

Investigação do Problema da Cavity

Leonardo Maximo Silva

UnB-DF

200022172@aluno.unb.br

Resumo. O problema da Cavity cisalhante bidimensional, para o qual uma camada de fluido confinada em uma seção retangular cuja apenas a parede superior encontra-se a uma velocidade constante enquanto as outras encontram-se estáticas, foi investigado a partir de uma adimensionalização e aplicação de metodologia numérica para um algoritmo de projeção de primeira ordem explícito em malha defasada em Python. Comparou-se, então, os resultados obtidos com resultados previamente obtidos de modo a se perceber como a velocidade, a pressão e a sua função de corrente se comportam para esse problema.

Keywords: Problema da Cavity, Métodos Numéricos, Python, Mecânica dos Fluidos, Adimensionalização

1. Introdução

O problema da Cavity Cisalhante Bidimensional representa uma seção quadrada cujas paredes permanecem estáticas com exceção da parede superior, a qual localiza-se a uma velocidade constante ($U(x)$). A origem dos eixos Coordenados (x e y) encontra-se no vértice inferior esquerdo da seção quadrada de lado L , Rosa (2022), de modo que o problema pode ser visualizado por 1.

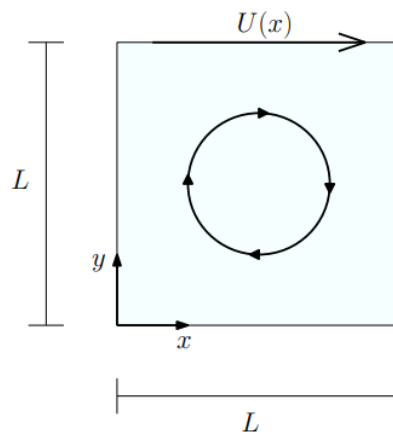


Figure 1. Problema da Cavity Cisalhante Bidimensional, Rosa (2022)

Considerando um fluido newtoniano e incompressível dentro dessa seção, resolveu-se esse problema de modo a encontrar sua pressão, velocidade em x (u), velocidade em y (v), pressão (p) e função de corrente (Ψ). Assim, para o instante de tempo t , tomou-se o vetor velocidade (\vec{u}) como:

$$\vec{u} = u(x, y, t)\vec{i} + v(x, y, t)\vec{j}$$

O vetor pressão como:

$$p = p(x, y, t)$$

E a função de corrente como:

$$\Psi = \Psi(x, y, t)$$

Para se analisar o problema, tomou-se a Equação de Navier-Stokes, deduzida a partir da Equação da Conservação de Massa e da Equação da Conservação de Momento, Çengel and Cimbala (2012), para se obter as equações que relacionam os parâmetros x, y e t com as variáveis de interesse, \vec{u}, p e Ψ . Essas equações foram, então, adimensionalizadas de modo a se facilitar a aplicação do método numérico da projeção de primeira ordem explícito em malha defasada. Comparou-se os resultados obtidos com outros resultados previamente obtidos. Dessa forma, foi possível analisar o problema cisalhante bidimensional da cavity a partir de sua resolução.

2. Fundamentação Teórica

Para o problema bidimensional cisalhante da cavidade, tomou-se um volume de controle (VC) que envolve toda superfície quadrada bidimensional tomada e centrada no centro dessa seção, conforme visto em 2.

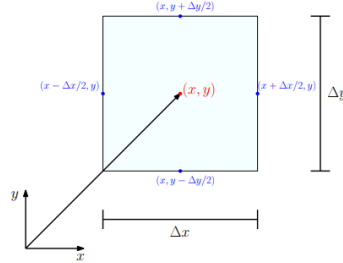


Figure 2. Volume de Controle, Rosa (2022)

Como o escoamento pode ser considerado incompressível e sua densidade (ρ) pode ser considerada constante, obtém-se a Equação da Continuidade, dada por 1 e 2.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Para solucionar o problema conforme postulado em 1., aplicou-se a Conservação de Massa para o Volume de Controle tomado, 3, em conjunto com a Segunda Lei de Newton para se obter a Equação de Navier-Stokes, 4 e cuja dedução pode ser observada em Çengel and Cimbala (2012)

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{SC} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (3)$$

Em 3,V foi tomado como sendo o Volume do Volume de Controle; SC é sua superfície de controle, \vec{n} é um vetor unitário normal à SC, A representa a área da superfície de controle e ρ representa a densidade do material.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla^2 \vec{u} \quad (4)$$

Em 4, \vec{g} representa a aceleração da gravidade e μ , a viscosidade do material. Abrindo 4 para a velocidade u, em x, e v, em y, obtém-se, para um fluido de densidade constante e de escoamento incompressível ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$), as equações 5 e 6, Rosa (2022).

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (6)$$

É possível adimensionalizar o problema considerando L (comprimento do lado da cavidade) como um comprimento característico, a velocidade máxima U(x) na parede superior como uma velocidade característica, a razão $\frac{L}{U}$ como um tempo característico e μ como uma pressão característica, obtém-se que as variáveis adimensionalizadas (representadas com um "*") podem ser dadas por:

$$\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} L$$

$$\vec{u}^* = \frac{u(x, y, t) \vec{i} + v(x, y, t) \vec{j}}{U}$$

$$t^* = t \frac{U}{L}$$

$$P^* = t \frac{P}{\rho U^2}$$

Assim, substituindo os valores adimensionalizados nas equações obtidas, as equações adimensionalizadas tornam-se 7 e 8

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (8)$$

Em que Re é o Número de Reynolds e é obtido ao se perceber que, ao se substituir os parâmetros adimensionalizados e dividir a equação pela sua densidade, obtém-se os seguintes fatores livres que são iguais ao inverso do Número de Reynolds para o escoamento tomado, $\frac{1}{\rho U L} = \frac{1}{Re}$. É importante ressaltar que o problema adimensionalizado da cavidade possui tamanho 1, segundo 3. Para o problema tomado adimensionalizado, seu domínio é $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e a velocidade na parede superior é $U(x) = 1.0$ e suas condições de contorno envolvem os princípios da impenetrabilidade e não escorregamento, ou seja, $\vec{u} = \vec{0}$ para as paredes laterais e inferior e $\vec{u} = 1\vec{i}$ para a parede superior. É possível, logo, desenvolver as equações 7 e 8 a partir de um Método Numérico que permita a sua resolução computacional.

