \lambda\prod_{i=1}^{n}(I_{sp,i} g_0 - \nu)$$

$$\nu^n\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\epsilon_i} - 1) - \lambda\prod_{i=1}^{n}(I_{sp,i} g_0 - \nu) = 0\ (8)$$

Para cada valor de (ν) em (8) temos o correspondente valor de λi dado por (7).

d) Considerando:

$$I_{sp,i} = I_{sp} = cte.,\ \epsilon_i = \epsilon = cte.$$

De (8):

$$\nu^n\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\epsilon} - 1) = \lambda\prod_{i=1}^{n}(I_{sp} g_0 - \nu)$$

$$\nu^n(\frac{1}{\epsilon} - 1)^n = \lambda(I_{sp} g_0 - \nu)^n$$

$$\nu(\frac{1}{\epsilon} - 1) = \lambda^{\frac{1}{n}}(I_{sp} g_0 - \nu)$$

$$\frac{\nu(1 - \epsilon)}{(I_{sp} g_0 - \nu)\epsilon} = \lambda^{\frac{1}{n}}\ (9)$$

De (7) em (9):

$$\lambda_i = \frac{\nu(1 - \epsilon)}{(I_{sp} g_0 - \nu)\epsilon}$$

$$\lambda_i = \lambda^{\frac{1}{n}}$$

Questao 6) As medidas a seguir foram feitas para um ensaio a nıvel do mar de um motor-foguete a propelente hıbrido:

•Empuxo medio: 60 kN; •Tempo de queima: 40 s;

•Presšao de camara media: 70 bar; •Pressao de saıda do ǵas: 0.7 bar;

•Massa inicial: 1200 kg; •Massa final, apos consumo do combustıvel (solido): 700 kg;

•Vazao massica media de oxidante (lıquido): 12.5 kg/s; •Diametro da garganta: 0.0855 m;

•Diametro da saıda da tubeira: 0.2703 m;

---- Obtenha o impulso especıfico deste motor: ----

(a) a nıvel do mar; (b) a 25 km de altitude (pressao atmosferica 2.55 kPa).

```python
def gamma_from_At_Ae_Pe_P0(At, Ae, Pe, P0, N = 1000):
    pe_p0 = Pe/P0
    At_Ae = At/Ae
    gamma_vec = np.linspace(0.01,5,N)
    gamma_minus = gamma_vec - 1
    gamma_plus = gamma_vec + 1
    inv_gamma = 1/gamma_vec
    numerador = (2*gamma_vec/gamma_minus)*(pe_p0**(2*inv_gamma))*(1 - ((pe_p0)**(gamma_minus/gamma_vec)))
    denominador = gamma_vec*((2/gamma_plus)**(gamma_plus/gamma_minus))
    At_Ae_vec = np.sqrt(numerador/denominador)
    diff_vec = np.absolute(At_Ae_vec - At_Ae)
    return gamma_vec[diff_vec.argmin()]
def Vandenkerckhove(gamma):
    return np.sqrt(gamma*((2/(gamma + 1))**((gamma + 1)/(gamma - 1))))

Pe = 0.7*100000
P0 = 70*100000
dt, de = 0.0855, 0.2703
At, Ae = np.pi*(dt**2)/4 , np.pi*(de**2)/4
T = 60000
delta_m = (1200 - 700)
dot_m = delta_m/40 + 12.5
g0 = 9.81
gamma = gamma_from_At_Ae_Pe_P0(At, Ae, Pe, P0, N = 100000)
beta = (gamma - 1)/gamma
vandenkerckhove = Vandenkerckhove(gamma)

#a) Pa = 100000 Pa
Pa = 100000
x, xa = Pe/P0, Pa/P0
F = vandenkerckhove*P0*At*(((1 - x**beta)**0.5) + (beta/2)*(x**(beta-1))*(x - xa)*((1 - (x**beta))**(-0.5)))/(np.sqrt(beta/2))
Isp_a = F/(dot_m*g0)
print(f"Isp, para pressão atmosférica de {Pa} Pa, é aproximadamente {Isp_a:.2f} s")
```

```
Isp, para pressão atmosférica de 100000 Pa, é aproximadamente 254.71 s
```

```python
#b) Pa = 2550 Pa
Pa = 2550
x, xa = Pe/P0, Pa/P0
F = vandenkerckhove*P0*At*(((1 - x**beta)**0.5) + (beta/2)*(x**(beta-1))*(x - xa)*((1 - (x**beta))**(-0.5)))/(np.sqrt(beta/2))
Isp_a = F/(dot_m*g0)
print(f"Isp, para pressão atmosférica de {Pa} Pa, é aproximadamente {Isp_a:.2f} s")
```

```
Isp, para pressão atmosférica de 2550 Pa, é aproximadamente 277.51 s
```