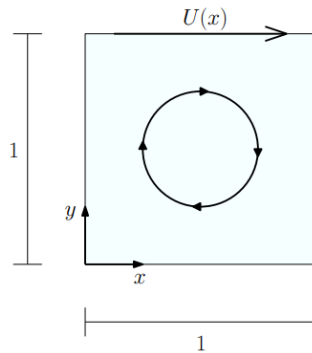


Figure 3. Problema da Cavidade Adimensionalizado, Rosa (2022)

3. Metodologia Numérica

Como não é possível obter uma equação explícita para a pressão ao se considerar o Método das Diferenças Finita, apenas uma equação que restringe o campo de escoamento em função da pressão, tomou-se o Método da Projeção de Primeira Ordem Explícito, tal que essas restrições ao escoamento podem ser ignoradas a partir do uso de uma velocidade intermediária (\vec{u}^*), o qual calcula a Equação de Navier-Stokes sem o termo da pressão e não possui significado físico, de modo que não precisa resultar em um fluido incompressível. Pode-se, entretanto, utilizá-lo para se calcular o próximo passo de velocidade, \vec{u}^{k+1} , e de pressão, p^{k+1} , Rosa (2022). Pode-se, assim, sistematizar o algoritmo numérico para se calcular os novos valores de velocidade e pressão do seguinte modo:

1. Calcular \vec{u}^* ;
2. Calcular o novo passo para a pressão p^{k+1} também em seus pontos de fronteira a partir da aplicação das Condições de Contorno de Neumann
3. Calcular a nova velocidade \vec{u}^{k+1}

As equações a serem resolvidas para esse algoritmo são 9, para se obter a velocidade intermediária e 10 para as condições de Contorno de Von-Neumann; 11 para se obter a nova pressão nos pontos intermediários e 12 para se obter a nova pressão nos pontos de fronteira a partir da aplicação das Condições de Contorno de Von-Neumann e, finalmente, a partir do valor da velocidade intermediária e da nova pressão, pode-se calcular 13.

$$\vec{u}^* = \vec{u}^k + \Delta t \left(-\vec{u}^k \cdot \nabla \vec{u}^k + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}^k \right) \quad (9)$$

$$\vec{u}^* = \vec{u}_b \quad (10)$$

$$\nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{u}^* \quad (11)$$

$$\nabla p^{k+1} \cdot \vec{n} = 0 \quad (12)$$

$$u^{k+1} = u^* - \Delta t \nabla p^{k+1} \quad (13)$$

Como, ao se utilizar uma Malha Tradicional, não são obtidos bons resultados para os valores de velocidade em x (u), em y (v) e pressão (p), foi necessária a implementação em malha defasada, para a qual u é implementado em concordância com os valores de x, porém, localizado no ponto intermediário do valor de Δy ; v é implementado em concordância com os valores de y, porém, localizado no ponto intermediário do intervalo Δx e p é implementado no ponto intermediário entre os intervalos de Δx e Δy . Assim, para se calcular os novos valores em suas fronteiras, é necessário utilizar o conceito de ghost-point tal que u possua ghost-points apenas em relação ao eixo y, v possua ghost-points apenas em relação ao eixo x e p possua ghost-points em relação aos eixos x e y. Um exemplo de Malha Defasada pode ser verificado em 4.

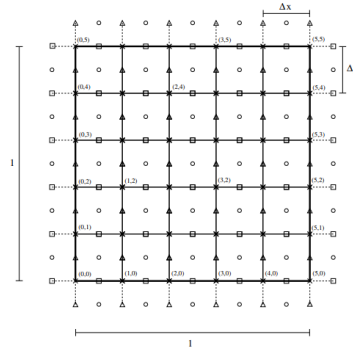


Figure 4. Problema da Cavidade Adimensionalizado, Rosa (2022)

Para se evitar instabilidades numéricas, há as seguintes restrições para o passo de tempo Δt e de incremento espacial Δx :

$$\Delta t < \Delta x$$

$$\Delta x < \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$\Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2$$

A função corrente (Ψ) facilita a visualização do campo velocidade e pode ser calculada em malha normal (não defasada) a partir dos valores de u e v calculado. Logo, ela pode ser dada por 14 para a função de corrente tomada como igual a 0 nas paredes, tendo em vista que são intransponíveis.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (14)$$

Aplicando esses algoritmos no Método das Diferenças Finitas, é possível obter equações iterativas e que possam ser resolvidas a partir de operações simples de soma, subtração, multiplicação e divisão.

4. Resultados e Análise

Os valores obtidos para os vetores velocidades u e v em 1, 3, 6, 2, 4 e 5, para os valores de Reynolds de $Re = 10.0$, $Re = 100.0$ e $Re = 1000.0$, foram comparados com os respectivos resultados obtidos em Marchi *et al.* (2009).

Para 1 e 2, os vetores u e v obtidos apresentaram valores próximos e de rápida convergência, tendo em vista que já se encontravam próximos para o valor de tempo adimensionalizado, $t = 5.0$, apresentando diferenças entre os resultados obtidos para a segunda casa decimal.

Table 1. Comparação entre u medido em Marchi *et al.* (2009) e u calculado para $Re = 10.0$ e $t = 5.0$

Variável	u em Marchi <i>et al.</i> (2009)	u calculado
u(0.5;0.0625)	-3.85425800e-2	-3.90212427e-02
u(0.5;0.125)	-6.96238561e-2	-7.03131475e-02
u(0.5;0.1875)	-9.6983962e-2	-9.76932182e-02
u(0.5;0.25)	-1.22721979e-1	-1.23126842e-01
u(0.5;0.3125)	-1.47636199e-1	-1.47313726e-01
u(0.5;0.375)	-1.71260757e-1	-1.69710775e-01
u(0.5;0.4375)	-1.91677043e-1	-1.88360653e-01
u(0.5;0.5)	-2.05164738e-1	-1.99588640e-01
u(0.5;0.5625)	-2.05770198e-1	-1.97640313e-01
u(0.5;0.625)	-1.84928116e-1	-1.74376101e-01
u(0.5;0.6875)	-1.313892353e-1	-1.19222585e-01
u(0.5;0.75)	-3.1879308e-2	-1.97077359e-02
u(0.5;0.8125)	1.26912095e-1	1.36932529e-01
u(0.5;0.875)	3.54430364e-1	3.60468245e-01
u(0.5;0.9375)	6.50529292e-1	6.52319209e-01

Table 2. Comparação entre v medido em Marchi *et al.* (2009) e v calculado para $Re = 10.0$ e $t = 5.0$, tolerância de 10^{-7}

Variável	v em Marchi <i>et al.</i> (2009)	v calculado
v(0.0625;0.5)	9.2970121e-2	9.13956439e-02
v(0.125;0.5)	1.52547843e-1	1.48505866e-01
v(0.1875;0.5)	1.78781456e-1	1.73162143e-01
v(0.25;0.5)	1.76415100e-1	1.70535231e-01
v(0.3125;0.5)	1.52055820e-1	1.47066456e-01
v(0.375;0.5)	1.121477612e-1	1.08794536e-01
v(0.4375;0.5)	6.21048147e-2	6.07645973e-02
v(0.5;0.5)	6.3603620e-3	7.16261172e-03
v(0.5625;0.5)	-5.10417285e-2	-4.81450818e-02
v(0.625;0.5)	-1.056157259e-1	-1.00889359e-01
v(0.6875;0.5)	-1.51622101e-1	-1.45680351e-01
v(0.75;0.5)	-1.81633561e-1	-1.75554731e-01
v(0.8125;0.5)	-1.87021651e-1	-1.82212591e-01
v(0.875;0.5)	-1.59898186e-1	-1.57488563e-01
v(0.9375;0.5)	-9.6409942e-2	-9.63508168e-02

Para 3 e 4, os vetores u e v obtidos começaram a divergir dos obtidos em Marchi *et al.* (2009), entretanto, os valores ainda são próximos o suficiente para se indicar convergência, ainda que o tempo necessário seja maior para se obter valores satisfatórios ($t = 10.0$), apresentando diferenças entre os resultados obtidos para a primeira casa decimal.