Questao 7. Considere um motor-foguete operando sob a pressao atmosferica, projetado para a expansao otima ate esta pressao. Suponha vazao massica total de 4 kg/s, pressao de camara de 30 bar, temperatura de estagnacao na camara de 2600 K, massa molar media dos produtos de combustao de 18 g/mol, razao de calores especıficos de 1.3.

Calcule:

(a) A velocidade de saıda;

(b) A temperatura de saıda;

(c) A velocidade caracterıstica (c∗);

(d) O impulso especıfico.

```python
Pe = 100000 #Pa
dot_m = 4 #kg/s
P0 = 30*100000 #Pa
T0 = 2600 #K
M = 18 #g/mol
gamma = 1.3
R = (8314.462618/18)

#a)
def ve_from_gamma_Pe_P0_T0(gamma, Pe, P0, T0, R):
    beta = (gamma - 1)/gamma
    return np.sqrt((2/beta)*R*T0*(1 - ((Pe/P0)**beta)))
v_e = ve_from_gamma_Pe_P0_T0(gamma, Pe, P0, T0, R)

def Te_from_gamma_Pe_P0_T0(gamma, Pe, P0, T0):
    beta = (gamma - 1)/gamma
    return T0*((Pe/P0)**(-beta))
Te = Te_from_gamma_Pe_P0_T0(gamma, Pe, P0, T0)

vandenkerckhove = Vandenkerckhove(gamma)
c_star = np.sqrt(R*T0)/(vandenkerckhove)
Isp = v_e/g0

print(f"a) Velocidade de saída (Ve) é aproximadamente {v_e:.2f} m/s")
print(f"b) Temperatura de saída (Te) é aproximadamente {Te:.2f} K")
print(f"c) Velocidade Característica (c*) é aproximadamente {c_star:.2f} m/s")
print(f"d) Isp é aproximadamente {Isp:.2f} s")
```

```
a) Velocidade de saída (Ve) é aproximadamente 2379.17 m/s
b) Temperatura de saída (Te) é aproximadamente 5699.64 K
c) Velocidade Característica (c*) é aproximadamente 1642.37 m/s
d) Isp é aproximadamente 242.52 s
```

Questao 8. Voce esta participando de um grupo de trabalho para estudar a viabilidade do desenvolvimento de uma tubeira especial com um mecanismo de extensao, capaz de aumentar a area de saıda durante o voo e assim manter a pressao de saıda sempre igual a pressao atmosferica a medida que o foguete sobe. Supondo uma pressao de camara de 20 bar e um γ de 1.2, determine a variacao de area de saıda, desde o lancamento ate uma altitude de 50 km, ou seja, pressao atmosferica variando desde 1 bar ate 7.87 × 10−4 bar.

```python
def At_Ae_from_Pe_P0_gamma(Pe, P0, gamma):
    vandenkerckhove = Vandenkerckhove(gamma)
    pe_p0 = Pe/P0
    beta = (gamma-1)/gamma
    return (1/vandenkerckhove)*np.sqrt((2/beta)*(pe_p0**(2/gamma))*(1 - ((pe_p0)**(beta))))
P0 = 20*100000
gamma = 1.2
Pe_0 = 100000
Pe_50 = 78.7
AtAe_0 = At_Ae_from_Pe_P0_gamma(Pe_0, P0,gamma)
AtAe_50 = At_Ae_from_Pe_P0_gamma(Pe_50, P0,gamma)
delta_Ae = (1/AtAe_50 - 1/AtAe_0)/(1/AtAe_0)
print(f"A variaçã0 percentual de área de saída, em relação à área inicial (Ae_0), é aproximadamente +{delta_Ae:.2%}")
```

```
A variaçã0 percentual de área de saída, em relação à área inicial (Ae_0), é aproximadamente +26702.38%
```