Table 3. Comparação entre u medido em Marchi *et al.* (2009) e u calculado para $Re = 100.0$ e $t = 30.0$

Variável	u em Marchi <i>et al.</i> (2009)	u calculado
u(0.5;0.0625)	-4.1974991e-2	-3.58709180e-02
u(0.5;0.125)	-7.7125399e-2	-6.59278986e-02
u(0.5;0.1875)	-1.09816214e-1	-9.36128050e-02
u(0.5;0.25)	-1.41930064e-1	-1.20489892e-01
u(0.5;0.3125)	-1.72712391e-1	-1.46249773e-01
u(0.5;0.375)	-1.98470859e-1	-1.68507860e-01
u(0.5;0.4375)	-2.12962392e-1	-1.82866422e-01
u(0.5;0.5)	-2.091491418e-1	-1.83695334e-01
u(0.5;0.5625)	-1.82080595e-1	-1.65814927e-01
u(0.5;0.625)	-1.31256301e-1	-1.26549740e-01
u(0.5;0.6875)	-6.0245594e-2	-6.65952999e-02
u(0.5;0.75)	2.7874448e-2	1.27867581e-02
u(0.5;0.8125)	1.40425325e-1	1.19195713e-01
u(0.5;0.875)	3.1055709e-1	2.85146276e-01
u(0.5;0.9375)	5.97466694e-1	5.71814432e-01

Table 4. Comparação entre v medido em Marchi *et al.* (2009) e v calculado para $Re = 100.0$ e $t = 30.0$

Variável	v em Marchi <i>et al.</i> (2009)	v calculado
v(0.0625;0.5)	9.4807616e-2	7.65326209e-02
v(0.125;0.5)	1.4924300e-1	1.22066693e-01
v(0.1875;0.5)	1.74342933e-1	1.44409099e-01
v(0.25;0.5)	1.79243328e-1	1.50074468e-01
v(0.3125;0.5)	1.69132064e-1	1.42978429e-01
v(0.375;0.5)	1.45730201e-1	1.24562497e-01
v(0.4375;0.5)	1.087758646e-1	9.46797692e-02
v(0.5;0.5)	5.7536559e-2	5.27127862e-02
v(0.5625;0.5)	-7.748504e-3	-1.20382369e-03
v(0.625;0.5)	-8.4066715e-2	-6.46857275e-02
v(0.6875;0.5)	-1.63010143e-1	-1.31152004e-01
v(0.75;0.5)	-2.27827313e-1	-1.87744863e-01
v(0.8125;0.5)	-2.53768577e-1	-2.14841981e-01
v(0.875;0.5)	-2.18690812e-1	-1.91468865e-01
v(0.9375;0.5)	-1.23318170e-1	-1.11402110e-01

Para 6 e 5, os vetores u e v calculados divergem dos obtido em Marchi *et al.* (2009), de modo que, para ao menos se aproximarem é necessário um grande valor de tempo ($t = 30.0$), estando em uma ordem de 10. Essa divergência, de acordo com o Número de Reynolds utilizado, deve-se à natureza do escoamento, o qual, conforme o número de Reynolds aumenta, mais turbulento é o escoamento observado, Çengel and Cimbala (2012). Como a aproximação tomada é para um escoamento laminar, valores de Reynolds menores apresentarão melhores resultados que valores de Reynolds maiores, de modo que, para $Re \geq 1000$, a utilização do modelo tomado em 3 não é adequado devido aos resultados obtidos. Ainda assim, é necessário ressaltar que o modelo utilizado em Marchi *et al.* (2009), ainda que mais preciso que a metodologia tomada, ainda apresenta um erro na ordem de 10^2 para $Re = 1000$. Dessa forma, a utilização dos modelos tomados para o problema da Cavidade prevê um escoamento laminar de modo que, para valores de Reynolds altos, ou seja, escoamentos turbulentos, não representam uma boa aproximação.

Table 5. Comparação entre v medido em Marchi *et al.* (2009) e v calculado para $Re = 1000.0$ e $t = 50.0$

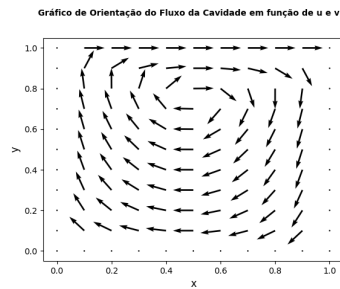
Variável	v em Marchi <i>et al.</i> (2009)	v calculado
$v(0.0625;0.5)$	$2.807057e-1$	$7.97810922e-02$
$v(0.125;0.5)$	$3.650418e-1$	$1.20140944e-01$
$v(0.1875;0.5)$	$3.678527e-1$	$1.47722101e-01$
$v(0.25;0.5)$	$3.0710428e-1$	$1.63179038e-01$
$v(0.3125;0.5)$	$2.3126839e-1$	$1.58948207e-01$
$v(0.375;0.5)$	$1.6056422e-1$	$1.34075407e-01$
$v(0.4375;0.5)$	$9.296931e-2$	$9.57810704e-02$
$v(0.5;0.5)$	$2.579946e-2$	$5.31038682e-02$
$v(0.5625;0.5)$	$-4.184068e-2$	$1.07144870e-02$
$v(0.625;0.5)$	$-1.107983e-1$	$-3.09579262e-02$
$v(0.6875;0.5)$	$-1.816797e-1$	$-7.26865508e-02$
$v(0.75;0.5)$	$-2.533815e-1$	$-1.16499879e-01$
$v(0.8125;0.5)$	$-3.315667e-1$	$-1.70386763e-01$
$v(0.875;0.5)$	$-4.677756e-1$	$-2.34372620e-01$
$v(0.9375;0.5)$	$-4.5615254e-1$	$-2.49873637e-01$

Table 6. Comparação entre u medido em Marchi *et al.* (2009) e u calculado para $Re = 1000.0$ e $t = 50.0$

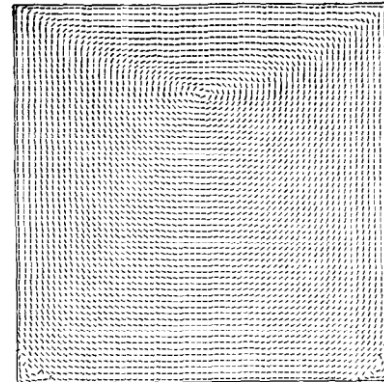
Variável	u em Marchi <i>et al.</i> (2009)	u calculado
$u(0.5;0.0625)$	$-2.02330048e-1$	$-6.86483323e-02$
$u(0.5;0.125)$	$-3.478451e-1$	$-1.23035622e-01$
$u(0.5;0.1875)$	$-3.844094e-1$	$-1.66005333e-01$
$u(0.5;0.25)$	$-3.189461e-1$	$-1.85744079e-01$
$u(0.5;0.3125)$	$-2.456937e-1$	$-1.72569387e-01$
$u(0.5;0.375)$	$-1.837321e-1$	$-1.35068418e-01$
$u(0.5;0.4375)$	$-1.2341046e-1$	$-9.08523435e-02$
$u(0.5;0.5)$	$-6.205613e-2$	$-4.82408192e-02$
$u(0.5;0.5625)$	$5.6180e-4$	$-5.94916247e-03$
$u(0.5;0.625)$	$6.5248742e-2$	$3.74155976e-02$
$u(0.5;0.6875)$	$1.3357257e-1$	$8.33040064e-02$
$u(0.5;0.75)$	$2.0791461e-1$	$1.26927537e-01$
$u(0.5;0.8125)$	$2.884424e-1$	$1.68041073e-01$
$u(0.5;0.875)$	$3.625454e-1$	$1.87214020e-01$
$u(0.5;0.9375)$	$4.229321e-1$	$2.52679482e-01$

Foram obtidos também os gráficos dos vetores velocidade (u e v), da pressão e da função corrente (Ψ) para os valores de Reynolds $Re = 1.0$, $Re = 10.0$, $Re = 100.0$ e $Re = 1000.0$. Esses valores foram, então, comparados com os obtidos em J.Kim and P.Moin (1985). Para o caso de $Re = 1.0$, o domínio foi discretizado em 10 pontos ($N = 10$), a precisão tomada foi de 10^{-5} e o tempo adimensionalizado tomado foi de $t = 5.0$. Para os casos de $Re = 10.0$, $Re = 100.0$ e $Re = 1000.0$, o domínio foi discretizado em 16 pontos ($N = 16$), cuja precisão tomada foi de 10^{-7} e o tempo adimensionalizado foi de $t = 30.0$.

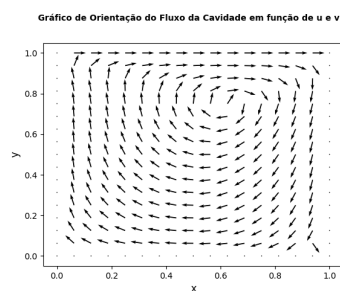
Em relação aos gráficos tomados para os vetores velocidade u e v , 5, para $Re = 1.0$, o fluido circula ao redor da cavidade praticamente sem a presença de efeitos turbulentos. Seu centro de rotação encontra-se levemente à direita, de modo a apresentar um escoamento circular cujo centro está apenas levemente à direita. Ao serem comparados com J.Kim and P.Moin (1985), percebe-se uma boa correspondência entre os dois gráficos obtidos. Conforme o Número de Reynolds aumenta, ocorre a formação de novas circulações de fluido nas extremidades inferiores esquerda e direita da cavidade. Como o centro de rotação do escoamento encontra-se levemente à direita, a formação dessas novas circulações também é mais intensa nessa parede. O Centro de Circulação da circulação principal afasta-se cada vez mais da extremidade superior da cavidade e aproxima-se de sua cavidade inferior devido aos escoamentos circulares que surgiram em suas extremidades inferiores. Ao se comparar os resultados obtidos com os de J.Kim and P.Moin (1985), nota-se uma boa correspondência da forma dos dois escoamentos.



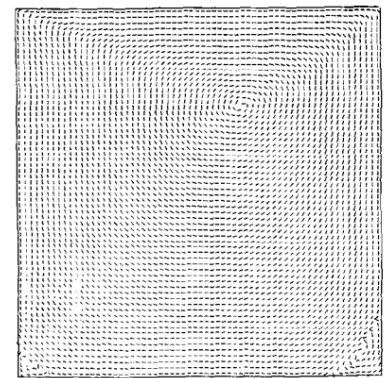
Valores obtidos para $Re = 1.0$



Valores de comparação para $Re = 1.0$



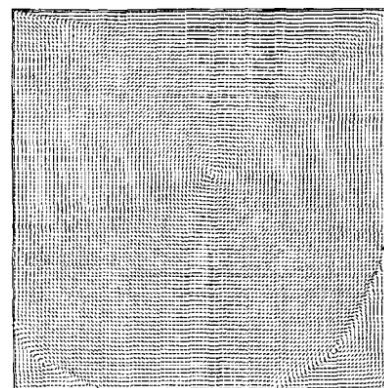
Valores obtidos para $Re = 100.0$



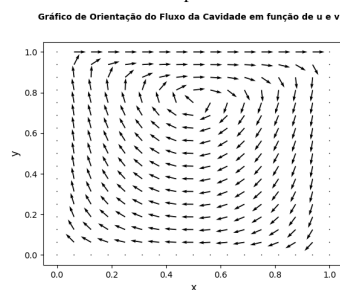
Valores de comparação para $Re = 100.0$



Valores obtidos para $Re = 1000.0$



Valores de comparação para $Re = 1000.0$



Valores obtidos para $Re = 10.0$

Figure 5. Gráficos dos vetores velocidade u e v para a velocidade

Em relação aos valores obtidos para a pressão ao longo da cavidade, 6, percebe-se que a pressão é mais intensa na extremidade superior direita da cavidade, o que representa uma área de alta pressão que leva o escoamento do fluido a circular ao redor da placa. Para valores do Número de Reynolds baixos ($Re = 1.0$ e $Re = 10.0$), há uma certa simetria entre as duas metades da cavidade, o que pode ser observado pela posição de seu centro de rotação em 7. Um lado possuir uma pressão levemente superior ao outro é um dos efeitos que representa o deslocamento de fluido e causa, logo, o escoamento. Conforme o número de Reynolds aumenta, a pressão começa a tornar-se menos simétrica, de modo a tornar-se maior ao

redor da extremidade superior direita da cavidade, o que causa o surgimento de novas circulações de calor ao redor das extremidades inferiores esquerda e direita, como pode ser observado em 5.

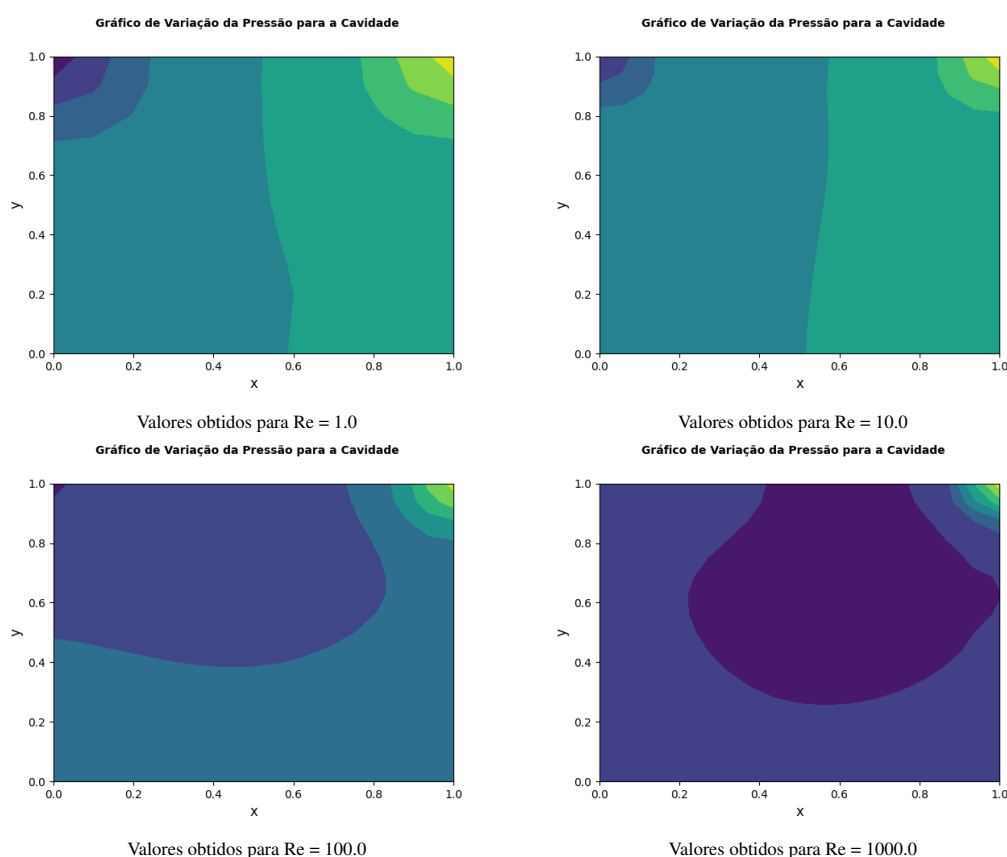


Figure 6. Gráficos da pressão para cada ponto x e y para a cavidade

A função corrente (Ψ) fornece uma aproximação de como é, visualmente, o escoamento de um fluido. Para $Re = 1.0$, o escoamento é aproximadamente simétrico e levemente deslocado para cima, representando, logo, um escoamento laminar. O Resultado obtido apresenta boa convergência com o presente em J.Kim and P.Moin (1985). Conforme o Número de Reynolds aumenta, observa-se a formação de novas áreas de circulação do escoamento nas duas extremidades inferiores do escoamento. Percebe-se, também, um deslocamento do fluxo principal para a direita, o que pode ser visto pelo aumento da pressão nessa região observada em 6 e o consequente aumento dos novo fluxos circulares nas extremidades inferiores esquerda e, especialmente, direita.

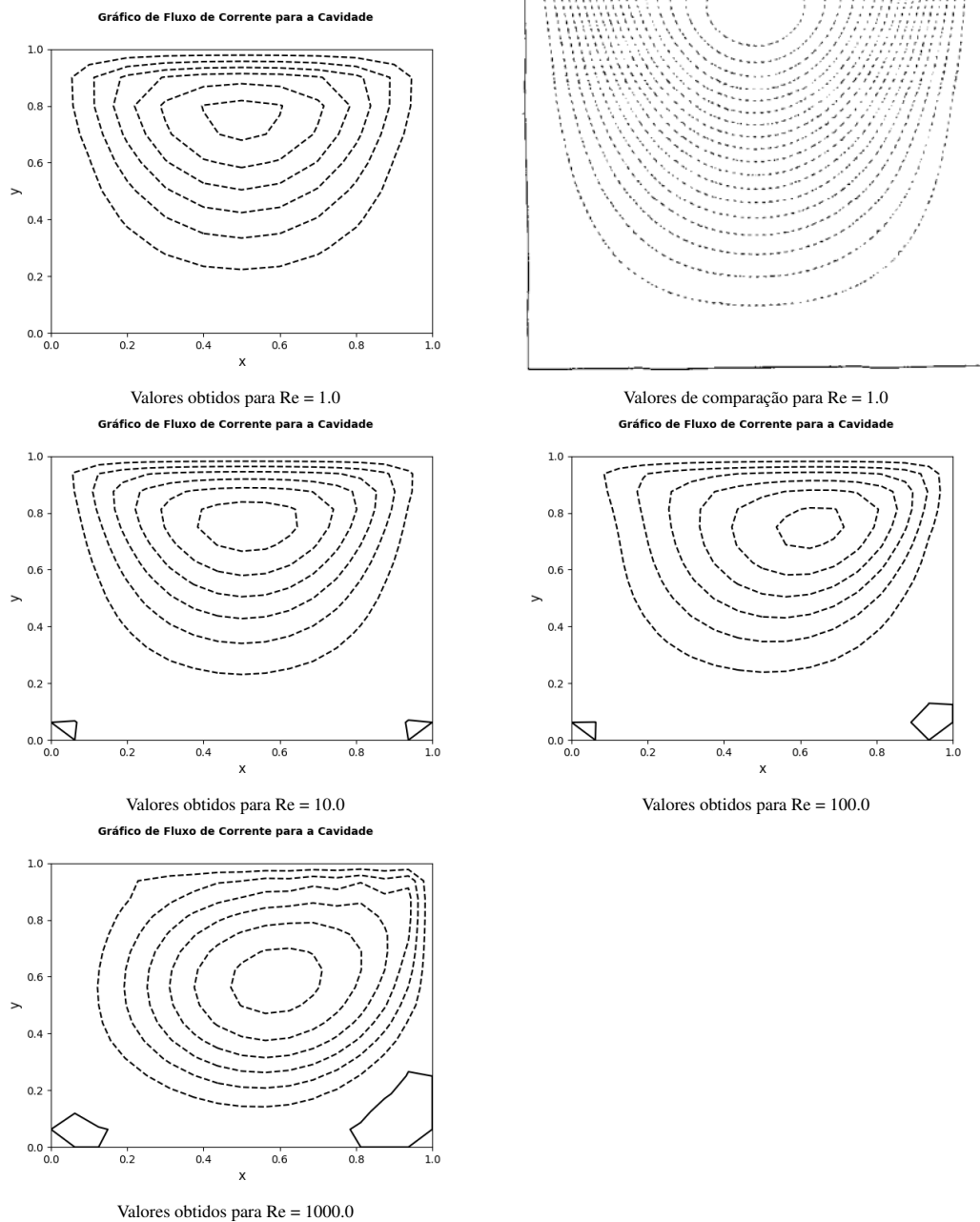


Figure 7. Gráficos da Função Corrente (Ψ) para a cavidade

Ao se tomar uma Cavidade Retangular 2X1, obtiveram-se os resultados presentes em 9, 8 e 10, os quais foram comparados com o esperado em Shankar and Deshpande (2000).

A partir de 8, percebe-se que, para a Cavidade Retangular 2X1, o escoamento comporta-se como o obtido para a Cavidade quadrada, entretanto, conforme o número de Reynolds aumenta, ocorre o deslocamento dos vetores velocidade para a direita da cavidade é mais intensa de modo que, por ser uma superfície retangular, a circulação é dividida em duas em relação ao eixo y. Assim, surgem dois novos fluxos de escoamento para Reynolds Alto ($Re = 1000$).

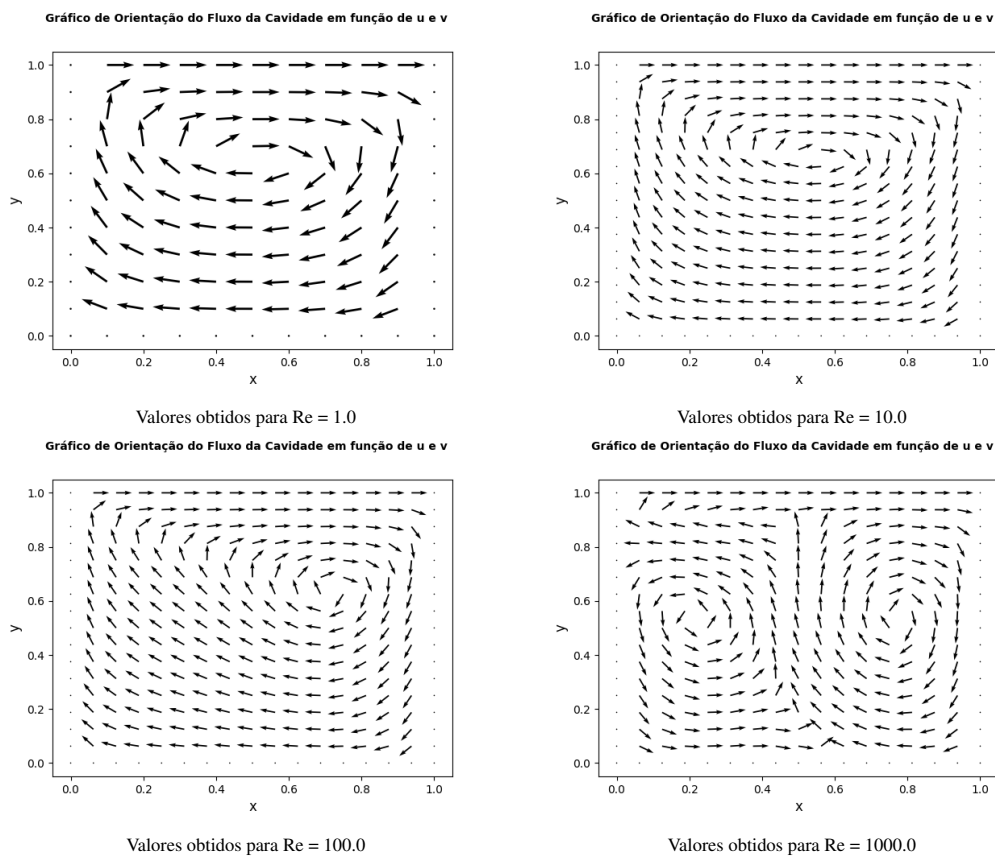


Figure 8. Gráficos de velocidade u e v para a cavidade retangular 2x1

Em relação à pressão obtida, percebe-se que, conforme o número de Reynolds aumenta, ela se concentra à direita da cavidade, de modo a favorecer o surgimento de uma nova zona circular de circulação de fluido à direita, conforme observado em 8.

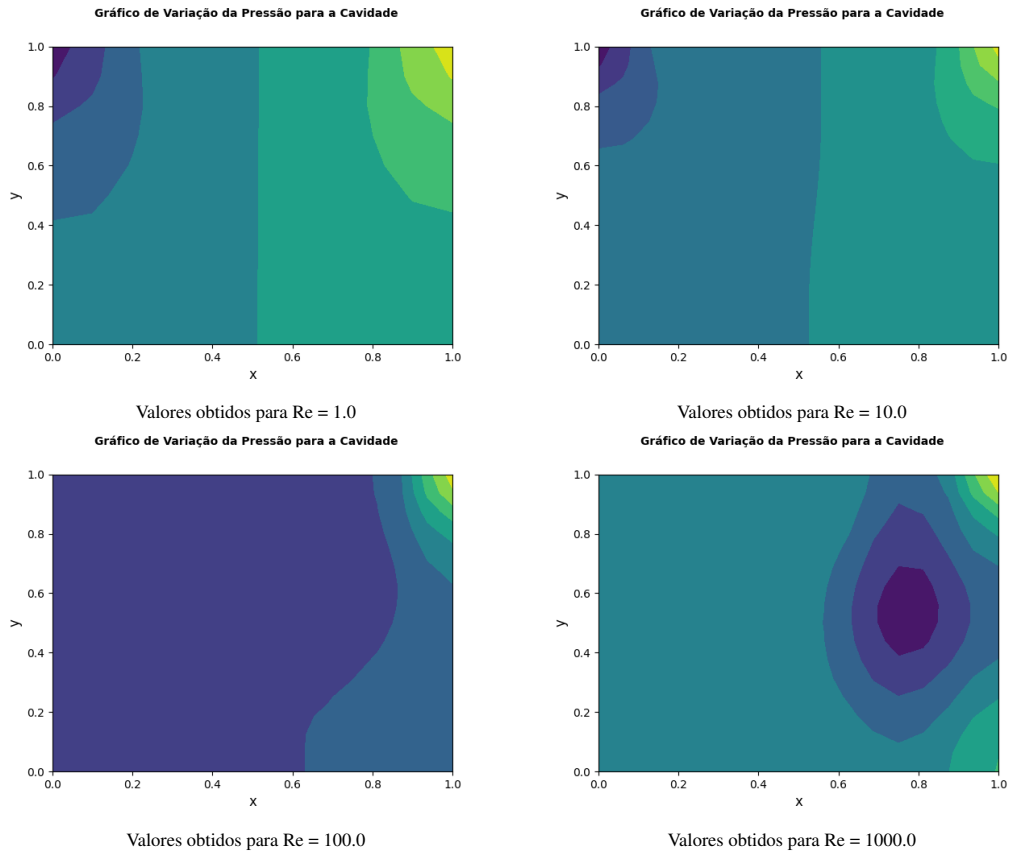


Figure 9. Gráficos de pressão para a cavidade retangular 2x1

Em relação à função corrente (Ψ), nota-se que, para baixos valores de Reynolds ($Re = 1.0$ e $Re = 10.0$), o escoamento é aproximadamente laminar e aproxima-se do observado para a Cavidade quadrada. Contudo, para altos valores de Reynolds ($Re = 100.0$ e $Re = 1000.0$), o comportamento turbulento do escoamento pode ser visto em uma tendência à direita a qual acaba por dividir o escoamento em dois fluxos circulares, um à esquerda e outro à direita. Dessa forma, o problema da Cavidade Retangular 2X1 apresenta regime laminar semelhante ao previamente obtido, entretanto, quando o Reynolds torna-se alto, ocorre o surgimento ou a repartição do fluxo de escoamento principal em duas zonas de circulação aproximadamente circulares de fluido quando tomadas em relação ao eixo y.

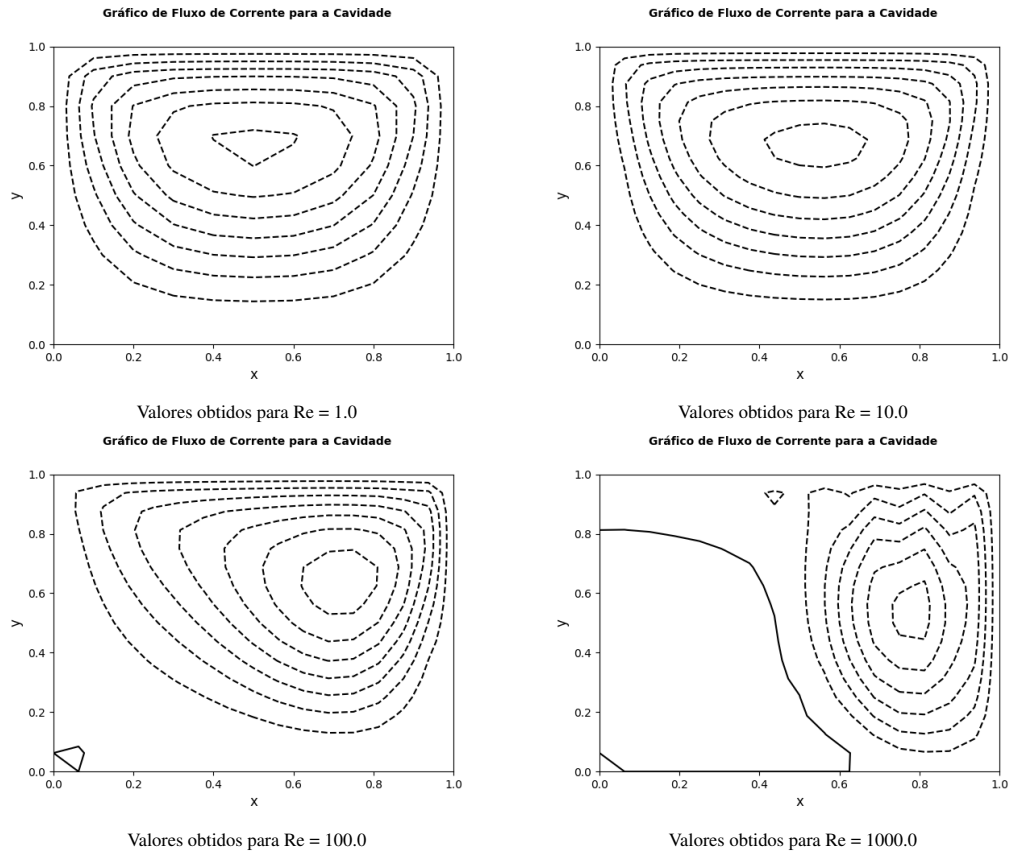


Figure 10. Gráficos de Função Corrente (Ψ) para a cavidade retangular 2x1

Para a Cavidade Retangular 1X2, a análise é análoga à obtida para a Cavidade 2X1. O escoamento, dessa forma, comporta-se como o da cavidade quadrada em caspara baixos valores do número de Reynolds, porém, apresenta a divisão do fluxo em duas metades em relação ao eixo x para todos os Números de Reynolds escolhidos ($Re \geq 1.0$). É interessante notar, entretanto, que, para a Cavidade 1X2, o escoamento divide-se em dois para um valor de Reynolds menor que para a Cavidade 2X1, conforme pode ser observado em 11 ao se notar que o escoamento já se apresenta como dividido em 2 para Reynolds igual a 1.0. Esse resultado é similar ao obtido em Shankar and Deshpande (2000), de modo a se comprovar a tendência do escoamento obtida.

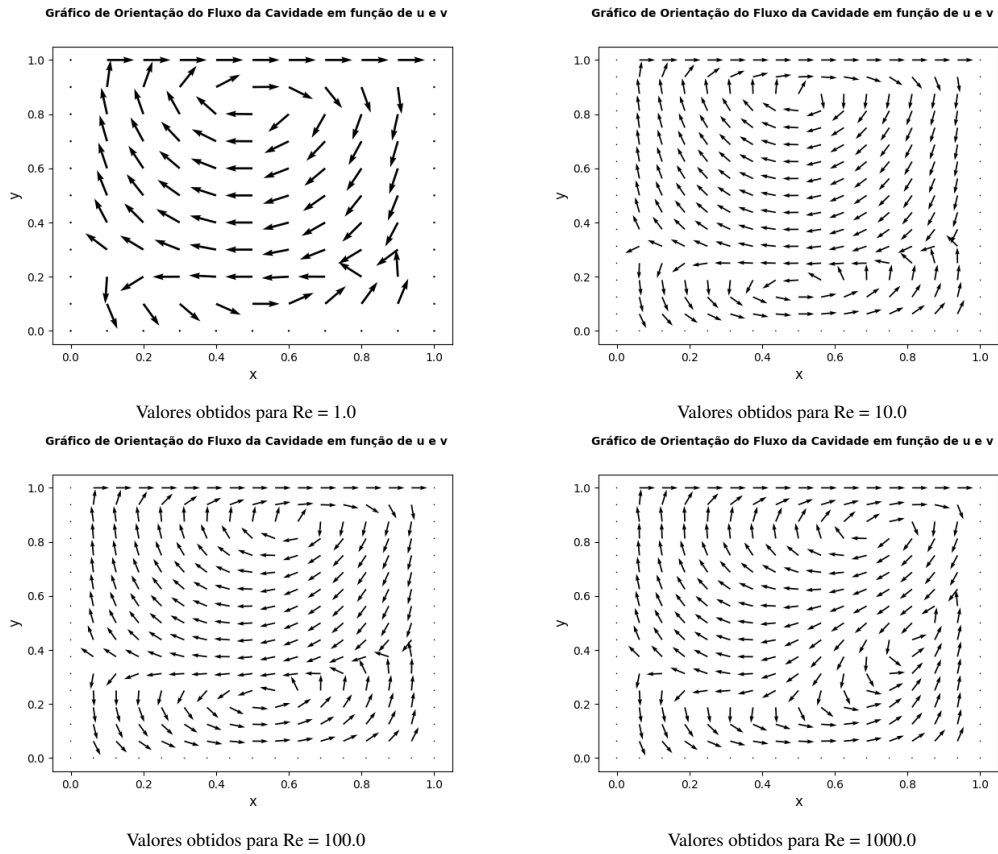


Figure 11. Gráficos de velocidade u e v para a cavity retangular 1x2

De modo análogo ao obtido para a Cavity Retangular 2X1, para 12, percebe-se um acúmulo da pressão na extremidade superior da Cavity, o que causa a repartição do fluxo em dois conforme observado para $Re \geq 1.0$.

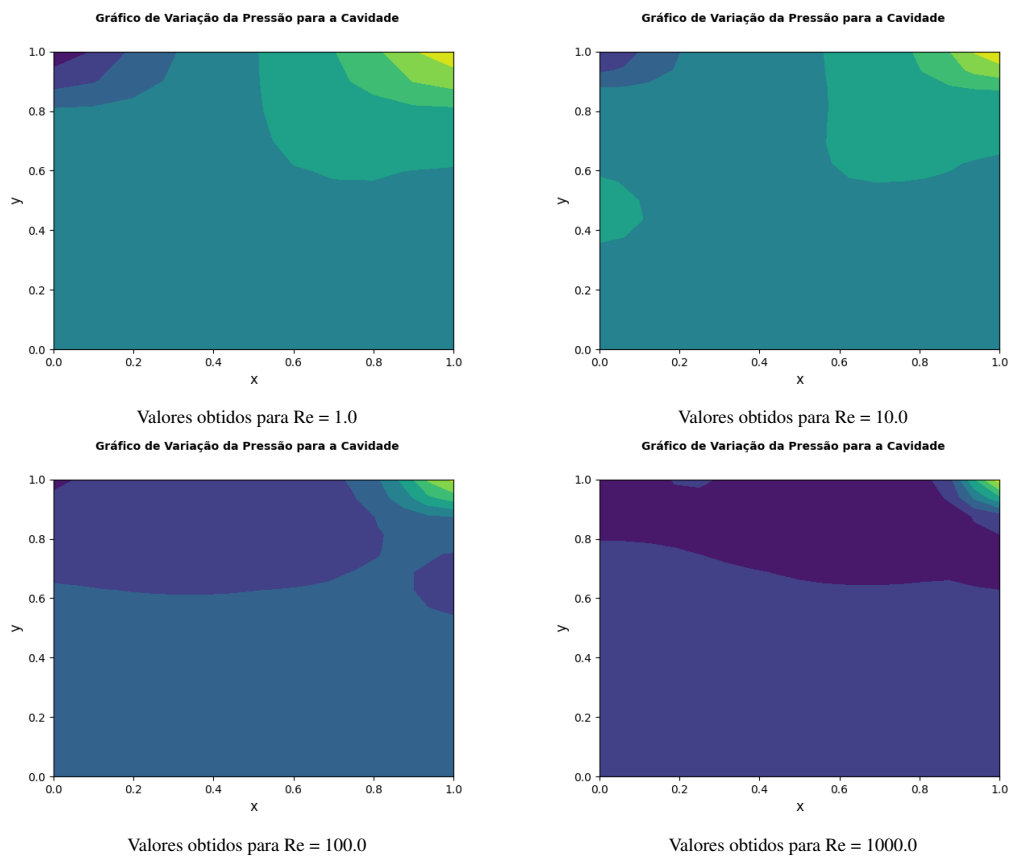


Figure 12. Gráficos de pressão para a cavidade retangular 1x2

A função corrente (Ψ), 13, de modo análogo ao percebido para a Cavityde Retangular 2X1, percebe-se a tendência de divisão do fluxo em dois em relação ao eixo x para escoamentos de Número de Reynolds maior ou igual a 1.0, cujo centro da circulação encontra-se levemente à esquerda.

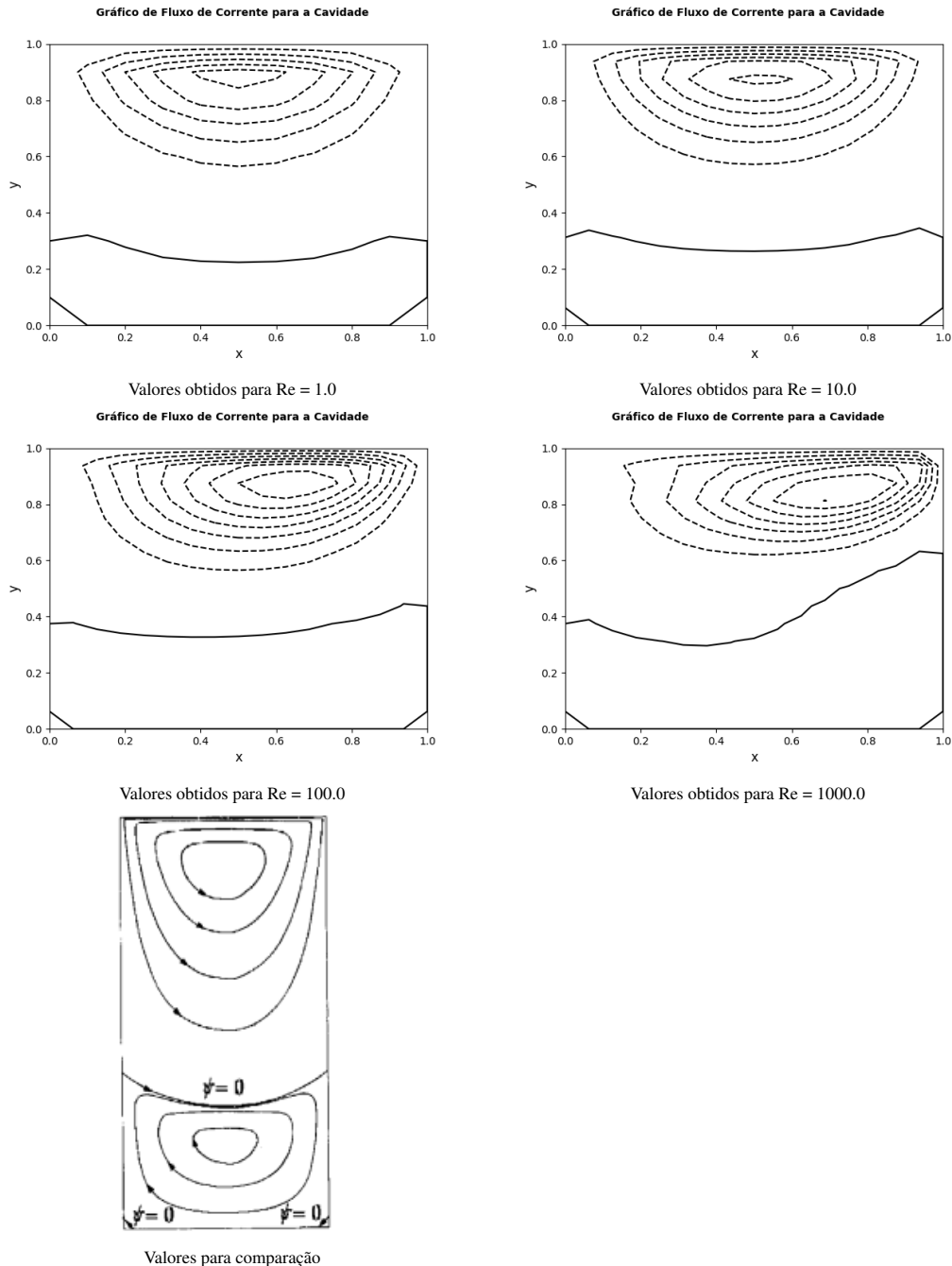


Figure 13. Gráficos de Função Corrente (Ψ) para a cavidade retangular 1x2

5. Conclusão

O problema da Cavidade Cisalhante Bidimensional representa, portanto, um problema clássico para a Mecânica dos Fluidos cuja solução para regime laminar pode ser deduzida e aproximada numericamente de acordo com o a Equação de Navier-Stokes, 4. Para um maior número de Reynolds ($Re = 1000$), entretanto, a metodologia tomada não se demonstrou adequada de modo a apresentar discrepâncias significativas em relação aos resultados esperados na literatura. Para menores números de Reynolds, o escoamento para o problema tomado apresenta apenas a circulação de fluido aproximadamente simétrica pela cavidade. Conforme o número de Reynolds aumenta, entretanto, observa-se o surgimento de novas zonas de circulação de fluido, o que demonstra o surgimento de uma assimetria do problema e a concentração do campo de pressão ao redor de sua extremidade superior esquerdo.

Cavidades Retangulares em regime laminar comportam-se como Cavidades Quadradas, entretanto, conforme o escoamento torna-se mais turbulento, o fluxo principal de fluido é repartido em dois na direção da maior dimensão do retângulo, de modo a se obter dois fluxos opostos quando tomados em relação a outros eixos.

6. Agradecimentos

Ao professor Adriano Possebon Rosa, aos demais alunos e ao Monitor Felipe Andrade da turma de Métodos Numéricos em Termofluidos do Semestre 2021/1 por tornarem esse Artigo possível e me ajudarem com a matéria.

7. Referências

- J.Kim and P.Moin, 1985. “Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations”. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, Vol. 59, pp. 308–323.
- Marchi, C.H., Suero, R. and Araki, L.K., 2009. “The lid-driven square cavity flow: Numerical solution with a 1024 x 1024 grid”. *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. Vol.XXXI, No.3, pp. 186–198.
- Rosa, A.P., 2022. “Roteiro para o trabalho 5: Resolvendo o problema do escoamento de um fluido em uma cavidade com o método de projeção”. https://aprender3.unb.br/pluginfile.php/2182451/mod_resource/content/7/MNT_RoteiroTrabalho5.pdf.
- Shankar, P.N. and Deshpande, M.D., 2000. “Fluid mechanics in the driven cavity”. *Annu. Rev. Fluid Mech*, Vol. 32, pp. 93–136.
- Çengel, Y.A. and Cimbala, J.M., 2012. *Mecânica dos Fluidos Fundamentos e Aplicações*. AMGH Editora Ltda., São Paulo, 2nd edition.